ТЕОРИЯ

Уравнение плоскости по трем точкам. Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=\overline{1,3})$, не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.4)$$

Величина угла φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \qquad (3.5)$$

Канонические уравнения прямой. Разрешая уравнения в системе (3.7) относительно t и приравнивая полученные отношения, приходим к *каноническим уравнениям прямой:*

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (3.8)$$

Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки. Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то ее уравнения можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.9)$$

Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$|\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{s}})|=\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (3.18)$$

Решение типового варианта по теме «**Аналитическая геометрия**»

1. Даны четыре точки $A_1(4, 7, 8)$, $A_2(-1, 13, 0)$, $A_3(2, 4, 9)$, $A_4(1, 8, 9)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_4N, параллельной прямой A_1A_2.

Вычислить:

д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

▶ а) Используя формулу (3.4), составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $6x - 7y - 9z + 97 = 0$;

б) Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), уравнения прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-8}{8};$$

в) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой $\mathbf{s}$ можно взять нормальный вектор $\mathbf{n} = (6, -7, -9)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M с учетом уравнений (3.8) запишется в виде

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9};$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2, то их направляющие векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ можно считать совпадающими: $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = (5, -6, 8)$. Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8};$$

д) По формуле (3.18)

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 5 + (-7)(-6) + (-9)8|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\ \sqrt{5^2+(6)^2+8^2}} =$$

$$= \frac{34}{\sqrt{11}\sqrt{166}} \approx 0{,}8;$$

е) В соответствии с формулой (3.5)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\ |\mathbf{n}_2|} = \frac{0\cdot 6 + 0\cdot(-7) + 1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\ \sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} =$$

$$= \frac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0{,}7. \blacktriangleleft$$

2. Известны вершины $O(0,\ 0)$, $A(-2,\ 0)$ параллелограмма $OACD$ и точка пересечения его диагоналей $B(2,\ -2)$. Записать уравнения сторон параллелограмма.

▶ Уравнение стороны OA можно записать сразу: $y = 0$. Далее, так как точка B является серединой диагонали AD (рис. 3.5), то по формулам деления отрезка пополам можно вычислить координаты вершины $D(x,\ y)$:

$$2 = \frac{-2+x}{2},\quad -2 = \frac{0+y}{2},$$

откуда $x = 6$, $y = -4$.

Теперь можно найти уравнения всех остальных сторон. Учитывая параллельность сторон OA и CD, составляем уравнение стороны CD: $y = -4$. Уравнение стороны OD составляем по двум известным точкам:

$$\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-0}{-4-0},$$

откуда $y = -\frac{2}{3}x$, $2x + 3y = 0$.

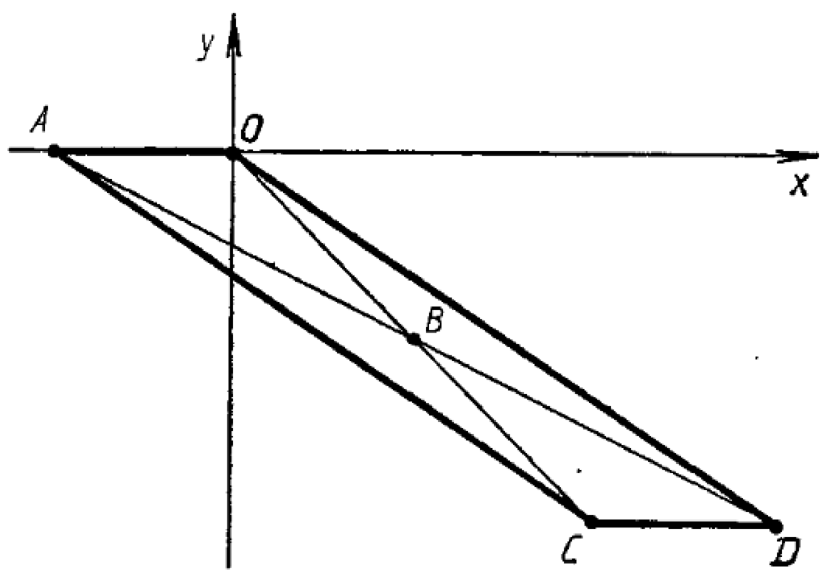


Рис. 3.5

Наконец, уравнение стороны AC находим, учитывая тот факт, что она проходит через известную точку $A(-2,\ 0)$ параллельно известной прямой OD (см. уравнение (3.21)):

$$y-0=-\frac{2}{3}(x+2) \text{ или } 2x+3y+4=0. \blacktriangleleft$$

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(3,\ 2)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(-1,\ 0)$.

$\blacktriangleright$ Пусть $M(x,\ y)$ — любая точка искомой линии (рис. 4.19). Тогда по условию задачи $|AM|=3|BM|$. Так как

$$|AM|=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2},\ |BM|=\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

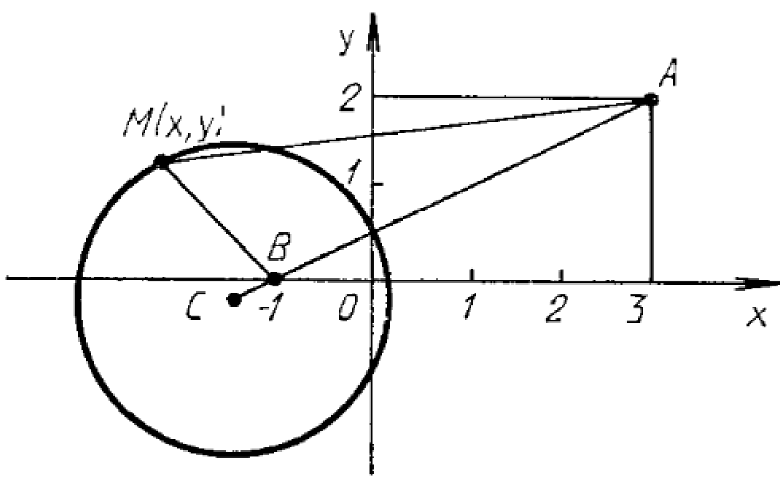


Рис. 4.19

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=3\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=3\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

Преобразуем его, возведя обе части в квадрат. Имеем:

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=9x^2+18x+9+9y^2,$$
$$8x^2+24x+8y^2+4y-4=0.$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, придем к уравнению вида

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{45}{16},$$

которое является уравнением окружности с центром в точке $C(-3/2,\ -1/4)$ и радиусом $R=3\sqrt{5}/4$. ◀

4. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

▶ Составим таблицу, в которой приведены значения полярного угла φ_i $(i=\overline{1,16})$ и соответствующие им значения полярного радиуса ρ_i:

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	4	$\pi/2$	0	π	4	$3\pi/2$	8
$\pi/6$	2	$2\pi/3$	$\approx 0{,}6$	$7\pi/6$	6	$5\pi/3$	$\approx 7{,}4$
$\pi/4$	$\approx 1{,}2$	$3\pi/4$	$\approx 1{,}2$	$5\pi/4$	$\approx 6{,}8$	$7\pi/4$	$\approx 6{,}8$
$\pi/3$	$\approx 0{,}6$	$5\pi/6$	2	$4\pi/3$	$\approx 7{,}4$	$11\pi/6$	6

Построив найденные точки $M_i(\rho_i,\ \varphi_i)$ в полярной системе координат и соединив их плавной линией, получим достаточно точное представление о кардиоиде (рис. 4.20.). ◀

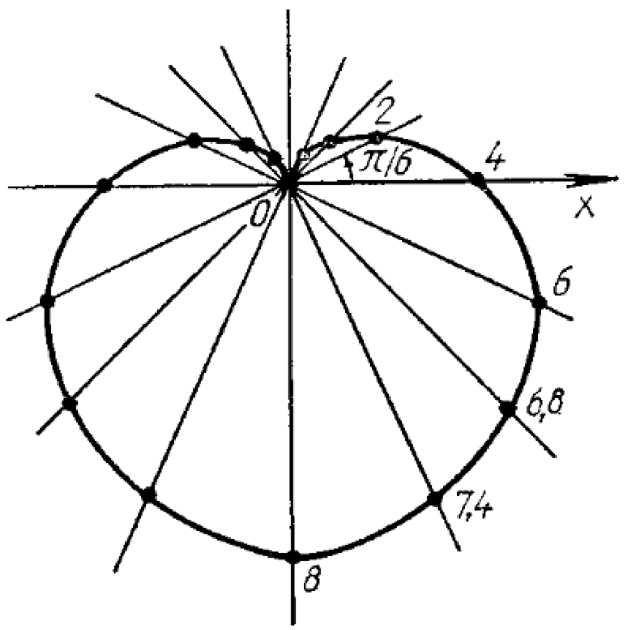


Рис. 4.20

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\cos t, \\ y = 2 - 2\sin t, \end{array} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.\right\}$$

▶ Выберем достаточное количество значений параметра t_i, вычислим соответствующие значения x_i, y_i и построим точки $M_i(x_i, y_i)$ в декартовых координатах. Соединим их плавной линией. Очевидно, что полученная кривая очень похожа на эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в точке $C(1, 2)$. Для строгого доказательства того, что данные параметрические уравнения определяют эллипс с указанными осями и центром, избавимся от параметра t:

$$\frac{x-1}{3} = \cos t, \ \frac{y-2}{-2} = \sin t,$$

откуда $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$. ◀

Решение типового варианта по теме «Векторная алгебра»

1. Даны векторы $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 6\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}| = 2$; $|\mathbf{n}| = 5$; $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = 2\pi/3$. Найти: а) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; б) $\text{пр}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$; в) $\cos(\widehat{2\mathbf{b} - \mathbf{a}, 4\mathbf{b}})$.

