

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

**Т. В. Дубовицкая, А. Г. Москаленко,
Е. П. Татьяна, Т. Л. Тураева**

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА**

Учебное пособие

Воронеж 2018

УДК 539.1+536(075.8)
ББК 22.36я7
М75

Рецензенты:

*кафедра теоретической физики ФГБОУ ВО «ВГУ»
(зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук М. Ф. Фролов);
А. А. Щетинин, д-р ф.-м. н., профессор кафедры материаловедения
и физики металлов ФГБОУ ВО «ВГТУ»*

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА: учебное
М75 пособие / Т. В. Дубовицкая, А. Г. Москаленко, Е. П. Татьяна, Т. Л. Тураева; ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет». – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2018. – 90 с.

ISBN 978-5-7731-0696-8

В пособии представлены основные теоретические сведения по молекулярной физике и термодинамике. Дается разбор типовых задач с подробным описанием способов их решения, приводятся задачи для самостоятельного решения и тесты.

Издание предназначено для студентов направлений 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», 22.03.01 «Материаловедение и технология материалов», 22.03.02 «Металлургия», 28.03.02 «Наноинженерия» очной и заочной форм обучения.

Ил. 25. Библиогр.: 12 назв.

**УДК 539.1+536(075.8)
ББК 22.36я7**

*Печатается по решению учебно-методического совета
Воронежского государственного технического университета*

ISBN 978-5-7731-0696-8

© Дубовицкая Т. В., Москаленко А. Г.,
Татьянина Е. П., Тураева Т. Л., 2018
© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2018

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Молекулярная физика и термодинамика» предназначено для самостоятельной работы студентов очной и заочной форм обучения, которая сопровождает лекционные и практические занятия по дисциплине «Физика». Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика в курсе физики лежат в основе понимания большого числа природных явлений и процессов и имеют основополагающее значение в формировании у студентов ключевых знаний об окружающем мире.

Представленный учебный материал разделен на главы в соответствии с классической логикой изложения данного раздела физики: от статистического к термодинамическому методу.

Каждая глава содержит необходимые основы теоретического материала, примеры решения простых и сложных задач, многие из которых содержат подробное решение. Кроме того, пособие содержит задачи для самостоятельного решения с ответами и контрольные вопросы.

Такая форма подачи материала позволяет не только усвоить учебный материал, но и закрепить его посредством самостоятельного применения изученных законов при решении разнообразных задач.

Представленный учебный материал изобилует различными единицами измерения, названными в честь большого числа ученых. В тексте их имена при первом упоминании приводятся в скобках на языке происхождения. В качестве основной использована Международная система единиц (СИ), однако в условиях задач приводится много несистемных, но широко известных единиц.

Авторы надеются, что настоящее пособие будет также полезно студентам других специальностей и направлений, в учебных планах которых есть дисциплина «Физика».

ГЛАВА 1.МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

1.1. Температура и термодинамические состояния. Основные понятия молекулярно-кинетической теории

Термодинамической называют такую систему, где все составляющие системы взаимодействуют и обмениваются энергией как внутри системы, так и с окружающей средой.

Термодинамическая система может быть «замкнутой», то есть не обмениваться с окружающей средой: нет переноса вещества и нет энергией.

Набор некоторых физических величин, которые характеризуют термодинамическую систему и ее свойства в конкретном состоянии, называют **термодинамическими параметрами**. Параметры системы, определяемые через температуру T , давление p и объем V , называют параметрами состояния.

Известно (из ряда опытов), что массы молекулы или атома очень маленькие, именно поэтому ввели особую внесистемную единицу – **атомную единицу массы**. Атомную единицу массы вводят сравнением единицы массы любого атома с массой атома углерода.

Атомной единицей массы называется единица массы, равная $\frac{1}{12}$ массы изотопа углерода $^{12}_6C - m_c$:

$$1 \text{ а.е.м.} = m_{\text{ед}} = (1/12)m_c = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} .$$

Относительная молекулярная масса M (или атомная масса A) – это безразмерная величина, которая равна отношению массы молекулы (или атома) m_0 данного вещества к $\frac{1}{12}$ массы атома углерода:

$$M = \frac{m_0}{\frac{1}{12}m_c}, A = \frac{m_0}{\frac{1}{12}m_c} . \quad (1.1)$$

N – количество атомов, молекул, ионов или других частиц.

m – масса молекул. Это та же самая масса тела, которая ранее рассматривалась в разделе «Механика», измеряется в килограммах. Обозначается – кг. Масса может быть определена как $m = \rho V$, или

$$m = m_0 N . \quad (1.2)$$

ν – количество вещества системы, содержащей столько же элементов газа, сколько атомов в $^{12}_6C$ массой 0,012 кг. В системе международных единиц молярная масса измеряется в молях. Обозначается – моль.

μ – **молярная масса** – масса одного моля.

Если m – масса вещества, то молярную массу определим как

$$\mu = \frac{m}{\nu} . \quad (1.3)$$

Размерность молярной массы – «килограмм на моль», обозначается – кг/моль.

В начале 19-го века Авогадро (Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro di Quaregna e Serreto) предположил, что количество структурных элементов вещества в тысяче моль вещества постоянно и равно величине, названной **числом Авогадро**:

$$N_A = \frac{\mu}{M \cdot m_{\text{ед}}} = \frac{1}{m_{\text{ед}}} = 6,023 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{кмоль}} = 6,023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}.$$

Если N – количество структурных элементов вещества, то молярную массу определим через число Авогадро так:

$$\mu = \frac{mN_A}{N}. \quad (1.4)$$

Структурными элементами вещества называют атомы, молекул, ионов или других частиц.

Закон Авогадро

«Моль любого газа при одинаковой температуре и давлении занимает один и тот же объем. Один моль любого газа при нормальных условиях (далее – н.у.) занимает объем 22,4 л» [5].

T , температура – термодинамический параметр, который вводится для характеристики различной «нагретости тел». Однако качественное понимание «нагретости» не позволяет сделать вывод о её количественной мере. Таким образом, температура, как физическая величина, должна определять состояние термодинамического равновесия всех элементов системы и позволять проследить направление теплообмена между телами.

Для построения шкалы температур необходимы специальные точки – реперные, которым приписываются некоторые численные значения. Реперные точки – точка плавления льда и точка кипения воды. В качестве примера можно привести шкалы Цельсия (Anders Celsius), Рёмера (Ole Christensen Rømer), Реомюра (René Antoine de Réaumur), Фаренгейта (Daniel Gabriel Fahrenheit) и т.п.

Главный недостаток таких эмпирических шкал – их зависимость от выбранного термометрического свойства. Однако существует абсолютная (термодинамическая, Кельвина (William Thomson, 1st Baron Kelvin) температурная шкала, которая содержит только одну реперную точку и этим недостатком не обладает.

Шкала Цельсия (в международной системе единиц СИ обозначается – $^{\circ}\text{C}$), градуирована по температуре замерзания и по температуре кипения воды при давлении $p=101325 \text{ Па} = 760 \text{ мм рт. ст.}$, которые принимаются за $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ и $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

«Термодинамическая температурная шкала (шкала Кельвина), градуированная в градусах Кельвина (в международной системе единиц СИ обозначается – К) определяется по тройной точке воды. Температура $T=0 \text{ К}$ называется нулем Кельвина» [5].

Связь термодинамической температура и температуры шкалы Цельсия представлена выражением

$$T=273,15+t. \quad (1.5)$$

p , давление – термодинамический параметр, который характеризует столкновения газовых молекул со стенками сосуда вследствие их теплового движения. В международной системе единиц СИ давление измеряется в Паскалях (Blaise Pascal), обозначается – Па.

V , объем – термодинамический параметр, который характеризует все пространство, заполняемое газом. Из-за отсутствия взаимодействия между молекулами идеального газа он занимает весь предоставленный газу объем. В системе единиц СИ объем измеряется в метрах кубических, обозначается – м³.

Если состояние системы длительное время не меняется, то считается, что система находится в состоянии термодинамического равновесия.

Нормальные условия

Физические условия, определяемые давлением $p=101325 \text{ Па}= 760 \text{ мм рт. ст.}$ и температурой $273,15 \text{ К} (0 \text{ }^\circ\text{C})$ при которых молярный объем газа $V_0=2,2414 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{моль}$, называют нормальными (н.у.).

«Все газы содержат в единичном объеме одинаковое число частиц при одинаковых температурах и давлениях. Число атомов или молекул идеального газа, содержащихся в 1 м^3 при нормальных условиях, называется **числом Лошмидта**» [5] (Johann Josef Loschmidt):

$$N_L = p_0 / kT_0 = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

1.2. Идеальный газ. Экспериментальные законы идеального газа

Идеальный газ – это абстрактная модель газа, в которой:

- объем частиц идеального газа бесконечно мал в сравнении с изучаемым объемом;
- между частицами идеального газа пренебрегают силами взаимодействия;
- столкновения атомов или молекул идеального газа друг с другом и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Отсюда следует, что идеальный газ можно рассматривать как совокупность хаотически двигающихся материальных точек, которые друг с другом не взаимодействуют и имеют малый объем, которым можно пренебречь.

Идеальные газы описываются законами: Бойля-Мариотта (Robert Boyle и Edme Mariotte), Гей-Люссака (Joseph Louis Gay-Lussac), Шарля (Jacques Alexandre César Charles), Дальтона (John Dalton).

Изотермический газовый закон (Бойля-Мариотта)

Для постоянной массы одного и того же газа при постоянной температуре произведение давления на объем есть величина постоянная:

$$pV = \text{const}, \text{ при } T = \text{const}, m = \text{const}, \mu = \text{const}. \quad (1.6)$$

Процесс называется изотермическим, если он протекает при постоянной температуре.

График – гипербола, называется **изотермой**, показывающей зависимость между p и V , при постоянной температуре. Чем выше температура, тем выше «лежит» гипербола (рис. 1.1).

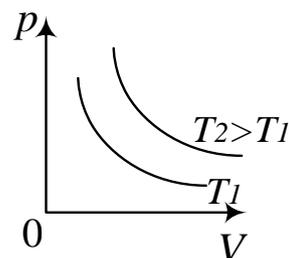


Рис. 1.1

Изохорический (изохорный) газовый закон (Шарля)

Для постоянной массы одного и того же газа давление при постоянном объеме изменяется с температурой линейно:

$$p = p_0(1 + \alpha t), \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const}, \mu = \text{const}, \quad (1.7)$$

где p_0 – давление при $t_0 = 0^\circ\text{C}$, α – температурный коэффициент давления газа, который равен $1/273$ град $^{-1}$.

$$p = p_0(1 + \alpha t) = p_0 \alpha T, \text{ тогда } \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (1.8)$$

Процесс, протекающий при неизменном объеме, называется изохорическим. График зависимости давления от температуры – это прямая линия, называемая изохорой. Чем больше объем, тем ниже «лежит» изохора (рис. 1.2).

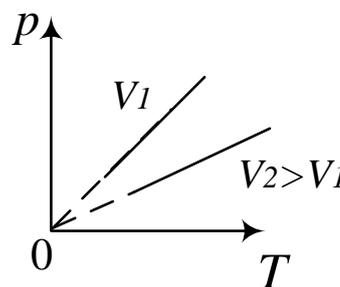


Рис. 1.2

Изобарический (изобарный) газовый закон (Гей-Люссака)

Для постоянной массы одного и того же газа объем при постоянном давлении изменяется с температурой линейно:

$$V = V_0(1 + \alpha t), \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const}, \mu = \text{const}, \quad (1.9)$$

где V_0 – объем при $t_0 = 0^\circ\text{C}$, α – температурный коэффициент объемного расширения равный $1/273$ град $^{-1}$.

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \alpha T, \text{ тогда } \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (1.10)$$

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется изобарическим. График зависимости объема и температуры – это прямая линия, называемая изобарой. Чем больше давление, тем ниже «лежит» изобара (рис. 1.3).

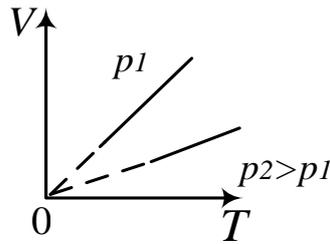


Рис. 1.3

Изобары и изохоры пересекают ось температуры в точке $t = -273^\circ \text{C}$.

При рассмотрении газовых смесей справедлив «**закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений газов**» [5]:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n. \quad (1.11)$$

Давление только одного газа в газовой смеси в том же объеме и при той же температуре называют парциальным давлением.

Уравнение состояния идеального газа

Связь между термодинамическими параметрами системы (давлением, объемом и температурой) называют уравнением состояния.

Если обобщить газовые законы, то получим выражение

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad (1.12)$$

или

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \quad (1.13)$$

Выражение (1.13) – **уравнение Клапейрона** (Benôit Paul Émile Clapeyron).

При объединении уравнения Клапейрона и закона Авогадро, получаем выражение

$$pV = RT. \quad (1.14)$$

R – универсальная газовая постоянная, значение которой определяется из нормальных условий и равно

$$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

Выражение (1.14) называется **уравнением Менделеева-Клапейрона для 1-го моля идеального газа**.

От уравнения Менделеева-Клапейрона для одного моля идеального газа несложно осуществить переход к уравнению Менделеева-Клапейрона для произвольного количества вещества идеального газа:

$$pV = \nu RT, \text{ или } pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) называется **уравнением Менделеева-Клапейрона для любой массы идеального газа**.

Введем еще одну постоянную, постоянную Больцмана (Ludwig Eduard Boltzmann), которая определяется из известных констант: числа Авогадро и универсальной газовой постоянной:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Тогда

$$p = \frac{\nu}{V} RT = \frac{1}{V} \frac{N}{N_A} k N_A T = nkT, \quad (1.16)$$

где $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул в единичном объеме.

1.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов связывает макропараметры (объем, давление и температуру) с характеристиками движения его атомов, молекул. Вывод уравнения основан на определении суммарного импульса, передаваемого атомами или молекулами газа стенке сосуда при столкновении.

В п.1.2 была представлена модель, которая показывает, что в молекулярно-кинетической теории молекулы и атомы (любые структурные элементы) моделируются материальными точками, взаимодействующими только между собой и стенками сосуда. Все столкновения только упругие. В результате таких взаимодействий скорости молекул меняются как по модулю, так и по направлению.

Рассмотрим упрощенный случай: допустим, что молекулы (атомы) движутся перпендикулярно стенке, равномерно и прямолинейно. В процессе столкновения молекулы со стенкой сосуда возникают силы, направленные взаимно противоположно (по третьему закону Ньютона (Isaac Newton)). Это значит, что и проекция скорости молекулы v_0 поменяет знак на противоположный.

Изменение импульса частицы будет равно $\Delta P = 2m_0v_0$, где m_0 – масса одной частицы.

Если при соударениях со стенками сосуда за время Δt единичной площадке ΔS стенки передается импульс ΔP , то давление газа на стенку сосуда

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta S}.$$

Достроим на этой площадке параллелепипед с основанием площадки ΔS . Внутри этого параллелепипеда попадут только те молекулы со скоростью v_0 , которые за время Δt успеют столкнуться с этой единичной площадкой. Высота этого параллелепипеда будет равна $v_0 \Delta t$ и его объем $\Delta S v_0 t$ (рис. 1.4)

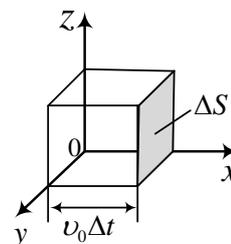


Рис. 1.4

Пусть концентрация молекул в сосуде равна n , тогда число молекул в объеме параллелепипеда равно $n\Delta Sv_0\Delta t$. Но лишь половина всех атомов или молекул может двигаться в сторону стенки, а другая половина будет, согласно законам статистики, двигаться в противоположную сторону – от стенки. Таким образом, число ударов молекул об единичную площадку ΔS за время Δt определяется так:

$$\frac{1}{2}n\Delta Sv_0\Delta t.$$

Как было показано раньше, одна частица при столкновении со стенкой изменяет свой импульс на величину $\Delta P = 2m_0v_0$, тогда изменение импульса всех молекул, столкнувшихся за время Δt с единичной площадкой ΔS , равно

$$2m_0v_0 \cdot \frac{1}{2}n\Delta Sv_0\Delta t = nm_0v_0^2\Delta S\Delta t.$$

По второму закону Ньютона изменение импульса всех столкнувшихся частиц со стенкой происходит под действием импульса силы $F\Delta t$, где F – некоторая средняя сила, действующая на молекулы со стороны стенки на этой площадке ΔS . Однако по третьему закону Ньютона такая же сила действует со стороны частиц и на площадку. Тогда

$$F\Delta t = nm_0v_0^2\Delta S\Delta t.$$

Разделив обе части на $\Delta S\Delta t$, получим

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta t\Delta S} = nm_0v_0^2.$$

Так как пространство трехмерно, то полученное выражение необходимо разделить на вероятностный коэффициент $1/3$, так как одна молекула может в конкретный момент времени столкнуться только с одной из трех пространственных плоскостей. В этом случае выражение принимает вид

$$p = \frac{1}{3}nm_0v_0^2.$$

При выводе этого уравнения полагалось, что атомы или молекулы в единичном объеме газа имеют одинаковые скорости и летят перпендикулярно поверхности стенки. Но в результате огромного числа соударений частичек газа и со стенками сосуда, и между собой можно наблюдать распределение молекул по скоростям. При этом все направления векторов скоростей атомов или молекул равновероятны, а сами скорости, проекции скоростей подчиняются некоторым закономерностям.

