ФГБОУВО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлениям 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (профили: «Электромеханика», «Электропривод и автоматика», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика робототехнических систем»), 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль: «Управление и информатика в технических системах»), очной формы обучения

Часть 1

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов. Е.М. Васильев

Sam- rab1.PDF 0,92 Мбайт 30.09.2016 уч.-изд. 3.5 л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет »

(Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлениям 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (профили: «Электромеханика», «Электропривод и автоматика», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика робототехнических систем»), 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль: «Управление и информатика в технических системах»), очной формы обучения

Часть 1

Воронеж 2016

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, доц. Е.М. Васильев.

УДК 517

Методические указания по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлениям 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (профили: «Электромеханика», «Электропривод и автоматика», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика робототехнических систем»), 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль: «Управление и информатика в технических системах»), очной формы обучения.Ч.1/ ФГБОУ ВО«Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Е.М. Васильев. Воронеж, 2016. 55 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены в эдекронном виде и содержатся в файле «Sam- rab 1.PDF»

Ил. 8. Библиогр.: 16 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.П. Дубровская
Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Высшая математика для будущих инженеров данного профиля является не только основой фундаментальной подготовки, но и обязательной базой для изучения остальных общетехнических специальных дисциплин и успешности всей последующей практической деятельности. И главное при этом, чтобы с самого начала и на всем протяжении курса изучение высшей математики проходило студентами целенаправленно во взаимосвязи с другими дисциплинами и ориентацией на конкретное практическое приложение изученного материала. Это возможно только при условии эффективного сочетания обязательных учебных занятий и продуктивной самостоятельной работы студентов.

При организации изучения курса высшей математики ряд тем выделяется студентам на самостоятельное изучение, при этом предусматриваются консультации и руководство самостоятельной работой студентов со стороны преподавателей и систематическая, в соответствии с установленным графиком, отчетность студентов по этой работе.

В настоящих методических указаниях приводятся темы курса, выносимые на самостоятельное изучение, необходимая литература, а также контрольные вопросы и задания для оценки усвоения изучаемого материала и формы отчетности.

ЗАНЯТИЕ № 1

МЕТОД ГАУССА ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА

Литература: [3], с. 23-35; [5], с. 77-87; [4], с. 50-54; [7], с. 145-146.; [15], с. 21-28, [16], с. 23-28.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит метод последовательного исключения неизвестных?
2. Какая матрица называется расширенной матрицей системы?
3. Какие преобразования матрицы системы называются элементарными?
4. Составить алгоритм решения линейных систем методом Гаусса.
5. Как исследовать систему линейных уравнений с помощью метода Гаусса (в матричном виде)?
6. В чем состоит отличие метода Жордана-Гаусса от метода Гаусса?
7. Составить алгоритм решения линейных систем методом Жордана-Гаусса.
8. В каких инженерных задачах используют метод Гаусса?

Примеры решения задач

Пример 1. Методом Гаусса исследовать совместность и найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$$

Решение. Меняем местами первое и второе уравнения и записываем расширенную матрицу системы. Затем под 1 в первом столбце делаем нули. Для этого первую строку умножаем на –6 и прибавляем ко второй строке (складываются соответствующие элементы), первую строку умножаем на 7 и прибавляем к третьей строке, первую строку умножаем на 3 и прибавляем к четвертой строке:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right) \sim$$

Делаем нули под –15 во втором столбце. Для этого прибавляем вторую строку к третьей и четвертой. Так как третья и четвертая строки состоят из нулей, то вычеркиваем их:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \end{array}\right)$$

.

Таким образом, расширенная матрица системы приведена к треугольному виду. Производим обратный ход метода Гаусса. Записываем систему уравнений с новыми коэффициентами, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15 \end{cases}.$$

Будем считать базисными переменными x_1 и x_2, а свободными x_3 и x_4. Из второго уравнения выражаем x_2:

$$x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4,$$

подставляем в первое уравнение и выражаем x_1:

$$x_1 = 1 - 2\left(1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4\right) - 2x_3 - 3x_4 = -1 - \frac{7}{15}x_4 .$$

Обозначая свободные переменные $x_3 = c_1$ и $x_4 = c_2$, получаем общее решение системы в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{7}{15}c_2 \\ 1 - c_1 - \frac{19}{15}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Методом Гаусса исследовать совместность и найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 \quad - \quad 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение. Записываем расширенную матрицу системы. Затем умножаем первую строку на –1 и прибавляем ко второй, умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim$$

Умножаем вторую строку на –2 и прибавляем к третьей:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Таким образом, расширенная матрица системы приведена к треугольному виду. Производим обратный ход метода

Гаусса. Записываем систему уравнений с новыми коэффициентами, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ \quad x_2 - 2x_3 = 4 \\ \qquad 0 = -13 \end{cases}.$$

Замечаем, что третье уравнение системы не имеет решений, поэтому система несовместна (не имеет решений).

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи №№ 3.190-3.194, 3.198-3.203, 3.208-3.212, 3.214, 3.240, 3.244 [7], упр. с. 36 [15].

Составить программу решения системы линейных уравнений на ЭВМ (3.265) и решить задачи 3.266-3.268 [7].

Форма отчетности: краткий реферат с решением задач, который представляется по ходу изучения программы курса высшей математики. Решения задач на ЭВМ (программы и результаты счета) представляются по ходу изучения курса "Алгоритмические языки и программирование".

ЗАНЯТИЕ № 2

МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ. РАНГ МАТРИЦЫ

Литература: [3], с. 16-18, 86-92; [5], с. 34-45, 89-96; [15], с. 3-14 , [16], с. 21-22.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется матрицей, размерностью матрицы?
2. Какие операции можно выполнять с матрицами?
3. Какие матрицы можно складывать, перемножать?
4. Что такое ранг матрицы?
5. Как находится ранг матрицы методом окаймляющих миноров, методом элементарных преобразований?
6. Какие методы решения инженерных задач используют матрицы ?

7. Как с помощью ранга матрицы выяснить совместность системы?

8. Объяснить теорему Кронекера-Капелли.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведения матриц AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

Решение. $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7 & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3\neq2$).

Пример 3. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований.

Решение. Приводим матрицу к треугольному виду:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{array}{c} \textit{меняем местами} \\ \textit{первую и вторую строки} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{array}{c} \textit{умножаем первую строку на } -5 \\ \textit{и прибавляем к третьей} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & -10 & -30 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{array}{c} \textit{умножаем вторую строку на } -10 \\ \textit{и прибавляем к третьей} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{array}{c} \textit{вычеркиваем} \\ \textit{нулевую} \\ \textit{строку} \end{array} \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Так как число ненулевых строк равно 2, то и ранг матрицы равен 2.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 3.76, 3.81, 3.83, 3.85, 3.92, 3.159-3.168; [15], упр. с. 14-17.

Составить программу перемножения двух матриц: [7], 3.247.

Составить программу транспонирования квадратной матрицы: [7], 3.248.

Форма отчетности: краткий реферат с программой.

