

2. Физически нелинейные задачи. Основные расчётные модели материалов. Сведения из теории пластичности

1°. Для расчётов конструкций в физически нелинейной постановке необходимо знать экспериментальную зависимость между напряжениями и деформациями (диаграмму деформирования). Характерная условная диаграмма одноосного растяжения образца из малоуглеродистой стали приведена на рис. 2.1 (при определении напряжений нагрузки отнесены к первоначальной площади сечения образца).

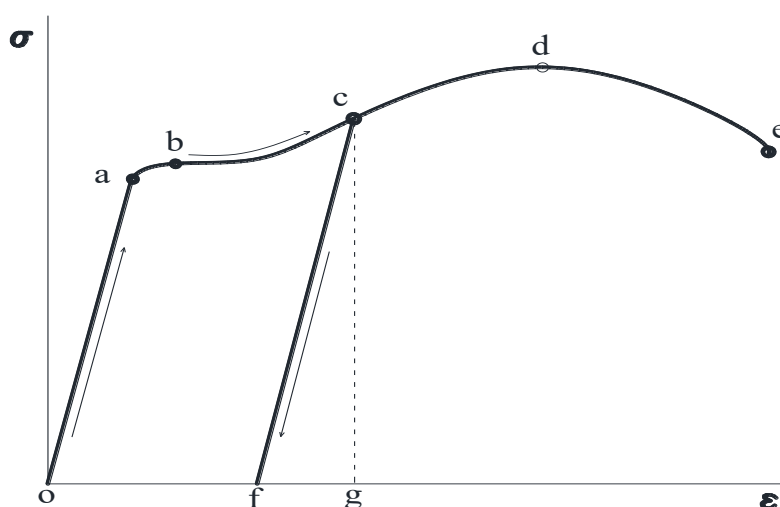


Рис. 2.1.

На начальной стадии деформирования до точки **a** с координатами $(\sigma_{\text{пц}}, \varepsilon_{\text{пц}})$ выполняется прямая пропорциональная зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука). При дальнейшем деформировании следует нелинейная зависимость. В точке **b** с координатами $(\sigma_{\text{т}}, \varepsilon_{\text{т}})$ кривая переходит в прямую почти параллельную оси деформаций, что указывает на активное развитие пластических деформаций (площадка текучести). Площадка текучести переходит в восходящий участок «упрочнения» до точки **d** $(\sigma_{\text{вр}}, \varepsilon_{\text{вр}})$, далее до точки **e** $(\sigma_{\text{р}}, \varepsilon_{\text{р}})$ несущая способность образца снижается.

Если, например, в точке **c** производить разгрузку, то диаграмма будет иметь вид прямой почти параллельной начальной прямой **oa**. При разгрузке в отличие от упругого материала деформации полностью не исчезают, исчезают *упругие деформации* ε_e (**fg**). Оставшуюся часть называют *пластической деформацией* ε_p (**of**), таким образом, деформации при нагружении за пределом текучести состоят из двух компонент упругой и пластической (остаточной)

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (2.1)$$

2°. При проведении расчётов конструкций сложный вид диаграммы упрощают и принимают кусочно-линейные модели деформирования или аппроксимируют подходящей нелинейной функцией.

Наиболее распространённые расчётные модели материалов приведены на рис. 2.2.