▶ а) Вычисляем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-\mathbf{m} + 6\mathbf{n}) \cdot (3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) =$$
$$= -3\mathbf{m}^2 + 14|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 24\mathbf{n}^2 =$$
$$= -3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5(-1/2) + 24 \cdot 5^2 = 518;$$

б) Пусть $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} = -19\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$. Тогда

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = (-19\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) \cdot (3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) =$$
$$= -57\mathbf{m}^2 - 64|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 16\mathbf{n}^2 = -148,$$
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}^2} = \sqrt{(3\mathbf{m} + 4\mathbf{n})^2} =$$
$$= \sqrt{9\mathbf{m}^2 + 24|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 16\mathbf{n}^2} = \sqrt{316}.$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = -148/\sqrt{316};$$

в) Пусть $\mathbf{d} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a} = 7\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$, $\mathbf{e} = 4\mathbf{b} = 12\mathbf{m} + 16\mathbf{n}$. Тогда

$$\cos(\widehat{\mathbf{d}, \mathbf{e}}) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{e}|},$$
$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{e} = (7\mathbf{m} + 2\mathbf{n}) \cdot (12\mathbf{m} + 16\mathbf{n}) =$$
$$= 84\mathbf{m}^2 + 136|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 32|\mathbf{n}|^2 = 456,$$
$$|\mathbf{d}| = \sqrt{(7\mathbf{m} + 2\mathbf{n})^2} =$$
$$= \sqrt{49\mathbf{m}^2 + 28|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 4\mathbf{n}^2} = \sqrt{156},$$
$$|\mathbf{e}| = \sqrt{(12\mathbf{m} + 16\mathbf{n})^2} =$$

$$=\sqrt{144\mathbf{m}^2+384|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}})+256\mathbf{n}^2}=\sqrt{5056}.$$

В результате имеем:

$$\cos(\widehat{2\mathbf{b}-\mathbf{a},\ 4\mathbf{b}})=456/\sqrt{788736}\approx 0{,}5. \blacktriangleleft$$

2. По координатам точек $A(-5,\ 1,\ 6)$, $B(1,\ 4,\ 3)$ и $C(6,\ 3,\ 9)$ найти: а) модуль вектора $\mathbf{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$; в) проекцию вектора $\mathbf{c}=\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$; г) координаты точки M, делящей отрезок $l=AB$ в отношении $1:3$.

▶ а) Последовательно находим $\overrightarrow{AB}=(6,\ 3,\ -3)$, $\overrightarrow{BC}=(5,\ -1,\ 6)$, $4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(29,\ 11,\ -6)$,

$$|4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998};$$

б) Имеем $\mathbf{a}=(29,\ 11,\ -6)$, $\mathbf{b}=(5,\ -1,\ 6)$. Тогда

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=29\cdot 5+11(-1)+(-6)6=98;$$

в) Так как

$$\text{пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c}=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|},\quad \mathbf{d}=(6,\ 3,\ -3),$$

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=30-3-18=9,\quad |\mathbf{d}|=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54},$$

то

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{BC}=9/\sqrt{54};$$

г) Имеем: $\lambda=1/3$, $\mathbf{r}_M=\dfrac{\mathbf{r}_A+\lambda\mathbf{r}_B}{1+\lambda}$. Следовательно,

$$x_M=\frac{-5+1/3\cdot 1}{1+1/3}=-\frac{7}{2},\quad y_M=\frac{1+4\cdot 1/3}{1+1/3}=\frac{7}{4},$$

$$z_M=\frac{6+1/3\cdot 3}{1+1/3}=\frac{21}{4},\quad M(-7/2,\ 7/4,\ 21/4). \blacktriangleleft$$

3. Доказать, что векторы $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{b}=(2,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-1,\ 4,\ 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d}=(2,\ 3,\ 7)$ в этом базисе.

▶ Вычисляем

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0.$$

Следовательно, векторы **a, b, c** образуют базис, и вектор **d** линейно выражается через базисные векторы:

$$\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha+2\beta-\gamma&=2,\\ -\alpha+3\beta+4\gamma&=3,\\ \beta+3\gamma&=7. \end{aligned}\right\}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера. Находим: $\Delta=22$,

$$\Delta(\alpha)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=66,\ \Delta(\beta)=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}=-44,$$

$$\Delta(\gamma)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix}=66,$$

$$\alpha=\Delta(\alpha)/\Delta=3,\ \beta=\Delta(\beta)/\Delta=-2,\ \gamma=\Delta(\gamma)/\Delta=3,$$

поэтому $\mathbf{d}=(3,\ -2,\ 3)=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$. ◀

4. Даны векторы $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}$. Необходимо: а) вычислить произведение векторов **a**, **b** и 5**c**; б) найти модуль векторного произведения 3**c** и **b**; в) вычислить скалярное произведение векторов **a** и 3**b**; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы **a** и **b**; д) проверить, будут ли компланарны векторы **a, b** и **c**.

▶ а) Так как $5\mathbf{c}=15\mathbf{i}+25\mathbf{j}$, то

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot 5\mathbf{c}=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix}=-100-180-200=-480;$$

б) Поскольку $3\mathbf{c} = 9\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$, то

$$3\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} + 27\mathbf{k} + 15\mathbf{k} - 18\mathbf{j} =$$

$$= 30\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 42\mathbf{k},$$

$$|3\mathbf{c} \times \mathbf{b}| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988};$$

в) Находим: $3\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{a} \cdot 3\mathbf{b} = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12$;

г) Так как $\mathbf{a} = (4,\ 0,\ 4)$, $\mathbf{b} = (-1,\ 3,\ 2)$ и $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, то векторы **a** и **b** не коллинеарны. Поскольку

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0,$$

то векторы **a** и **b** не ортогональны;

д) векторы **a**, **b**, **c** компланарны, если $\mathbf{abc} = 0$. Вычисляем

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0,$$

т. е. векторы **a**, **b** и **c** не компланарны. ◀

5. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2,\ 3,\ 4)$, $B(4,\ 7,\ 3)$, $C(1,\ 2,\ 2)$ и $D(-2,\ 0,\ -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC; б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD; в) объем пирамиды $ABCD$.

▶ а) Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Находим: $\overrightarrow{AB} = (2,\ 4,\ -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,\ -1,\ -2)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{110};$$

б) Середины ребер AB, BC и AD находятся в точках $K(3;\ 5;\ 3{,}5)$, $M(1{,}5;\ 2{,}5;\ 3)$, $N(0;\ 1{,}5;\ 1{,}5)$. Далее имеем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{KN}|,\quad \overrightarrow{KM} = (-1{,}5;\ \ -2{,}5;\ \ -0{,}5),$$

$$\overrightarrow{KN} = (-3;\ \ -3{,}5;\ \ -2),$$

$$\overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{KN} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5 \\ -3 & -3{,}5 & -2 \end{vmatrix} = 3{,}25\mathbf{i} - 1{,}5\mathbf{j} - 2{,}25\mathbf{k},$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}\sqrt{3{,}25^2 + 1{,}5^2 + 2{,}25^2} = \frac{1}{2}\sqrt{17{,}875};$$

в) Поскольку $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$, $\overrightarrow{AD} = (-4,$ $-3,\ -5)$,

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11,$$

то $V = 11/6$. ◀

Типовой расчет по теме

«Дифференциальные уравнения»

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.1. $e^{x+3y}dy = xdx$.
1.2. $y' \sin x = y \ln y$.
1.3. $y' = (2x-1)\operatorname{ctg} y$.
1.4. $\sec^2 x \operatorname{tg} ydy + \sec^2 y \operatorname{tg} xdy = 0$.