Распределение молекул газа по модулю скоростей называется распределением Максвелла, и оно будет рассмотрено ниже.

Важной характеристикой распределения молекул газа по модулю скоростей является среднеквадратичная скорость, характеризующая скорость всех молекул газа:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}.$$

Тогда окончательно давление газа равно

$$p = \frac{1}{3} n m_0 v_{\text{кв}}^2 = \frac{2}{3} n \frac{m_0 v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{2}{3} n \overline{E_K}. \quad (1.17)$$

Это уравнение связывает давление идеального газа p , массу частицы m_0 , концентрацию частиц n , среднеквадратичную скорость частиц $v_{\text{кв}}$ и среднюю кинетическую энергию $\overline{E_K}$ поступательного движения частиц. Называют это выражением основным уравнением молекулярно-кинетической теории газов.

Сопоставляя формулы (1.16) и (1.17), получаем

$$\overline{E_K} = \frac{3}{2} kT. \quad (1.18)$$

1.4. Реальные газы

В конце 19 века голландский физик Ван-дер-Ваальс (Johannes Diderik van der Waals) дал свою интерпретацию давления реальных газов.

Для каждой частицы можно определить объем, недоступный для других частиц. Очевидно, что это будет $4\pi(2r)^3/3$, где r – радиус одной молекулы. Причем $V_{\text{молек}} = 4\pi r^3/3$ – объем одной молекулы. Значит, в сосуде, который содержит N одинаковых молекул, можно определить совокупный объем, в котором не будет столкновений частиц друг с другом: $(N/2)4\pi(2r)^3/3 = 4NV_{\text{молек}}$. Для упрощения будем считать, что половина молекул неподвижна и к ним движется другая половина частиц. Их кинетическая энергия в два раза больше, чем у покоящихся молекул. Обозначим $b = 4NV_{\text{молек}}$.

Объем, доступный для взаимодействия молекул, будет равен $V - b$, а давление на стенки сосуда будет создаваться только движущимися частицами ($N' = N/2$):

$$p = nkT' = \frac{N'}{V - 4NV_{\text{молек}}} kT' = \frac{NkT}{V - 4NV_{\text{молек}}}.$$

Для одного моля газа: $p(V-b)=RT$.

Для $\nu = m/\mu$ молей газа уравнение примет вид

$$p(V - \nu b) = \nu RT.$$

Дополнительное давление пропорционально числу молекул на единицу площади и силе взаимодействия этих молекул между собой в единичном объе-

ме. Давление реального газа будет пропорционально квадрату концентрации молекул $n^2 \sim N^2/V^2$. Если в сосуде находится один моль газа, то

$$p_i = a / V^2,$$

где a – постоянная величина, зависящая от газа. В случае ν -молей имеем

$$p_i = \nu^2 a / V^2 \quad p_i = \nu^2 a / V^2.$$

Тогда уравнение состояния примет вид $p + p_i = nkT$.

$$(p + \nu^2 a / V^2) V = \nu RT.$$

Учитывая суммарное действие сил притяжения и сил отталкивания и введенные выше поправки, получаем уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$(V - \nu b) \cdot \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) = \nu RT, \quad (1.19)$$

для моля неидеального газа:

$$(V_m - b) \left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) = RT. \quad (1.20)$$

Данное уравнение верно, если $\nu b \ll V$ и $\nu^2 a / V^2 \ll p$.

Умножим уравнение на V^2 и раскрывая скобки, получим

$$pV^3 - (RT + bp) \nu V^2 + a\nu^2 V - ab\nu^3 = 0.$$

Очевидно, что уравнение имеет третью степень и имеет или один, или «три вещественных корня, т.е. изобара $p = \text{const}$ пересекает кривую $p=p(V)$ в одной или трех точках, как на рис. 1.5. При температуре выше критической зависимость $p=p(V)$ является однозначной функцией объема. Это означает, что при $T > T_{кр}$ вещество находится только в газообразном состоянии, как у идеального газа. При температуре газа ниже критической существует возможность перехода вещества из газообразного в жидкое и наоборот.

На участке ACB изотермы T_1 давление растет с увеличением объема. Данное состояние неустойчиво. Поэтому область BCA не может устойчиво существовать. В областях DLB и AGE давление падает с увеличением объема. Это необходимое, но не достаточное условие устойчивого равновесия. опыты показали, что система переходит из области устойчивых состояний – газ (GE) в область устойчивых состояний – жидкость (LD) через двухфазное состояние» GL (газ – жидкость) вдоль GCL – изотермы.

Наличие критической точки на изотерме Ван-дер-Ваальса означает, что для каждой жидкости существует такая температура, выше которой вещество может существовать только в газообразном состоянии» [5]. Критическая точка K – точка перегиба графика изотермы (рис. 1.5).

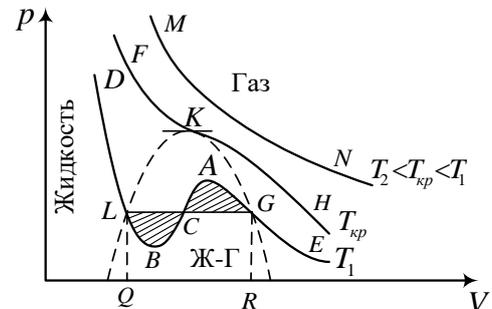


Рис. 1.5

Примеры решения задач

Задача 1.1

Какое количество молекул газа находится в 10^{-3}м^3 при температуре 273 К и давлении 133,33 Па?

Решение

Воспользуемся формулой, связывающей давление газа и концентрацию $p=nkT=\frac{N}{V}kT$. Выразим число молекул $N=\frac{pV}{kT}$.

После подстановки значений, получим $N=3,5\cdot 10^{19}$ шт.

Задача 1.2

В сосуде объемом 10^{-2}м^3 находится He (гелий) под давлением 10^6 Па и температуре 300 К. Из сосуда было выпущено 10 г гелия, температура в сосуде опустилась до 290 К. Определить давление гелия, который остался в сосуде.

Решение

Выразим конечное давление гелия из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$p_2 = \frac{m_2 RT_2}{\mu V}$$

Очевидно, что оставшаяся масса равна разности первоначальной массы и массы, выпущенной из сосуда

$$m_2 = m_1 - m.$$

Массу m_1 выразим также из уравнения Менделеева-Клапейрона для начального состояния: $m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1}$

С учетом этого равенства масса m_2 выражается так:

$$m_2 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m.$$

Окончательно после преобразований получаем

$$p_2 = \left(\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m \right) \frac{RT_2}{\mu V}.$$

Раскроем скобки: $p_2 = \frac{T_2 p_1}{T_1} - \frac{m RT_2}{\mu V}$.

После подстановки значений получим $p_2 = 364 \text{кПа}$.

Задача 1.3

В газовый баллон объемом $7,5\cdot 10^{-3}\text{м}^3$ при температуре 300 К закачаны газы: $\nu_1=0,10$ моля O_2 , $\nu_2=0,20$ моля N_2 и $\nu_3=0,30$ моля CO_2 . Газы идеальные. Определите: 1) общее давление смеси; 2) среднюю молярную массу μ смеси газов.

Решение

1. Смесь содержит ν_1, ν_2 и ν_3 молей кислорода, азота, углекислого газа соответственно. Общее количество вещества найдем как сумму молей газов в шарике: $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$.

Уравнение состояния идеального газа для смеси газов $pV = \nu RT$ выразим через $p = \frac{\nu RT}{V}$, получаем

$$p = \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)RT}{V} = \frac{(0.1 + 0.2 + 0.3) \cdot 8.31 \cdot 300}{7.5 \cdot 10^{-3}} = 1.9 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

2. Масса молекул кислорода $m_1 = \nu_1 \cdot \mu_1$, масса молекул азота равна $m_2 = \nu_2 \cdot \mu_2$, масса молекул в смеси равна $m_3 = \nu_3 \cdot \mu_3$. Общая масса смеси

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = \nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2 + \nu_3 \mu_3.$$

Молярная масса смеси

$$\mu = \frac{\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2 + \nu_3 \mu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{0.1 \cdot 32 + 0.2 \cdot 28 + 0.3 \cdot 44}{0.1 + 0.2 + 0.3} = 36.7 \text{ г/моль.}$$

Задача 1.4

Вычислите количество молекул воды в объеме $V=1 \text{ мм}^3$ и массу m_1 одной молекулы. Предполагается, что молекулы соприкасаются друг с другом. Найдите d – диаметр молекул. Плотность воды, 1000 кг/м^3 .

Решение

Число молекул, содержащихся в массе m , равно

$$N = \nu N_A.$$

Так как $\nu = \frac{m}{\mu}$, то $N = \frac{m N_A}{\mu}$, $m = \rho V$.

Вычислим молярную массу воды:

$$\mu = 2 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-3} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Тогда число молекул воды $N = \frac{10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-3}} = 3.34 \cdot 10^{19}$ шт.

Для массы одной молекулы справедливо $m_1 = \frac{\mu}{N_A}$.

Тогда, вычисляя, получим $m_1 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6.02 \cdot 10^{23}} \text{ кг} = 2.99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$.

Так как молекулы расположены плотно и каждая молекула занимает объем $V_l = d^3$, где d - диаметр молекулы, то $d = \sqrt[3]{V_l}$. Объем V_l найдем так: $V_l = \frac{V_m}{N_A}$.

Подставим выражение V_l в выражение для диаметра молекулы:

$$d = 3 \sqrt{\frac{V}{N_A m}}, \text{ где } V_l = \frac{\mu}{\rho}. \text{ Окончательно получим } d = 3 \sqrt{\frac{\mu}{\rho N_A}} = 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Задача 1.5

Смесь газов занимает объем $2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$. Смесь состоит из 10 г кислорода O_2 и 10 г азота N_2 . Газы находятся при температуре 300 С. Вычислите давление и молярную массу смеси газов.

Решение

Воспользуемся законом Дальтона $p = \sum_i p_i = p_1 + p_2$,

где давление для каждого из газов: $p_i = \frac{m_i RT}{\mu_i V}$.

Просуммируем парциальные давления для всех газов:

$$p = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right).$$

После подстановки значений получим $p = 235 \text{ кПа}$.

Найдем молярную массу:

$$\mu_{см} = \frac{m_{см}}{\nu_{см}} = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{\mu_1 \mu_2 (m_1 + m_2)}{\mu_2 m_1 + \mu_1 m_2}.$$

Вычислив, получим $\mu_{см} = 29,8 \text{ г/моль} = 29,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Задача 1.6

В сосуд цилиндрической формы объемом $0,5 \text{ м}^3$ закачивается воздух со скоростью $0,001 \text{ кг/с}$. В верхней части сосуда есть сквозная дырка, закрытая клапаном, который удерживается в закрытом состоянии стержнем, который может свободно вращаться вокруг оси в точке С (рис. 1.6).

К правому торцу стержня прикреплен груз массой 2 кг . Клапан срабатывает и открывает отверстие через $t=580 \text{ с}$ работы насоса. До работы насоса давление в сосуде было атмосферное. Площадь закрытого клапаном отверстия равна $5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, расстояние СВ равно $0,1 \text{ м}$. Температура в сосуде и снаружи 300 К . Определите длину стержня. Стержень считать невесомым. Молярная масса воздуха $\mu=29 \text{ кг/кмоль}$.

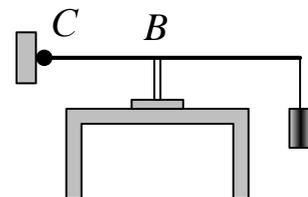


Рис. 1.6

Решение

Найдем силу давления на клапан при превышении давления воздуха в сосуде над атмосферным Δp , так как площадь клапана равна s , то

$$F = s\Delta p.$$

Сила, с которой стержень действует на клапан, равна $mg \frac{L}{l}$, где m , L и l – масса груза, длина стержня и длина его участка СВ. Клапан откроется, если выполнится условие $s\Delta p \geq mg \frac{L}{l}$.

Дополнительное давление воздуха определяется увеличением массы Δm воздуха в цилиндре. По уравнению Клапейрона-Менделеева

$$\Delta p = \frac{\Delta m_B}{\mu V} RT.$$

Подставим это выражение в неравенство $s\Delta p \geq mg \frac{L}{l}$:

$$\frac{s\Delta m_B}{\mu V} RT \geq mg \frac{L}{l} \quad \text{или} \quad L \leq \frac{lsRT \Delta m_B}{mg \mu V}.$$

Таким образом, получаем окончательно, $L = \frac{lsRT \cdot 0,001t}{mg \mu V} = 0,25 \text{ м}$.

Задача 1.7

Воздушный шар с оболочкой массой 400 кг заполнен гелием. Определите максимальную массу гелия в воздушном шаре, если температура окружающего шар воздуха 290 К, а давление наружного воздуха 10^5 Па, к шару прикреплен груз массой 200 кг. Оболочка не препятствует изменению объёма и не сообщается с атмосферой. Молярные массы: воздуха – 29 г/моль, гелия – 4 г/моль. Ответ дать с точность до сотых.

Решение

Шар с грузом удерживается в равновесии, если сумма всех сил, действующих на него, равна нулю:

$$(M + m)g + m_{\Gamma}g - m_{\text{В}}g = 0,$$

где M и m – массы оболочки шара и груза, m_{Γ} – масса гелия, а $m_{\text{В}}g$ – сила Архимеда, действующая на шар, $m_{\text{В}}$ – масса воздуха. Отсюда следует:

$$M + m = m_{\Gamma} + m_{\text{В}}$$

$$\text{Запишем для гелия и воздуха: } pV = \frac{m_{\Gamma}}{\mu_{\Gamma}} RT = \frac{m_{\text{В}}}{\mu_{\text{В}}} RT,$$

где μ_{Γ} – молярная масса гелия, $\mu_{\text{В}}$ – молярная масса воздуха, V – объём шара.

Отсюда $m_B = m_G \frac{\mu_B}{\mu_G}$, следовательно,

$$m_B - m_G = m_G \left(\frac{\mu_B}{\mu_G} - 1 \right) = m_G \left(\frac{29}{4} - 1 \right) = 6,25m_G,$$

$M + m = 6,25 \cdot m_G$, окончательно получаем $m_G = 96$ кг.

Задача 1.8

Вертикальный герметичный цилиндр высотой 0,5 м разделен на две части поршнем массой 10 кг. В каждой части содержится одинаковое количество вещества идеального газа, поршень поднят на высоту 0,2 м от дна. Определите, какое количество молей газа находится в каждой части? Вся система находится при температуре 360 К. Поршень может свободно перемещаться, его толщиной можно пренебречь. Ответ дать с точностью до сотых.

Решение

Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для верхней и нижней частей сосуда:

$$p_1 V_1 = \nu RT, \quad p_2 V_2 = \nu RT,$$

Найдем объемы верхней и нижней частей сосуда.

$$V_1 = S(H - h), \quad V_2 = Sh,$$

где S – сечение поршня, H – высота сосуда, h – высота, на которой находится поршень.