ЗАНЯТИЕ № 3

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Литература: [1], с. 267-269; [4], с. 45-50; [7], с. 142-143; [15], с. 30-34, [16],с. 36-39.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая система линейных уравнений называется однородной?
2. Может ли однородная система быть несовместной?
3. Каковы необходимые и достаточные условия наличия у однородной системы ненулевых решений (с доказательством)?
4. Что называется фундаментальной системой решений однородной системы?
5. Как найти общее решение неоднородной системы, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=0 \\ -7x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ -3x_1+9x_2+9x_3+10x_4=0 \end{cases}$$

Решение. Приведем матрицу системы к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \square \left| \begin{array}{c} \textit{умножим первое уравнение} \\ \textit{на } -6,\ 7,\ 3 \textit{ и прибавим} \\ \textit{последовательно} \\ \textit{ко } 2,\ 3,\ 4 \textit{ уравнению} \end{array} \right| \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & -19 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \end{pmatrix} \square \left| \begin{array}{c} \textit{умножим второе уравнение} \\ \textit{на } 1 \\ \textit{и прибавим последовательно} \\ \textit{к } 3,\ 4 \textit{ уравнению} \end{array} \right| \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$

Таким образом матрица коэффициентов имеет ранг $r = 2$. Записываем систему уравнений с новыми коэффициентами

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ \quad 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases}.$$

Так как ранг системы $r = 2 < n = 4$ - числа переменных, то система имеет бесконечное множество решений. В качестве главных переменных можно выбрать x_1 и x_2, соответствующие столбцам ненулевого минора $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$; в качестве свободных переменных – x_3 и x_4. Из второго уравнения системы получим $x_2 = -x_3 - \dfrac{19}{15} x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим

$$x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2x_3 + \frac{38}{15}x_4 - 2x_3 - 3x_4 = -\frac{7}{15}x_4 .$$

Обозначаем свободные переменные через произвольные постоянные $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ и записываем

$$x_1 = -\frac{7}{15}c_2, \qquad x_2 = -c_1 - \frac{19}{15}c_2 .$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{15}c_2 \\ -c_1 - \frac{19}{15}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot c_1 - \frac{7}{15}c_2 \\ -c_1 - \frac{19}{15}c_2 \\ c_1 + 0 \cdot c_2 \\ 0 \cdot c_1 + c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{7}{15} \\ -\frac{19}{15} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -19 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы решений общее решение может быть записано в виде $X = c_1 E_1 + \bar{c}_2 E_2$, где $\bar{c}_2 = c_2/15$.

Пример 2. Найти общее решение неоднородной системы $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2 \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

Решение. Замечаем, что частным решением данной неоднородной системы является $X_{чн} = \left(-1, -2, 1, 2\right)$.

Приведем матрицу системы к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 8 & -5 & -6 & 3 \\ 12 & -7 & -9 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, однородная система примет вид

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение этой системы имеет вид $x_4 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = \dfrac{3}{4}x_3$. Обозначая $x_3 = 4c$, получим общее решение однородной системы $X_0 = \begin{pmatrix} 3c \\ 0 \\ 4c \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение исходной неоднородной системы будет иметь вид

$$X = X_0 + X_{чн} = c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-1 \\ -2 \\ 4c+1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 3c-1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4c+1$, $x_4 = 2$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 3.225-3.232; 3.236-3.239; [15] упр. с. 34-36.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 4

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Литература: [1], с. 190-195; с. 25-31, [16],с. 50 -52.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение смешанного произведения векторов.
2. Каковы свойства смешанного произведения векторов?
3. Каково необходимое и достаточное условие компланарности векторов?
4. Как выражаются векторное и смешанное произведения через координаты перемножаемых векторов (с доказательством)?
5. Каков геометрический смысл смешанного произведения векторов?
6. Дайте определение векторного произведения.
7. Как находится двойное векторное произведение?

Примеры решения задач

Пример 1. Даны вершины пирамиды: $A(5,1,-4)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,3,-4)$, $D(2,2,2)$. Найти длину высоты h, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение. Так как объем пирамиды есть $V=\frac{1}{3}Sh$, то $h=\frac{3V}{S}$, где S – площадь основания ABC.

Находим V как $\dfrac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Определяем координаты этих векторов: $\overline{AB}=(-4,1,3)$, $\overline{AC}=(-2,2,0)$, $\overline{AD}=(-3,1,6)$ и вычисляем объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 6\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|-24\right|=4.$$

Находим площадь основания ABC:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-6\overline{i}-6\overline{j}-6\overline{k}\right|=3\sqrt{3}.$$

Следовательно, $h=\dfrac{3\cdot 4}{3\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2. Даны векторы $\overline{a}=(2,-3,1)$, $\overline{b}=(-3,1,2)$ и $\overline{c}=(1,2,3)$. Вычислить $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c}$.

Решение. 1-й способ. Вычисляем сначала векторное произведение, стоящее в скобках:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-7\overline{i}-7\overline{j}-7\overline{k}.$$

Полученный результат умножаем векторно на $\overline{c}$:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -7 & -7 & -7\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-7\overline{i}+14\overline{j}-7\overline{k}.$$

2-й способ. Воспользуемся формулой:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c}=\overline{b}\left(\overline{a}\cdot\overline{c}\right)-\overline{a}\left(\overline{b}\cdot\overline{c}\right)=\overline{b}\left(2-6+3\right)-\overline{a}\left(-3+2+6\right)=$$

$$=-\overline{b}-5\overline{a}=\left(3-10,-1+15,-2-5\right)=\left(-7,14,-7\right).$$

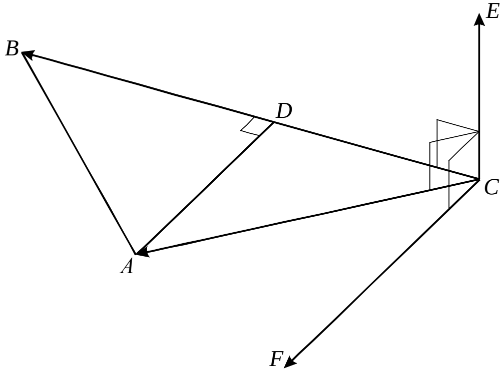

Рис. 1

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 871, 873, 874 (1,2), 875, 876, 877, 878, 879, 881.

Указание к решению задачи № 881. Вектор $\overline{CE}$ перпендикулярен векторам $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$, а вектор $\overline{CF}$, параллельный высоте AD, перпендикулярен векторам $\overline{CE}$ и $\overline{CB}$ (рис. 1).

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 5

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Литература: [3], с. 80-114, 121-135; [8] с. 166-191; [15], с. 37-73, [16],с. 29-36.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение линейного пространства. Приведите примеры.

2. Что такое базис линейного пространства и его связь с размерностью линейного пространства?

3. Как определяется матрица перехода между старым и новым базисами?

4. Расскажите о линейном операторе.

5. Как выглядит матрица линейного преобразования в новом базисе?

6. Дайте определение собственных значений и собственных векторов.

Примеры решения задач

Пример 1. Является ли множество $\mathrm{M}_{m,n}$ всех матриц размера $m\times n$ линейным пространством?

Решение. Проверим выполнение условий, пользуясь операциями над матрицами:

1) $A+B=C$, где A, B и C – матрицы размера $m\times n$. Поэтому первое условие выполняется.

2) $\lambda A=B$, где A и B – матрицы размера $m\times n$, а λ – произвольное число. Поэтому второе условие выполняется.

3) Операции сложения матриц и умножения матрицы на число удовлетворяют следующим свойствам:

а) $A+B=B+A$;

б) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

в) $A+0=A$, где 0 – нулевая матрица;

г) $A+B=0 \;\Rightarrow\; B=-A$;

д) $1\cdot A=A$;

е) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$, где α и β – произвольные числа;

ж) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

з) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

Таким образом, множество $\mathrm{M}_{m,n}$ всех матриц размера $m\times n$ является линейным пространством.

Пример 2. Найти координаты геометрического вектора $\overline{x}=-\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$ в новом базисе $\mathcal{B}'=(\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3')$, где $\overline{e}_1'=\overline{i}+\overline{j}$, $\overline{e}_2'=\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{e}_3'=\overline{i}+\overline{k}$.