1.5. $(1+e^x)ydy - e^y dx = 0$.

1.6. $(y^2+3)dx - \frac{e^x}{x}ydy = 0$.

1.7. $\sin y \cos xdy = \cos y \sin xdx$.

1.8. $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$.

1.9. $(\sin(x+y) + \sin(x-y))dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$

1.10. $(1+e^x)yy' = e^x$.

1.11. $\sin x \operatorname{tg} ydx - \frac{dy}{\sin x} = 0$.

1.12. $3e^x \sin ydx + (1-e^x)\cos ydy = 0$.

1.13. $y' = e^{2x}/\ln y$.

1.14. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$.

1.15. $(\cos(x-2u) + \cos(x+2y))u' = \sec x$.
1.16. $y' = e^{x^2}x(1+y^2)$.

1.17. $\operatorname{ctg} x \cos^2 ydx + \sin^2 x \operatorname{tg} ydy = 0$.

1.18. $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x$.

1.19. $1 + (1+y')e^y = 0$.
1.20. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$.
1.21. $\frac{e^{-x^2}dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$

2

2.1. $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2.$

2.2. $y'/7^{y-x} = 3.$

2.3. $y - xy' = 2(1 + x^2y').$

2.4. $y - xy' = 1 + x^2y'.$

2.5. $(x + 4)dy - xydx = 0.$

2.6. $y' + y + y^2 = 0.$

2.7. $y^2 \ln xdx - (y - 1)xdy = 0.$

2.8. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2dx = 0.$

2.9. $y' + 2y - y^2 = 0.$

2.10. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0.$

2.11. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0.$

2.12. $(1 + y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0.$

2.13. $y' = 2xy + x.$

2.14. $y - xy' = 3(1 + x^2y').$

2.15. $2xyy' = 1 - x^2.$

2.16. $(x^2 - 1)y' - xy = 0.$

2.17. $(y^2x + y^2)dy + xdx = 0.$

2.18. $(1 + x^3)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy = 0.$

2.19. $xy' - y = y^2.$

2.20. $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xydy.$

2.21. $y' - xy^2 = 2xy.$

3.1. $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$.

3.2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$.

3.3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

3.4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

3.5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$.

3.6. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

3.7. $xy' - y = x \operatorname{tg}(y/x)$.

3.8. $xy' = y - xe^{y/x}$.

3.9. $xy' - y = (x + y)\ln((x + y)/x)$.

3.10. $xy' = y \cos \ln (y/x)$.

3.11. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.

3.12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

3.13. $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$.

3.14. $y' = y/x - 1$.

3.15. $y'x + x + y = 0$.

3.16. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

3.17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

3.18. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$.

3.19. $(x - y)ydx - x^2dy = 0$.

3.20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

3.21. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$.

4. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

4.1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3, \quad y(0) = 0$.

4.2. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x, \quad y(0) = 0$.

4.3. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}, \quad y(0) = 0$.

4.4. $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 0.$

4.5. $y' = 2x(x^2 + y), \; y(0) = 0.$

4.6. $y' - y = e^x, \; y(0) = 1.$

4.7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, \; y(1) = \frac{1}{2e}.$

4.8. $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy, \; y(0) = \pi/4.$

4.9. $x^2y' + xy + 1 = 0, y(1) = 0.$

4.10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2, y(2) = 1.$

4.11. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy, y(0) = 1.$

4.12. $y' = y/(3x - y^2), \quad y(0) = 1.$

4.13. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1), \quad y(0) = 1.$

4.14. $x(y' - y) = e^x, y(1) = 0.$

4.15. $y = x(y' - x\cos x), \quad y(\pi/2) = 0.$

4.16. $(xy' - 1)\ln x = 2y, \; y(e) = 0.$

4.17. $(2e^y - x)y' = 1, \quad y(0) = 0.$

4.18. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}, \; y(1) = 0.$

4.19. $(x + y^2)dy = ydx, \; y(0) = 1.$

4.20. $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1, \quad y(0) = \pi/2.$

4.21. $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2, \quad y(0) = 0.$

№5

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

1. $y'' = y'e^y, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2. $y'^2 + 2yy'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
3. $yy'' + y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
4. $y'' + 2yy'^3 = 0, \; y(0) = 2, \; y'(0) = 1/3.$
5. $y''\operatorname{tg} y = 2y'^2, \; y(1) = \pi/2, \; y'(1) = 2.$
6. $2yy'' = y'^2, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 1.$
7. $yy'' - y'^2 = y^4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

8. $y'' = -1/(2y^3), \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

9. $y'' = 1 - y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

10. $y''^2 = y', \quad y(0) = 2/3, \quad y'(0) = 1.$

11. $2yy'' - y'^2 + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

12. $y'' = 2 - y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

13. $y'' = 1/y^3, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

14. $yy'' - 2y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

15. $y'' = y' + y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

16. $y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

17. $y''(1 + y) = 5y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

18. $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

19. $4y''^2 = 1 + y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

20. $2y'^2 = (y - 1)y'', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

21. $1 + y'^2 = yy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Решение типового варианта по теме «Дифференциальные уравнения»

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$

▶ Преобразуем данное уравнение:

$$y(1-x^2)dy=-x(y^2+1)dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{ydy}{y^2+1}=\frac{-xdx}{1-x^2}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int\frac{ydy}{y^2+1}=-\int\frac{xdx}{1-x^2},\ \frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}\ln C,$$
$$y^2+1=C|x^2-1|,\ y^2=C|x^2-1|-1.$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения является

$$y=\pm\sqrt{C|x^2-1|-1}.$$ ◀

2. $\sec^2 x\operatorname{tg} y dx+\sec^2 y\operatorname{tg} x dy=0.$

▶ Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем их и интегрируем уравнение:

$$\frac{\sec^2 y dy}{\operatorname{tg} y}=-\frac{\sec^2 x dx}{\operatorname{tg} x},\ \int\frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y}=-\int\frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x},$$
$$\ln|\operatorname{tg} y|=-\ln|\operatorname{tg} x|+\ln|C|,\ \operatorname{tg} y=C/\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} x=C,$$

т. е. получили общий интеграл дифференциального уравнения. ◀

3. $y-x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}.$

▶ Из данного уравнения находим $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x+y}.$$

Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = xu(x)$. Далее находим:

$$y' = u'x + u,\ u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux},\ u'x + u = \frac{u-1}{1+u},$$

$$u'x = \frac{u-1}{u+1} - u = \frac{-u^2-1}{u+1},\ x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{u+1}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x},\ \int \frac{u+1}{u^2+1}du = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2udu}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \operatorname{arctg} u = \ln|C/x|,\ \operatorname{arctg} u = \ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right|,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

т. е. нашли общий интеграл исходного уравнения. ◀

4. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$, $y(0) = \ln 5$.

▶ Преобразуем уравнение, выделив производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1-x},\ \frac{dy}{dx} + \frac{1-x}{1-x}y = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Уравнение $\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{1-x}$ — линейное первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$. Имеем:

$$y' = u'v + uv',\ u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\right) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (1)$$

Находим функцию $v(x)$ из условия $\frac{dv}{dx} + v = 0$:

$$\frac{dv}{dx} = -v,\ \frac{dv}{v} = -dx,\ \int \frac{dv}{v} = -\int dx,$$
$$\ln|v| = -x,\ v = e^{-x}.$$

Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (1):

$$\frac{du}{dx}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x},\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x},$$

$$du = \frac{dx}{1-x},\ \int du = \int \frac{dx}{1-x},\ u = -\ln|1-x| + \ln C,$$

$$u = \ln\frac{C}{|1-x|}.$$

Тогда

$$y = uv = e^{-x}\ln\frac{C}{|1-x|}$$

является общим решением исходного уравнения. Находим C, используя начальное условие: $y(0) = \ln C = \ln 5$, $C = 5$.