Запишем условие равновесия поршня. Сумма всех сил, действующих на поршень, равна нулю, то есть выполняется второй закон Ньютона:

$$p_1 S + mg - p_2 S = 0.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для давлений в верхней и нижней частях сосуда, получим выражением для количества молей газа:

$$\nu = \frac{mg}{RT \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{H-h} \right)} = 0,02 \text{ моль.}$$

Задача 1.9

В цилиндре, расположенном горизонтально и запаянном с одного конца, помещают ртуть. Столбик ртути длиной 25 см отделяет воздух в трубочке от атмосферы. Затем цилиндр поставили вертикально запаянным концом вниз и нагрели на 10 К. Объем, который занимал воздух, не изменился. Давление атмосферы в лаборатории $p_0 = 750$ мм рт. ст. Какой была первоначальная температура T_0 в цилиндре?

Решение

Запишем условие равновесия столбика ртути в вертикальном цилиндре:
 $p = p_0 + \rho g d$, где $p_0 = \rho g H$ – атмосферное давление и равно 750 мм рт. ст.
Очевидно, что процесс изохорный, значит:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0}, \text{ причем } T = T_0 + \Delta T.$$

Подставим выражения для p и p_0 , тогда $\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{d}{H}$. Отсюда

$$T_0 = \Delta T \frac{H}{d} = 300 \text{ К.}$$

Задача 1.10

Давление некоторого газа равно 10 кПа, а его средняя квадратичная скорость 500 м/с. Какова плотность газа?

Решение

Запишем основное уравнение МКТ:

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m_0 v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{2N}{3V} \frac{m_0 v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{1}{3} \rho v_{\text{кв}}^2.$$

Следовательно, $\rho = \frac{3p}{v_{\text{кв}}^2} = 0,12 \text{ кг/м}^3$.

Задача 1.11

В вертикальном сосуде цилиндрической формы под тяжелым поршнем, перемещающимся без трения, находится воздух под давлением $1,5 \cdot 10^5$ Па. Поршень находится в равновесии на высоте $H_1 = 0,2$ м над дном сосуда. На сколько переместится поршень, если цилиндр перевернуть открытым концом вниз и дождаться установления равновесия. Температура воздуха постоянна и атмосферное давление постоянно и равно 10^5 Па. Массой воздуха в сосуде пренебречь.

Решение

В первом случае на поршень действуют направленные вниз сила тяжести Mg и сила атмосферного давления $p_0 S$, а вверх – сила, с которой давит воздух на поршень $p_1 S$. Поршень находится в равновесии, и по закону Ньютона запишем:

$$p_1 S = p_0 S + Mg.$$

Во втором случае давление воздуха в сосуде становится равным p_2 , а расстояние от дна сосуда до поршня – H_2 .

На поршень действуют направленные вниз сила тяжести Mg и сила давления воздуха над поршнем $p_2 S$, а вверх – сила атмосферного давления $p_0 S$.

Поршень находится в новом положении равновесия, и по закону Ньютона запишем:

$$p_0 S = p_2 S + Mg .$$

Так как $T=const$, то $pV=const$: $p_1 H_1 S = p_2 H_2 S$.

Первые два уравнения позволяют установить, что $p_2 = 2p_0 - p_1$. Подставляя это выражение в закон Бойля-Мариотта, получаем

$$H_2 = \frac{p_1}{2p_0 - p_1} H_1 .$$

Значит, поршень сместится на расстояние

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \frac{2(p_1 - p_0)}{2p_0 - p_1} H_1 = 0,4 \text{ м.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. В емкости вместимостью $V=25,0$ л находится H_2 (водород) при температуре $T=290$ К. Когда часть водорода использовали, давление в емкости понизилось на $\Delta p=0,4$ МПа. Определить, сколько газа было израсходовано. Ответ: 8,3 г.

1.2. Оболочка аэростата емкостью $V=1600$ м³, находящегося на земле, заполнена H_2 (водородом) на $\frac{7}{8}$ при давлении $p_1=100$ кПа и температуре $T_1=291$ К. Аэростат поднялся на высоту, где термодинамические показатели уменьшились: давление стало $p_2=80$ кПа, а температура снизилась до $T_2=280$ К. Определить массу водорода, вышедшего из оболочки. Ответ: 6,16 кг.

1.3. В сосуд объемом $0,25$ м³ закачали газ при температуре 328 °С, состоящий из смеси углекислоты и паров воды. Число частиц углекислого газа $N_1=6,60 \cdot 10^{21}$ шт, молекул воды $N_2 = 9 \cdot 10^{20}$ шт. Найдите давление и молярную массу смеси этих газов. Ответ: $p=244$ Па, $\mu=41$ г/моль.

1.4. Плотность газа ρ , состоящего из He и Ar при давлении полторы атмосферы и температуре 290 К, равна $2,0$ г/л. Сколько атомов гелия содержится в одном миллилитре смеси газов? Ответ: $7 \cdot 10^{18}$.

1.5. В камере емкостью 2 м³ при температуре 300 К и давлении $0,6$ мкПа содержится смесь N_2 и окиси азота NO суммарной массой 14 кг. Вычислите массу окиси азота. Ответ: $13,5$ кг.

1.6. Определите плотность водорода и кислорода, если их части относятся как $\frac{1}{8}$ соответственно. Давление $p=100$ кПа, температура $T=300$ К. Ответ: $0,4$ кг/м³.

1.7. В камере емкостью $0,5$ л находится 1 г парообразного йода. Давление в сосуде достигло 700 мм рт. ст. при температуре 1000 °С. При заданных усло-

виях вычислите степень диссоциации молекул J_2 на атомы J . Молярная масса молекулы йода 234 кг/кмоль. Ответ: 0,12.

1.8. Трубку установили вертикально и заполнили кислородом (O_2). Высота трубки $h=200$ м, объем $V=200$ л. Температура стенок трубки $T=293$ К. Давление газа у основания трубки равно 10^5 Па. Определите число молекул O_2 , содержащихся в трубке. Ответ: $N=4,19 \cdot 10^{24}$.

1.9. В горизонтально расположенном цилиндре с одним закрытым концом с помощью столбика ртути закрыт воздух при температуре 300 К. Затем трубку переворачивают вертикально открытым концом вверх и нагревают на 60 К, в результате чего объём воздуха становится прежним. Найдите высоту столбика ртути, если атмосферное давление 750 мм рт. ст. Ответ: $d=15$ см.

1.10. Найдите минимальный объём камеры, вмещающей 6,4 кг кислорода, если её стенки при температуре 20 °C выдерживают давление в 18 Н/см². Ответ: 2,86 м³.

1.11. Из неисправного баллона объемом 20 л вытекает водород. Давление из-за утечки падает от 10,2 до 4,96 атм. При этом газ охлаждается от 127 до 27 °C. Сколько водорода вытекло? Считать водород идеальным газом. Ответ: 4,33 г.

Контрольные вопросы

1. Чем термодинамический и статистический методы изучения макроскопических систем отличаются и чем дополняют друг друга?
2. Как определяется термодинамический параметр? Приведите примеры.
3. Объясните газовые законы с точки зрения молекулярно-кинетической теории?
4. Назовите законы, которыми описываются изотермический, изобарические и изохорические процессы?
5. В чем заключается физический смысл постоянной Авогадро?
6. В чем заключается молекулярно-кинетическое определение давления газа?
7. Дайте определение «количеству вещества»?
8. Что такое «реперная точка»? Какие шкалы температур Вы знаете? Каковы их реперные точки?
9. Когда газы можем считать идеальными?
10. Можно ли применять уравнения идеальных газов в реальных условиях?

ГЛАВА 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ИЛИ АТОМОВ ГАЗА ПО СКОРОСТЯМ, ЭНЕРГИЯМ

2.1. Скорость молекул или атомов в газах

Молекулярно-кинетическая теория позволяет записать соотношение:

$$\frac{m_0 v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где m_0 – масса одной молекулы или атома. Тогда среднеквадратичная скорость через различные физические величины может быть представлена так:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kN_A T}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}, \quad (2.1)$$

где p – давление и ρ – плотность.

Экспериментальную проверку, что атомы и молекулы идеальных газов при одной и той же температуре имеют разные скорости, провел немецкий ученый Штерн (Otto Stern) в начале 20-х годов XX века.

Схематически установка его опыта показана на рис. 2.1.

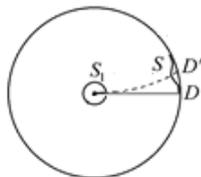


Рис. 2.1

Нить, покрытая легко испаряемым металлом (серебро), располагается продольно вдоль оси цилиндров S_1 , S . Когда начинают пропускать ток, нить нагревается и металл с нити начинает испаряться. Частицы серебра от горячей нити через отверстие на цилиндре S_1 летят к холодному цилиндру, на котором осаждаются. Если система неподвижна, то частицы металла «салятся» узкой полоской на цилиндре S . Если систему привести во вращение, то изображение полоски размывается от точки D до D' . Таким образом, результаты опыта указывали на то, что атомы всегда имеют различные скорости при движении

Молекулы или атомы двигаются беспорядочно (хаотично). Есть те, кто двигается быстро, и наоборот. Найдем число частиц (Δn), скорости которых лежат в некотором интервале значения скорости Δv , то есть от v до $v + \Delta v$.

В единичном объеме таких частиц тем больше, чем больше интервал их скоростей Δv .

Также понятно, что Δn должно быть пропорционально концентрации атомов или молекул (n). Число частиц Δn зависит и от самой скорости. Даже если значения интервала скорости равные, но абсолютные значения скорости отличаются, то число атомов молекул будет различным [5]. Согласно теории вероятности:

$$dn = f(v)ndv, \quad (2.2)$$

где $f(v)$ – функция распределения молекул или атомов по скоростям.

$$f(v) = \frac{dv}{ndv}.$$

Функция $f(v)$ – плотность вероятности, которая показывает, какова вероятность любой частицы газа в единичном объеме иметь скорость, заключённую в единичном интервале, включая заданную скорость v .

2.2. Функция распределения Максвелла по скоростям

Распределение молекул идеального газа по скоростям было получено Дж. Максвеллом (James Clerk Maxwell) в 1860 году.

Из формулы (2.2) вдоль выбранного направления имеем

$$dn_x = f(v_x)dv_x.$$

Тогда

$$f(v_x) = \frac{dn_x}{ndv_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}, \quad (2.3)$$

Вероятность того, что v_x находится в диапазоне от v_x до $v_x + dv_x$; v_y находится в диапазоне от v_y до $v_y + dv_y$; v_z находится в диапазоне от v_z до $v_z + dv_z$ есть произведение вероятностей для каждой компоненты скорости:

$$dn_{xyz} = \frac{n}{\pi^{3/2}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dn_x dn_y dn_z, \quad (2.4)$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Функция dn_{xyz} не зависит от направления вектора скорости \vec{v} .

Если из некой точки пространства выпустить все молекулы одновременно, то через одну секунду все частицы окажутся в сферическом слое толщиной dv и радиусом v .

Объём сферического слоя $dV = 4\pi v^2 dv$. Тогда число частиц в нем:

$$dn = \frac{n}{\pi^{3/2}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dV.$$

Если разделить данное выражение на n , получим закон распределения молекул по абсолютным значениям скоростей Максвелла:

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (2.5)$$

где $\frac{dn}{n}$ – часть всех атомов или молекул в сферическом слое объема dV , скорости которых лежат в диапазоне от v до $v + dv$.

Если $dv=1$, то получим функцию распределения молекул или атомов по скоростям:

$$f(v) = \frac{dn}{ndv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2. \quad (2.6)$$

Функция (2.6) показывает долю молекул или атомов в единице объёма газа, абсолютные скорости которых заключены в единичном диапазоне скоростей (рис. 2.2), включая данную скорость \vec{v} .

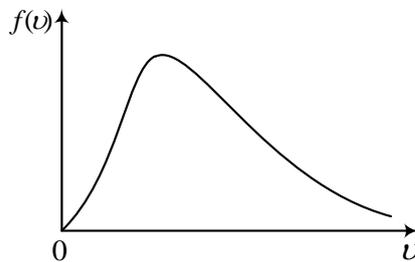


Рис. 2.2

2.3. Наиболее вероятная, среднеквадратичная и средняя арифметическая скорости молекул или атомов газа

Величину скорости, на единичный диапазон которой выпадает наибольшее число частиц газа, называют **наиболее вероятной скоростью**.

Определяют ее, приравняв к нулю производную $\frac{df(v)}{dv} = 0$:

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.7)$$

Средняя квадратичная скорость была получена ранее в главе 1 (1.17):

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Средняя арифметическая скорость получается делением скоростей для всех частиц на число всех частиц.

$$v_{cp} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v n f(v) dv, \text{ где } n f(v) dv = dn - \text{число частиц в диапазоне скоростей}$$

от v до $v+dv$.

В этом случае получим

$$v_{cp} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \approx \sqrt{\frac{2,25kT}{m_0}} \sqrt{\frac{2,25RT}{\mu}}. \quad (2.8)$$

Очевидно, что $v_{кв} > v_{cp} > v_B$.

На рис. 2.3 показана зависимость функции распределения молекул или атомов по скоростям при разных температурах и различных массах частиц. Максимум на графиках соответствует наиболее вероятной скорости. Площадь под кривой – величина постоянная, так как $f(v) = \text{const} = 1$.

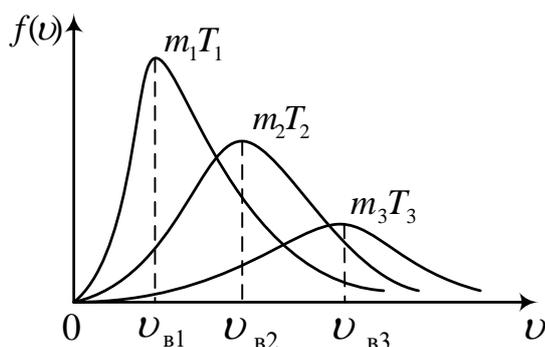


Рис. 2.3

2.4. Формула Максвелла для относительных скоростей молекул газа

Назовем относительную скорость u и определим ее как

$$u = \frac{v}{v_B}, \text{ где } v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Тогда

$$\frac{dn}{ndu} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \quad (2.9)$$

2.5. Барометрическая формула

Пусть p давление на высоте h , а $p + dp$ на высоте $h + dh$, причём $dh > 0$, а $dp < 0$, так как с увеличением высоты давление уменьшается.

Известно, что $p = \rho gh$, где $\rho = \frac{P\mu}{RT}$ – плотность газа на высоте h , уменьшающаяся с высотой. Тогда $p - (p + dp) = \rho g dh$.

Раскроем скобки и получим

$$dp = -\frac{\mu g p}{RT} dh \text{ или } \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh.$$

Проинтегрируем выражение, тогда $\ln p = -\frac{\mu g h}{RT} + \ln C$,

где C – постоянная интегрирования.

Пусть $C = p_0$, то есть давление на высоте $h = 0$. Потенцируем полученное выражение:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}. \quad (2.10)$$

Из формулы (2.10) видно, что давление уменьшается с высотой быстрее при «тяжелых» молекулах газа и низких температурах.

2.6. Распределение Больцмана

Рассмотрим газ в поле тяжести. Его концентрация будет различной в точках с разной потенциальной энергией. Так как концентрация газа n уменьшается ростом h над поверхностью Земли, то и давление уменьшается.

Сделаем замену давлений p и p_0 в барометрической формуле согласно формуле $p=nkT$. Мы получим распределение Больцмана для молярной массы газа:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (2.11)$$

здесь n_0 и n – концентрации на высотах $h = 0$ и h .

Так как $\mu = m_0 N_A$, а $R = N_A k$, то (2.11) запишем так:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}. \quad (2.12)$$

Из (2.11) очевидно, что при $T = 0$ движение частиц прекращается, и все молекулы или атомы газа «легли» бы на поверхность Земли.

Используя замену в (2.12) $U = m_0 gh$ получим распределение молекул или атомов по значениям потенциальной энергии. Это выражение называется распределение Больцмана:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}, \quad (2.13)$$

причем n_0 – концентрация молекул на высоте, где $U = 0$.

Из (2.13) следует, что отношение концентраций молекул в точках с разными потенциальными энергиями U_1 и U_2 равно

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{U_1 - U_2}{kT}}. \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) верно для любых потенциальных полей.

