ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО- СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ И ФОРМ ОБУЧЕНИЯ

Воронеж 2003

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО- СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ И ФОРМ ОБУЧЕНИЯ

Воронеж 2003

Составители М.Д. Гончаров, В.С. Муштенко.

УДК 51.07

Методические указания по вычислению пределов функций. /Воронеж. гос.арх.-строит.ун-т; Сост.:М.Д.Гончаров,В.С.Муштенко.-Воронеж,2003-41с

Предназначены для студентов всех специальностей и форм обучения. Включают классификацию пределов функций и рекомендации по раскрытию "неопределённостей" различных видов.

Библиограф.: 12 назв.

Печатается по рекомендации редакционно-издательского совета Воронежского государственного архитектурно- строительного университета.

Рецензент – доц. Седаев А.А.

оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Общий курс высшей математики является фундаментом математического образования инженера и играет основную роль при освоении специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами различных специальностей. Одним из важнейших понятий современной математики является понятие предела последовательности, переменной величины, функции. На понятии предела основаны многие другие фундаментальные понятия: непрерывность функции, производная, интеграл, сумма ряда и др. Целью данных методических указаний является оказание помощи студентам 1 курса всех специальностей как дневной, так и заочной формы обучения (включая ускоренную) при вычислении пределов функций, представляющих так называемые неопределенности разных типов (видов).

1. ПОНЯТИЕ , ОПРЕДЕЛНИЕ И СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

Для того, чтобы хорошо освоить методы вычисления пределов (раскрытие неопределенностей), необходимо знать ряд основных понятий, определений и свойств.

Рассмотрим связь переменных x и y в виде функциональной зависимости $y = f(x)$ и предположим , что независимая переменная x в процессе своего изменения стремится к пределу - постоянному числу a ($x \to a$). Может случиться , что при любом способе стремления x к своему пределу a и функция $f(x)$ также стремится к некоторому определённому пределу А ($f(x) \to A$) . Этот факт записывается так :

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A$$
$$x \to a.$$

Приведённые рассуждения дают понятие о пределе функции с элементарных позиций .

Для строгого определения предела функции в точке предполагают , что функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 , исключая , может быть , эту точку.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут : $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

Аналогично число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к ∞, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x| > M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$

или $f(x) \to A$ *при* $x \to \infty$.

При вычислении пределов функций необходимо помнить следующие свойства ,которые можно представить математически так :

1. $\lim C = C$, где C – постоянная.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где С – постоянная.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ (1)
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$.
6. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\varphi(x)}$.

7. Для всех основных элементарных функций в любой точке их области существования имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0). \qquad (2)$$

Это свойство означает , что знак функции и знак предела можно менять местами и является основным условием при вычислении пределов элементарных функций в любой точке из их области определения. Нахождение предела сводится к подстановке в данную функцию предельного значения аргумента x_0 вместо x.

Примеры.

Вычислить пределы функций.

$$1.\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3x}}{2x} = \frac{\sqrt{1+3\cdot 1}}{2\cdot 1} = 2.$$

Замечание. Все указанные соотношения (1) верны и при $x\to\infty$.

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{2+arctg\,x}{2-arctg\,x} = \frac{2+arctg\,\infty}{2-arctg\,\infty} = \frac{2+\frac{\pi}{2}}{2-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 1.$$

2. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Особую роль при вычислении пределов играют бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение . Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x\to x_0$, если ее предел в этой точке равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0. \qquad (3)$$

Аналогично определяются бесконечно малые функции при

$$x\to+\infty,\ x\to-\infty,\ x\to x_{0+0},\ x\to x_{0-0}.$$

Из свойств о пределах [1,2,4] следует, что сумма, разность и произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

отношении двух бесконечно малых функций такого общего заключения сказать нельзя.

Отношение двух бесконечно малых функций в зависимости от характера функций в числителе и знаменателе может оказаться равным конечному числу, бесконечно малой или бесконечно большой функции , которые будут определены ниже.

В этом случае говорят о "неопределенном выражении" или "неопределенности " типа (или вида)- $\left(\frac{0}{0}\right)$ ($\frac{0}{0}$ - символическая запись отношения двух бесконечно малых функций) и вычисление таких пределов называется "раскрытием неопределенностей".

Пример.

Найти $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

Решение.

Непосредственная подстановка предельного значения $x=2$ в функцию приводит к неопределенности вида $(\frac{0}{0})$. Чтобы вычислить этот предел, т.е. раскрыть полученную неопределенность, выполним следующее преобразование : разложим выражение , стоящее в числителе , на множители.

Тогда получим : $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} =$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

Сокращение дроби на (x-2) законно , так как условие $x\to 2$ предполагает $x\neq 2$.

Определение. Функция ,обратная бесконечно малой , называется ***бесконечно большой*** при $x \to x_0$, т.е. если $f(x)$ - бесконечно малая, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая функция.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \qquad (4)$$

(аналогично при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_{0\pm0}$).