Окончательно получаем, что частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}.\ ◀$$

Задание № 5

Найти решение дифференциального уравнения $y^3y'' = -1$, допускающего понижение порядка, которое удовлетворяет заданным условиям: $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

▶ Данное уравнение относится к III типу (см. § 11.5 и пример 4). Поэтому понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p\frac{dp}{du}$. Далее,

$$y^3 p\frac{dp}{dy}=-1,\ pdp=-\frac{dy}{y^3},$$

$$\int pdp=-\int\frac{dy}{y^3},\quad \frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+C_1,$$

$$p^2=\frac{1}{y^2}+2C_1,\quad p=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1},$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{1+2C_1y^2}}{y},\quad dx=\pm\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}},$$

$$x=\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}+C_2=\frac{\pm 1}{4C_1}\int(1+2C_1y^2)^{-1/2}d(1+2C_1y^2),$$

$$x=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+C_1y^2}+C_2,$$

т. е. получили общее решение исходного уравнения. Определим значения C_1 и C_2, использовав начальные данные. При $x=1$, $y=1$ и $y'=0$ имеем:

$$1=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1}+C_2,$$
$$0=\pm\sqrt{1+2C_1},$$

откуда $\qquad 1+2C_1=0,\ C_1=-1/2,\ C_2=1.$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$x=\mp\sqrt{1-y^2}+1.$$

Геометрически оно представляет собой левую или правую половину окружности $(x-1)^2+y^2=1$. ◄

Решение типового варианта по теме «Кратные интегралы»

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D (x,\ y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D ограничена линиями $x=\sqrt{y},\ x=\sqrt{2+y},\ x=0,\ x=2$.

▶ Область D изображена на рис. 13.31 и ограничена дугами парабол $x^2=y+2$, $x^2=y$ и прямыми $x=0$, $x=2$. Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x,\ y)dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0} dy\int\limits_0^{\sqrt{y+2}} f(x,\ y)dx+\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y+2}} f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)dx. ◀$$

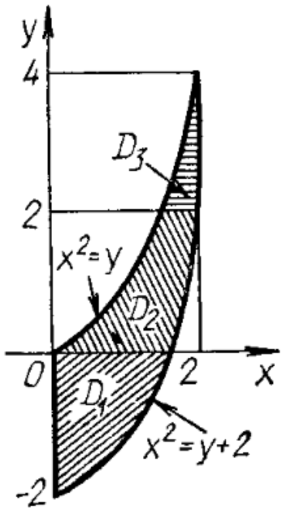


Рис. 13.31

2. Вычислить двойной интеграл

$$I=\int\limits_{-R}^{0} dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$$

используя полярные координаты. Найти его численное значение при $R=1$.

▶ Область интегрирования D представляет собой четверть круга, расположенного во втором квадранте (рис. 13.33).

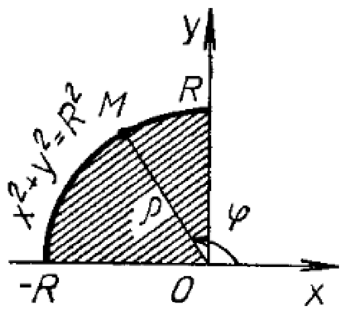


Рис. 13.33

Перейдем к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=$ $=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$, где $0\leqslant\rho\leqslant R$; $\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi$. Тогда

$$I=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{\ln(1+\rho)}{\rho}\,\rho d\varphi=$$

$$=\begin{vmatrix}u=\ln(1+\rho), & du=d\rho/(1+\rho),\\ dv=d\rho, & v=\rho,\end{vmatrix}=$$

$$=\rho\Big|_{\pi/2}^{\pi}\left(\rho\ln(1+\rho)\Big|_0^R-\int\limits_0^R\frac{\rho}{1+\rho}\,d\rho\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+R)-\rho\Big|_0^R+\ln(1+\rho)\Big|_0^R\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}(R\ln(1+R)-R+\ln(1+R)).$$

При $R=1$ получаем

$$I=\frac{\pi}{2}(2\ln 2-1).\ ◀$$

3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V\dfrac{xzdxdydz}{x^2+y^2-R^2}$ по области, расположенной в первом октанте и ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=h$ и конусом $z^2=\dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$, с помощью цилиндрических координат.

▶ На рис. 13.39 изображена область интегрирования V и ее проекция D на плоскость Oxy.

Перейдя к цилиндрическим координатам ρ, φ, z по формулам (13.26), в которых для данной области $0\leqslant z\leqslant h$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\rho\leqslant R$, получим:

$$z^2=h^2\rho^2/R^2,\ z=h\rho/R,$$

$$\iiint_V \frac{xzdxdydz}{x^2+y^2-R^2} = \iiint_V \frac{\rho^2 \cos \varphi z d\varphi d\rho dz}{\rho^2 - R^2} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2} d\rho \int_{h\rho/R}^{h} zdz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2} \left. \frac{z^2}{2} \right|_{h\rho/R}^{h} d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2} \left(h^2 - \frac{h^2}{R^2} \rho^2 \right) d\rho =$$

$$= - \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = - \frac{h^2}{2R^2} \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R =$$

$$= - \frac{1}{6} Rh^2. \blacktriangleleft$$

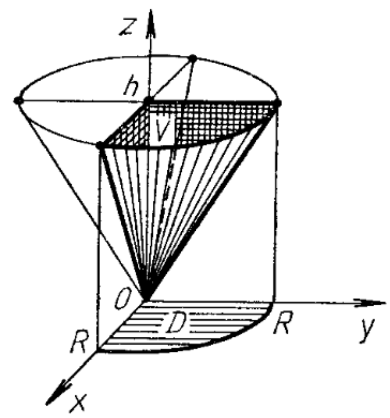


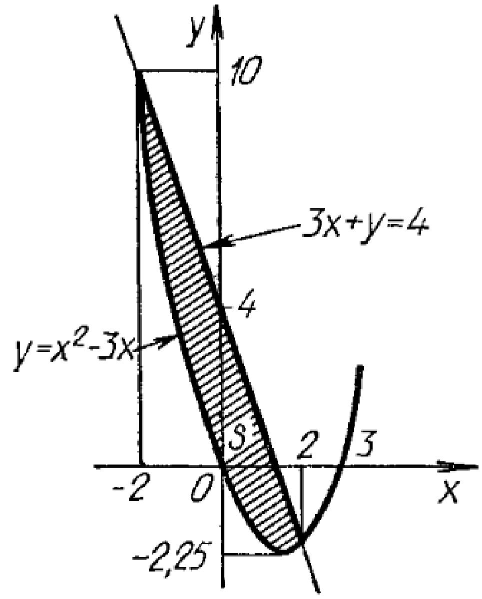
Рис. 13.39

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x$ и $3x + y - 4 = 0$.

▶ Данная плоская фигура ограничена снизу параболой $y = x^2 - 3x$, сверху прямой $3x + y - 4 = 0$ (рис. 13.34). Следовательно,

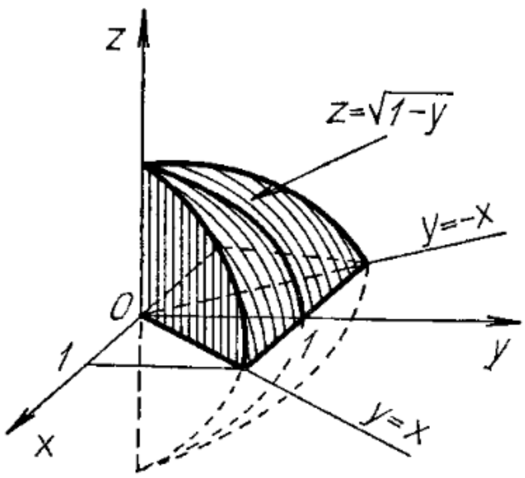
$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2-3x}^{4-3x} dy = \int_{-2}^{2} (4 - 3x - x^2 + 3x) dx =$$

$$= \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$



Р и с. 13.34

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{1-y}$, $y=x$, $y=-x$, $z=0$.



Р и с. 13.36

▶ Данное тело ограничено сверху параболическим цилиндром $z=\sqrt{1-y}$ (рис. 13.36), поэтому

$$v=\iint\limits_D \sqrt{1-y}\,dxdy=2\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y \sqrt{1-y}\,dx=$$

$$=2\int\limits_0^1 \sqrt{1-y}\,x\Big|_0^y dy=2\int\limits_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy=|\sqrt{1-y}=t,$$

$$y = 1 - t^2,\ dy = -2tdt,\ t = 1 \text{ при } y = 0 \text{ и } t = 0$$

$$\text{при } y = 1 \,| = 2\int_0^1 (1 - t^2)t(-2tdt) = -4\int_1^0 (t^2 - t^4)dt =$$

$$= -4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_1^0 = \frac{8}{15}. \ ◀$$

Решение типового варианта по теме

«Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений»

1. Для данного определителя

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{32}. Вычислить определитель Δ_4: а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам второго столбца; в) получив предварительно нули в первой строке.