2.7. Закон распределения Максвелла-Больцмана

Запишем выражение распределения молекул по скоростям:

$$dn(v) = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Заменим переменную скорости v на переменную энергии E согласно

$$E = \frac{m_0 v^2}{2}:$$

$$dn(E) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}} dE = nf(E)dE,$$

где $dn(E)$ – число частиц, имеющих кинетическую энергию, в диапазоне от E до $E + dE$. Распределение по кинетическим энергиям:

$$f(E) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (2.15)$$

Очевидно, что можно найти среднюю кинетическую энергию \bar{E} частиц так:

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E f(E) dE = \frac{3}{2} kT,$$

получаем формулу, совпадающую с полученной ранее (1.18).

Закон Максвелла описывает распределение частиц по кинетической энергии, а закон Больцмана – распределение частиц по потенциальной энергии». Их логично объединяют в распределение Максвелла-Больцмана:

$$dn = n_0 A e^{-\frac{E+U}{kT}}. \quad (2.16)$$

Здесь n_0 – концентрация молекул, где $U=0$, $E_{пол} = E + U$ – полная энергия. Полная энергия $E_{пол}$ принимает непрерывный ряд значений.

Если же энергия частицы дискретна (например, в атоме), то

$$\bar{N}_i = \frac{1}{e^{\frac{(E_i - \mu)/kT}{-1}}} \quad (2.17)$$

Примеры решения задач

Задача 2.1

Гелий в количестве 0,05 моля находится в горизонтальном цилиндре с поршнем, который без трения может двигаться в цилиндре. В исходном положении поршень удерживается силой 280 Н. При этом среднеквадратичная скорость движения газа равна 1400 м/с. Затем газ охладил, а поршень сдвинули, при этом плавно уменьшая силу воздействия на него. Когда эта сила стала равна 150 Н, то среднеквадратичная скорость движения уменьшилась до 1200 м/с. На какую величину Δl переместился поршень? Молярная масса гелия $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

Найдем первоначальный объём гелия в цилиндре, если обозначить площадь поршня через S , то:

$$V_1 = S l_1.$$

Тогда первоначальное давление гелия $p_1 = \frac{F_1}{S}$.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$p_1 V_1 = \frac{F_1}{S} S l_1 = \nu R T_1. \text{ Отсюда } T_1 = \frac{F_1}{S \nu R} S l_1 = \frac{F_1}{\nu R} l_1.$$

Среднеквадратичная скорость гелия при температуре T_1 равна

$$v_1 = \sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}}. \text{ Отсюда } T_1 = \frac{\mu v_1^2}{3R}.$$

Подставим в последнее выражение, $T_1 = \frac{F_1}{\nu R} l_1$ полученное ранее, будем иметь $l_1 = \frac{\nu \mu v_1^2}{3F_1}$. Аналогично $l_2 = \frac{\nu \mu v_2^2}{3F_2}$.

Тогда расстояние Δl , на которое сдвинулся поршень:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = \frac{\nu \mu v_2^2}{3F_2} - \frac{\nu \mu v_1^2}{3F_1} = \frac{\nu \mu}{3} \left[\frac{v_2^2}{F_2} - \frac{v_1^2}{F_1} \right] = 0,17 \text{ м.}$$

Задача 2.2

Определите долю молекул воздуха при температуре 290 К которая обладает скоростями, различными не более чем на 0,5 м/с от наиболее вероятной скорости? Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

Вычислим v_B для воздуха $v_B = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 430 \text{ м/с}$.

Вычислим относительную скорость $u = v/v_B = 1$ и определим величину ее диапазона $\Delta u = \Delta v/v_B = 1,2 \cdot 10^{-3}$.

Так как $\Delta u \ll u$ будем считать, что $\Delta n \approx dn$, $\Delta u \approx du$, тогда по распределению Максвелла:

$$\Delta N/N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot \Delta u = 0,09\% .$$

Задача 2.3

Найдите число частиц газа, скорости которых лежат в диапазоне от v до $(v + \Delta v)$ при температуре T_1 к числу частиц, скорости которых лежат в том же диапазоне, но при температуре в два раза больше. Известно: $v = v_{B1}$, $\Delta v \ll v$.

Решение

По распределению Максвелла, так как $\Delta v \ll v$, для двух случаев можно записать:

$$\Delta N_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u_1^2} \cdot u_1^2 \cdot \Delta u_1, \quad \Delta N_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u_2^2} \cdot u_2^2 \cdot \Delta u_2,$$

где $u_1 = \frac{v}{v_{B1}} = 1$, $\Delta u_1 = \frac{\Delta v}{v_{B1}} = \frac{\Delta v}{\sqrt{2RT_1/\mu}}$;

$$u_2 = \frac{v}{v_{B2}} = \frac{\sqrt{\frac{2RT_1}{\mu}}}{\sqrt{\frac{2RT_2}{\mu}}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \Delta u_2 = \frac{\Delta v}{v_{B2}} = \frac{\Delta v}{\sqrt{\frac{2RT_2}{\mu}}}$$

Разделим полученное выражение для первого случая на выражение для второго случая:

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = e^{(u_2^2 - u_1^2)} \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = 1,04.$$

Задача 2.4

Найти число частиц газа, скорость которых заключена в диапазоне от 500 м/с до 500,2 м/с. Газ – кислород объемом 1 литр, находящийся при нормальных условиях. Нормальные условия $T=273$ К, $p=100$ кПа.

Решение

Различие скоростей кислорода в 0,2 м/с в сравнении с 500 м/с дает право принять её за малую величину dv . Тогда можно записать число молекул кислорода dN , скорость которых лежит в диапазоне от v до $v+dv$:

$$dN = N \cdot 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) v^2 dv.$$

Для определения всех молекул N молекул кислорода в объеме применим закон Авогадро: при нормальных условиях 1 моль газа займет молярный объем $V_0=22,4$ л. Тогда $N=N_A \cdot V/V_m$ и окончательно:

$$dN = 4\pi N_A \cdot \frac{V}{V_0} \left(\frac{\mu \cdot a.e.m.}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu \cdot a.e.m. v^2}{2kT}\right) v^2 dv = 8 \cdot 10.$$

Задача 2.5

Доказать, что зависимость между числом частиц, имеющих скорость меньше наиболее вероятной v_B , и числом всех частиц не зависит от температуры.

Решение

Доля частиц dN со скоростями, лежащими в диапазоне от v до $v+dv$, согласно распределению:

$$dN = N \cdot 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) v^2 dv,$$

где N – число всех частиц. Значит, отношение между числом частиц $N_{вер}$ и числом всех частиц будет равно

$$\frac{N_{\text{ср}}}{N} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{v_s} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) v^2 dv.$$

Пусть $x = v/v_B$ – безразмерная величина. Преобразуем выражение справа:

$$v_B = (2kT/m_0)^{1/2}, \quad v = x \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, \quad dv = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} dx.$$

Заменим этими выражениями переменные в формуле $\frac{N_{\text{ср}}}{N}$:

$$\frac{N_{\text{ср}}}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp(-x^2) \cdot x^2 dx.$$

Полученное выражение – интеграл, который не содержит параметр T , что и требовалось доказать.

Задача 2.6

Определить среднюю проекцию скорости частицы с массой m_0 при температуре T .

Решение

Запишем распределение для средней скорости частицы:

$$\overline{|v_x|} = \int |v_x| \cdot \rho(v_x) dv_x = \int |v_x| \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}\right) dv_x.$$

Проекция v_x может принимать любые значения в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$, но $|v_x|$ может принимать только положительные значения – находится только в диапазоне от нуля до $+\infty$. Тогда

$$\overline{|v_x|} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x \cdot \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}\right) \cdot dv_x.$$

Заменим переменные: $\frac{m_0 v_x^2}{2kT} = v$, произведем преобразования и получим

$$\overline{|v_x|} = (2kT / \pi m_0)^{1/2}.$$

Задача 2.7

Пусть имеется N атомов, энергия которых дискретна, а именно может быть или E_1 , или E_2 . Атомы находятся в термодинамическом равновесии при температуре T . Чему равна общая энергия E всех N атомов?

Решение

Общая энергия всех атомов равна $E = N_1 E_1 + N_2 E_2$,

где N_1 – число атомов, имеющих энергию E_1 и N_2 – число атомов, имеющих энергию E_2 . Для определения N_1 и N_2 запишем выражение Больцмана:

$$N_1 / N_2 = \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right), \text{ и } N_1 + N_2 = N.$$

Получили систему из двух уравнений. Решив ее, получим

$$N_1 = N \frac{\exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right)}, \quad N_2 = \frac{N}{1 + \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right)},$$

$$E = N \frac{E_1 \cdot \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right) + E_2}{1 + \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{kT}\right)}.$$

Задача 2.8

Докажите, что возможно вывести из распределения Максвелла основное уравнение состояния идеального газа.

Решение

Зададим площадку стенки сосуда ds . Пусть ось Z направлена из газа перпендикулярно к стенке. За время dt до стенки долетят все частицы со скоростями лежащими в диапазоне $(v_z, v_z + dv_z)$, которые находятся в объеме цилиндра газа высотой $v_z dt$. Их число, если n – концентрация частиц, равно

$$dN(v_z) = n \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left[-m_0 v_z^2 / (2kT)\right] dv_z \cdot v_z ds \cdot dt.$$

Изменение импульса частицы при столкновении со стенкой $-2m_0 v_z$. Изменение импульса потока всех частиц, отскочивших от стенки за это время dt , будет

$$d\Phi_z = -n \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^\infty 2m_0 v_z^2 \exp\left[-m_0 v_z^2 / (2kT)\right] dv_z \cdot ds \cdot dt.$$

Известно, что интеграл данного вида при интегрировании по частям равен

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}, \text{ значит получаем } d\Phi_z = -nkT \cdot ds \cdot dt.$$

Сила, действующая на летящие частицы равна, $F = \frac{d\Phi_z}{dt} = -nkt \cdot ds$. По третьему закону Ньютона сила, которая действующая на стенку, равна $F_0 = nkt \cdot ds$, давление $p = nkT$, $n = \frac{\nu N_A}{V}$.

Тогда $p = \frac{\nu N_A}{V} kT$, что и требовалось доказать.

Задача 2.9

Определите высоту h над уровнем моря где плотность воздуха становится в 2 раза меньше. Температуру воздуха принять 273°K . Температура воздуха T , молярная масса воздуха μ и ускорение свободного падения g не зависят от h .

Решение

Из выражения для плотности и по уравнению Менделеева-Клапейрона запишем $\rho = m/V = \frac{p\mu}{RT}$.

Из барометрической формулы следует, что давление на высоте h с подстановкой полученного выше выражения равно $p = p_0 e^{-\mu gh/RT}$.

После логарифмирования получаем

$$h = \frac{RT \ln(\rho_0/\rho)}{\mu g} = 5,4 \text{ км.}$$

Задача 2.10

Найдите массу m газа в вертикальном цилиндрическом сосуде. Площадь дна цилиндра S , его высота h . Давление газа на дно цилиндра p_0 , температура газа постоянна и равна T , молярная масса газа μ . Температура воздуха T , молярная масса воздуха μ и ускорение свободного падения g не зависят от h .

Решение

Если давление зависит от высоты, значит и плотность газа, зависит от высоты. Так как масса газа распределена по объему не равномерно то найдем ее интегрируя выражение

$$m = \int_V \rho dV = S \int_0^h \rho dh.$$

Плотность газа с высотой становится меньше по закону $\rho = \frac{p_0 \mu}{RT} e^{-\mu gh/RT}$,

подставляя, получим $m = \frac{S \mu p_0}{RT} \int_p^h e^{-\mu gh/RT} dh$.

Заменяем переменные: $u = -\frac{\mu \cdot gh}{RT}$. Получаем «табличный» интеграл

$$m = \frac{S \mu p_0}{RT} \left(-\frac{RT}{\mu g} \right) \int_0^u e^u du.$$

Окончательно $m = \frac{SP_0}{g} (1 - e^{-\mu gh/RT})$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Вычислите относительное число атомов газа, скорости которых отличаются не более чем на один процент: а) от наиболее вероятной скорости; б) от средней квадратичной скорости. Ответ: а) 1,66 %; б) 1,85 %.

2.2. Определите процент от общего числа молекул O_2 при 273 К обладает скоростью от 100 м/с до 110 м/с? Ответ: 0,4 %.

2.3. Определите отношение числа молекул газа, скорости которых лежат в диапазоне от v до $v + \Delta v$ при температуре T_1 , к числу молекул, скорости которых лежат в том же диапазоне при температуре в два раза большей: а) $v = 1/2 v_{e1}$, б) $v = 2 v_{e2}$. Ответ: а) 2,50; б) 0,0520.

2.4. Трубу, запаяли с обоих концов, поставили вертикально и заполнили газом (O_2). Высота трубы 200,0 м, объем 0,20 м³, температура трубы 293 К. Давление газа внутри трубы около её основания равно атмосферному 10^5 Па. Определите число молекул в трубе. Ответ: $N=4,19 \cdot 10^{24}$.

2.5. На какой высоте h плотность кислорода будет меньше на один процент? Температура кислорода 300 К. Ответ: $h = 78$ м.

2.6. У поверхности Земли отношение концентраций газов с массами m_1 и m_2 в атмосфере равно X_0 . Каким будет это отношение на высоте h километров?

Температуру считать постоянной и равной T . Ответ: $X = X_0 e^{\frac{1000 gh}{RT} (m_2 - m_1)}$.

2.7. На какой высоте относительно уровня моря содержание водорода в воздухе к углекислому газу в два раза больше? Температуру считать постоянной и равной 313 °С. Ответ: $h=4,19$ км.

2.8. Получите выражение для распределения молекул или атомов газа по относительной скорости $u = v/v_g$, где v_g – наиболее вероятная скорость молекул или атомов газа.

2.9. Пусть температура атмосферы постоянна и равна 300 К, ускорение свободного падения не зависит от высоты над Землей. Вычислите давление а) на высоте 10000 м, б) под землей на глубине 2000 м. Давление на отметке уровня моря принять как нормальное атмосферное. Ответ: $p_1=0,33p_0$; $p_2=1,26 p_0$.

2.10. В предположении, что температура, молярная масса воздуха, ускорение свободного падения не зависят от высоты, найти высоту, на которой плотность воздуха при температуре 0 °С будет отличаться: а) в ϵ раз; б) на 1 %.

Ответ: а) $h = \frac{RT}{\mu g} = 8$ км; б) $h = \frac{\mu RT}{\eta g} = 0,8$ км.

Контрольные вопросы

1. Сравните скорости движения газовых молекул кислорода, водорода, азота при комнатной температуре со скоростью звука.
2. Каков физический смысл у функции распределения молекул или атомов газа по скоростям?
3. Проведите качественный анализ графика функции распределения молекул или атомов газа по скоростям.
4. Как можно найти наиболее вероятную скорость молекул или атомов газа?
5. Как определяется среднеквадратичная скорость молекул или атомов газа?
6. Как определяется среднеарифметическая скорость молекул или атомов газа?
7. Как соотносятся между собой вероятная, среднеквадратичная и среднеарифметическая скорости?
8. Выведите зависимость функции распределения от массы и температуры газа.
9. Каковы особенности графика функции распределения величины скорости молекул идеального газа?
10. Выведите барометрическую формулу.

ГЛАВА 3. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА И ТЕПЛОТА. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

3.1. Внутренняя энергия газа. Работа и теплота

В термодинамических процессах идеального газа меняется лишь кинетическая энергия молекул и под внутренней энергией частиц, молекул или атомов понимают энергию теплового беспорядочного движения всех частиц, пренебрегая потенциальной энергией.

Для одного моля идеального газа внутренняя энергия U равна

$$U = N_A E = \frac{3}{2} k T N_A = \frac{3}{2} R T. \quad (3.1)$$

Формула показывает, что внутренняя энергия газа – функция температуры и функция конкретного состояния системы.

Любая термодинамическая система обладает и внутренней энергией, и механической энергией. Совершенная системой термодинамическая работа A характеризует изменение механической энергии системы, количество переданной или отведенной от системы теплоты обозначается Q . Связь между этими физическими величинами называют первым законом термодинамики.