Это означает, что по мере стремления x к x_0 значения функции $f(x)$ неограниченно возрастают и могут по модулю превзойти любое положительное число N, как бы велико оно ни было. Говорят, что предел бесконечно большой функции равен бесконечности.

Примером бесконечно больших функций могут служить:

$y = tgx$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, поскольку $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx = \infty$;

$y = 2^x$ при $x \to \infty$, так как $\lim_{x \to \infty} 2^x = \infty$.

Из теорем о пределах [1 ,2,4] следует, что сумма (но не разность!) и произведение (но не частное!) двух бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая.

О разности и отношении двух бесконечно больших функций никакого общего заключения сделать нельзя.

В зависимости от характера изменения бесконечно больших их отношение или разность может оказаться либо числом, либо бесконечно малой, или бесконечно большой величиной. В этих случаях говорят о "неопределенных выражениях" или "неопределенностях" вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ или $(\infty - \infty)$.

Замечание. Из определения бесконечно большой функции следует, что функция,обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая, то есть , если

$$f(x) \to \infty, \text{ то } \frac{1}{f(x)} \to 0. \qquad (5)$$

Существуют и другие выражения, дающие "неопределенные выражения", т.е. неопределенности таких типов как (1^∞), (0^∞), (0^0). Неопределенности указанных типов могут быть получены от пределов следующих выражений:

1. Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$, а $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то получаем $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = (1^\infty)$.

2. Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, а $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)}$ дает неопределенность вида (0^∞).

3. Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, а $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = (0^0)$.

Замечание. Во всех рассмотренных пределах и в дальнейшем предельное значение аргумента $x = x_0$ может быть любым, т.е. $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to x_{0\pm0}$.

Сводя воедино все типы рассмотренных неопределённостей , их можно представить так :

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (0 \cdot \infty), (0^\infty), (0^0), (\infty^0), (1^\infty).$$

Для раскрытия неопределенностей очень часто применяют, так называемые, "***замечательные пределы***" [1,4,6].

3. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

. Предел вида

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \qquad (6)$$

называют ***первым замечательным пределом***.

Этот предел раскрывает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Частными случаями являются:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.}\qquad (7)$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x}=1.}$$

Для вычисления пределов с помощью первого замечательного предела удобно его записать в общем (структурном) виде :

$$\lim_{\square\to 0}\frac{Sin\,\square}{\square}=1 \qquad (8)$$

Если в процессе преобразования данной функции удаётся получить выражение, подобное (8) , то говорят , что ***выделили первый замечательный предел,*** и заменяют его единицей.

Примеры.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение.

Умножая числитель и знаменатель на 5 и ,учитывая, что если $x\to 0$, то и $5x\to 0$, получаем

$$\lim_{x\to 0} 5\frac{Sin\,5x}{5x}=5\lim_{\boxed{5x}\to 0}\frac{Sin\boxed{5x}}{\boxed{5x}}=5\cdot 1=5$$

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{4x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}.$

4. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Предел вида

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e} \qquad (9)$$

или

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,} \qquad (9a)$$

называют ***вторым замечательным пределом.***

В выражениях (9) и (9а) число **e≈2,72** - ***Неперово число.***

Замечание 1. Доказательства всех свойств и утверждений, приводимых в методических указаниях, можно найти в любом учебнике по математическому анализу [1,6,8] или в курсе лекций , читаемых на потоке.

Замечание 2. Для раскрытия неопределенностей полезно знать некоторые другие, так называемые , ***важные пределы,*** являющиеся следствиями второго замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=log_a e. \qquad (10)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1 \quad (\text{при } a=e \text{ в(3) }). \qquad (11)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln\, a. \qquad (12)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad (\text{ при } a=e \text{ в (5) }). \qquad (13)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a. \qquad (14)$$

Второй замечательный предел удобно записать в общем (структурном) виде (по аналогии с видом первого замечательного предела):

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e \qquad \text{или} \qquad \lim_{\square\to 0}\left(1+\square\right)^{\frac{1}{\square}}=e \qquad (15)$$

При получении подобного выражения (15) говорят, что ***выделяют второй замечательный предел.***

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x}\right)^{3x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x}{2}}\right)^{3x}==\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x}{2}}\right)^{x\cdot\frac{5}{2}}\right]^{\frac{2}{5}\cdot 3}=e^{\frac{6}{5}}.$$

В квадратных скобках выделен второй замечательный предел.

Следует заметить , что и при раскрытии неопределённостей на основе свойств пределов и с помощью замечательных и важных пределов необходимо ,по возможности , осуществлять элементарные преобразования функций , предел которых разыскивается. Так , в рассматриваемом примере, прежде чем записать предел в структурном виде , необходимо предварительно выполнить два элементарных действия : сначала почленно делим числитель на знаменатель , чтобы получить единицу в скобке , а затем выделяем единицу в числителе дроби , опуская числитель в знаменатель знаменателя.