▶ Находим:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 16 + 6 + 12 + $$

$$+ 4 - 16 = -18,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 - 12 - 8 = -20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-18) = 18,$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -(-20) = 20.$$

а) Вычислим

$$\Delta_4 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(8 + 2 + 4 - 4) - 2(-8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16) +$$
$$+ (16 - 12 - 4 + 32) = 38;$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta_4 = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-8 + 6 - 16 + 12 + 4 - 16) - 2(12 + 6 -$$
$$- 6 - 16) + (-6 + 16 - 12 - 4) = 38;$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta_4 = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-8+6-16+12+4-16)-2(12+6-$$
$$-6-16)+(-6+16-12-4)=38;$$

в) Вычислим Δ_4, получив предварительно нули в первой строке. Используем свойство 10 определителей (см. § 1.1). Умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на -2 и прибавим ко второму. Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-56+18) = 38.$$

2. Даны две матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

▶ а) Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Находим матрицу $C=AB$, элементы которой $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+$ $+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$. Имеем:

$$C = AB = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix};$$

б) Вычислим

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6 \\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2 \\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $AB \neq BA$;

в) Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид (см. формулу (1.11))

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\det A=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$$

т. е. матрица A — невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1}. Находим:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=14,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{bmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{8}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ -\frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{bmatrix};$$

г) Имеем:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E;$$

д) Имеем:

$$A^{-1}A=\frac{1}{39}\begin{bmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

т. е. обратная матрица найдена верно. ◀

3. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}x_1+5x_2-x_3&=3,\\ 2x_1+4x_2-3x_3&=2,\\ 3x_1-x_2-3x_3&=-7.\end{aligned}\right\}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

▶ Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера — Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right].$$

Для этого умножим первую строку матрицы B на -2 и сложим со второй, затем умножим первую строку на -3 и сложим с третьей, поменяем местами второй и третий столбцы. Получим

$$B=\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrr|r}1 & -1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & -6 & -4\\ 0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right].$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=3$ (т. е. числу неизвестных). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) По формулам Крамера (1.17)

$$x_1=\Delta_3^{(1)}/\Delta_3,\ x_2=\Delta_3^{(2)}/\Delta_3,\ x_3=\Delta_3^{(3)}/\Delta_3,$$

где

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}=-16;$$

$$\Delta_3^{(1)}=\begin{vmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ -2 & -1 & -3\end{vmatrix}=64;$$

$$\Delta_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -3\\ 3 & -7 & -3\end{vmatrix}=-16;$$

$$\Delta_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & -1 & -7\end{vmatrix}=32,$$

находим: $x_1=64/(-16)=-4$, $x_2=-16/(-16)=1$, $x_3=32/(-16)=-2$;

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $AX=\tilde{B}$. Решение системы в матричной форме имеет вид $x=A^{-1}\tilde{B}$. По формуле (1.11) находим обратную матрицу A^{-1} (она существует, так как $\Delta_3=\det A=$ $=-16\neq 0$):

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-15,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=16,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-14,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=16,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-6,$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}.$$

Решение системы:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (-45+32+77)/(-16) \\ (-9-7)/(-16) \\ (-42+32+42)/(-16) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Итак, $x_1=-4,\ x_2=1,\ x_3=-2$;

в) Решим систему методом Гаусса. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 2 и вычтем из второго, затем первое уравнение умножим на 3 и вычтем из третьего:

$$\left.\begin{aligned} x_1+5x_2-x_3&=3, \\ -6x_2-x_3&=-4, \\ -16x_2\qquad&=-16. \end{aligned}\right\}$$

Из полученной системы находим $x_1=-4,\ x_2=1,\ x_3=-2$. ◀

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+4x_2-x_3&=0, \\ x_1-3x_2+5x_3&=0, \\ 4x_1+x_2+4x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

▶ Так как

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

то система имеет бесчисленное множество решений. Поскольку $\operatorname{rang} A = 2$, $n = 3$, возьмем любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдем ее решение. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и переместим члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= x_3, \\ x_1 - 3x_2 &= -5x_3. \end{aligned}\right\}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера (1.17):

$$x_1 = \Delta_2^{(1)}/\Delta_2, \quad x_2 = \Delta_2^{(2)}/\Delta_2,$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Отсюда находим, что $x_1 = -17x_3/13$, $x_2 = 16x_3/13$. Полагая $x_3 = 13k$, где k — произвольный коэффициент пропорциональности, получаем решение исходной системы: $x_1 = -17k$, $x_2 = 16k$, $x_3 = 13k$. ◀

Решение типового варианта по теме
«**Неопределенный интеграл**»

Найти неопределенные интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{3-7x}{4x^2+5}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{3-7x}{4x^2+5}\,dx = 3\int \frac{dx}{(2x)^2+(\sqrt{5})^2} - 7\int \frac{xdx}{4x^2+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+(\sqrt{5})^2} - \frac{7}{8}\int \frac{8xdx}{4x^2+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8}\ln(4x^2+5) + C. \blacktriangleleft$$

2. $\displaystyle\int \frac{15x-x^2-11}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{15x-x^2-11}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx = \int \frac{15x-x^2-11}{(x-1)^2(x+2)}\,dx \overset{(8.9)}{=\!=}$$

$$\overset{(8.9)}{=\!=} \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}\right)dx \overset{\S 8.6}{=\!=}$$

$$\overset{\S 8.6}{=\!=} \left|\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{15x-x^2-11 \equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2,} \\ x=1 & 3=3B, \quad B=1, \\ x=-2 & -45=9C, \quad C=-5, \\ x^2 & -1=A+C, \quad A=4 \end{array}\right| =$$

$$= \int\left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5}{x+2}\right)dx =$$

$$= 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 5\ln|x+2| + C^*.$$

3. $\int (x-7)\sin 5x\,dx.$

$$\blacktriangleright \int (x-7)\sin 5x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x-7, & du = dx, \\ dv = \sin 5x\,dx, & v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C. \blacktriangleleft$$

4. $\int \cos^3(7x+2)dx.$

$\blacktriangleright$ Используя тригонометрическое тождество $\cos^2(7x+2) = 1-\sin^2(7x+2)$, получаем

$$\int \cos^3(7x+2)dx = \int \cos^2(7x+2)\cos(7x+2)dx =$$
$$= \int (1-\sin^2(7x+2))\cos(7x+2)dx = \int \cos(7x+2)dx -$$
$$-\int \sin^2(7x+2)\cos(7x+2)dx = \frac{1}{7}\sin(7x+2) -$$
$$-\frac{1}{7}\int \sin^2(7x+2)d(\sin(7x+2)) = \frac{1}{7}\sin(7x+2) -$$
$$-\frac{1}{21}\sin^3(7x+2) + C. \blacktriangleleft$$

5. $\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}dx \overset{\S 8.7}{=} \left| \begin{matrix} \sqrt{x-2} = t, & x-2 = t^2, \\ x = t^2+2, & dx = 2t\,dt \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\int \frac{(t^2+3)t\,dt}{t-3} = -2\int \left(t^2+3t+12+\frac{36}{t-3}\right)dt =$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 12t + 36\ln|t-3|\right) + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} - 3(x-2) - 24\sqrt{x-2} -$$

$$-72\ln\left|\sqrt{x-2}-3\right| + C. \blacktriangleleft$$

Типовой расчет по теме «Приложения определенного интеграла»

1. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1.1. $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$.
1.2. $y = x^2$, $y = 3 - x$.
1.3. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.
1.4. $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$.
1.5. $\rho = 4\cos 3\varphi$.
1.6. $\rho = 3\cos 2\varphi$.
1.7. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$.
1.8. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi$.
1.9. $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$.
1.10. $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.
1.11. $\rho = 2\sin 3\varphi$.
1.12. $\rho = 2 + \cos\varphi$.
1.13. $y = 1/(1 + x^2)$, $y = x^2/2$.
1.14. $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$.
1.15. $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$.
1.16. $\rho = 4\sin^2\varphi$.
1.17. $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.
1.18. $y^2 = 9x$. $y = 3x$.
1.19. $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.
1.20. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
1.21. $y^2 = x^3$, $x = 2$.
1.22. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
1.23. $y^2 = (4 - x^3)$, $x = 0$.
1.24. $\rho = 3\sin 4\varphi$.
1.25. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.
1.26. $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$
1.27. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ $x = 2$.
1.28. $x^2 = 4y$, $y = 8/(x^2 + 4)$.
1.29. $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$.
1.30. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

2. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги данной линии.

2.1. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.
2.2. $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.
2.3. $\rho = \sin^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.
2.4. $\rho = 2\sin^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.
2.5. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$.
2.6. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$.
2.7. $y^2 = (x + 1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.

2.8. $y = 1 - \ln\cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/6)$.
2.9. $\rho = 6\cos^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.
2.10. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^4 t$.
2.11. $y^2 = (x-1)^3$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(6, \sqrt{125})$

2.12. $y^2 = x^5$, отсеченной прямой $x = 5$.
2.13. $\rho = 3\cos\varphi$.
2.14. $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$.
2.15. $\rho = 2\cos^3(\varphi/3)$.