Одна из формулировок гласит: **количество теплоты, переданное термодинамической системе, расходуется на увеличение внутренней энергии системы и на совершение системой работы:**

$$Q = \Delta U + A. \quad (3.2)$$

Размерность количества теплоты, работы и внутренней энергии – Джоуль, обозначается – Дж.

Если $\Delta Q > 0$, тепло поступает в термодинамическую систему от окружающей среды и наоборот, если $\Delta Q < 0$, то тепло отводится в окружающую среду.

Формула (3.2) для бесконечно малого изменения состояния системы имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (3.3)$$

Здесь U – внутренняя энергия, функция состояния; dU – полный дифференциал, величины δQ и δA – частные дифференциалы, так как не являются только функциями состояния системы. В каждом состоянии система характеризуется конкретным значением внутренней энергии, что позволяет определить её как

$$U = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1.$$

Количество теплоты Q и работа A зависят от того, как совершен переход из одного состояния в другое в отличие от внутренней энергии U . Первое начало термодинамики не показывает направление изменения состояния системы.

Если система, побывав в разных состояниях, возвращается в исходное, то такой процесс называют круговым или циклом.

В таком случае справедливо выражение $\oint dU = 0$.

3.2. Теплоёмкость идеального газа. Уравнение Майера

Теплоёмкость – это физическая величина, которая показывает, какое количество теплоты необходимо для нагревания тела на один градус:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (3.4)$$

Измеряется теплоемкость в Джоулях делённых на Кельвин, обозначается – Дж/К. В термодинамике используют определения удельной теплоемкости и молярной теплоёмкости.

Удельная теплоёмкость вещества c – физическая величина равная количеству теплоты, которой необходимо для нагревания 1 килограмма вещества на 1 градус.

Молярная теплоемкость C_μ – физическая величина равная количеству теплоты, которой необходимо для нагревания 1 моля газа на 1 градус, размерность: $[C_\mu] = \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

$$C_\mu = c \mu.$$

Теплоёмкость зависит от того, как меняется состояние системы при нагревании.

При нагревании газа изохорно поступающая теплота увеличивает внутреннюю энергию газа. Теплоёмкость при изохорном процессе обозначается C_V .

При нагревании газа изобарно в сосуде происходит подъем поршня на высоту h и газ совершает работу. Теплоёмкость газа изобарного процесса обозначается C_P . При постоянном давлении все тепло тратится и на нагревание газа, и на совершение газом работы.

Установим связь между теплоемкостями C_P и C_V . Очевидно, $C_P > C_V$.

При нагревании одного моля идеального газа при постоянном объёме работа не совершается – $dA=0$. Тогда первое начало термодинамики для **изохорного процесса** запишется так:

$$\delta Q = dU. \quad (3.5)$$

Подставим это равенство в формулу для теплоёмкости :

$$C_V = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU_\mu}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (3.6)$$

Так как газ идеальный, то

$$dU_\mu = C_V dT.$$

Проинтегрируем:

$$U_{\mu} = \int_0^T C_V dT = C_V T. \quad (3.7)$$

Внутренняя энергия газа зависит только от температуры (3.7) и справедлива для любого газового процесса.

Тогда в общем случае получаем:

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T. \quad (3.8)$$

При **изобарном процессе**: $dQ_p = dU_{\mu} + p dV_{\mu}$.

Тогда (3.4) запишем:

$$C_p = \frac{dQ_p}{dT} = \frac{dU_{\mu}}{dT} + p \frac{dV_{\mu}}{dT} = C_V + p \frac{dV_{\mu}}{dT}. \quad (3.9)$$

Введем обозначение $R = p \frac{dV_{\mu}}{dT}$, получим

$$C_p = C_V + R. \quad (3.10)$$

Выражение (3.10) называют **уравнением Майера** (Julius Robert von Mayer) для одного моля газа.

Это выражение позволяет определить R – универсальную газовую постоянную как работу, которую совершает один моль газа при его нагревании на один градус в изобарном процессе.

Формула Майера для удельных теплоёмкостей выглядит так:

$$\frac{C_p}{\mu} = \frac{C_V}{\mu} + \frac{R}{\mu}, \quad c_p - c_V = \frac{R}{\mu}. \quad (3.11)$$

3.3. Теплоёмкости одноатомных газов

Вычислим теплоёмкость изохорного процесса C_V в единицах R для одноатомных газов. Тепловая энергия одной молекулы идеального газа равна $\frac{3}{2}kT$, вычислим внутреннюю энергию:

$$U_{\mu} = N_A \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} RT, \text{ то есть} \quad (3.12)$$

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} R = 12,5 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}. \quad (3.13)$$

Теплоемкость C_V от температуры не зависит и постоянна.

Внутренняя энергия для любого количества газа выражается через количество вещества и имеет вид

$$U = \nu \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT. \quad (3.14)$$

Её изменение равно $dU = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R dT$. Учитывая физический смысл R , можно

записать:

$$dQ_p = dU_\mu + R dT \quad (3.15)$$

С учетом (3.12) и (3.13) получаем теплоемкость изобарного процесса для одноатомных газов:

$$C_p = \frac{3}{2} R + R, \text{ или } C_p = \frac{5}{2} R = 20,8 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}. \quad (3.16)$$

Отношение (3.17) называют **коэффициентом Пуассона**:

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma, \gamma = \frac{20,8}{12,5} = 1,67. \quad (3.17)$$

Подставим уравнение Майера $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$,

тогда $\gamma - 1 = \frac{R}{C_v}$.

Окончательно получаем

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (3.18)$$

В молекулярно-кинетической теории газов доказывается, что $C_v = \frac{i}{2} R$, где i – число степеней свободы, с помощью которых можно однозначно определить положение и ориентацию атома или молекулы в пространстве.

Для одноатомных молекул $i = 3$ (например, инертные газы), для двухатомной молекулы (расстояние между атомами молекулы постоянно) $i = 5$.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} = \frac{i + 2}{i} = 1,4.$$

Подставив полученное для γ равенство в выражение для внутренней энергии, получим

$$U = \frac{m}{\mu} C_v T = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} T.$$

С учетом уравнения Менделеева-Клапейрона получим

$$U = \frac{PV}{\gamma - 1}. \quad (3.19)$$

3.4. Теплоёмкости многоатомных газов

Одноатомная молекула имеет три степени свободы, однако опыты с двухатомными реальными газами, показали, что двух-, трех-, четырехатомные молекулы нельзя интерпретировать материальными точками. Следует учитывать

вращательное движение молекул. Как отмечали ранее, у двухатомных молекул пять степеней свободы ($i=5$), а у трёхатомных – их шесть ($i=6$).

Больцманом было показано, что средняя кинетическая энергия \bar{E} одной степеней свободы, равна:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}kT. \quad (3.20)$$

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT - \text{ для одноатомных молекул.} \quad (3.21)$$

$$\bar{E} = \frac{5}{2}kT - \text{ для двухатомных молекул.} \quad (3.22)$$

$$\bar{E} = \frac{6}{2}kT - \text{ для трехатомных молекул.} \quad (3.23)$$

Обобщение формул (3.20) – (3.23) представляет собой «закон Больцмана о равномерном распределении средней кинетической энергии по степеням свободы» [5]:

$$\bar{E} = \frac{i}{2}kT. \quad (3.24)$$

Для газов в состоянии термодинамического равновесия справедливо равномерное распределение средней кинетической энергии между **всеми** степенями свободы. На одну поступательную степень свободы $i_{\text{п}}$ и одну вращательную степень свободы $i_{\text{вр}}$ приходится энергия $\bar{E} = \frac{1}{2}kT$. Для колебательной степени свободы $i_{\text{кол}}$ она равна $\bar{E} = kT$. Все степени свободы молекулы равны $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$.

Для молярной массы газа:

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad (3.25)$$

$$C_P = \frac{i+2}{2}R. \quad (3.26)$$

Для некоторого количества вещества газов:

$$C_V = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2}R, \quad (3.27)$$

$$C_P = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2}R. \quad (3.28)$$

Можно вычислить значение для теплоемкостей многоатомных молекул:

$C_V = \frac{5}{2}R = 20,8 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$ – для двухатомных молекул, $C_V = \frac{6}{2}R = 25 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$ – для трехатомных молекул.

Если рассматривать очень высокие температуры (выше 1000 К), то проявляется колебательная степень свободы. При дальнейшем увеличении температуры молекулы начинают распадаться на атомы.

При **адиабатическом процессе** теплоёмкость равна нулю $dQ = 0$,

$$C_{y\partial} = \frac{dQ}{dT} = 0.$$

При **изотермическом процессе** теплоемкость бесконечно велика:

$$T = const, dT = 0, C_T = \frac{dQ}{dT} \rightarrow \infty.$$

3.5. Первое начало термодинамики в применении к изопроцессам идеальных газов

Изобарический процесс ($p = const$)

Изобара в pV координатах прямая, параллельная оси V (рис. 3.1). При изобарическом процессе работа газа при изменении объёма от V_1 до V_2 равна площади закрашенного прямоугольника:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1), \quad (3.29)$$

Окончательно

$$Q = \Delta U + p\Delta V. \quad (3.30)$$

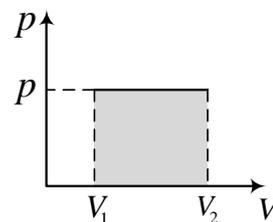


Рис. 3.1

Изохорический процесс ($V = const$)

Изохора в pV координатах прямая, параллельная оси p , поскольку $\Delta V = 0$, то $A_V = 0$.

$$Q = \Delta U. \quad (3.31)$$

Изотермический процесс ($T = const$)

Найдем работу идеального газа с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона (рис .3.2):

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (3.32)$$

Так как изменения внутренней энергии нет, то $\Delta U = 0$, то по первому началу термодинамики термодинамическая работа равна полученному количеству теплоты $A = Q$.

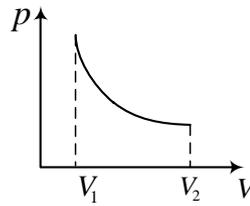


Рис. 3.2

Окончательно

$$Q = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (3.33)$$

Адиабатический (адиабатный) процесс

Адиабатическим называют процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой. Адиабатными можно считать следующие случаи:

1. Адиабатическая оболочка, теплопроводность которой равна нулю, например, сосуд Дьюара.

2. Стремительные процессы. Тепло не успевает распространиться, и в течение небольшого промежутка времени можно принять $dQ = 0$.

3. Процессы в очень больших объёмах газа (циклоны в атмосфере Земли). Для выравнивания температур требуется очень много времени.

Для адиабатического процесса:

$$dQ = dU + dA = 0 \text{ или } \frac{m}{\mu} C_v dT + p dV = 0.$$

Если газ расширяется $dA > 0$, то внутренняя энергия уменьшается $dU < 0$ и температура понижается. Если газ сжимается $dA < 0$, то внутренняя энергия увеличивается $dU > 0$ и температура растёт.

Получим уравнение при адиабатическом процессе идеального газа. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона: $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$, тогда

$$\frac{m}{\mu} C_v dT + \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = 0.$$

Поделим обе части уравнения на C_v :

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} = 0.$$

Так как $R = C_p - C_v$, тогда $\frac{dT}{T} + \frac{C_p - C_v}{C_v} \frac{dV}{V} = 0$.

Известно, что $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$ тогда $\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$.

Интегрируя уравнение, получаем

$$\ln T + \ln(V^{\gamma-1}) = const. \quad (3.34)$$

Или $\ln T(V^{\gamma-1}) = const$. Потенцируя, получаем

$$T(V^{\gamma-1}) = const.$$

Или

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}. \quad (3.35)$$

Выражение (3.35) называют уравнением Пуассона для адиабаты. Заменяем

в (3.35) $T = \frac{\mu}{Rm} pV$ (из уравнения Менделеева-Клапейрона):

$$\frac{\mu}{Rm} pV \cdot V^{\gamma-1} = const,$$

т.к. для данной массы газа $\frac{\mu}{m}$ величина постоянная, то

$$pV^\gamma = const, p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \quad (3.36)$$

На рис. 3.3 приведены графики изотермы и адиабаты. Показатель степени $\gamma > 1$, поэтому график адиабаты круче в сравнении с изотермой.

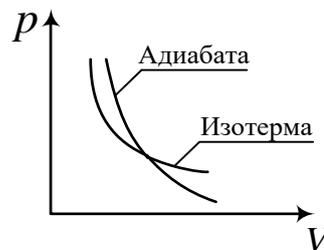


Рис. 3.3

Вычислим работу адиабатического процесса:

$$A = \int p dV = -\frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_2} C_{V_M} dT = -\frac{m}{\mu} C_{V_M} (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} C_{V_M} (T_1 - T_2). \quad (3.37)$$

3.6. Политропические процессы

Политропическими или политропными называют процессы, во время которых теплоёмкость газа остаётся неизменной. Уравнение политропы в параметрах p, V :

$$pV^n = \text{const}, \quad (3.38)$$

где n – показатель политропы, произвольное число $[-\infty; +\infty]$.

Политропическими являются все рассмотренные выше процессы: адиабатический, изотермический, изобарический, изохорический. Представим их в виде (3.35).

1. Изобарический процесс $p = \text{const}, n = 0$:

$$C = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \gamma C_V = C_p. \quad (3.39)$$

2. Изотермический процесс $T = \text{const}, n = 1$:

$$CT = \pm\infty. \quad (3.40)$$

3. Изохорический процесс $V = \text{const}, n = \pm\infty$:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (3.41)$$

4. Адиабатический процесс $\Delta Q = 0, n = \gamma, C_{ad} = 0$.

Окончательно обобщённая формула для работы:

$$A = \frac{P_1 V_1}{n - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (3.42)$$

Примеры решения задач

Задача 3.1

Определите удельные теплоемкости при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_p для смеси неона и водорода, если их массовые доли составляют $\omega_1=80\%$ и $\omega_2=20\%$ соответственно.

Решение

Воспользуемся формулой для удельной теплоемкости:

$$c_V = \frac{i R}{2 \mu}, c_p = \frac{i + 2 R}{2 \mu}.$$

Неон – инертный газ, который можем считать идеальным $-i=3$ и $\mu=20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$c_{V1} = \frac{3}{2} \frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} = 6,24 \cdot 10^2 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

$$c_{p1} = \frac{3+2}{2} \frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} = 1,04 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Водород – двухатомный газ, значит, $i=5$ и $\mu=2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$c_{V2} = \frac{5}{2} \frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

$$c_{p2} = \frac{5+2}{2} \frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Запишем формулу для количества теплоты, нужной для нагревания на ΔT :

$$Q = c_V(m_1 + m_2) \Delta T, \text{ и } Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2) \Delta T.$$

Приравняем выражения и разделим обе части равенства на ΔT , тогда

$$c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2.$$

Выражаем c_V :

$$c_V = c_{V1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{V2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \text{ в этом выражении дроби и есть массовые до-}$$

ли газов:

$$c_V = c_{V1}\omega_1 + c_{V2}\omega_2, \omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \text{ и } \omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Аналогично для c_p : $c_p = c_{p1}\omega_1 + c_{p2}\omega_2$.

Вычисляя, получаем:

$$c_V = 6,24 \cdot 10^2 \cdot 0,8 + 1,04 \cdot 10^4 \cdot 0,2 = 2,58 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К});$$

$$c_p = 1,04 \cdot 10^3 \cdot 0,8 + 1,46 \cdot 10^4 \cdot 0,2 = 3,75 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Задача 3.2

Кислород находится в объеме $V_1=1 \text{ м}^3$ под давлением $p_1=0,2 \text{ МПа}$, масса кислорода $m=2 \text{ кг}$. Кислород нагрели при постоянном давлении до объема $V_2=3 \text{ м}^3$, а потом при постоянном объеме – до давления $p_2=0,5 \text{ МПа}$. Как изменилась внутренняя энергия кислорода ΔU , какая работа им была совершена A и какое количество теплоты Q было передано газу?

Решение

Подставим в формулу для изменения внутренней энергии выражение для удельной теплоемкости при постоянном объеме

$$\Delta U = c_V m \Delta T = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} m \Delta T, \text{ где } \Delta T = T_3 - T - \text{разница температур конечного}$$

и начального состояния. Для водорода $i=5$, так как газ двухатомный.