Попытаемся систематизировать неопределённости и указать методы преобразования самих функций в заданных пределах.

5. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ ВИДА $\left(\frac{0}{0}\right)$.

1. Если **неопределенность вида** $\left(\frac{0}{0}\right)$ получена от отношения двух многочленов, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, то неопределенность раскрывается разложением многочленов на простейшие многочлены и сокращением дроби на общие множители.

Примеры.

Вычислить :

1). $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x+3)}=\frac{1}{6}$$

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x-1)}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty$$

Замечание. Из определения бесконечно малой и бесконечно большой функции [2] следуют пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}a^x=\infty\ (a>1),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=a^{-\infty}=\frac{1}{a^{\infty}}=0,\ (a>1) \qquad (16)$$

$$\lim_{x\to\infty}a^x=0\ (a<1),\qquad \lim_{x\to-\infty}a^x=\infty\ (a<1).$$

Примеры.

Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. Если $x \to 1-0$, то есть $x<1$ и $(x-1)\to 0$ является бесконечно малой отрицательной величиной, то $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ является отрицательной бесконечно большой величиной. Тогда

$$\lim_{x\to 1} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. Если $x \to 1+0$, то есть $x>1$ и $(x-1)\to 0$ является бесконечно малой положительной величиной, а $\frac{1}{x-1} \to +\infty$ и

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{+\infty} = \infty.$$

2. Если **неопределенность вида** $\left(\frac{0}{0}\right)$ получена от отношения двух функций, содержащих иррациональность, то умножают числитель и знаменатель на выражение, сопряженное данному, т.е. избавляются от иррациональности.

Замечание. Произведение сопряженных иррациональных выражений дает рациональное выражение.

Например: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$.

Примеры.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)}{x-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{(x-4)\cdot 6} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{2}\,\cancel{(x-4)}}{\cancel{6}\,\cancel{(x-4)}} = \frac{1}{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3} = \lim_{x\to 7} \frac{\left(\sqrt{x-3}-2\right)\left(\sqrt{x-3}+2\right)\left(\sqrt{x+2}+3\right)}{\left(\sqrt{x-3}+2\right)\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{\cancel{(x-7)}\left(\sqrt{x+2}+3\right)}{\left(\sqrt{x-3}+2\right)\cancel{(x-7)}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

3. Если **неопределенность** $\left(\frac{0}{0}\right)$ получается от выражений, содержащих тригонометрические функции, то применяем первый замечательный предел, предварительно преобразовывая это выражение, используя формулы тригонометрии.

Примеры.

Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x\cdot\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{x\cdot\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^{\cancel{2}}\frac{3}{2}x}{x\cdot\cancel{2\sin}\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{3}{2}x} = = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{3}{2}x}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{3}{2}x} = 3$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg3x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x\frac{tg3x}{3x}}{2x\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2}\frac{\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}}}{\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}} = \frac{3}{2}$.

(в рамках выделен первый замечательный предел).

3. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to \pi} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2} = \lim\limits_{x\to \pi} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)} =$

$$= \lim_{x\to \pi} \frac{2\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{4\cdot\frac{(\pi-x)}{4}(\pi+x)} = \frac{1}{2}\boxed{\lim_{x\to \pi}\frac{\sin\frac{\pi-x}{4}}{\frac{(\pi-x)}{4}}} = \frac{1}{2}\frac{0}{2\pi} = 0.$$

Замечание. В рассмотренных примерах использовались следующие формулы школьного курса тригонометрии [9,12]:

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2},\quad \sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x,\quad tgx=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x).$$

6. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ ВИДА $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Если **неопределенность вида** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ получена от отношения двух многочленов, то, чтобы найти предел данной дроби (т.е. раскрыть эту неопределенность), предварительно преобразуем ее, разделив числитель и знаменатель (почленно) на высшую степень x.

Примеры.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x-1}{6x^2+3x+5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{6+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\dfrac{5}{6}$ (разделили на x^2).

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-3}{5x^2+3x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{0}{5}=0$ (разделили на x^2).

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+6x-2}{4x^2+3x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{8}{0}=\infty$ (разделили на x^3).

Обобщая разобранные примеры, можно сделать следующий вывод: при $x\to\pm\infty$ предел отношения двух многочленов одинаковых степеней равен отношению коэффициентов при старших степенях *x*. Если же степени не равны, то предел их отношения равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя, и равен бесконечности, если степень числителя больше степени

знаменателя. Поэтому вычисление пределов в подобных случаях может быть значительно упрощено.

Примеры. Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^2+3x-1}{1-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^2}{-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x^2}{5x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2}{5x^2}=\dfrac{-2}{5}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5}{\sqrt{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x-1}{3x^2-3}=\infty$ (т.к.степень числителя выше степени знаменателя).

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+2x+1}{3x^4+x^2-3}=0$ (т.к. степень числителя меньше степени знаменателя).