2.16. $x = 5\cos^2 t$, $y = 5\sin^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$.

2.17. $9y^2 = 4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью Oy.
2.18. $\rho = 3\sin\varphi$.
2.19. $y = \ln\sin x$ $(\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.
2.20. $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2.21. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$. (*Ответ:* 16,00.)
2.22. $y^2 = (x-1)^3$ от точки $A(2, -1)$ до точки $B(5, -8)$.

2.23. $x = 7(t - \sin t)$, $y = 7(1 - \cos t)$ $(2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi)$.

2.24. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.
2.25. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$.
2.26. $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$ (петля).
2.27. $\rho = 5\sin\varphi$.
2.28. $\rho = 4\cos\varphi$.
2.29. $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$.
2.30. $y^2 = x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(4, 8)$.

3. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси координат.
3.1. Ф: $y^2 = 4 - x$, $x = 0$, Oy.
3.2. Ф: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$, Ox.
3.3. Ф: $x^2/9 + y^2/4 = 1$, Oy.
3.4. Ф: $y^3 = x^2$, $y = 1$, Ox.
3.5. Ф: $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$, Ox.

3.6. Ф: $x = 3\cos^2 t$, $y = 4\sin^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$, Oy.

3.7. Ф: $y^2 = x$, $x^2 = y$, Ox.
3.8. Ф: $y^2 = (x-1)^3$, $x = 2$, Ox.
3.9. Ф: $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $y = 0$, Ox.

3.10. Ф: $y = \sin x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, Ox.
3.11. Ф: $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$, Ox.
3.12. Ф: $x = 2\cos t$, $y = 5 \sin t$, Oy.
3.13. Ф: $y = x^2$, $8x = y^2$, Oy.
3.14. Ф: $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, Ox.
3.15. Ф: $y^2 = 4x/3$, $x = 3$, Ox.
3.16. Ф: $y = 2x - x^2$, $y = 0$, Ox.
3.17. Ф: $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, полярная ось
3.18. Ф: $x = 7\cos^3 t$, $y = 7 \sin^3 t$, Oy. (
3.19. Ф: $x^2/16 + y^2/1 = 1$, Ox.
3.20. Ф: $x^3 = (y-1)^2$, $x = 0$, $y = 0$, Ox.
3.21. Ф: $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$, Ox.
3.22. Ф: $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = 2 \sin t$, Oy.
3.23. Ф: $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, Ox.
3.24. Ф: $y = -x^2 + 8$, $y = x^2$, Ox.
3.25. Ф: $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$, Ox. (
3.26. Ф: $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, Oy.
3.27. Ф: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, Ox.
3.28. Ф: $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$, Ox.
3.29. Ф: $y = x - x^2$, $y = 0$, Ox.
3.30. Ф: $y = 2 - x^2/2$, $x + y = 2$, Oy.

4. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой L вокруг указанной оси.

4.1. L: $y = x^3/3$ $(-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2)$, Ox.
4.2. L: $\rho = 2\cos\varphi$, полярная ось.
4.3. L: $x = 10(t - \sin t)$, $y = 10(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox.
4.4. L: $y = x^2/2$, отсеченная прямой $y = 3/2$, Oy.
4.5. L: $3y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$, Ox.
4.6. L: $y = \sqrt{x}$, отсеченная прямой $y = x$, Ox.
4.7. L: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox.
4.8. L: $x = \cos t$, $y = 3 + \sin t$, Ox.
4.9. L: $3x = y^3$ $(0 \leqslant y \leqslant 2)$, Oy.
4.10. L: $y = x^3/3$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, Ox.
4.11. L: $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, Ox.
4.12. L: $x^2 = 4 + y$, отсекаемая прямой $y = 2$, Oy.
4.13. L: $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox.
4.14. L: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, Ox.
4.15. L: $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, полярная ось.
4.16. L: $y^2 = 4 + x$, отсекаемая прямой $x = 2$, Ox.
4.17. L: $y^2 = 2x$, отсекаемая прямой $2x = 3$, Ox.

4.18. L: $3y = x^3$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, Ox.
4.19. L: $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$, полярная ось.
4.20. L: $\rho = 6\sin\varphi$, полярная ось.
4.21. L: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox.

4.22. L: $\rho = 2\sin\varphi$, полярная ось.
4.23. L: $\rho = \frac{2}{3}\cos\varphi$, полярная ось.
4.24. L: $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$, Ox.
4.25. L: $x = 2\cos t$, $y = 3 + 2\sin t$, Ox.
4.26. L: $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$, полярная ось.
4.27. L: $y = x^3$ между прямыми $x = \pm 2/3$, Ox.

4.28. L: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, Ox.
4.29. L: $x = \cos t$, $y = 2 + \sin t$, Ox.
4.30. L: $\rho = 4\sin\varphi$, полярная ось.

5. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

1. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{16x^4 + 1}$, б) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 4x}}$.

2. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{16x\,dx}{16x^4 - 1}$; б) $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$.

3. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$; б) $\int\limits_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

4. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$; б) $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - x)^5}}$.

5. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$; б) $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x - 1)}{3x - 1}\,dx$.

6. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$; б) $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$.

7. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(16 + x^2)^5}}$; б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\ln 2\,dx}{(1 - x)\ln^2(1 - x)}$.

8. а) $\int\limits_4^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$; б) $\int\limits_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2 - 3x)}}{2 - 3x}\,dx$.

9. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{1 - x^4}$.

10. а) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$; б) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx$.

11. а) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)}\,dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

12. а) $\displaystyle\int_{1/2}^{\infty} \frac{16\,dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$; б) $\displaystyle\int_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

13. а) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{4x^2+4x+5}$; б) $\displaystyle\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

14. а) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$; б) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x}\,dx$.

15. а) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}\,dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

16. а) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

17. а) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{4\,dx}{x(1+\ln^2 x)}$; б) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

18. а) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\sin x\,dx$; б) $\displaystyle\int_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

19. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{7\,dx}{(x^2-4x)\ln 5}$; б) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}\ln 2}$.

20. а) $\displaystyle\int_{1/3}^{\infty} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$; б) $\displaystyle\int_{0}^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

21. а) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$; б) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$.

22. а) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln^3}$; б) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{\sqrt[3]{9x}\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

23. а) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-3x}x\,dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

24. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

25. а) $\displaystyle\int_{0} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$; б) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

.26. а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$; б) $\int\limits_1^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$.

.27. а) $\int\limits_{e^2}^\infty \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; б) $\int\limits_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

.28. а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}$; б) $\int\limits_0^4 \frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$.

29. а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{9x^2-9x+2}$; б) $\int\limits_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

30. а) $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

Решение типового варианта

1. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$ и $y=\ln^2 x$ (рис. 9.23.)

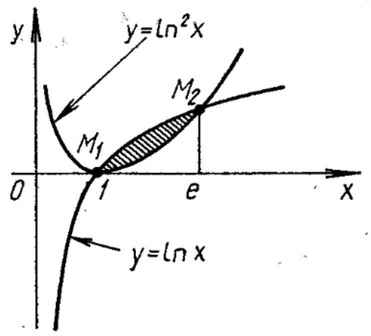


Рис. 9.23

▶ Найдем точки пересечения данных крнвых: $M_1(1, 0)$, $M_2(e, 1)$. Теперь воспользуемся формулой (9.7). Имеем:

$$S=\int\limits_1^e(\ln x-\ln^2 x)dx,$$

$$\int \ln^2 xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x, & du=2\ln x\frac{1}{x}dx, \\ dv=dx, & v=x \end{matrix}\right|= \\ =x\ln^2 x-2\int \ln xdx,$$

$$\int \ln xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & du=\frac{1}{x}dx, \\ dv=dx, & v=x \end{matrix}\right|=x\ln x-\int dx= \\ =x\ln x-x+C.$$

Тогда

$$S=\int\limits_1^e \ln xdx-\int\limits_1^e \ln^2 xdx=(x\ln x-x)\Big|_1^e-(x\ln^2 x- \\ -2x\ln x+2x)\Big|_1^e=e\ln e-e+1-(e\ln^2 e-2e\ln e+ \\ +2e)+2=3-e\approx 0{,}28.$$ ◀

2. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги линии $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

▶ Воспользуемся формулой (9.11):

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Находим подынтегральную функцию:

$$\frac{dx}{dt}=2t\sin t+(t^2-2)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t,$$

$$\frac{dy}{dt}=-2t\cos t-(2-t^2)\sin t+2\sin t+2t\cos t=t^2\sin t,$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}=t^2.$$

Окончательно имеем

$$l=\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}\approx 10{,}32.\ ◀$$

3. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной параболами $y=3-x^2$ и $y=x^2+1$.