Начальную и конечную температуру выразим из уравнения Менделеева -

Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда

$$T = pV\mu / (mR).$$

Работа газа при изобарном расширении равна $A_1 = \frac{m_1}{\mu} R \Delta T$.

Работа газа при изохорном процессе равна нулю: $A_2 = 0$.

Суммарная работа газа в двух процессах равна $A = A_1 + A_2 = A_1$.

Вычислим

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 385 \text{ К, и } T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 1155 \text{ К.}$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 2887 \text{ К. } A_1 = \frac{8,31 \cdot 2 \cdot (1155 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} = 0,4 \text{ МДж.}$$

По первому началу термодинамики $Q = \Delta U + A$.

$$A = A_1 = 0,4 \text{ МДж. } \Delta U = \frac{5 \cdot 8,31 \cdot 2 \cdot (2887 - 385)}{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} = 3,24 \text{ МДж.}$$

$$Q = 3,24 + 0,4 = 3,64 \text{ МДж.}$$

Задача 3.3

Показатель адиабаты идеального газа количеством 1 моль равен γ . Газ совершает процесс по закону $p = AT^\alpha$, где A и α – постоянные величины. Найдите: а) работу, которую совершит газ, если его температура увеличивается на ΔT ; б) молярную теплоемкость газа.

Решение

По условию $p = AT^\alpha$, тогда $pT^{-\alpha} = A$. Из уравнение состояния идеального газа получим $T = pV / R$, тогда

$$p \left(\frac{pV}{R} \right)^{-\alpha} = A, \text{ или } p^{1-\alpha} V^{-\alpha} = AR^{-\alpha}, \quad p^{1-\alpha} V^{-\alpha} = AR^{-\alpha},$$

тогда $pV^{-\alpha/(\alpha-1)} = \text{const}$. Показатель политропы равен $n = \frac{\alpha}{\alpha-1}$;

а) при политропическом процессе для одного моля газа работа газа равна

$$A_p = \frac{R\Delta T}{1-n} = \frac{R\Delta T}{\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right)} = R\Delta T(1-\alpha);$$

б) молярная теплоемкость может быть найдена по формуле

$$C = \frac{R}{\gamma-1} - \frac{R}{n-1} = \frac{R}{\gamma-1} - \frac{R}{\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1} = \frac{R}{\gamma-1} + R(1-\alpha).$$

Задача 3.4

Найдите удельную теплоемкость при изохорном процессе для газовой смеси, которая состоит из 4 кг неона и 1 кг водорода.

Решение

Количество теплоты δQ , переданное смеси, равно

$$\delta Q = c_V m dT,$$

где c_V – удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме.

Однако выражение для δQ можно записать и так:

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = (c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2) dT,$$

где c_{V1}, c_{V2}, m_1, m_2 – удельные теплоемкости и массы газов смеси соответственно.

Приравняем эти выражения и сократим на dT :

$$c_V (m_1 + m_2) = c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2.$$

Выразим c_V :
$$c_V = \frac{c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2}{m_1 + m_2}.$$

Запишем формулы для удельных теплоемкостей для неона и кислорода

$$c_{V1}, c_{V2}: c_{V1} = \frac{i_1 R}{2\mu_1}, \quad c_{V2} = \frac{i_2 R}{2\mu_2}.$$

С учетом этих выражений окончательно получаем

$$c_V = \frac{R}{2(m_1 + m_2)} \left(\frac{i_1 m_1}{\mu_1} + \frac{i_2 m_2}{\mu_2} \right).$$

Для неона $i_1=3$ – инертный одноатомный газ; для водорода $i_2=5$ – двухатомный газ.

Вычисляя, получим $c_V = 2,58 \cdot 10^3$ Дж/кг·К.

Задача 3.5

Определите степень диссоциации азота, если соотношение его теплоемкостей c_p/c_V равно 1,47. Молярная масса атомарного азота $\mu_1=14$ кг/кмоль, молярная масса молекулярного азота $\mu_2=28$ кг/кмоль.

Решение

Обозначим через α степень диссоциации. Диссоциированный азот – это одноатомный газ идеальный газ с тремя степенями свободы, $i=3$. Недиссоциированный азот (молекулярный азот) – это двухатомный газ с пятью степенями свободы, $i=5$. Для диссоциированного (одноатомного) азота:

$$c_V = \frac{i_1 R}{2\mu_1}, \quad c_p = \frac{(i_1 + 2)R}{2\mu_1}.$$

Для недиссоциированного (молекулярного) азота:

$$c_{DV} = \frac{i_2 R}{2\mu_2}; \quad c_{Dp} = \frac{(i_2 + 2)R}{2\mu_2}.$$

Для смеси атомарного и молекулярного азота запишем (см. задачу 3.4):

$$c_V^{cm} = \frac{c_V m_1 + c_{DV} m_2}{m_1 + m_2} = c_V \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{DV} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = c_V \alpha + c_{DV} (1 - \alpha),$$

где m_1 и m_2 – массы соответственно (атомарного) диссоциированного и (молекулярного) недиссоциированного азота.

Для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении применим тот же алгоритм и получим

$$c_p^{\text{см}} = c_p \alpha - c_{Dp} (1 - \alpha).$$

Приняв отношение теплоемкостей $\gamma = c_p^{\text{см}} / c_v^{\text{см}}$, запишем и вычислим

$$\alpha = \frac{5\gamma - 7}{3 - \gamma} = 23 \text{ \%}.$$

Задача 3.6

Нагреем один килограмм кислорода разными способами: от 300 до 350 К: а) изобарически, б) изохорически, в) адиабатически. Докажите, что изменение внутренней энергии идеального газа не зависит от способа нагревания. Найдите изменение внутренней энергии кислорода в каждом случае.

Решение

а) при $p = \text{const}$, изобарическое нагревание:

$$Q = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T \text{ и } A = p \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Из первого начала термодинамики найдем

$$\Delta U = Q - A = \frac{m}{\mu} \Delta T (C_p - R) = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T;$$

б) при $V = \text{const}$, изохорическое нагревание:

$$Q = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T, A = 0.$$

Получаем $\Delta U = Q = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T$;

в) при адиабатическом нагревании, из первого начала термодинамики следует: $\Delta U = -A = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T$.

Отсюда следует, что при любом способе нагревания газа изменение внутренней энергии одно и то же:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1) = 3,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Задача 3.7

Идеальный газ расширяется изобарно так, что его объем увеличивается в 2 раза. Количество вещества – 10^3 моль, начальная температура $T_1 = 290$ К. Потом газ изохорно охладил до первоначальной температуры. Найдите: а) изме-

нение внутренней энергии газа; б) работу газа; в) количество теплоты, полученной газом.

Решение

Построим графики перехода газа из одного состояния в другое в pV координатах (рис. 3.4). Участок 1-2 – изобара, температура повышается, внутренняя энергия увеличивается. Газ, расширяется ($V_2 > V_1$), совершает положительную работу, на графике показана площадью заштрихованного прямоугольника V_1I2V_2 .

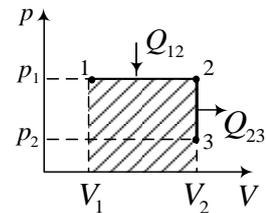


Рис. 3.4

Прямая 2-3 – изохора. Давление уменьшается при охлаждении газа от T_2 до $T_3 = T_1$, внутренняя энергия уменьшается, работа не совершается.

Суммарное изменение внутренней энергии ΔU складывается из изменения внутренней энергии на участке 1-2 и изменения внутренней энергии на участке 2-3. Так как начальная и конечная температуры совпадают, то $\Delta T = 0$:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0.$$

Работа, совершаемая газом при переходе из состояния 1 в состояние 3 равна работе газа на участке 1-2, так как на участке 2-3 работа равна нулю:

$$A_{13} = A_{12} = p_1(V_2 - V_1).$$

С учетом уравнения состояния идеального газа и условия $V_2 = 2V_1$ получаем $A_{13} = p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$.

Для киломоля газа $\frac{m}{\mu} = 1$, тогда $A_{13} = RT_1 = 2,4 \cdot 10^6$ Дж.

Количество теплоты при переходе из состояния 1 в состояние 3 равно сумме количеств теплоты Q_{12} и Q_{23} . $Q_{13} = Q_{12} + Q_{23}$.

По первому началу термодинамики:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} \text{ и } Q_{23} = \Delta U_{23}, (A_{13} = 0).$$

Учитывая, что $\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$, получаем $Q_{13} = A_{12} = 2,4 \cdot 10^6$ Дж.

Задача 3.8

Воздух в объеме 10 л сжимается в двигателе дизеля в 12 раз адиабатически. Начальная температура 10°C . Вычислите конечное давление, конечную температуру, работу при сжатии.

Решение

Атмосферный воздух состоит в большей степени из кислорода O_2 и азота N_2 .

Такой воздух можно считать двухатомным газом, для которого $\gamma = C_p/C_v = \frac{i+2}{i} = 1,41$.

Конечное давление p_2 найдем из уравнения адиабаты:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Выразим $p_2 = p_1 (V_1/V_2)^\gamma$ и вычислим $p_2 = 32,5 \cdot 10^5$ Па.

Запишем основное уравнение для двух состояний газа:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1, \quad p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2,$$

подставим уравнение адиабаты, найдем конечную температуру:

$$T_2 = T_1 (V_1/V_2)^{\gamma-1} = 763 \text{ К.}$$

Работу адиабатического сжатия можно вычислить двумя способами. Из определения работы при адиабатическом сжатии

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^{\gamma-1}}{V^\gamma} dV = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1} \right].$$

Вычисляя, получаем $A = -4,8 \cdot 10^3$ Дж.

Или, используя первое начало термодинамики, запишем:

$$dA = -dU = -\frac{m}{\mu} C_v dT, \text{ получим } A = -\frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1) = -\frac{m}{\mu} C_v T_1 \left[(V_1/V_2)^\gamma - 1 \right],$$

где $C_v = \frac{5}{2} R$, $A = -4,8 \cdot 10^3$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Определить удельные теплоемкости c_v и c_p газообразной окиси углерода (CO). Молекулы считать жесткими. Ответ: $c_v = 7,42 \cdot 10^2$ Дж/кг град; $c_p = 1,04 \cdot 10^3$ Дж/кг град.

3.2. Чему равны удельные теплоемкости c_v и c_p некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях равна $\rho_0 = 1,43$ кг·м⁻³. Ответ: $c_v = 6,5 \cdot 10^2$ Дж/кг град, $c_p = 9,1 \cdot 10^2$ Дж/кг град.

3.3. Определить удельные теплоемкости c_v и c_p для газа, состоящего по массе из 85 % O₂ и 15 % озона (O₃). Молекулы O₂ и O₃ считать жесткими. Ответ: $c_v = 6,3 \cdot 10^2$ Дж/кг·град, $c_p = 8,8 \cdot 10^2$ Дж/кг·град.

3.4. Смесь газов состоит из 8 г гелия и 16 г кислорода. Определить отношение c_p/c_v для данной смеси. Ответ: $\gamma=1,59$.

3.5. Часть молекул кислорода (25 %) диссоциировано на атомы. Определить удельные теплоемкости c_v и c_p такого газа. Ответ: $c_p=1,05$ кДж/кг·К, $c_v=67$ кДж/кг·К.

3.6. Определить отношение $\gamma=c_p/c_v$ для смеси 3 молей аргона и 5 молей кислорода. Ответ: $\gamma=1,46$.

3.7. Определить молярную массу M двухатомного газа и его удельные теплоемкости, если известно, что разность (c_p-c_v) удельных теплоемкостей этого газа равна 260 Дж/(кг·К). Ответ: $c_p=909$ Дж/(кг·К), $c_v=649$ Дж/(кг·К), $M=32$ г/моль.

3.8. Определить показатель адиабаты γ идеального газа, который при температуре $T=350$ К и давлении $p=0,4$ МПа занимает объем $V=300$ л и имеет теплоемкость $C_v=857$ Дж/К. Ответ: 1,4.

3.9. В сосуде вместимостью $V=6$ л находится при нормальных условиях двухатомный газ. Определить теплоемкость C_v этого газа при постоянном объеме. Ответ: 5,5 Дж/К.

3. 10. Определить молярные теплоемкости газа, если удельные теплоемкости $c_v=10,4$ кДж/(кг·К) $c_p=14,6$ кДж/(кг·К). Ответ: $C_p=29,2$ Дж/(моль·К), $C_v=20,8$ Дж/(моль·К).

3.11. Вычислить удельные теплоемкости газа, зная, что его молярная масса $M=4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и отношение теплоемкостей. Ответ: $C_p/C_v=1,67$.

3.12. Трехатомный газ под давлением $p=240$ кПа и температуре $t=20$ °С занимает объем $V=10$ л. Определить теплоемкость C_p этого газа при постоянном давлении. Ответ: 32,8 Дж/К.

3.13. Одноатомный газ при нормальных условиях занимает объем $V=5$ л. Вычислить теплоемкость C_v этого газа при постоянном объеме. Ответ: 2,75 Дж/К.

3.14. При изотермическом расширении азота при температуре $T=280$ К объем его увеличился в два раза. Определить: 1) совершенную при расширении газа работу A ; 2) изменение внутренней энергии ΔU ; 3) количество теплоты Q , полученное газом. Масса азота $m=0,2$ кг. Ответ: $Q=A=11,5$ кДж, $\Delta U=0$.

3.15. При адиабатном сжатии давление воздуха было увеличено от $p_1=50$ кПа до $p_2=0,5$ МПа. Затем при неизменном объеме температура воздуха была понижена до первоначальной. Определить давление p_3 газа в конце процесса. Ответ: 0,26 МПа.

3.16. Кислород массой $m=200$ г занимает объем $V_1=100$ л и находится под давлением $p_1=200$ кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема $V_2=300$ л, а затем его давление возросло до $p_3=500$ кПа при

неизменном объеме. Найти изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A и теплоту Q , переданную газу. Ответ: $A=40\text{кДж}$, $\Delta U=325\text{кДж}$, $Q=365\text{кДж}$.

3.17. Во сколько раз увеличится объем водорода, содержащий количество вещества $\nu=0,4$ моль при изотермическом расширении, если при этом газ получит количество теплоты $Q=800\text{ Дж}$? Температура водорода $T=300\text{ К}$. Ответ: $e^{0,8}=2,2$.

3.18. Какая работа совершается при изотермическом расширении водорода массой $m=5\text{ г}$, взятого при температуре $T=290\text{ К}$, если объем газа увеличился в три раза? Ответ: $6,62\text{ кДж}$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первое начало термодинамики. Каков физический смысл первого начала термодинамики?
2. Существует ли процесс, при котором тепло, полученное от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
3. Как определяется внутренняя энергия идеального газа?
4. Как определить термодинамическую работу?
5. Как называется количеством теплоты системы?
6. Какая из величин A , Q , U является функцией состояния термодинамической системы и почему?
7. Как записать первое начало термодинамики для изопроцессов идеального газа.
8. Что называют теплоемкостью тела?
9. Какая из теплоемкостей – C_V или C_p – больше и почему?
10. Запишите уравнение Майера. Как определяется физический смысл универсальной газовой постоянной?
11. Каковы теплоемкости одноатомных и многоатомных газов?
12. Что определяет коэффициент Пуассона?
13. Что называют степенью свободы частицы?
14. Почему колебательная степень свободы частицы обладает энергией в два раза большей, чем поступательная и вращательная?
15. Как сформулировать закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул?
16. Какой процесс называется адиабатическим или адиабатным?
17. Как можно осуществить адиабатный процесс?
18. Почему график адиабаты круче графика изотермы?
19. Изменяется ли температура газа при адиабатическом сжатии?
20. Дайте определение политропическому процессу.

ГЛАВА 4. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ. ВТОРОЕ И ТРЕТЬЕ НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ. ЭНТРОПИЯ

4.1. Круговые обратимые и необратимые процессы

Циклом или круговым процессом называется процесс, в ходе которого термодинамическая система возвращается в начальное состояние. На графиках (диаграммах) циклы изображаются в виде замкнутых кривых (рис. 4.1).

Работа расширения (участок **a**) положительна ($dV > 0$), а работа сжатия (участок **b**) отрицательна ($dV < 0$). Работа, совершаемая за цикл, определяется площадью (область **A**) внутри замкнутой кривой **ab**.