Решение. Выпишем координаты векторов $\overline{e}_1'$, $\overline{e}_2'$ и $\overline{e}_3'$ в исходном базисе $\mathcal{B}=(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$:

$$E_1'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad E_2'=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad E_3'=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Составляем столбцы матрицы перехода T от старого базиса к новому из записанных выше координат векторов и получаем

$$T=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Используя эту матрицу, получаем координаты вектора $\overline{x}$ в новом базисе:

$$X'=T^{-1}X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\overline{x}=2\overline{e}_2'-\overline{e}_3'$.

Пример 3.В $\mathcal{L}_3$ задан линейный оператор, матрица которого в базисе $\mathcal{B}=(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $\mathcal{B}' = \left(\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\right) = = \left(\overline{e}_1, \overline{e}_1 + \overline{e}_2, \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3\right)$.

Решение. Выпишем координаты векторов $\overline{e}_1'$, $\overline{e}_2'$ и $\overline{e}_3'$ в исходном базисе:

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем столбцы матрицы перехода T от старого базиса к новому из записанных выше координат векторов и получаем

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора в новом базисе:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -8 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [8], 1281, 1311, 1446, 1469; [15], упр. с. 51-55, с. 68-71, с. 83.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 6

СИММЕТРИЧНЫЕ МАТРИЦЫ. ПРИВЕДЕНИЕ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Литература: [2], с. 213-219; [5], с. 102-111, 119-122; [7], с. 181-182; [15], с. 93-97.[16],с. 41-45.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая матрица называется симметричной?

2. Что называется собственным значением и собственным вектором матрицы?

3. Как находятся собственные значения и собственные векторы?

4. В каком базисе симметричная матрица имеет диагональный вид (теорема с доказательством)?

5. При изучении каких задач используются симметричные матрицы и процесс их диагонализации?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного своей матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение. Записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0.$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1=\lambda_2=1$ и $\lambda_3=-1$.

Составляем систему для определения координат собственных векторов:

$$\begin{cases} (7-\lambda)x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 + (-19-\lambda)x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + (13-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Подставляем в систему $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}.$$

Разделив первое уравнение на 6, второе на 10, а третье на 12, замечаем, что эта система эквивалентна одному уравнению

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Следовательно, система имеет два линейно независимых решения, соответствующих координатам двух собственных векторов, например:

$$\bar{a}_1 = (1,\ 0,\ -1) \quad \text{и} \quad \bar{a}_2 = (0,\ 1,\ 2).$$

Подставим теперь в систему $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}.$$

Прибавив первое уравнение ко второму, замечаем, что эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 6x_3 + 3x_3 = 0 \\ 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Частному решению этой системы соответствует собственный вектор $\bar{a}_3 = (3,\ 5,\ 6)$.

Найденные собственные векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ образуют базис, в котором матрица A линейного оператора имеет следующий диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$, определяются равенством $\bar{a}_{(\lambda=1)} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2$, где α и β – произвольные числа не равные одновременно нулю. Все собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = -1$, определяются равенством $\bar{a}_{(\lambda=-1)} = \gamma\bar{a}_3$, где $\gamma \neq 0$ – произвольное число.

Пример 2. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором базисе симметричной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10) = 0.$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1 = 10$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Составляем систему для определения координат собственных векторов:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Подставляем в систему $\lambda_1 = 10$:

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Частному решению этой системы соответствует собственный вектор $\bar{a}_1 = (1,\ 2,\ -2)$. Подставляем в систему $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

Частному решению этой системы соответствует собственный вектор $\bar{a}_2 = (2,\ 0,\ 1)$. Заметим, что $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0 \Rightarrow \bar{a}_1 \perp \bar{a}_2$.
Третий собственный вектор находим как векторное произведение: $\bar{a}_3 = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = (2,\ -5,\ -4)$.

Ортонормированный базис будут составлять векторы:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right), \qquad \bar{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\bar{e}_3 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\ -\frac{5}{3\sqrt{5}},\ -\frac{4}{3\sqrt{5}}\right).$$

Матрица A линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 4.134, 4.136, 4.172-4.175, 4.184.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 7

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ.РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ.РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ.УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ.

Литература: [1], с. 51-60; [2], с. 59-66, [16], с. 41-45.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите общее уравнение прямой и частные случаи этого уравнения.

2.напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.

3. Как вычисляется угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки?

4. Как можно преобразовать общее уравнение прямой в нормальное уравнение?

5. Как находится угол между двумя прямыми на плоскости?

6. Напишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.

7. По какой формуле определяется расстояние от точки до данной прямой на плоскости?

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение прямой 4x-3y+12=0 представить в различных видах: с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения.

Решение. Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим данное уравнение относительно y , получим $y = \frac{4}{3}x + 4$ - это уравнение прямой с угловым коэффициентом $k\frac{4}{3}$, b = 4 – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Для получения уравнения прямой в отрезках перепишем его в виде $4x-3y=-12$ и разделим обе части уравнения на -12, в результате получим $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$ - уравнение прямой в отрезках, где a = -3,b = 4 – координаты пересечения прямой с осью Ox и Oy соответственно.

Приведём исходное уравнение к нормальному виду $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0.$. Для этого умножим обе части данного уравнения на нормирующий множитель $\mu=-\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{5}$ (μ<0, так как C=12>0). В итоге получим нормальное уравнение $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$, где cos $\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $p=\frac{12}{5}$- расстояние от точки O(0, 0) до прямой.

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A(0 , 2) и B(-3, 7).

Решение. Используем уравнение. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.. Полагая в нем $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $y_1 = 2$, $y_2 = 7$, получим $\frac{y-2}{7-2}=\frac{x-0}{-3-0}$, т.е. -3y + 6 = 5x или 5x + 3y – 6 = 0.

Пример 3. Найти угол между прямыми $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$.

Решение. Воспользуемся формулой $tg\varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|$, подставив в нее $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $A_2 = 5$, $B_2 = -1$, получим $tg\varphi = \left| \frac{2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-3)}{2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-1)} \right| = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Пример 4. Через точку пересечения прямых 3x-2y+5=0 и x+2y-9=0 проведена прямая, параллельная прямой 2x+y+6=0. Составить ее уравнение.

Решение. Найдем сначала точку M пересечения данных прямых. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Получаем M(1,4) – точка пересечения этих прямых. Угловой коэффициент прямой 2x+y+6=0 $k_1 = -2$, следовательно угловой коэффициент прямой, параллельно данной $k_2 = k_1 = -2$. Запишем уравнение искомой прямой. По формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$ получаем y-4=-2(x-1), т.е. 2x+y-6=0.

Пример 5. Найти расстояние между параллельными прямыми 3x+4y-20=0 и 6x+8y+5=0.

Решение. Возьмём на первой прямой произвольную точку A. Пусть, например, x=0, тогда y=5, т.е. A(0,5).

По формуле $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$. найдем расстояние от точки до второй прямой, получим:

$$d = \left| \frac{6 \cdot 0 + 8 \cdot 5 + 5}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \right| = \frac{45}{10} = 4{,}5.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) Доказать, что условие принадлежности трех точек M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) и M_3 (x_3, y_3) одной прямой можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2) Решить задачи [6], №№ 215, 223, 227, 234, 266, 312, 322.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКАК КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Литература: [1], с. 129-139; [15], с. 106-110, [16],с. 45-48, с. 60-61.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой вид имеет общее уравнение кривой второго порядка?