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}}=\left\{\text{т.к. } \dfrac{4}{3}>\dfrac{3}{5},\ \text{а } \dfrac{7}{3}>\dfrac{4}{5}\right\}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{7}{3}}}=0$ (т.к. степень числителя меньше степени знаменателя).

7. НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ВИДА $(\infty-\infty)$

Этот вид неопределенности приводится к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ с помощью тождественных преобразований.

Замечание.

Неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ часто называют ***классическими.***

Примеры. Вычислить пределы.

1. Найти $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Умножив и разделив данное выражение на сопряженное ему, то есть на

$$(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}),$$

получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{4\sin^2 x\cdot\sin^2 2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cancel{\sin^2} x\cos^2 x-4\sin^2 x}{4\cancel{\sin^2} x\cdot4\sin^2 x\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{4\cancel{\sin^2} x(\cos^2 x-1)}{4\cancel{\sin^2} x\cdot4\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}=-\frac{1}{4}.$$

2. $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=(\infty-\infty).$

Приводя данные дроби к общему знаменателю, находим

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

8. НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ВИДА $(0\cdot\infty)$

Этот вид неопределенности тоже приводится к классическим, если один из множителей опустить в знаменатель знаменателя, т.е. привести к "трехэтажной" дроби.

Примеры.

1. Вычислить $\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$ (выделен первый замечательный предел).

2. Вычислить $\lim_{x\to0}x\cdot ctgx$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}x\cdot ctgx=(0\infty)=\lim_{x\to0}\frac{ctgx}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\boxed{\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}}=1.$$

3. Найти : $\lim_{x\to1}(1-x)\,tg\frac{\pi}{2}x=(0\cdot\infty)$.

Полагая $(1-x)=\alpha, x=1-\alpha$, получаем

$$\lim_{x\to1}(1-x)\,tg\frac{\pi}{2}x=\lim_{\alpha\to0}\left[\alpha\cdot tg\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right]=\lim_{\alpha\to0}\left[\alpha\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right]=$$

$$=\lim_{\alpha\to0}\left(\alpha\boxed{ctg\frac{\pi}{2}\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to0}\left(\alpha\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to0}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\cdot\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to0}\frac{\frac{\pi}{2}\alpha}{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to0}\cos\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cdot1=\frac{2}{\pi}$$ (выделили первый замечательный предел).

9. НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ВИДА $\left(1^{\infty}\right)$

Неопределенности этого вида раскрывают при помощи второго замечательного предела, используя его в общем виде (15).

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\lim_{\square\to 0}\left(1+\square\right)^{\frac{1}{\square}}=e \tag{17}$$

Примеры.

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\boxed{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}}\right]^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$, т.к. в квадратных скобках стоит выделенный второй замечательный предел.

В более сложных случаях удобно вводить замену переменной.

2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}=(1^{\infty})=\lim\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}.$$

Положим $\frac{2}{2x-1}=\frac{1}{y}$. Тогда $x=y-\frac{1}{2}$ и при $x\to\infty$, $y\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y-\frac{1}{2}}=\lim\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{3}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{3},$$

Предел круглой скобки $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}=1$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{ctgx}=\left(1^{\infty}\right)$.

Т.к. $ctgx=\frac{1}{tgx}$, то $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{ctgx}=\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}}=e$ (выделен второй замечательный предел, учитывая, что если $x\to 0$, то и $tgx\to 0$).

4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

Это неопределённость (1^{∞}), т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$.

Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, представляем основание степени в виде $(1+x)$, а в показателе выделим множитель $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]}^{\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^{2}$$

В квадратной скобке выделен второй замечательный предел, т.к. если $x\to\infty$, то $\frac{x-1}{2}\to\infty$.

Рассмотрим несколько примеров, в которых для раскрытия неопределенности применяются "важные пределы" (10-14).

Примеры.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^{2}-5x+7)}{(x-2)}=\left(\frac{0}{0}\right)$.

Положим $(x-2)=\alpha$, $x=(2+\alpha)$, тогда $x^{2}-5x+7=(2+\alpha)^{2}-\,-5(2+\alpha)+7=1-\alpha-\alpha^{2}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-5x+7)}{(x-2)}=\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{\ln(1-\alpha-\alpha^2)}{(\alpha^2-\alpha)}\cdot\frac{(\alpha^2-\alpha)}{\alpha}\right]=1\cdot(-1)=-1.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-3^x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{9^x-3^x}{x}=\lim_{x\to 0}3^x\cdot\frac{3^x-1}{x}=3^0\cdot\ln 3=\ln 3.$$

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{7}}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{1}{7}\cdot 1=\frac{1}{7}.$$

10. ПРИМЕНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ К РАСКРЫТИЮ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

Как известно [1,3,11], $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией, если ее предел равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \text{ или } \alpha(x)\to 0, x\to x_0.$$

Но бесконечно малые функции могут стремиться к нулю по- разному. Для сравнения бесконечно малых функций вычисляют их отношения.