▶ Находим точки пересечения парабол: $M_1(-1,\ 2)$, $M_2(1,\ 2)$.

Объем V данного тела получаем как разность объемов V_2-V_1, где, согласно формуле (9.14),

$$V_2=\pi\int_{-1}^{1}(3-x^2)^2dx,\quad V_1=\pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2dx.$$

Таким образом,

$$V=V_2-V\ =\pi\int_{-1}^{1}(3-x^2)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2dx=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}((3-x^2)^2-(x^2+1)^2)dx=\pi\int_{-1}^{1}(8-8x^2)dx=$$

$$=8\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=16\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)\approx 33{,}50.\ ◀$$

На рис. 9.24 изображены плоская фигура в плоскости Oxy и тело (из него вырезана четвертая часть), полученное вращением данной фигуры вокруг оси Ox.

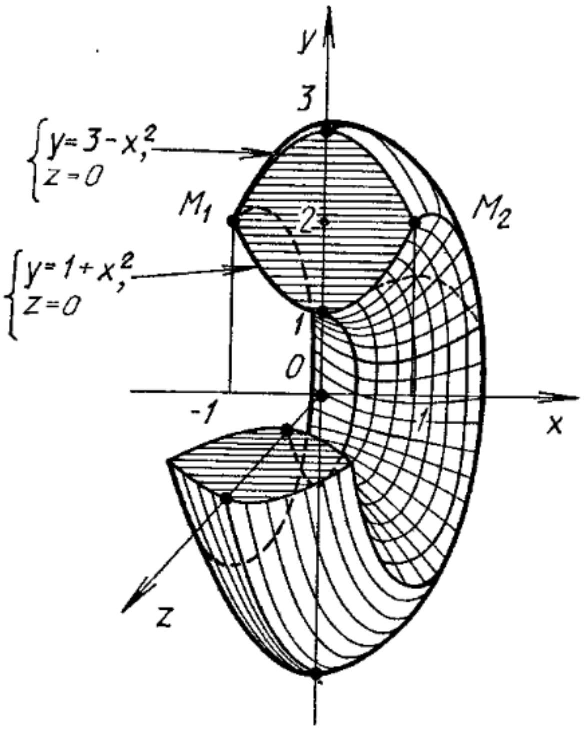


Рис. 9.24

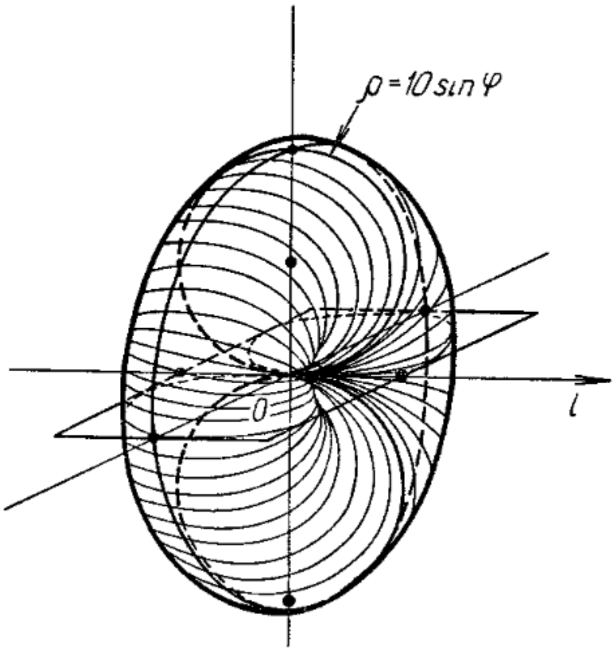


Рис. 9.25

4. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь поверхности, полученной вращением окружности $\rho = 10 \sin \varphi$ вокруг полярной оси Ol (рис. 9.25.)

▶ Воспользуемся формулами (9.15) (записанной в полярной системе координат) и (9.12):

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y \sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}\, d\varphi,$$

где $y = \rho \sin \varphi$. Далее находим: $\rho'_\varphi = 10 \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi = 10 \sin^2 \varphi$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$,

$$S = 2\pi \int_0^\pi 10 \sin^2 \varphi \sqrt{100 \cos^2 \varphi + 100 \sin^2 \varphi}\, d\varphi =$$

$$= 200\pi \int_0^\pi \sin^2 \varphi\, d\varphi = 200\pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 100\pi \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^\pi \approx 985{,}96. \blacktriangleleft$$

5. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$; б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

▶ а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} =$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Bigg|_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Bigg|_{0}^{\beta} =$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\alpha+2}{\sqrt{5}} \right) +$$

$$+ \lim_{\beta \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\beta+2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\pi}{2} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}};$$

б) $$\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_{0}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\beta \to 0-} \int_{-1}^{\beta} (3x^{4/3} + 2x^{-2/3}) dx + \lim_{\alpha \to 0+} \int_{\alpha}^{1} (3x^{4/3} + 2x^{-2/3}) dx =$$

$$= \lim_{\beta \to 0-} \left(\frac{9}{7} x^{7/3} + 6x^{1/3} \right) \Bigg|_{-1}^{\beta} + \lim_{\alpha \to 0+} \left(\frac{9}{7} x^{7/3} + 6x^{1/3} \right) \Bigg|_{\alpha}^{1} =$$

$$\lim_{\beta \to 0-} \left(\frac{9}{7} \beta^{7/3} + 6\beta^{1/3} + \frac{9}{7} + 6 \right) +$$

$$+ \lim_{\alpha \to 0+} \left(\frac{9}{7} + 6 - \frac{9}{7} \alpha^{7/3} - 6\alpha^{1/3} \right) = 14\frac{4}{7}. \blacktriangleleft$$

Решение типового варианта по теме «**Вычисление и применение производных**»

1. $y=\sqrt[7]{(x+5)/(x-5)}\operatorname{ctg}(3x-4)$.

▶ $$y'=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-6/7}\frac{x-5-(x+5)}{(x-5)^2}\operatorname{ctg}(3x-4)-$$

$$-\frac{1}{\sin^2(3x-4)}\cdot 3\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}=-\frac{10}{7}\frac{\operatorname{ctg}(3x-4)}{\sqrt[7]{(x+5)^6/(x-5)^6}}-$$

$$-\frac{3}{\sin^2(3x-4)}\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}.$$ ◀

2. Найти y' и y'', если

$$\left.\begin{aligned}x&=3t^4-t^2,\\ y&=t^3-5.\end{aligned}\right\}$$

▶ Так как

$$\left.\begin{aligned}x'&=12t^3-2t,\\ y'&=3t^2\end{aligned}\right\}\text{ и }\left.\begin{aligned}x''&=36t^2-2,\\ y''&=6t,\end{aligned}\right\}$$

то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2}{12t^3-2t}=\frac{3t}{12t^2-2},$$

$$y''_x=\frac{y''_t x'_t-x''_t y'_t}{x'^3_t}=\frac{6t(12t^3-2t)-(36t^2-2)\cdot 3t^2}{(12t^3-2t)^3}=$$

$$=\frac{72t^4-12t^2-108t^4+6t^2}{(12t^3-2t)^3}=-\frac{3(6t^2+1)}{4t(6t^2-1)^3}.$$ ◀

С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

3. arctg 0,98.

$$y=\operatorname{arctg}x,\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}98-1=-0{,}02,$$
$$y(x_0)=\operatorname{arctg}1=\pi/4,$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2},\ y'(1) = 0{,}5,\ \operatorname{arctg} 0{,}98 \approx \pi/4 - 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}77,$$

$$\delta = \left| \frac{0{,}77 - 0{,}78}{0{,}77} \right| \cdot 100\ \% = 13\ \%. \blacktriangleleft$$

4. Провести полное исследование функции $y = (x + 3)^2/(x - 4)$ и построить ее график.

1. Областью определения функции является множество $x \in (-\infty;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

2. Ордината точки графика $y > 0$ при $x > 4$, $y < 0$ при $x < 4$.

3. Точки пересечения графика данной функции с осями координат: $(0,\ -9/4)$ и $(-3,\ 0)$.

4. Легко находим, что $x = 4$ — вертикальная асимптота, причем:

$$\lim_{x \to 4-0} y = \lim_{x \to 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = -\infty,\quad \lim_{x \to 4+0} y =$$
$$= \lim_{x \to 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = +\infty.$$

Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{(x+3)^2}{x-4} - x \right) =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x}{x-4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{10x + 9}{x-4} = 10.$$

Таким образом, существует единственная наклонная асимптота $y = x + 10$.