2. Какой вид имеют канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы, параболы?

3. Запишите преобразование координат при повороте системы координат на угол α.

4. Запишите преобразование координат при параллельном переносе системы координат.

5. Каков алгоритм приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью преобразования системы координат?

Примеры решения задач

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0,$$

изобразить на чертеже оси координатных систем и геометрический образ, определяемый данным уравнением.

Решение. Записываем формулы преобразования координат, соответствующего повороту осей на угол α

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

и подставляем их в исходное уравнение. После перегруппировки слагаемых получаем

$$x'^2\left(29\cos^2\alpha - 24\cos\alpha\sin\alpha + 36\sin^2\alpha\right) +$$

$$+y'^2\left(29\sin^2\alpha + 24\sin\alpha\cos\alpha + 36\cos^2\alpha\right) +$$

$$+x'y'\left(-24\cos^2\alpha + 24\sin^2\alpha + 14\sin\alpha\cos\alpha\right) +$$

$$+x'\left(82\cos\alpha - 96\sin\alpha\right) - y'\left(82\sin\alpha + 96\cos\alpha\right) - 91 = 0.$$

Находим угол поворота α из условия равенства нулю коэффициента при $x'y'$, т.е.

$$12\sin^2\alpha + 7\sin\alpha\cos\alpha - 12\cos^2\alpha = 0.$$

Разделив это уравнение на $\cos^2\alpha$, получаем квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$. Решая его, находим

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{3}{4}.$$

Выбираем значение $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} \approx 37^\circ$. Этому значению соответствуют $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Подставляем их в полученное выше уравнение и выделяем полные квадраты. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\left(x' + 1/5\right)^2}{9} + \frac{\left(y - 7/5\right)^2}{4} = 1.$$

Производим замену переменных, соответствующую параллельному переносу осей координат x' и y': $\tilde{x} = x' + \frac{1}{5}$, $\tilde{y} = y' - \frac{7}{5}$. Таким образом исходное уравнение принимает вид

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $a = 3$ и $b = 2$ (рис. 2).

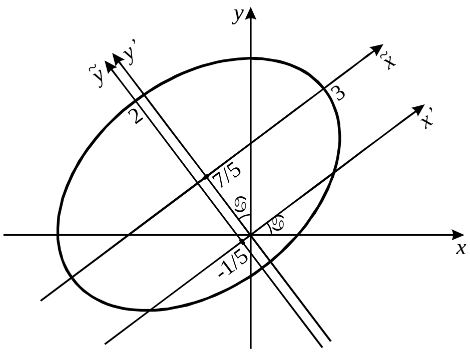

Рис. 2

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 676(1-5), 693(1-3); [15], упр. с. 114.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 9

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Литература: [3], с. 157-164; [1], с. 229-242, [16],с. 67-76..

Контрольные вопросы и задания

1. Классификация поверхностей второго порядка. Какие канонические уравнения и вид имеют эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды?

2. Как записать уравнение сферы радиуса R с центром в точке $(a,\ b,\ c)$? Как связано оно с уравнением эллипсоида?

3. Какие канонические уравнения и вид имеют эллиптический и гиперболический параболоиды?

4. Какие канонические уравнения и вид имеют цилиндрические поверхности?

5. Какое каноническое уравнение и вид имеет конус второго порядка?

6. Как определяется вид поверхности методом параллельных сечений?

Примеры решения задач

Пример. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением $x^2+2yz=1$.

Решение.

1) В сечении поверхности плоскостью $z=0$ имеем две параллельные прямые $x=\pm 1$.

2) В сечении поверхности плоскостями $z=z_0>0$ имеем семейство парабол $y=\frac{1}{2z_0}-\frac{x^2}{2z_0}$, вершины которых приближаются к оси Oz при увеличении z_0.

3) В сечении поверхности плоскостями $z=z_0<0$ имеем семейство парабол $y=-\frac{1}{2|z_0|}+\frac{x^2}{2|z_0|}$, вершины которых приближаются к оси Oz при увеличении $|z_0|$.

4) В сечении поверхности плоскостью $y=0$ имеем две параллельные прямые $x=\pm 1$.

5) В сечении поверхности плоскостями $y=y_0>0$ имеем семейство парабол $z=\frac{1}{2y_0}-\frac{x^2}{2y_0}$, вершины которых приближаются к оси Oy при увеличении y_0.

6) В сечении поверхности плоскостями $y=y_0<0$ имеем семейство парабол $z=-\frac{1}{2|y_0|}+\frac{x^2}{2|y_0|}$, вершины которых приближаются к оси Oy при увеличении $|y_0|$.

7) В сечении поверхности плоскостями $x=x_0$ имеем семейство гипербол $z=\frac{1-x_0^2}{2y}$ при $|x_0|<1$ и $z=-\frac{x_0^2-1}{2y}$ при $|x_0|>1$ (сопряженные гиперболы). В случае $|x_0|=1$ получается $z=0$, что совпадает с 1).

Замечаем симметричность сечений поверхности относительно прямой $\begin{cases} x=0 \\ z=-y \end{cases}$. Поэтому дальнейшее исследование проводим с учетом этого обстоятельства.

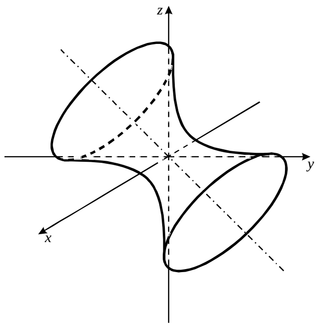

Рис. 3

8) В сечении поверхности плоскостями $z=-y+z_0$ имеем семейство гипербол $x^2-2\left(y-\frac{z_0}{2}\right)^2=1-\frac{z_0^2}{2}>0$ при $|z_0|<\sqrt{2}$ и $2\left(y-\frac{z_0}{2}\right)^2-x^2=\frac{z_0^2}{2}-1>0$ при $|z_0|>\sqrt{2}$ (сопряженные гиперболы). В случае $|z_0|=\sqrt{2}$ получаем две пересекающиеся прямые $x=\pm\sqrt{2}\left(y-\frac{z_0}{2}\right)$.

9) Сечения поверхности плоскостями $z=y+z_0$ имеют проекции на плоскость xOy, описываемые уравнениями $x^2+2\left(y+\frac{z_0}{2}\right)^2=1+\frac{z_0^2}{2}$, т.е. эллипсы, у которых полуоси увеличиваются с увеличением $|z_0|$. Отношение полуосей этих эллипсов равно $\sqrt{2}$, а плоскости $z=y+z_0$ составляют угол 45° с плоскостью xOy, поэтому сами сечения имеют форму окружностей.Выполненное исследование позволяет теперь достаточно детально изобразить заданную поверхность (рис. 3). Этой поверхностью является однополостный гиперболоид, ось которого – прямая $\begin{cases} x=0 \\ z=-y \end{cases}$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Методом сечений исследовать форму и построить поверхности, заданные уравнениями:1) $z=xy$; 2) $z^2=xy$.

Форма отчетности: устный опрос. При отчете по теме занятия уметь определять вид поверхности 2-го порядка по виду канонического уравнения и строить поверхность методом параллельных сечений.

ЗАНЯТИЕ №10

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА, ГРАФИКИ

Литература: [12], с. 19-28, 89-96; [11], с. 137-139; [7], с. 19, 23-24, [16],с. 89-99.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение функции. Каковы способы ее задания?

2. Что такое график функции? Каковы способы построения графика функций?

3. Как представляется чаще всего функциональная зависимость величины в инженерных приложениях?