Говорят , что бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка малости, если предел их отношения равен некоторому числу $c\neq 0$, отличному от нуля, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c. \qquad (18)$$

Пример.

Найдём $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}7=7$, следовательно , sin7x и x являются бесконечно малыми одинакового (одного) порядка малости.

Если же $c=0$, т.е. $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$ или бесконечно малая $\beta(x)$ называется бесконечно малой меньшего порядка малости по сравнению с $\alpha(x)$.

Пример. Найдём $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}x=0$, следовательно, $\alpha(x)=x^2$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости , чем $\beta(x)=\sin x$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными (равносильными)***, если $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Эквивалентные бесконечно малые обозначают так:

$$\alpha(x)\sim\beta(x). \qquad (19)$$

Пример. Очевидно , что $\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}=1$, следовательно , tg3x и 3x - эквивалентные бесконечно малые функции, то есть tg3x~3x.

Из определения следует, что эквивалентные бесконечно малые функции имеют одинаковый порядок малости.

Для отношения двух бесконечно малых функций доказывается теорема[1,4,7]:

Теорема. Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$ и существует $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то существует $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \qquad (20)$$

Кратко эта теорема формулируется следующим образом: *предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций.*

Эта теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание пределов (раскрывать неопределенности). Смысл этого метода заключается в том, что, заменяя отношения данных функций отношением эквивалентных им функций, пределы этих отношений не изменяются, но вместо неопределенности получаем сразу конечный (или бесконечный) предел.

Замечание. Все рассуждения и формулы верны для любых предельных значений: $x \to \pm\infty$, $x \to x_{0+0}$, $x \to x_{0-0}$, $x \to 0$.

Легко установить эквивалентность следующих функций при $x \to 0$:

$$\begin{array}{ll}
\sin kx \sim kx & e^{kx} \sim kx \\
\arcsin kx \sim kx & \ln[1+kx] \sim kx \\
\mathrm{tg}\, kx \sim kx & a^{kx}-1 \sim kx \ln a \\
\mathrm{arctg}\, kx \sim kx & (1+x)^{kx} \sim kx
\end{array} \qquad (21)$$

$$1-\cos kx \sim 2\left(\frac{kx}{2}\right)^2$$

Примеры.

С помощью понятия эквивалентных бесконечно малых найти пределы.

1. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. При $x \to 3$ функция $(x-3)$ бесконечно малая и, $Sin(x-3) \sim (x-3)$, т.к. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{(x-3)} = 1$.

Заменяя $\sin(x-3)$ эквивалентной ей $(x-3)$, получаем

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3} = \{\sin(x-3) \approx (x-3)\} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

Так как $1-\cos 5x \sim 2\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2$ (см. 21), то заменяя в числителе данную бесконечно малую ей эквивалентной, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{5x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{\frac{2\cdot 25}{4}\cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \frac{25}{2}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}$.

По формуле тригонометрии : $\cos a-\cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$ имеем

$$\cos 4x-\cos 2x = -2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2} = -2\sin 3x\cdot\sin x.$$

При $x \to 0$ $\sin 3x \sim 3x$, $\sin x \sim x$, $\arcsin 3x \sim 3x$, $(\arcsin 3x)^2 \sim (3x)^2$.

Поэтому, заменяя данные функции на эквивалентные, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin x}{\arcsin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2(3x)\cdot x}{(3x)^2} = -\frac{2}{3}.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$.

Поскольку $arctg\dfrac{7}{4}x \sim \dfrac{7}{4}x$, а $(e^{-2x}-1) \sim (-2x)$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{7}{4}x}{(-2x)} = -\dfrac{7}{8}$.

5. Найти $\lim\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{\sin 5x-\sin 2x}$.

Преобразуем сначала числитель и знаменатель, а потом заменим эквивалентными.

$$e^{5x}-e^{2x} = e^{2x}\left(e^{3x}-1\right) \sim e^{2x}\,3x, \text{ т.к. } e^{3x}-1 \sim 3x, \text{ то}$$

$$\sin 5x-\sin 2x = 2\cos\frac{7x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2} \sim 2\cos\frac{7x}{2}\left(\frac{3x}{2}\right), \text{ т.к. } \sin\frac{3x}{2} \sim \frac{3x}{2}.$$

Получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{\sin 5x-\sin 2x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{e^{2x}}\,3x}{\dfrac{3x}{2}2\cos\dfrac{7x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}}{\cos\dfrac{7x}{2}}=1$.

6. Найти $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Так как $1=\ln e$, то $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\dfrac{x}{e}}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\left[1+\left(\dfrac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}$.

Но при $x\to e$ функция $\dfrac{x}{e}-1$ - бесконечно малая,

тогда $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\left[1+\left(\dfrac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\dfrac{x}{e}-1}{x-e}=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x-e}{x-e}=\dfrac{1}{e}$.