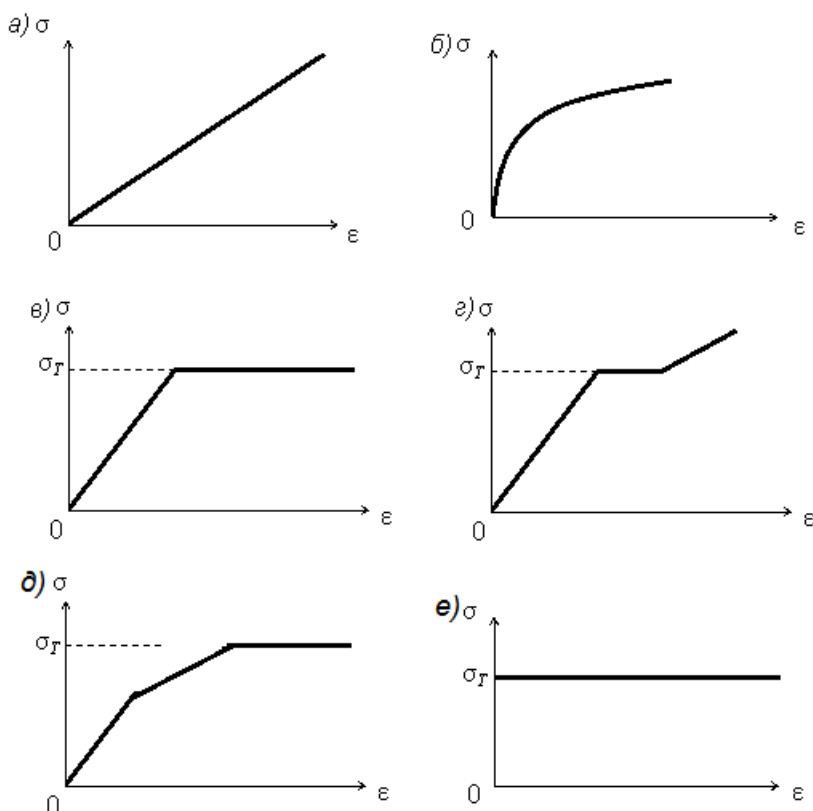


Рис. 2.2. Диаграммы деформирования материала:

- a) линейно-упругого тела (закон Гука);
- б) нелинейно-упругого тела;
- в) идеального упругопластического тела (Прандтля);
- г) упругопластического тела с линейным упрочнением;
- д) трёхлинейная модель материала (сжатый бетон);
- е) жесткопластического тела.

На рис. 2.2.а приведена диаграмма *линейно-упругого тела* отвечающего закону Гука, напряжения линейно связаны с упругими деформациями

$$\sigma = E \varepsilon_e \quad (2.2)$$

Диаграмма *нелинейно-упругого тела* (рис. 2.2.б) характеризуется одним и тем же нелинейным законом нагружения и разгрузки. Как было отмечено ранее, при активной деформации она может быть использована для решения упругопластических задач.

На рис. 2.2.в диаграмма *упругопластического тела* (диаграмма Прандтля), имеет два участка. На начальном этапе нагружения материал подчиняется закону Гука. При достижении некоторого напряжения σ_T называемого

пределом текучести деформации могут расти до любой величины (площадка текучести).

На рис. 2.2.г, д приведены более сложные диаграммы, используемые в расчётах и состоящие из прямых линий.

На рис. 2.2.е приведена диаграмма *жесткопластического тела*. Когда упругие деформации для постановки задачи не существенны, и ими можно пренебречь, диаграмма упрощается. Такая модель используется в задачах предельного равновесия в расчётах по стадии пластического разрушения.

3°. При решении задач в физически нелинейной постановке используют понятия *секущий модуль упругости, секториальный и касательный модули упругости* (рис. 2.3)

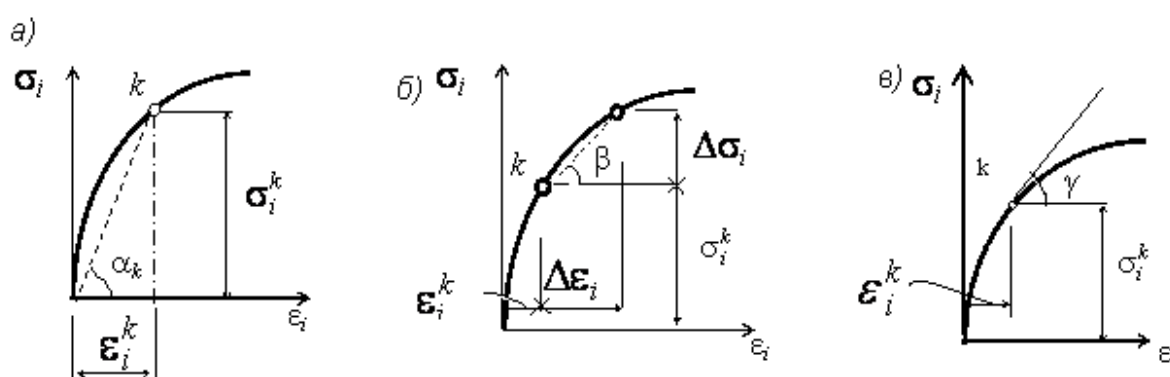


Рис. 2.3. К определению переменных модулей упругости:

- a) секущий модуль упругости $E_c = \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$;
- б) секториальный модуль упругости $E_{сек} = \operatorname{tg} \beta_k = \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \varepsilon_i}$;
- в) касательный модуль упругости $E_k = \operatorname{tg} \gamma_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}$.