4. Какие функции называются четными, нечетными, периодическими? Каковы особенности их графиков?

5. Как строится график функции по методу "Деформации сдвига"?

6. В какой последовательности следует выполнять построение графика функции $y = k \cdot f\left(wx - a\right) + b$?

7. В каком соотношении находятся области определения и изменения взаимно обратных функций? Как строятся графики обратных функций?

8. Каковы области определения и изменения обратных тригонометрических функций? Каковы их графики?

9. Что называется абсолютной величиной (модулем) действительного числа?

10. Каковы особенности построения графиков функций, содержащих в своем задании знак модуля?

Примеры решения задач

Построить графики следующих функций:

а) $y = \log_2\left(x-3\right)$; б) $y = \log_2\left(4x-12\right)$;

в) $y=2\log_2(x-3)$; г) $y=\left|\log_2(x-3)\right|$;

д) $y=\log_2|x-3|$.

Решение.

а)График функции $y=\log_2(x-3)$ получается из графика $y=\log_2 x$ сдвигом на три единицы вправо (рис. 4,а).

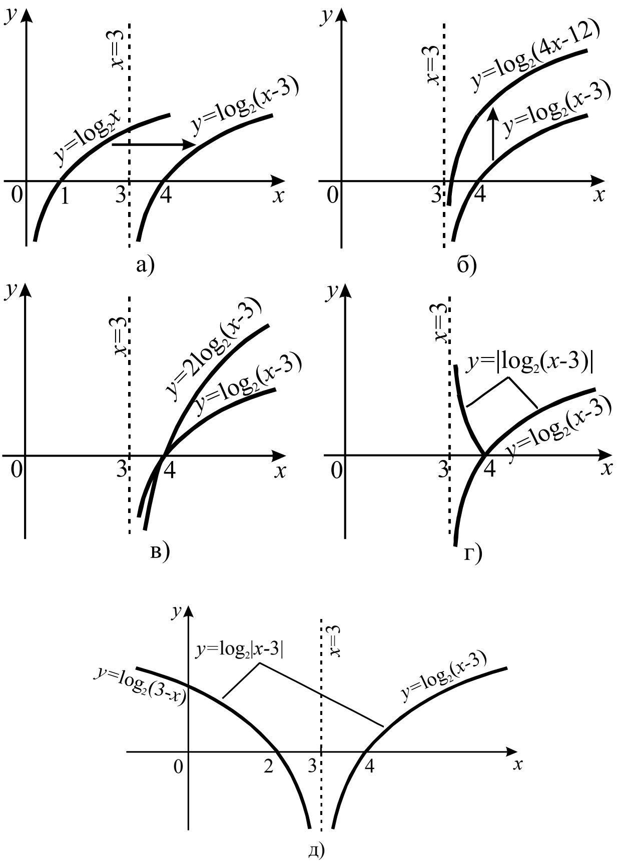

Рис. 4

б) График функции

$$\log_2(4x-12)=\log_2(4(x-3))=2+\log_2(x-3)$$

получается из предыдущего сжатием вдоль оси Ox в 4 раза относительно вертикальной прямой $x=3$ или сдвигом на две единицы вверх (рис. 4,б).

в) График функции $y=2\log_2(x-3)$ получается из графика $y=\log_2(x-3)$ растяжением вдоль оси Oy в два раза (рис. 4,в).

г) При построении графика функции $y=\left|\log_2(x-3)\right|$ участок кривой $y=\log_2(x-3)$, расположенный ниже оси Ox, отображается симметрично относительно этой оси (рис. 4,г).

д) График функции $y=\log_2|x-3|$ составляют две кривые: $y=\log_2(x-3)$ и симметричная ей относительно прямой $x=3$ кривая $y=\log_2(3-x)$ (рис. 4,д).

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 1.106-1.111, 1.141-1.143, 1.146-1.151, 1.186, 1.188, 1.204, 1.209; [13], 47, 48, 54, 59, 77, 113, 117 (6,9,14,16), 129, 138, 145.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 11
БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕЕИ ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА.РАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Литература: [12], с. 39-42, с. 59-60, [16],с. 101-102.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение бесконечно малой функции.

2. Докажите следующие теоремы о бесконечно малых функциях:

– об алгебраической сумме двух, трех и вообще определенного числа бесконечно малых;

– о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию;

– о частном от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля.

3. Какие бесконечно малые называются бесконечно малыми одного порядка?

4. Как определяется порядок одной бесконечно малой относительно другой?

5. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?

6. Как использовать эквивалентность бесконечно малых при вычислении пределов?

Примеры решения задач

Пример 1. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$ и $\beta(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ при $x\to 0$.

Решение. Вычисляем предел отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1\right)}=\left|\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\sim 1+\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3}}=\left|\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^{4/3}/3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^{2/3}}{2}=0.$$

Из полученного следует, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка чем $\beta(x)$.

Пример 2. Определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно x при $x \to 0$, если $\alpha(x) = \ln\left(1 - \sqrt{\sqrt{x} + 2} + \sqrt{2}\right)$.

Решение. При $x \to 0$ имеем

$$\ln\left(1 - \sqrt{\sqrt{x} + 2} + \sqrt{2}\right) \sim -\left(\sqrt{\sqrt{x} + 2} - \sqrt{2}\right) = \left| \begin{array}{c} \textit{умножаем и делим} \\ \textit{на сопряженное} \\ \textit{выражение} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{\sqrt{x}+2} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{x}+2} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{\sqrt{x}+2} + \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+2} + \sqrt{2}} \sim -\frac{x^{1/2}}{2\sqrt{2}}.$$

из полученного следует, что порядок малости $\alpha(x)$ относительно x при $x \to 0$ равен $\frac{1}{2}$.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(4x - \pi)}{e^{2x - \frac{\pi}{2}} - 1}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

Решение.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(4x - \pi)}{e^{2x - \frac{\pi}{2}} - 1} = \left| \begin{array}{c} \textit{делаем замену переменной} \\ y = x - \frac{\pi}{4}, \quad x = y + \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{tg}(4y)}{e^{2y} - 1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(4y) \sim 4y \\ e^{2y} - 1 \sim 2y \end{array} \right| = \lim_{y \to 0} \frac{4y}{2y} = 2.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^x$, используя эквивалентные бесконечно малые.

Решение. Обозначаем $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x = \left\{\infty^0\right\} = u$, а затем логарифмируем:

$$\ln u = \ln \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to 0} \ln(\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to 0} x \ln \operatorname{ctg} x = \{0\cdot\infty\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x \ln \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \ln \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \left|\sin x \sim x\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} x \ln \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \left|\sqrt{1-x^2} \sim 1-\frac{x^2}{2}\right| = \lim_{x\to 0} x \ln \frac{1-\frac{x^2}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\left(\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right) - \ln x\right) = \left|\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right) \sim -\frac{x^2}{2}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\left(-\frac{x^2}{2} - \ln x\right) = -\lim_{x\to 0} x \ln x = \{0\cdot\infty\} = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \textit{применяем} \\ \textit{правило} \\ \textit{Лопиталя} \end{matrix}\right| = -\lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = -\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0 .$$

Таким образом $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x = e^0 = 1$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [13], 210, 220, 245-251, 283-302, 344-348, 369-378, 396-401, 414.

Форма отчетности: конспект, устный опрос.