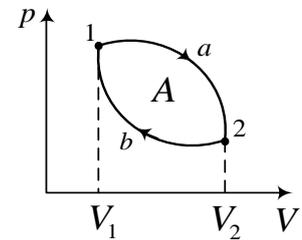


Рис. 4.1

Цикл называют **прямым**, если за цикл совершена положительная работа (рис. 4.1), на графике цикл протекает по часовой стрелке.

$$A = \oint pdV > 0. \quad (4.1)$$

Цикл считают **обратным**, если за цикл совершается отрицательная работа (рис. 4.1), на графике цикл протекает против часовой стрелки.

$$A = \oint pdV < 0. \quad (4.2)$$

В цикле изменение внутренней энергии газа равно нулю, так как термодинамическая система возвращается в начальное состояние. Тогда первое начало термодинамики для цикла:

$$Q = \Delta U + A = A, \quad (4.3)$$

это значит, что работа газа за цикл равна полученному количеству теплоты. Но в цикле система может теплоту отдавать, то есть

$$Q = Q_1 - Q_2, \quad (4.4)$$

где Q_1 – полученное количество теплоты; Q_2 – отданное количество теплоты.

Газ или пар в тепловой машине называют **рабочим телом**.

КПД (коэффициентом полезного действия) η тепловой машины называется отношение работы A газа за цикл к количеству теплоты Q_1 , полученной газом за цикл от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (4.5)$$

Все термодинамические процессы, в том числе и циклы, делят на обратимые и необратимые.

Цикл называют обратимым, если он «протекает так, что после окончания процесса он может быть проведен в **обратном направлении** через все те же промежуточные состояния, что и прямой процесс» [5].

По окончании обратимого циклического процесса никаких изменений в окружающей систему среде, не происходит. Только равновесные процессы об-

ладают свойством обратимости.

Цикл называют необратимым, если «после его окончания систему нельзя вернуть в начальное состояние через прежние промежуточные состояния» [5].

После окончания необратимого циклического процесса всегда в окружающей систему среде остаются изменения.

Максимальное КПД у тепловых машин, которые работают по обратимому циклу. Обратимые процессы – это необходимая интерпретация реальных процессов. В реальных процессах энергия рассеивается (например, из-за трения).

4.2. Тепловые машины

Тепловой машиной в термодинамике называют периодический двигатель, совершающий работу за счет получаемой извне теплоты. Тепловая машина всегда работает по круговому (циклическому) процессу.

У каждой тепловой машины есть рабочее тело, нагреватель и холодильник (рис. 4.2).

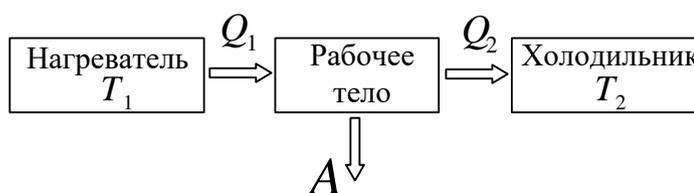


Рис. 4.2

Рассмотрим схему работы теплового двигателя (рис. 4.2). От нагревателя с высокой температурой T_1 , за прямой цикл отводится к рабочему телу количество теплоты Q_1 , а холодильнику с более низкой температурой T_2 , передается количество теплоты Q_2 от рабочего тела, при этом рабочим телом совершается работа A :

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (4.6)$$

Помимо тепловых машин в технике используются холодильные машины. **Холодильные машины** работают с обратным циклом, в котором тепло работой внешних сил передается к телу с более высокой температурой. Схема работы холодильной машины показана на рис. 4.3.

За счет работы внешних сил $Aв$ рабочим телом за цикл поглощается при низкой температуре T_2 холодильником количество теплоты Q_2 и затем отдается при более высокой температуре T_1 количество теплоты Q_1 нагревателю.

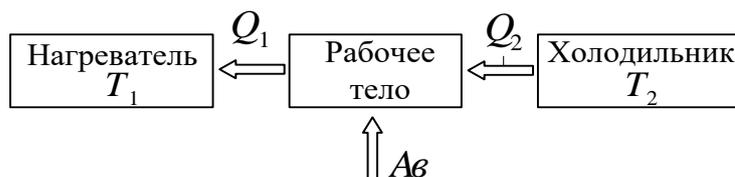


Рис. 4.3

Французский физик и военный инженер Сади Карно (Nicolas Léonard Sadi Carnot) вывел теорему о тепловых двигателях:

«Максимальным КПД из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, обладают обратимые машины. КПД всех обратимых машин при одинаковых температурах нагревателей и холодильников равны и не зависят от конструкции машины и от вещества рабочего тела» [5]. КПД всегда меньше единицы.

Цикл Карно представляет собой цикл из двух изотерм и двух адиабат ABCD (рис. 4.4).

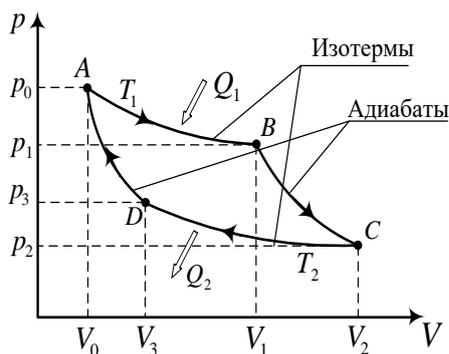


Рис. 4.4

Допустим, что нагреватель и холодильник обладают бесконечной теплоемкостью и их температуры не изменяются.

В точке A газ имеет давление p_0 и находится в контакте с нагревателем при T_1 . По первому началу термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (4.7)$$

В изотермическом процессе $dU=0$ и

$$\delta Q = \delta A. \quad (4.8)$$

Изотермическое расширение газа при температуре T_1 происходит на участке AB .

Если рабочее тело привести в соприкосновение с холодильником, то произойдет переход теплоты без совершения работы. Для этого рабочее тело охлаждаем до T_2 (адиабатическое расширение на участке BC). На этом заканчивается первая половина цикла и совершается полезная работа.

Далее рабочее тело должно вернуться в исходное состояние, значит, надо сжать газ до p_0 . Переход в точку A происходит так: сначала рабочее тело сжимают, оставляя его в контакте с холодильником, при этом холодильнику передается теплота Q_2 (изотермическое сжатие CD). Потом рабочее тело удаляют от холодильника, сжимая его при этом адиабатически, и его температура повышается до T_1 (DA). Рабочее тело нагревается при адиабатическом сжатии за счет работы внешних сил.

Найдем полезную работу цикла Карно.

Участок АВ. Работа изотермического расширения A_1 от V_0 до V_1 положительна. Тепло, полученное от нагревателя Q_1 , идет на изотермическое расширение газа:

$$A_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_1}{V_0} = Q_1. \quad (4.9)$$

Участок ВС. Происходит адиабатическое расширение, работа расширения A_2 происходит за счет изменения внутренней энергии. Давление при этом меняется до p_2 .

$$A_2 = \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) \quad (4.10)$$

Участок CD. Происходит изотермическое сжатие газа V_2 до V_3 . Тепло Q_2 , отданное газом холодильнику, отрицательно:

$$A_3 = -\frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3} = -Q_2. \quad (4.11)$$

Участок DA. Происходит адиабатическое сжатие сжатия:

$$A_4 = -\frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2). \quad (4.12)$$

Найдем работу за цикл $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$,

$$A = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_0} + \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} - RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3} - \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}.$$

Очевидно, что $\ln \frac{V_2}{V_3} = \ln \frac{V_1}{V_0}$ больше нуля и работа, совершаемая газом,

больше работы внешних сил.

Полезная работа равна площади ограниченной кривой ABCDA. Полезная работа: $A = Q_1 - Q_2$. КПД цикла равен

$$\eta_{обр} = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \text{ так как } \left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = \left| \frac{T_1}{T_2} \right|. \quad (4.13)$$

КПД больше, чем в цикле Карно, получить нельзя.

Рассмотрим необратимый процесс. Энергия механического движения тела переходит в тепловую энергию частиц тела и окружающей среды, энергия рассеивается (рис.4.5).

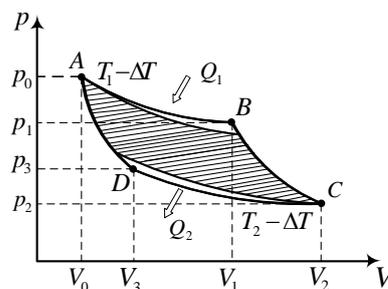


Рис. 4.5

Из рис. 4.5 видно, что площадь фигуры ABCD уменьшилась из-за тепловых потерь, значит меньше стала полезная работа цикла и уменьшился КПД.

Если цикл необратим, то справедливо выражение

$$\eta_{\text{необр}} = 1 - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1 - \Delta T} < 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.14)$$

КПД реального теплового двигателя всегда меньше КПД цикла Карно из-за тепловых потерь, $\eta_{\text{обр}} > \eta_{\text{необр}}$.

Обратный цикл Карно для холодильной машины можно рассмотреть на примере рис. 4.4. Здесь Q_1 – теплота, отдаваемая горячему источнику, Q_2 – теплота отбираемая из холодного источника.

В этом цикле $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$ и работа, совершаемая над газом, отрицательная:

$$A = (Q_1 + Q_2) < 0. \quad (4.15)$$

Для характеристики эффективности цикла холодильной машины применяется холодильный коэффициент ε , который определяется так:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (4.16)$$

где T_1 – температура подвода теплоты от холодного источника, T_2 – температура отвода теплоты к горячему источнику.

4.3. Энтропия

Энтропия – это мера, характеризующая способность тепла превращаться в другие виды энергии. Энтропия является функцией термодинамического состояния системы.

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обр}}. \quad (4.17)$$

Для обратимых процессов справедливо равенство Клаузиуса:

$$\Delta S_{\text{обр}} = 0, \quad \text{так как} \quad \oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0. \quad (4.18)$$

Изменение энтропии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 равно

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}. \quad (4.19)$$

Таким образом, из формулы (4.19) видно, что физический смысл имеет лишь разность энтропий.

Найдем изменения энтропии в процессах идеального газа:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_v dT = 0, \quad \delta A = pdV = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV,$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}, \text{ или}$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (4.20)$$

Найдем изменение энтропии для каждого изопроцесса:

1. Изохорический: $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$, т.к. $V_1 = V_2$.

2. Изобарический: $\Delta S = \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_2} C_p \frac{dT_2}{T_1} = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$, т.к. $p_1 = p_2$.

3. Изотермический: $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$, т.к. $T_1 = T_2$.

4. Адиабатический: $\Delta S = 0$, так как $\delta Q = 0$. Адиабатический процесс называют изоэнтропийным процессом, т.к. $S = const$.

4.4. Энтропия в процессах изменения агрегатного состояния

Фазой (агрегатным состоянием) называется совокупность всех частей термодинамической системы, которые имеют одинаковый химический состав и находятся в одном состоянии.

Фазовый переход I рода. Фазовым переходом I рода является процесс, в котором внутренняя энергия, энтропия и другие физические величины изменяются скачком.

Переход I рода всегда проходит с поглощением или выделением теплоты.

Примером фазового превращения I рода являются: испарение и конденсация; плавление и кристаллизация; сублимация или возгонка и десублимация, то есть изменения агрегатного состояния вещества. К фазовым переходам I рода так же относятся превращения из одной кристаллической модификации в другую и обратно.

Фазовый переход II рода. Фазовым переходом II рода является процесс, в котором зависимость свойств вещества от температуры и давления изменяется скачкообразно.

При фазовых переходах II рода энтропия, плотность, внутренняя энергия скачка не испытывают. Поэтому фазовые превращения II рода не поглощают или не выделяют тепло. Например, переход металлов в сверхпроводящее состояние; переход ферромагнетика в парамагнитное состояние при нагревании до температуры, называемой точкой Кюри; превращение гелия в сверхтекучую жидкость.

Рассмотрим три фазы: твердую, жидкую и газообразную и переходы между ними.

Фазовый переход «твердое тело – жидкость». Процесс перехода системы из твердой фазы в жидкую называют плавлением. Обратный процесс называют отвердеванием или кристаллизацией. При плавлении в систему поступает теплота извне, а при кристаллизации – теплота выделяется.

При плавлении или кристаллизации температура вещества не меняется, пока все вещество системы не расплавится. Температуру, при которой идет плавление или кристаллизация, называют температурой плавления, для каждого вещества, имеющего твердую фазу, эта температура уникальна.

Количество теплоты δQ , необходимое для плавления вещества, пропорционально массе dm этого вещества:

$$\delta Q = \lambda dm. \quad (4.21)$$

Коэффициент λ – константа, удельная теплота плавления и зависит только от плавящегося вещества.

Для кристаллизации справедливо то же выражение, но так как теплота выделяется, то формула записывается с «минусом»:

$$\delta Q = -\lambda dm. \quad (4.22)$$

Найдем изменение энтропии перехода «твердое тело – жидкость»:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad \Delta S = S_2 - S_1 = \int_{S_1}^{S_2} dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Подставим в выражение для изменения энтропии формулы (4.21) и (4.22) и получим:

$$\Delta S = \pm \int_1^2 \frac{\lambda dm}{T}. \quad (4.23)$$

При плавлении или кристаллизации температура системы постоянна и равна температуре плавления:

$$\Delta S = \pm \lambda m / T_{\text{пл}}. \quad (4.24)$$

Из выражения (4.24) видно, что при плавлении энтропия системы растёт и уменьшается при кристаллизации.

При одинаковой температуре энтропия твердого тела меньше энтропии жидкости. Например, энтропия льда при 0°C меньше энтропии воды при той же температуре. Это значит, что твердое тело более упорядоченная система, чем жидкость.

Фазовый переход «жидкость – газ». Процесс перехода системы из жидкого состояния в газообразное называют испарением, а обратный процесс – конденсацией. При испарении в систему поступает теплота извне, а при конденсации теплота выделяется.

Испарение и конденсация идут в веществе при широком интервале температур, но фазовым переходом начинается лишь тогда, когда процесс распространяется на всю систему.

Температуру, при которой идет массовое испарение или конденсация, называют температурой кипения, для каждого вещества эта температура уникальна. В процессе перехода «жидкость – газ» температура остается постоянной и равной температуре кипения, пока вся система не перейдет из одного агрегатного состояния в другое.

Количество теплоты δQ , необходимое для испарения вещества, пропорционально массе dm этого вещества:

$$\delta Q = r dm. \quad (4.25)$$

Коэффициент r – константа, удельная теплота парообразования и зависит только от испаряющегося вещества.

Для конденсации справедливо то же выражение, но так как теплота выделяется, то формула записывается с «минусом».

$$\delta Q = -r dm. \quad (4.26)$$

Найдем изменение энтропии перехода «жидкость – газ» при условии, что разница температур между системой и источником теплоты мала и меньше температуры кипения.

$$S = S_2 - S_1 = \int_{S_1}^{S_2} dS = \int_1^2 \delta Q / T = \pm \int_1^2 \frac{r dm}{T} = \pm r m / T_k \quad (4.27)$$

Из выражения (4.27) видно, что при испарении энтропия растет и уменьшается при конденсации.

При одинаковых температурах область молекул газа значительно больше области молекул жидкости и энтропия газа больше энтропии жидкости. Жидкость более упорядоченная система, чем газ.

4.5. Изменения энтропии в циклах Карно

Обратимый цикл Карно

В тепловой машине, работающей по циклу Карно, имеются три тела: нагреватель, рабочее тело – газ и холодильник.

Изменение энтропии газа в тепловой машине равно нулю: $\Delta S_{\text{газа}} = 0$, так как газ возвращается в начальное состояние.

Для нагревателя:

$$\Delta S_{\text{нагр}} = \frac{-Q_1}{T_1} \quad \Delta S_{\text{нагр}} = \frac{-Q_1}{T_1}. \quad (4.28)$$

Для холодильника:

$$\Delta S_{\text{хол}} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (4.29)$$

$$\Delta S_{\text{ц.к.}} = \Delta S_{\text{нагр}} - \Delta S_{\text{хол}} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

$$\Delta S_{\text{ц.к.}} = 0 \text{ или } \oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0. \quad (4.30)$$

Получили выражение, выведенное ранее (4.18), равенство Клаузиуса.