Замечание. Если $x\to a$ $(a\neq 0)$, то в ряде случаев удобно сначала ввести бесконечно малую функцию $\alpha=a-x$ (или $x-a$).

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Здесь числитель и знаменатель функции бесконечно малые. Однако x не является бесконечно малой функцией (стремится не к нулю, а к π), поэтому соотношение $\sin 2x\sim 2x$ не имеет смысла.

Введем бесконечно малую $\alpha=\pi-x$, тогда $x=\pi-\alpha$ и

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2(\pi-\alpha)}{\sin 3(\pi-\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-2\alpha}{3\alpha}=-\frac{2}{3}.$$

Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$. Неопределенность вида $(0,\infty)$.

Сделаем предварительно замену переменной. Если ввести обозначение $x-1=\alpha$, то $\alpha\to 0$ при $x\to 1$, тогда

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2}=-\lim_{\alpha\to 0}\alpha\cdot tg\frac{\pi(\alpha+1)}{2}=-\lim_{\alpha\to 0}\alpha\cdot tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\alpha\cdot ctg\frac{\pi\alpha}{2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{tg\dfrac{\pi\alpha}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\dfrac{\pi\alpha}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Замечание. При вычислении пределов выражений вида $U(x)^{v(x)}$, где $U(x)\to 1$, а $v(x)\to\infty$ (неопределенность вида (1^{∞})), удобно пользоваться формулой [4] :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}u^{v}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v\ln u}}\qquad(22)$$

Эта формула следует из свойств логарифмов :

$a^{\log_a b}=b$, $e^{\ln b}=b$, $e^{k\ln b}=b^k$

Примеры.

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$.

Так как при $x\to\infty$, $1-\dfrac{1}{x}\to 1$ и $-x\to-\infty$, пользуясь формулой (10), получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-x)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}x\left(-\frac{1}{x}\right)}=e$.

2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{5}{x}\right)^{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{5}{x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\cos\frac{5}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\frac{5}{x}-1\right)}=e^{-2\lim\limits_{x\to\infty}x\sin^2\frac{5}{2x}}=e^{-2\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{25}{4x^2}}=e^{-\frac{25}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^{0}=1.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3-x^5}{3x-x^4}$.

При $x\to 0$ $\sin x+x^3-x^5\sim\sin x$, т.к. разность $\left(\sin x+x^3-x^5\right)-\sin x=x^3-x^5$ бесконечно малая функция более высокого порядка по сравнению с $\left(\sin x+x^3-x^5\right)$ и с $\sin x$.

Аналогично $3x-x^4\sim 3x$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3-x^5}{3x-x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

11. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ ПО ПРАВИЛУ ЛОПИТАЛЯ

Введение понятия производной и операции дифференцирования дает мощный аппарат для вычисления пределов. Приведенная ниже теорема, известная под названием правила Лопиталя, является основным методом для раскрытия неопределенностей при помощи производной.

Правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0 и выполняется условие:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0\ ,$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty\right).$$

Тогда если существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to x_0$, то существует и предел отношения самих функций при $x\to x_0$, то есть

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (23)$$

Иными словами, для неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ предел отношения двух функций равен пределу отношения их производных, если последний существует (конечный или бесконечный).

В равенстве (22) x_0 может быть либо числом, либо ∞, или $(-\infty)$.

Пример.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\ln(x^2-3)}$.

Решение.

Подстановка в заданную функцию предельного значения $x=2$ приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Поэтому применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{\ln(x^2-3)}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-3x+2)'}{[\ln(x^2-3)]'}=\lim_{x\to2}\frac{2x-3}{\frac{2x}{x^2-3}}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-3)(2x-3)}{2x}=\frac{1}{4}.$$

Замечание.

Если предел отношения производных опять представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то можно применить правило Лопиталя снова, т.е. перейти к пределу отношения вторых производных. Таким образом, правило Лопиталя можно применять неоднократно.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+5}$.

Выражение при $x\to\infty$ дает неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, поэтому можем применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{6x}.$$

Опять получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применим правило Лопиталя ещё раз.

Окончательно получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Замечание. В дальнейшем будем записывать в одну цепочку равенств повторные применения правила Лопиталя, а после каждого применения в скобках указывать вид полученной неопределенности.

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Здесь постоянное число 2 делится на бесконечно большую величину.

Замечание. Следует однако предусмотреть такую ситуацию, когда предел отношения самих функций может существовать, в то время как предел отношения производных равен либо ∞, либо не существует.

Примеры.

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=1$.

В то время как предел отношения их производных $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{-\sin x}$ не существует.

2. Найти $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$.

И в этом случае предел отношения производных

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{1}$ тоже не существует.

В этих примерах применили метод непосредственного вычисления предела, поделив почленно числитель и знаменатель на *x*, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$, как отношение ограниченных функций *sinx* и *cosx* и бесконечно большой x.