ЗАНЯТИЕ № 12

ПРОИЗВОДНАЯ.ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Литература: [12], с. 64-77, [16],с. 106-110.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение производной.
2. Каков физический смысл производной?
3. Что называется касательной к кривой?
4. В чем состоит геометрическое значение производной?
5. Докажите следующие теоремы:

– производная постоянной равна нулю;

– постоянный множитель можно выносить за знак производной;

– о производной суммы конечного числа дифференцируемых функций;

– о производной от произведения двух дифференцируемых функций;

– о производной частного от деления двух функций.

Примеры решения задач

В примерах 1-9 найти производную y' функции $y(x)$.

Пример 1. $y = \frac{0,1}{\sqrt[3]{x^2}} - 5,2\sqrt{x} = 0,1x^{-\frac{2}{3}} - 5,2x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования суммы и дифференцирования степенной функции.

$$y' = \left(0,1x^{-\frac{2}{3}} - 5,2x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(0,1x^{-\frac{2}{3}}\right)' - \left(5,2x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 0,1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{5}{3}} - 5,2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{15\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2,6}{\sqrt{x}}.$$

Пример 2. $y = \left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+x^3\right)$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования произведения, суммы и дифференцирования степенной функции.

$$y' = \left(\left(1+x^{1/2}\right)\left(1+x^3\right)\right)' = \left(1+x^{1/2}\right)'\left(1+x^3\right) + \left(1+x^{1/2}\right)\left(1+x^3\right)' =$$

$$= \left(1' + \left(x^{1/2}\right)'\right)\left(1+x^3\right) + \left(1+x^{1/2}\right)\left(1' + \left(x^3\right)'\right) =$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2}x^{-1/2}\right)\left(1+x^3\right) + \left(1+x^{1/2}\right)\left(0+3x^2\right) = \frac{1+x^3}{2\sqrt{x}} + 3x^2\left(1+\sqrt{x}\right).$$

Пример 3. $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования частного, суммы и дифференцирования тригонометрических функций.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}.$$

Пример 4. $y = \dfrac{\arccos x}{x}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования частного и дифференцирования обратных тригонометрических функций.

$$y' = \frac{(\arccos x)' x - \arccos x (x)'}{x^2} = \frac{-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} =$$

$$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2}.$$

Пример 5. $y = x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования произведения, обратных тригонометрических функций, сложной функции и степенной функции.

$$y' = \left(x \cdot \operatorname{arctg}(x-1)^{1/2}\right)' = x'\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + x\left(\operatorname{arctg}(x-1)^{1/2}\right)' =$$

$$= 1 \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + x\frac{1}{1+\left((x-1)^{1/2}\right)^2}\left((x-1)^{1/2}\right)' =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \frac{x}{1+(x-1)} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}(x-1)' =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} \cdot 1 = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Пример 6. $y = 2^{\frac{\ln x}{x}}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования показательной функции, сложной функции, частного и логарифмической функции.

$$y' = \left(2^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = 2^{\frac{\ln x}{x}}\ln 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = 2^{\frac{\ln x}{x}}\ln 2\frac{(\ln x)'\,x - \ln x\,(x)'}{x^2} =$$

$$= 2^{\frac{\ln x}{x}}\ln 2\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2^{\frac{\ln x}{x}}\ln 2\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Пример 7. $y = (\operatorname{tg} x)^{8x}$.

Решение. Прологарифмируем данную функцию и получим

$$\ln y = \ln\left(\operatorname{tg} x\right)^{8x} = 8x \cdot \ln \operatorname{tg} x .$$

Продифференцируем левую и правую части полученного равенства:

$$\left(\ln y\right)' = \left(8x \cdot \ln \operatorname{tg} x\right)' .$$

Применим к левой части правило дифференцирования сложной функции, а к правой – правила дифференцирования произведения, сложной функции, логарифмической функции и тригонометрических функций:

$$\frac{1}{y} y' = \left(8x\right)' \ln \operatorname{tg} x + 8x\left(\ln \operatorname{tg} x\right)' = 8\ln \operatorname{tg} x + 8x \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\operatorname{tg} x\right)' =$$

$$= 8\ln \operatorname{tg} x + 8x \cdot \operatorname{ctg} x \frac{1}{\cos^2 x} = 8\ln \operatorname{tg} x + \frac{8x}{\sin x \cos x} .$$

В итоге, выражая производную из этого равенства, получаем

$$y' = \left(8\ln \operatorname{tg} x + \frac{8x}{\sin x \cos x}\right) y = \left(8\ln \operatorname{tg} x + \frac{16x}{\sin 2x}\right)\left(\operatorname{tg} x\right)^{8x}$$

Пример 8. $y = 5^{xy+1}$.

Решение. В данном примере функция $y = y\left(x\right)$ задана неявно. Дифференцируем обе части равенства по x, рассматривая y как функцию от x, а также применяя правила дифференцирования показательной функции, сложной функции и произведения:

$$y' = \left(5^{xy+1}\right)' = 5^{xy+1}\ln 5\left(xy+1\right)' = 5^{xy+1}\ln 5\left(y + xy'\right) .$$

Выражаем производную y' из этого равенства:

$$y' - xy'5^{xy+1}\ln 5 = y5^{xy+1}\ln 5, \qquad y' = \frac{y5^{xy+1}\ln 5}{1 - x5^{xy+1}\ln 5} .$$

Пример 9. $\begin{cases} x = t\sin t^2 \\ y = 1 + t \end{cases}$.

Решение. Данная функция задана параметрически, поэтому

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1+t)'}{\left(t\sin t^2\right)'} = \frac{(1)' + (t)'}{(t)'\sin t^2 + t\left(\sin t^2\right)'} = \frac{1}{\sin t^2 + t\cos t^2\left(t^2\right)'} =$$

$$= \frac{1}{\sin t^2 + t\cos t^2\,(2t)} = \frac{1}{\sin t^2 + 2t^2\cos t^2}.$$

Пример 10. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y^2 = 4x$ в точке $M(1,\ 2)$.

Решение. Запишем уравнения касательной и нормали:

$$y_к = y_0 + y'(x_0)(x - x_0),$$

$$y_н = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

В данном примере координаты точки $x_0 = 1$ и $y_0 = 2$. Найдем $y'(x)$ как производную неявной функции: $\left(y^2\right)' = (4x)'$, т.е. $2yy' = 4$, откуда $y' = \dfrac{2}{y}$. Значит, $y'(x_0) = \dfrac{2}{y_0} = \dfrac{2}{2} = 1$. Отсюда получаем уравнение касательной в точке M

$$y_к = 2 + (x - 1), \quad \text{т.е.} \quad y_к = x + 1$$

и уравнение нормали в точке M

$$y_н = 2 - (x - 1), \quad \text{т.е.} \quad y_н = -x + 3.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [13], 466-468, 492-497, 539-546, 547, 659-572, 593-596, 631-640, 662, 754.

Форма отчета: конспект, устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 13

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Литература: [12], с. 144-154.16],с. 41-45, [16], с. 117-132.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется возрастающей и убывающей?
2. Как применяется производная для исследования функции на возрастание и убывание (докажите теорему)?
3. Дайте определение максимума и минимума функции в точке.
4. Сформулируйте и докажите необходимое условие существования экстремума.
5. Каковы достаточные условия существования экстремума функции в точке?
6. Какова схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной.

Примеры решения задач

Пример 1. Провести исследование и построить график функции $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$.

Решение.