4°. Напряжённое состояние в точке деформированного тела определяется совокупностью нормальных и касательных напряжений действующих в трёх взаимно перпендикулярных площадках, образующих тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Тензор напряжений является симметричным, поскольку выполняется закон парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.4)$$

Если этот тензор отнести к главным осям напряжений, то его записывают в виде диагональной матрицы

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Тензор напряжений можно разложить на *шаровой тензор* напряжений T_{σ}^o и *тензор девиатор* напряжений D_{σ} :

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^o + D_{\sigma}, \quad (2.6)$$

где

$$T_{\sigma}^o = \begin{bmatrix} \sigma_{cp} & & \\ & \sigma_{cp} & \\ & & \sigma_{cp} \end{bmatrix}; \quad (2.7)$$

$$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где $\sigma_{cp} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ – среднее напряжение.

Шаровой тензор напряжений связан с изменением объема, а девиатор напряжений с изменением формы.

5°. Деформированное состояние в точке определяется тензором деформаций, который состоит из линейных и угловых деформаций. Тензор деформаций имеет вид

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Аналогично выражают тензоры скоростей деформаций

$$T_{\dot{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \dot{\varepsilon}_y & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zy} & \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & & \\ & \dot{\varepsilon}_2 & \\ & & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Как и тензор напряжений, тензоры деформаций и скоростей деформаций раскладываются на *шаровой и девиатор*:

$$T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon}^o + D_{\varepsilon}; \quad (2.11)$$

$$T_{\&} = T_{\&}^o + D_{\&} \quad (2.12)$$

Величину $\varepsilon_{cp} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) / 3$ называют средней линейной деформацией, а $\&_{cp} = (\&_x + \&_y + \&_z) / 3 = (\&_1 + \&_2 + \&_3) / 3$ – средней скоростью линейной деформации, характеризующей скорость объемной деформации.

6°. При изучении напряженно-деформированного состояния тела обычно используют не сами тензоры, а их инварианты, т. е. такие комбинации компонентов тензоров напряжений, которые не меняют своих значений при повороте осей.

Главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1(T)\sigma^2 - I_2(T)\sigma - I_3(T) = 0, \quad (2.13)$$

где $I_1(T), I_2(T), I_3(T)$ – некоторые коэффициенты.

Поскольку главные напряжения не зависят от выбора осей координат, то и коэффициенты I_1, I_2, I_3 кубического уравнения также инвариантны. Поэтому их называют соответственно первым (линейным), вторым (квадратичным) и третьим (кубическим) инвариантом тензора напряжений:

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1); \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

По аналогии инварианты тензора деформаций (линейный, квадратичный и кубический) можно записать через главные деформации подобно выражениям (2.11):

$$\begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1); \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

7° В теории пластичности большое значение имеют вторые инварианты девиатора напряжений $I_2(D_\sigma)$ и деформаций $I_2(D_\varepsilon)$, которые являются суммарной характеристикой изменения формы элемента тела (2.16).

$$\begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \\ I_2(D_\varepsilon) &= \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

В практических условиях более удобно пользоваться не самими инвариантами, а некоторыми величинами, пропорциональными корню квадратному

из них. Эти величины называют интенсивностями напряжений и деформаций.

Интенсивности нормальных и касательных напряжений соответственно равны:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{I_2(D_\sigma)}; \tau_i = \sqrt{I_2(D_\sigma)}. \quad (2.17)$$

В развернутом виде эти соотношения записываются так:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_i; \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Интенсивности линейных деформаций и деформаций сдвига определяются так:

$$\varepsilon_i = 2\sqrt{I_2(D_\varepsilon)} / \sqrt{2(1+\nu)}; \quad \gamma_i = 2\sqrt{I_2(D_\varepsilon)}. \quad (2.20)$$

В развернутом виде эти выражения записываются так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \gamma_i / \sqrt{2(1+\nu)}; \quad (2.21) \\ \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Величины σ_i , τ_i , ε_i , γ_i принято также называть обобщенными напряжениями и деформациями. Рассмотрим значения, которые принимают эти обобщенные характеристики при различных, наиболее часто встречающихся в лабораторных испытаниях напряженных состояниях:

- а) одноосное сжатие или растяжение $\sigma_i = \sigma_1; \varepsilon_i = \varepsilon_1;$
- б) чистый сдвиг $\tau_i = \tau; \gamma_i = \gamma;$
- в) всестороннее равномерное сжатие $\sigma_i = \tau_i = \varepsilon_i = \gamma_i = 0.$