Но предел вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$ не существует, так как при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби могут принимать любые значения из отрезка [0,2] (здесь значение дроби будет равно двум, например при x=0, а при $x=\pi$ оно равно нулю), а само отношение производных принимает любые неотрицательные значения. Следовательно, правило Лопиталя в этом случае неприменимо.

12. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСКРЫТИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ ВИДА :

$$(0,\infty),\quad (\infty,-\infty),\quad \left(1^{\infty}\right),\quad \left(0^{0}\right),\quad \left(\infty^{0}\right),\quad \left(0^{\infty}\right)$$

Под раскрытием таких неопределенностей понимают нахождение следующих пределов:

Неопределенность $(0,\infty)$.

Нахождение предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$..

1. **Неопределенность** $(\infty,-\infty)$.

Нахождение предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-\varphi(x)\right]$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$.

2. **Неопределенность** $\left(1^{\infty}\right)$.

Нахождение предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$.

3. **Неопределенность** $\left(0^{0}\right)$.

Нахождение предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

4. **Неопределенность** $\left(\infty^{0}\right)$.

Нахождение предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

5. Неопределенность $\left(0^{\infty}\right)$.

Нахождение предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$.

1. **Неопределенность вида** $(0,\infty)$ может быть сведена к одному из ранее рассмотренных видов $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (классические виды) при помощи тождественных преобразований: $f(x)\cdot\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$ или $\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{x}{f(x)}}$, т.е. один из множителей опускаем в знаменатель знаменателя.

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\ln x$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $(0,\infty)$

$$\lim_{x\to0}\sqrt{x}\cdot\ln x=(0,\infty)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=-2\lim_{x\to0}\sqrt{x}=0.$$

2. **Неопределенность вида** $(\infty-\infty)$ может быть сведена к виду $(0,\infty)$ или классическим видам путем тождественных преобразований :

$$f(x)-\varphi(x)=f(x)\cdot\varphi(x)\left[\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]. \qquad (24)$$

Здесь последовательно выносят за скобку общие множители -сначала f(x) , а затем $\varphi(x)$. , то есть

$$f(x)-\varphi(x)=f(x)\left[1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right],\ \text{или}$$

$$f(x)-\varphi(x)=\varphi(x)\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}-1\right],$$

которые тоже можно использовать для вычисления пределов.

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)$.

Решение.

Преобразуем функцию

$$\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{(x-1)\ln x}(x-1-\ln x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\cdot\left(\frac{0}{0}\ \text{при}\ x\to1\right).$$

Имеем $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1-\ln x)'}{\left[(x-1)\ln x\right]'}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$.

Удобно умножить числитель и знаменатель на x, тем самым избавиться от дифференцирования дроби – операции более громоздкой, чем дифференцирование произведения.

Продолжая преобразования, получаем

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Замечание.

Очень часто при раскрытии неопределенностей сложность решения зависит от способа преобразования данной функции.

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-x^2)$.

Решение . $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-x^2)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)$,

$\lim\frac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-x^2)=\lim\limits_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)=\infty$.

3. Неопределенность вида $0^0, \infty^0, 1^\infty, 0^\infty$.

Вычисление предела функции в этих случаях можно свести к раскрытию неопределенностей вида $(0,\infty)$ при помощи следующего преобразования функции:

$$f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{[\ln\varphi(x)]^{\psi(x)}} = e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}. \tag{25}$$

и тогда, в силу непрерывности показательной функции, будем иметь:

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0}[\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)}. \tag{26}$$

Примеры.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} x^{tgx}$.

Решение.

Здесь имеем неопределенность вида $\left(0^0\right)$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} tgx = 0$.

Преобразуем данную функцию по формуле (26) :

$$\lim_{x\to 0} x^{tgx} = e^{\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}}$$

В показателе от неопределенности вида $(0,\infty)$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} tgx = 0,\ \lim\limits_{x\to 0}\ln x = \infty\right)$ перешли к неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx} = \frac{\infty}{\infty}\right)$. Теперь можем применить правило Лопиталя :

$$e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{ctgx}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right)} = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x)} = e^0 = 1$$

(здесь берём предел справа , так как при отрицательных x lnx - неопределён , в рамке выделен первый замечательный предел).

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\left(\infty^0\right)$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{1}{x} = \infty$;

Преобразуем функцию по формуле (26):

$$\lim_{x\to 0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}},$$

Сделаем замену переменной, положив $t = \frac{1}{x}$. При $x\to 0$ $t\to\infty$.

Теперь имеем

$$e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln\ln t}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln\ln t)'}{t'} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t\ln t}}{1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t\ln t} = 0.$$

Окончательно $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$.

Преобразуем по формуле (26):

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} ctg^2 x\ln\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= e^{1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(\sin^2 x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2\sin x\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Все указанные виды неопределенности (степенно-показательные: 1^{∞}, 0^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}) могут быть раскрыты другим способом, который заключается в предварительном логарифмировании функции вида $[f(x)]^{\varphi(x)}$ и нахождении предела этого логарифма.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)} = a$, где a – искомый предел.