1. Область определения функции находим из условия $x^2-x-2\neq 0$. Решая квадратное уравнение $x^2-x-2=0$, находим значения корней $x_1=-1$, $x_2=2$. Таким образом

$$x\in(-\infty,\,-1)\cup(-1,\,2)\cup(2,\,+\infty).$$

2. Находим точки пересечения с осями координат:

$$y(0)=-\frac{1}{2}; \qquad y(x)=0 \text{ при } x=\frac{1}{2}.$$

3. Очевидно, что данная функция не является периодической, так как не содержит элементарных периодических функций. Для проверки функции на четность или нечетность находим

$$y(-x)=\frac{1-2(-x)}{(-x)^2-(-x)-2}=\frac{1+2x}{x^2+x-2}.$$

Полученное выражение не равно ни $y(x)$ ни $-y(x)$, поэтому данная функция не является ни четной ни нечетной.

4. Исследуем точки разрыва функции.

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1-0}\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1-2\cdot(-1)}{-0\cdot(-3)}=\frac{3}{+0}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1+0}\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1-2\cdot(-1)}{+0\cdot(-3)}=\frac{3}{-0}=-\infty.$$

Так как пределы бесконечные, то $x=-1$ является точкой разрыва второго рода, а прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x\to2-0}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2-0}\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1-2\cdot2}{3\cdot(-0)}=\frac{-3}{-0}=+\infty$$

.

$$\lim_{x\to2+0}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2+0}\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1-2\cdot2}{3\cdot(+0)}=\frac{-3}{+0}=-\infty$$

.

Так как пределы бесконечные, то $x=2$ является точкой разрыва второго рода, а прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

5. Проверяем наличие у функции наклонных асимптот, имеющих уравнение $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x}{x\left(x^2-x-2\right)}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Таким образом, функция имеет горизонтальную асимптоту $y=0$, совпадающую с осью Ox.

6. Исследуем функцию на экстремум и участки монотонности, для чего находим ее производную

$$y'=\left(\frac{1-2x}{x^2-x-2}\right)'=\frac{2x^2-2x+5}{\left(x^2-x-2\right)^2}=\frac{2x^2-2x+5}{(x+1)^2(x-2)^2}.$$

Производная не существует при $x=-1$ и $x=2$. Производная не равна нулю, так как квадратное уравнение $2x^2-2x+5=0$ имеет отрицательный дискриминант. Результаты исследований первой производной помещаем в таблицу

x	$(-\infty,\ -1)$		-1 $(-1,\ 2)$		2 $(2,\ \infty)$
y'	+		$\varnothing$ +		$\varnothing$ +
y	□		$\varnothing$ □		$\varnothing$ □

Из таблицы видно, что данная функция не имеет точек экстремума, так как производная всегда положительна.

7. Исследуем функцию на точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости, для чего находим ее вторую производную

$$y'' = \left(\frac{1-2x}{x^2-x-2}\right)'' = \left(\frac{2x^2-2x+5}{\left(x^2-x-2\right)^2}\right)' =$$

$$= \frac{-4x^3+6x^2-30x+14}{\left(x^2-x-2\right)^3} = \frac{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+7\right)}{(x+1)^3(x-2)^3}.$$

Вторая производная не существует при $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Но в этих точках функция не определена, поэтому они не могут являться точками перегиба. Для нахождения других критических точек приравниваем вторую производную нулю и получаем $x_3 = \frac{1}{2}$. Результаты исследований второй производной помещаем в таблицу

x	$(-\infty, -1)$		$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$		$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$		$(2, +\infty)$
y''	+		∅ –		0 +		∅ –
y	вогнутая		∅ выпуклая		0 вогнутая		∅ выпуклая

Из таблицы видно, что при $x = \frac{1}{2}$ вторая производная равна нулю и меняет знак, следовательно, эта точка является точкой перегиба графика функции.

8. По результатам всех исследований выполняем построение графика данной функции (рис. 5).

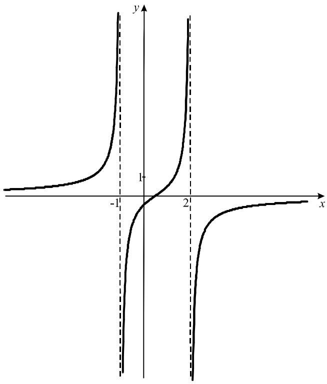

Рис. 5

Пример 2. Провести исследование и построить график функции $y=(x+4)e^{2x}$.

Решение.

1. Областью определения функции является вся числовая ось. Таким образом $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. Находим точки пересечения с осями координат:

$$y(0)=4; \qquad y(x)=0 \text{ при } x=-4.$$

3. Очевидно, что данная функция не является периодической, так как не содержит элементарных периодических функций. Для проверки функции на четность или нечетность находим

$$y(-x)=(-x+4)e^{-2x}.$$

Полученное выражение не равно ни $y(x)$ ни $-y(x)$, поэтому данная функция не является ни четной ни нечетной.

4. Данная функция определена всюду, поэтому точек разрыва нет и вертикальных асимптот тоже нет.

5. Проверяем наличие у функции наклонных асимптот, имеющих уравнение $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+4)e^{2x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)e^{2x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty .$$

Следовательно, правой асимптоты у функции нет.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+4)e^{2x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)e^{2x}}{1}=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0 .$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}(x+4)e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{e^{-2x}}=0 .$$

Таким образом, при $x\to-\infty$ функция имеет горизонтальную асимптоту $y=0$, совпадающую с осью Ox.

6. Исследуем функцию на экстремум и участки монотонности, для чего находим ее производную

$$y'=\left((x+4)e^{2x}\right)'=e^{2x}+(x+4)e^{2x}2=e^{2x}(2x+9).$$

Производная определена при любом значении x и равна нулю при $x=-4,5$. Результаты исследований первой производной помещаем в таблицу

x	$(-\infty;\,-4,5)$	$-4,5$	$(-4,5;\ \infty)$
y'	$-$	0	$+$
y		$-0,5e^{-9}$	

Из таблицы видно, что функция при $x=-4,5$ имеет точку минимума, так как производная в этой точке равна нулю и меняет знак.

7. Исследуем функцию на точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости, для чего находим ее вторую производную

$$y'' = \left(\left(2x+9\right)e^{2x}\right)' = 2e^{2x} + \left(2x+9\right)e^{2x}2 = e^{2x}\left(4x+20\right).$$

Вторая производная определена при любом значении x и равна нулю при $x=-5$. Результаты исследований второй производной помещаем в таблицу

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, \infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	выпуклая	$-e^{-10}$	вогнутая

Из таблицы видно, что при $x=-5$ вторая производная равна нулю и меняет знак, следовательно, эта точка является точкой перегиба графика функции.По результатам всех исследований выполняем построение графика данной функции (рис. 6).

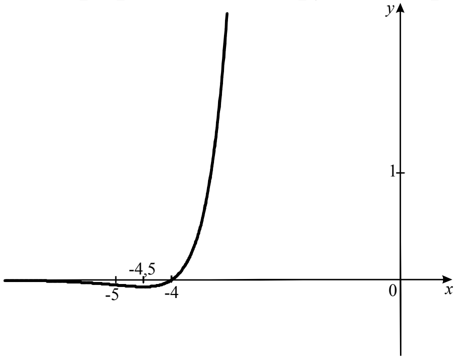

Рис. 6

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [13], 1399-1414, 1437, 1462-1464, 1465-1469, 1472-1477.

Форма отчетности: конспект, устный опрос.

ЗАНЯТИЕ № 14
ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА. КРИВИЗНА КРИВОЙ

Литература: [12], с. 195-211, 305-313; [7], с. 237-247. [16],с. 41-45.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение вектор-функции скалярного аргумента. Где, в каких теоретических и практических приложениях используется эта функция?

2. Что такое годограф вектор-функции? Как найти его для конкретно заданной функции?

3. Что такое и как находится производная вектор-функции?