5. Исследуем функцию на возрастание, убывание, локальный экстремум:

$$y' = \frac{2(x+3)(x-4) - (x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 24 - x^2 - 6x - 9}{(x-4)^2} =$$
$$= \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2}.$$

Из $y' = 0$ следует $x^2 - 8x - 33 = 0$, откуда $x_1 = 11$, $x_2 = -3$. В интервале $(-\infty;\ -3)$ $y' > 0$, следовательно, функция возрастает в этом интервале; в $(-3;\ 4)$ $y' < 0$, т. е. функция убывает. Поэтому функция в точке $x = -3$ имеет локальный максимум: $y(-3) = 0$. В интервале $(4;\ 11)$ $y' < 0$, следовательно, функция убывает на этом интервале; в $(11;\ +\infty)$ $y' > 0$, т. е. функция возрастает. В точке $x = 11$ имеем локальный минимум: $y(11) = 28$.

6. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба. Для этого найдем

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - (x^2-8x-33)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 - 8x - 8x + 32 - 2x^2 + 16x + 66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

Очевидно, что в интервале $(-\infty;\ 4)$ $y'' < 0$, и в этом интервале кривая выпукла; в $(4;\ +\infty)$ $y'' > 0$, т. е. в этом интервале кривая вогнута. Так как при $x = 4$ функция не определена, то точка перегиба отсутствует.

7. График функции изображен на рис. ◀

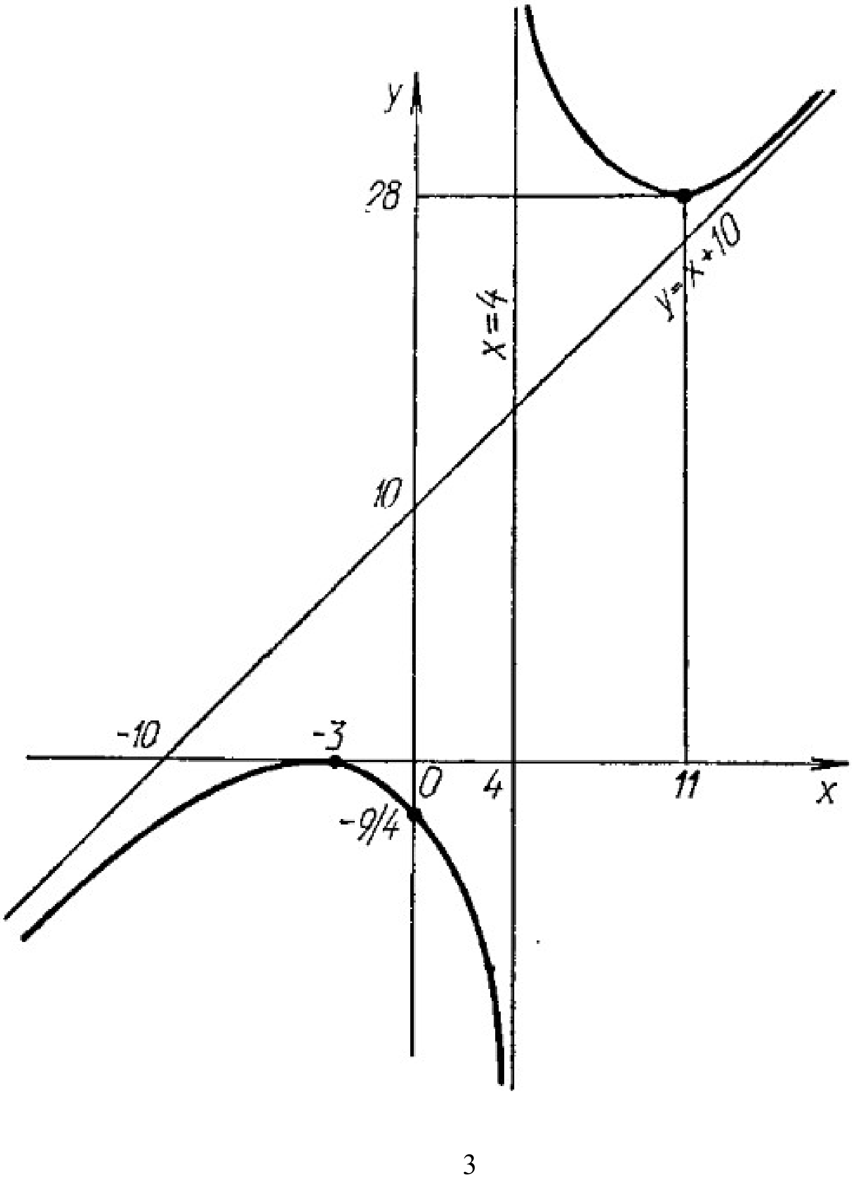


Рис.

5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$.

▶ Находим критические точки:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x,$$

Если $y' = 0$, то

$$2\cos x - 4\sin x\cos x = 0,\ \ 2\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + 2k\pi$; если же $\sin x = 1/2$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, k, $n \in \mathbf{Z}$.

Из всех найденных критических точек только $x = \pi/6$ и $x = \pi/2$ принадлежат отрезку $[0;\ \pi/2]$. Вычислим значения данной функции при $x = 0$, $x = \pi/6$, $x = \pi/2$:

$$y(0) = 1,\ \ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 2 - 1 = 1.$$

Следовательно, наибольшего значения на отрезке $[0;\ \pi/2]$ данная функция достигает в точке $x = \pi/6$: $y(\pi/6) = 1{,}5$, а наименьшего — в точках $x = 0$ и $x = \pi/2$: $y(0) = y(\pi/2) = 1$. ◀

Решение типового варианта по теме «Ряды»

Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

▶ Воспользуемся признаком Д'Аламбера. Имеем:

$$a_n = \frac{n!}{n^n},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}},\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

т. е. данный ряд сходится. ◀

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}$.

▶ Воспользуемся признаком Лейбница. Имеем:

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 7^n},\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot 7^n} = 0,$$

т. е. данный ряд сходится.

Исследуем ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 7^n}. \qquad (1)$$

Применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 7^n}{(n+1)\cdot 7^{n+1}} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{7} < 1,$$

т. е. ряд (1) сходится. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится. ◀

Найти область сходимости ряда.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-x^2)^n$.

▶ Воспользуемся радикальным признаком Коши. Находим:

$$u_n=(3-x^2)^n,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|3-x^2|^n}=|3-x^2|<1,$$
$$-1<3-x^2<1.$$

Решаем полученные неравенства:

$$3-x^2>-1,\ x^2-4<0,\ x\in(-2;\ 2);$$
$$3-x^2<1,\ x^2-2>0,\ x\in(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ \infty).$$

Пересечение найденных решений дает интервалы сходимости исследуемого ряда $x\in(-2;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ 2)$.

Исследуем сходимость ряда на концах этих интервалов. При $x=\pm 2$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Этот знакочередующийся числовой ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости числового ряда $(\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0)$. При $x=\pm\sqrt{2}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n$, который расходится, поскольку необходимый признак сходимости также не выполняется. Значит, область сходимости исследуемого ряда: $(-2;\ -\sqrt{2})\cup$ $\cup(\sqrt{2};\ 2)$. ◀

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням $x-1$ решения дифференциального уравнения $y'=2x+y^3$, $y(1)=1$ (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения.)

▶ Точка $x = 1$ не является особой для данного уравнения, поэтому его решение можно искать в виде ряда:

$$y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots$$

Имеем: $f(1) = 1$, $f'(1) = 2 + 1^3 = 3$, $f''(x) = 2 + 3y^2y'$, $f''(1) = 2 + 3 \cdot 1^2 \cdot 3 = 11$. Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получаем решение данного уравнения:

$$y = 1 + \frac{3}{1!}(x-1) + \frac{11}{2!}(x-1)^2 + \ldots \quad ◀$$

5. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

▶ Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)dx = \frac{1}{\pi}\frac{(\pi + x)^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\cos nx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \pi + x, & du = dx, \\ dv = \cos nx dx, & v = \frac{1}{n}\sin nx, \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi + x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi n^2}(1 - (-1)^n) = \frac{2}{\pi(2n-1)^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} (\pi + x) \sin nx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \pi + x, & du = dx, \\ dv = \sin nx dx, & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{\pi + x}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n} \int\limits_{-\pi}^{0} \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} \right) = -\frac{1}{n}.$$

Ряд Фурье для данной функции запишется в виде

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{n}. \blacktriangleleft$$