Прологарифмируем обе части (удобно брать натуральные логарифмы) :

$$\ln a = \lim_{x\to x_0} \ln[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \varphi(x)\cdot \ln f(x) = c$$

При вычислении последнего предела получаем неопределенности вида $(0,\infty)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Затем находим сам предел, исходя из свойства логарифмов: если $\ln a = c$, то $a = e^{c}$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение.

Это неопределенность вида (1^{∞}).

Обозначим искомый предел через a

$$a = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}; \qquad \ln a = \lim_{x\to 1} x^{\frac{\ln x}{1-x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{-x} = -1,$$

следовательно, $\ln a = -1$, $a = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (tgx)^{2\cos\alpha}$;

Решение.

Имеем неопределенность вида (∞^{0}).

Пусть $a = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (tgx)^{2\cos\alpha}$.

Тогда $\ln a = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left[(tgx)^{2\cos\alpha}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos x \ln tgx = (0,\infty) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\ln tgx}{\dfrac{1}{\cos x}} =$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\ln tgx)'}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = 2\lim\frac{1}{tgx\cdot\sin x} = \frac{2}{\infty} = 0;$$

Следовательно, $\ln a = 0$; $a = e^{0} = 1$.

В рассмотренных примерах применялись основные правила логарифмирования хорошо известные из школьного курса математики при a=e, то есть если $\log_a x = \ln x$.

1. $\ln xy = \ln x + \ln y$,
2. $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$,
3. $\ln x^{k} = k\ln x$
4. $\ln\sqrt[n]{x^{k}} = \frac{k}{n}\ln x$.

13. ПРИЛОЖЕНИЕ РЯДОВ К РАСКРЫТИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Следует заметить, что хотя правило Лопиталя является сильным средством вычисления пределов, но оно не заменяет полностью приемы вычисления пределов.

Действительно , с одной стороны, изучение раздела курса высшей математики "Ряды" [5] тесно связано с теорией пределов. Почти все признаки сходимости числовых рядов , а также отыскание области сходимости функциональных рядов (формулы для вычисления радиуса сходимости) основаны на вычислении пределов функций или их отношений. Поэтому рассмотренные выше методы раскрытия неопределенностей как нельзя лучше способствуют изучению темы "Ряды" и выполнению типовых расчетов по этому разделу.

С другой стороны, теория степенных рядов, а в частности, разложение функций в степенные ряды, ряды Тейлора и Маклорена, позволяет вычислять пределы функций и раскрывать неопределенности рассмотренных видов.

Ряд Маклорена о точке $x_0 = 0$ для бесконечно дифференцируемых функций в окрестности этой точки имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (27)$$

Для раскрытия неопределенности достаточно входящие в выражение функции, заменить их соответствующими разложениями в степенной ряд.

Приведём наиболее часто используемые степенные ряды некоторых элементарных функций.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\
\ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots \\
arctgx &= x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots
\end{aligned} \qquad (28)$$

Примеры.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$.

Решение.

Заменим e^x и $\sin x$ их разложениями в степенные ряды по формулам (28):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = 2.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - arctgx}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - arctgx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right)x^2 + \dots\right] = \frac{1}{6}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1,2.-М.: Наука,1968.-748с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1964.-386с.
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу.-М.:Наука,1964.-674с.
4. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Т.1.-М.:Высшая школа, 1978.-583 с.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах. Под ред. П.Е .Данко, А.Г.Попова и др.-М.:Высшая школа,1971.-280 с.
6. Берман А.Ф. Краткий курс математического анализа (для втузов).-М.:Наука,1967.-383 с.
7. Кудрявцев В.А.,Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.-М:Наука,1989.-656 с.
8. Стефан Банах .Дифференциальное и интегральное исчисление.-М.:1958.-404 с.
9. Рябушко А.П. ,Барханов В.В. и др .Сборник задач и упражнений по высшей математике,ч.1 Минск .Вышейшая школа, 1990.-268 с.
10. Кремер Н.Ш.,Пушко Б.А. и др. Высшая математика для экономистов. Учебное пособие для вузов.- М.: ЮНИТИ. 1997.-439 с.
11. Гусак А.А. Высшая математика. - Минск, изд-во БГУ,1978. –340 с.
12. Дюбук П.Е., Кручников Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики для втузов .-_М.: Высшая школа , 1963.-662 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по вычислению пределов функций для студентов 1 курса всех специальностей и форм обучения.

Составители : проф. Михаил Данилович Гончаров,

доц. Владимир Сергеевич Мущенко

Редактор Е.В.Акритова

Формат 60×84 1/16 .
Уч.-изд.2.3 Усл.-печ.л. 2.4 Тираж 500 экз.
Бумага для множительных аппаратов. Заказ № 160

Отпечатано в типографии ВГАСУ

394000,Воронеж,ул.20-летия Октября,84