4. Как находится предел вектор-функции?

5. Как найти касательную к пространственной кривой? Как написать уравнение нормальной плоскости?

6. Что называется кривизной плоской и пространственной кривой в данной точке?

7. Что такое радиус кривизны? Как он находятся?

8. Что такое эволюта и эвольвента кривой? Как они находятся?

9. Что такое кручение пространственной кривой в заданной точке?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти траекторию точки, движущейся по закону $\overline{r}(t) = 2\sin t\,\overline{i} + 3\cos t\,\overline{j}$.

Решение. Параметрические уравнения траектории

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin t \\ y(t) = 3\cos t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

поэтому траекторией движения является эллипс с полуосями 2 и 3 и центром в начале координат, направление движения показано стрелкой (рис. 7).

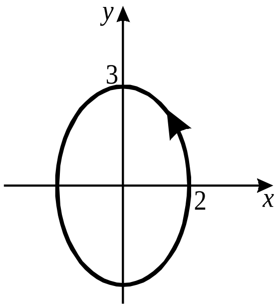

Рис. 7

Пример 2. Дано уравнение движения материальной точки $\bar{r} = (\operatorname{sh} t - 1)\,\bar{i} + \operatorname{ch}^2 t\,\bar{j} + 3\bar{k}$. Определить траекторию, скорость и ускорение движения точки. Построить векторы скорости и ускорения для момента времени $t = 0$.

Решение. Параметрические уравнения траектории

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sh} t - 1, \\ y(t) = \operatorname{ch}^2 t, \\ z(t) = 3. \end{cases}$$

Воспользовавшись основным тождеством для гиперболических функций, исключаем параметр t и получаем

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = y - (x+1)^2 = 1.$$

Таким образом, траекторией движения точки является парабола $y = (x+1)^2 + 1$, лежащая в плоскости $z = 3$ (рис. 8). Для того, чтобы определить направление движения точки по траектории, вычислим пределы

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim_{t\to\pm\infty} (\operatorname{sh} t - 1) = \pm\infty,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \operatorname{ch}^2 t = +\infty.$$

Полученное направление движения показано на рис. 8 стрелкой. Далее определяем вектор скорости

$$\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = x'(t)\,\bar{i} + y'(t)\,\bar{j} + z'(t) = \operatorname{ch} t\,\bar{i} + \operatorname{sh} 2t\,\bar{j}$$

и вектор ускорения

$$\bar{w}(t) = \bar{r}''(t) = x''(t)\,\bar{i} + y''(t)\,\bar{j} + z''(t)\,\bar{k} = \operatorname{sh} t\,\bar{i} + 2\operatorname{ch} 2t\,\bar{j}\ .$$

Из записанных выражений получаем значения векторов скорости $\bar{v}_{|t=0} = \bar{i}$ и ускорения $\bar{w}_{|t=0} = 2\bar{j}$ в точке с координатами $x(0) = -1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 3$. Эти векторы изображены на рис. 8.

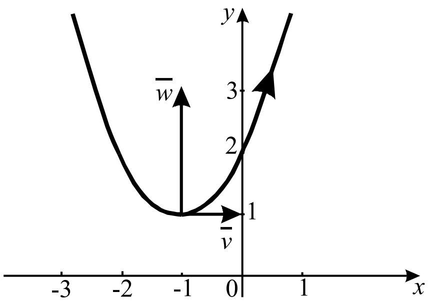

Рис. 8

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 5.533, 5.537, 5.549, 5.550, 5.558-5.561, 5.563, 5.564, 5.566, 5.570, 5.581, 5.583; [13], 1529, 1337, 1544, 1554, 1556, 1572.

Форма отчетности: устный опрос, домашняя контрольная работа с последующим отчетом по ней.

ЗАНЯТИЕ № 15

КОРНИ МНОГОЧЛЕНА.ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ.РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНАС ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИНА МНОЖИТЕЛИ

Литература: [12], с. 230-235, [16],с. 77-84.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое многочлен степени n?
2. Что называется корнем многочлена?
3. Как читается и доказывается теорема Безу?
4. Сформулируйте основную теорему алгебры.
5. Как раскладываются на множители многочлены n-ой степени (приведенные, не приведенные)?
6. Какие многочлены называются равными?
7. Что такое кратность корня многочлена? Как выглядит разложение многочлена на множители при наличии кратных корней?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить уравнение

$$x^3+4x^2+x-6=0.$$

Решение. Подставляя делители свободного члена $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$ в уравнение, получаем, что его корнями являются числа: 1, -2, -3. Следовательно, уравнение можно записать в виде $(x-1)(x+2)(x+3)=0$.

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$Q_5(x)=3x^5-6x^4-9x^3+18x^2-12x+24.$$

Решение. Нетрудно убедиться, что один из делителей свободного члена $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 24$ является корнем многочлена – $x_1=2$. Выполняем деление $Q_5(x)$на $x-2$

$$\begin{array}{l|l}
3x^5-6x^4-9x^3+18x^2-12x+24 & x-2 \\ \hline
3x^5-6x^4 & 3x^4-9x^2-12 \\ \hline
\quad -9x^3+18x^2-12x+24 & \\
\quad -9x^3+18x^2 & \\ \hline
\qquad -12x+24 & \\
\qquad -12x+24 & \\ \hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

и получаем $\dfrac{Q_5(x)}{x-2}=3x^4-9x^2-12$. Приравниваем это выражение к нулю. Решения полученного биквадратного уравнения имеют вид: $x_{2,3}^2=4$, $x_{4,5}^2=-1$. Отсюда $x_2=+2$, $x_3=-2$, $x_4=+i$, $x_5=-i$. Итак, многочлен $Q_5(x)$ имеет действительный корень $x=2$, кратность которого равна 2, действительный простой корень $x=-2$ и два простых взаимно-сопряженных комплексных корня $x=\pm i$. Таким образом, разложение на множители данного многочлена будет иметь следующий вид:

$$Q_5(x)=3x^5-6x^4-9x^3+18x^2-12x+24=$$
$$=3(x-2)^2(x+2)\left(x^2+1\right).$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 1.512, 1.514, 1.518, 1.523, 1.525.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физмат, 1975. 272 с.

2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М,: Наука, 1976, 1930. 320 с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1984. 176 с.

4. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1979. 390 с.

5. Мантуров О.В., Матвеев Н.В. Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1986. 480 с.

6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Высшая школа, 1986, 222 с.

7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 462 с.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука 1967.

9. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1985. 232 с.

10. Беклемишев Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987. 496 с.

11. Методические указания к изучению радела "Численное решение уравнений и систем" курса "Высшей математики" / В.Г. Трофимов, В.И. Минаков, В.С. Купцов. 1989. 32 с.

12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1978, Т.I. 429 с.

13. Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985. 383 с.

14. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1986. Ч.I. 308 с.

15. Глушко Е.Г., Дубровская А.П., Кретова Л.Д., Ускова Н.Б. Элементы линейной алгебры: Учеб.пособие / Воронеж. гос.техн.ун-т. Воронеж, 1998. 120 с.

16. КатраховаА.А., Купцов В.С.,Курс лекций по дисциплине «Математика».Учеб.пособие / Воронеж. гос.техн.ун-т. Воронеж, 2015. 302 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлениям 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (профили: «Электромеханика», «Электропривод и автоматика», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика робототехнических систем»), 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль: «Управление и информатика в технических системах»), очной формы обучения

Часть 1

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Васильев Евгений Михайлович

В авторской редакции

Подписано к изданию 30.09. 2016.
Уч.-изд. л. 3, 5

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14