Необратимый цикл Карно

Ранее было показано, что $\eta_{\text{обр}} > \eta_{\text{необр}}$, тогда $1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

Или $\left| \frac{Q_2}{T_2} \right| > \left| \frac{Q_1}{T_1} \right|$, значит $\Delta S_{\text{необр}} = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{хол}} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} > 0$.

Тогда

$$\Delta S_{\text{необр}} > 0, \quad \oint \frac{\delta Q}{T} > 0. \quad (4.31)$$

Выражение (4.31) называется неравенством Клаузиуса; если процесс необратим, энтропия системы может только возрастать.

4.6. Второе начало термодинамики

Вечный двигатель первого рода – устройство, способное бесконечно совершать работу без затрат топлива или других энергетических ресурсов. Невозможность осуществления вечного двигателя первого рода постулируется как первое начало термодинамики.

Второе начало термодинамики явилось следствием анализа работы тепловых двигателей. В п. 4.2 был рассмотрен принцип работы теплового двигателя. От нагревателя с высокой температурой T_1 за цикл отводится количество теплоты Q_1 , а холодильнику с более низкой температурой T_2 за цикл отдается количество теплоты Q_2 и при этом рабочим телом совершается работа $A = Q_1 - Q_2$.

Чтобы КПД теплового двигателя был $\eta = 1$, должно выполняться условие $Q_2 = 0$ или тепловой двигатель должен иметь только нагреватель, чего быть не может. Такой двигатель называют **вечным двигателем второго рода**, и невозможность его создания утверждается вторым началом термодинамики.

Существует множество формулировок второго начала термодинамики, например:

1. Невозможно осуществить процесс, результатом которого будет только превращение всего тепла, полученного от нагревателя, в эквивалентную ему работу (Кельвин).
2. Вечный двигатель второго рода невозможен (Томпсон и Планк).
3. Невозможно осуществить процесс, результатом которого будет только

передача энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему (Клаузиус).

Если процесс обратим, то используется равенство Клаузиуса: $TdS = \delta Q$.

Если процесс необратим, то используется неравенство Клаузиуса:

$$TdS > \delta Q.$$

Обобщение дает формулу $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$, где знак равенства – для обратимого процесса; знак больше – для необратимого.

Для замкнутой системы

$$dS \geq 0. \quad (4.32)$$

Это неравенство (4.32) – аналитическая запись второго начала термодинамики. Справедливо также

$$TdS \geq \delta Q. \quad (4.33)$$

Обобщая все сказанное выше, можем сделать вывод, что энтропия замкнутой системы не может убывать при любых процессах, происходящих в ней. Энтропия замкнутой системы достигает максимума в равновесном состоянии.

Первое и второе начала термодинамики можно объединить в выражение:

$$TdS \geq dU + \delta A. \quad (4.34)$$

4.7. Третье начало термодинамики

Два начала термодинамики не могут определить значение энтропии при абсолютном нуле. Вальтер Нернст (Walther Hermann Nernst) сформулировал закон об энтропии при низких температурах в 1906 г., который и называется третьим началом термодинамики, или тепловой теоремой. Нернстом была сформулирована теорема изолированных систем, а Планком (Max Karl Ernst Ludwig Planck) – для любых систем в термодинамическом равновесии.

В формулировке Планка третье начало термодинамики сформулировано так: «при абсолютном нуле любые изменения термодинамической системы происходят без изменения энтропии» [5].

$$\Delta S_{T=0} = 0, \text{ т.е. } S_{T=0} = \text{const} \text{ или } S_{T=0} = 0. \quad (4.35)$$

В формуле Планка энтропия вычисляется через термодинамическую вероятность W .

$$S = k \cdot \ln W. \quad (4.36)$$

При температуре абсолютного нуля термодинамическая система находится в квантово-механическом состоянии, которое можно описать единственным микростоянием. $S_{T=0} = 0, W = 1$.

Важным «следствием третьего начала является то, что невозможно охладить никакую систему до абсолютного нуля» [5] температур, иначе было бы возможно создание вечного двигателя второго рода. Это принцип недостижимости абсолютного нуля температур.

Примеры решения задач

Задача 4.1

Цикла состоит из двух изобар и двух изохор (рис. 4.6), максимальное давление в цикле в $n=2$ раза больше минимального, а максимальный объем в $\nu=4$ раза больше. Рабочее вещество – один моль идеального газа с показателем адиабаты γ . Определите КПД цикла.

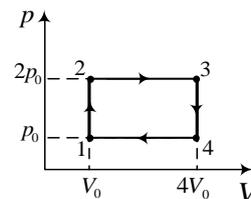


Рис. 4.6

Решение

На pV – диаграмме представлен цикл из последовательных состояний.

Эта система – тепловая машина с КПД $\eta = \frac{A}{Q_1}$.

Полную работу A за цикл определим как сумму работ на участках цикла:

$$A = \oint pdV = \int_1^2 pdV + \int_2^3 pdV + \int_3^4 pdV + \int_4^1 pdV = \int_1^2 p_{\max} dV + \int_3^4 p_{\min} dV = \text{Полная работа} \\ = (p_{\max} - p_{\min})(V_2 - V_1).$$

положительна, так как $p_{\max} - p_{\min} > 0$, $V_2 - V_1 > 0$.

Определим количество теплоты на каждом участке цикла. Участки 1-2 и 3-4 – изобарические процессы, тогда

$$Q_{12} = \int_1^2 C_p dT = C_p (T_2 - T_1) > 0, \quad Q_{34} = \int_3^4 C_p dT = C_p (T_4 - T_3) < 0.$$

Участки 2-3 и 4-1 – изохорические процессы, для них запишем

$$Q_{23} = \int_2^3 C_v dT = C_v (T_3 - T_2) < 0, \quad Q_{41} = \int_4^1 C_v dT = C_v (T_4 - T_1) > 0.$$

Соответствующие температуры определим, используя уравнения состояния идеального газа

Из диаграммы следует, что $p_1 = p_2 = p_{\max}$, тогда получим $V_2/V_1 = T_2/T_1 = \nu$, $T_2 = \nu T_1$.

Аналогично найдем $T_3 = \nu T_4$.

Из диаграммы следует, что $V_1 = V_4 = V_{\min}$, тогда получим $p_1/p_4 = T_1/T_4 = n$ или $T_1 = nT_4$.

Аналогично найдем $T_2 = nT_3$.

Суммарное количество теплоты от нагревателей равно

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41}.$$

Определим КПД цикла:

$$\eta = \frac{(p_{\max} - p_{\min})(V_2 - V_1)}{C_p(T_2 - T_1) + C_v(T_4 - T_1)} = \frac{p_4 V_4 (n-1)(\nu-1)}{T_4 C_v [n\gamma(\nu-1) + (1-n)]}.$$

С учетом что $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$, получим $\eta = \frac{(\gamma-1)(n-1)(\nu-1)}{n\gamma(\nu-1) + (1-n)}$.

Задача 4.2

Тепловая машина, работает по циклу Карно с $\eta=40\%$. Её хотят использовать как холодильную машину в тех же условиях. Определите величину холодильного коэффициента ε и количество теплоты, которое может быть передано за один цикл от холодильника к нагревателю, если к нагревателю передается работа за один цикл 200 Дж.

Решение

Холодильный коэффициент равен отношению забранной у холодильника теплоты Q_{2x} к работе внешних сил A_B :

$$\varepsilon = \frac{Q_{2x}}{A_B}.$$

По первому началу термодинамики полная работа за цикл равна

$$A = \oint p dV = \oint dQ - \oint dU = \oint dQ = -Q_{1x} + Q_{2x},$$

где Q_{2x} – количество тепла, полученного рабочим телом от холодильника, Q_{1x} – количество тепла, переданного окружающей среде.

Для цикла Карно:

$$Q_{2x} = Q_{23} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \quad Q_{1x} = Q_{41} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_4}{V_1}.$$

Для процессов 1-2 и 3-4 запишем уравнения адиабат:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad T_4 V_4^{\gamma-1} = T_3 V_{23}^{\gamma-1}.$$

Если учесть, что $T_1 = T_4$ и $T_2 = T_3$, получаем $\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$.

Найдем количество теплоты, переданное окружающей среде,

$$Q_{1x} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_3}{V_2}.$$

Работа внешних сил за цикл $A_B = -A = Q_{1x} - Q_{2x}$.

Найдем холодильный коэффициент: $\varepsilon = \frac{Q_{2x}}{Q_{1x} - Q_{2x}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$. Для тепловой

машины и прямого цикла Карно КПД равно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученной от нагревателя, Q_2 – количество теплоты, переданной холодильнику. Машина обратима, и она забирает от холодильника столько же тепла, сколько отдает ему в прямом цикле. Или

$$|Q_{2x}| = |Q_2| = A \frac{(1-\eta)}{\eta}, \quad \varepsilon = \left| \frac{Q_{2x}}{A} \right| = \frac{1-\eta}{\eta}.$$

Вычисляя, получим $Q_{1x} = 300$ Дж, $\varepsilon = 1,5$.

Задача 4.3

Определите, как изменится энтропия 6 г водорода при переходе от объема в 20 л и давления $1,5 \cdot 10^5$ Па к объему в 60 л и давлению в $1 \cdot 10^5$ Па.

Решение

Запишем первое начало термодинамики

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T + p dV.$$

Через уравнение Менделеева-Клапейрона заменим и получим

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{m}{\mu} C_v \frac{dT}{T} + 2 \int_1^2 \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояния, отсюда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}.$$

Заменим в логарифме отношение температур, а также R :

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} (C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \ln \frac{V_2}{V_1}),$$

где $C_v = \frac{5}{2} R$, $C_p = \frac{7}{2} R$.

Вычислим $\Delta S = 71$ Дж/К.

Задача 4.4

Кислород, массой 0,2 кг нагревают от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Как изменится энтропия цикла (рис. 4.7), если начальное давление p_1 и конечное давление p_2 равны.

Решение

Изменение энтропии равно

$$\Delta S = \int_1^2 dQ / T.$$

Рассмотрим два произвольных процесса:

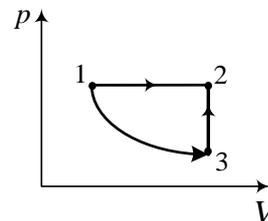


Рис. 4.7

- 1) изобарический переход 1-2;
 - 2) изотермическое расширение 1-3+изохорный нагрев 3-2.
- Процесс 1-2:

$$\Delta S = \int_1^2 dQ / T, \text{ где } dQ = \frac{m}{\mu} C_p dT, C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Процесс 1-3-2 дает тот же результат:

$$\Delta S = \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = \int_1^3 dQ_T / T + \int_3^2 dQ_V / T,$$

где $dQ_T = dA = p dV$, $dQ_V = \frac{m}{\mu} C_V dT$.

Для изотермического процесса $p = p_1 V_1 / V = \frac{mRT_1}{\mu V}$,

$$\Delta S_{13} = \frac{mR}{\mu} \ln \frac{V_3}{V_1}, \Delta S_{32} = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_3}.$$

С учетом, что $T_3 = T_1$, $V_3 = V_2$, и $T_2/T_1 = V_2/V_1$ окончательно

$$\Delta S = \frac{m(i+2)R}{2\mu} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Для кислорода (двухатомный газ) число степеней свободы равно $i=5$. Вычисляя, получим

$$\Delta S = 52 \text{ Дж/К.}$$

Задача 4.5

Разность энтропии в цикле Карно для двух адиабат равна 4200 Дж/К. Изменение температур между изотермами 100 К. Определите работу совершенную за цикл?

Решение

Работу определим как $A = Q_1 - Q_2$, где Q_1 – полученное количество теплоты, Q_2 – отданное количество теплоты.

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \text{ – изменение энтропии от одной адиабаты к другой.}$$

$$T_1 = T_2 + \Delta T, A = \Delta S \cdot T_1 - \Delta S \cdot T_2 = \Delta S(T_1 - T_2) = \Delta S \cdot \Delta T.$$

Вычисляя, получим

$$A=420 \text{ кДж.}$$

Задача 4.6

1 кг льда при начальной температуре -20°C превращают в пар при температуре 100°C . Найдите изменение энтропии.

Решение

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Процесс перехода льда в пар состоит из следующих этапов:

1. Нагревание льда от T_1 до температуры плавления T_2 ;
2. Плавление льда при температуре плавления T_2 ;
3. Нагревание полученной массы воды от T_2 до температуры кипения T_3 ;
4. Испарение воды при температуре кипения T_3 .

Общее изменение энтропии вычислим как

$$\Delta S = \sum \Delta S_i,$$

где ΔS_i – изменение энтропии на этапах 1, 2 и 3.

1. Нагревание льда на dT требует количества теплоты $dQ = mc_1 dT$, где c_1 – удельная теплоемкость льда.

По определению для ΔS_1 запишем: $\Delta S_1 = mc_1 \ln \frac{T_2}{T_1}$.

2. Для плавления льда при T_2 надо подвести теплоту $Q = m\lambda$, где λ – удельная теплота плавления. Для ΔS_2 получим

$$\Delta S_2 = m\lambda \frac{1}{T_2}.$$

3. При нагревании воды (ее удельная теплоемкость c_2) энтропия повышается на

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

4. Удельная теплота парообразования r . Кипение при T_3 сопровождается повышением энтропии (как на втором этапе) на

$$\Delta S_4 = mr \frac{1}{T_3}.$$

Просуммируем: $\Delta S = m \left(c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln \frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3} \right)$.

Подставим числовые значения:

$$m=1\text{ кг},$$

$$c_1=2100\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}),$$

$$c_2=4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}),$$

$$T_1=253\text{ К}, T_2=273\text{ К}, T_3=373\text{ К},$$

$$\lambda=3,35\cdot 10^5\text{ Дж}/\text{кг},$$

$$r=2,26\cdot 10^6\text{ Дж}/\text{кг}.$$

Вычисляя, получим

$$\Delta S=8,8\text{ кДж}/\text{К}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Один моль идеального двухатомного газа, находящийся под давлением $p_1=0,1$ МПа при температуре $T_1=300$ К, нагревают при постоянном объеме до давления $p_2=0,2$ МПа. После этого газ изотермически расширялся до начального давления и затем изобарически был сжат до начального объема. Начертить график цикла. Определить температуру газа для характерных точек цикла и его КПД. Ответ: $T_2=T_3=\frac{T_1 p_2}{p_1}=600\text{ К}$.

4.2. В ходе цикла Карно газ получает от нагревателя тепло $Q=300$ кДж. Температуры нагревателя и холодильника равны соответственно $T_1=450$ К и $T_2=280$ К. Определить работу A , совершаемую рабочим веществом за цикл. Ответ: $A=113$ кДж.

4.3. Найти КПД цикла, состоящего из двух изотерм и двух изохор. Изотермические процессы протекают при температурах T_1 и T_2 ($T_1>T_2$), изохорические – при объемах V_1 и V_2 и V_2 в ϵ раз больше, чем V_1). Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ . Ответ: $\eta=(\gamma-1)(T_1-T_2)/(\gamma T_1-T_2)$.

4.4. Идеальный газ совершает цикл Карно при температурах T_1 теплоотдатчика в четыре раза ($n=4$) больше температуры теплоприемника. Какую долю количества теплоты, полученного за один цикл от теплоотдатчика, газ отдаст теплоприемнику? Ответ: $0,25$.

4.5. Определить работу A_2 изотермического сжатия газа, совершающего цикл Карно, КПД которого $\eta=0,4$, если работа изотермического расширения равна $A_1=8$ Дж. Ответ: $4,8$ Дж.

4.6. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1=500$ К. Температура холодильника $T_2=250$ К. Определить КПД цикла, а также работу A_1 рабочего вещества при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа $A_2=70$ Дж? Ответ: 140 Дж.

4.7. Вычислить КПД цикла, состоящего из изотермы, изобары и изохоры, если при изотермическом процессе объем идеального газа с показателем адиабаты γ увеличивается в n раз. Ответ: $\eta = 1 - \gamma(n-1)/(n-1 + (\gamma-1)n \ln n)$.

4.8. Тепловую машину, работающую по циклу Карно с КПД=10 %, используют при тех же тепловых резервуарах как холодильную машину. Найти её холодильный коэффициент. Ответ: $\varepsilon = (1 - \eta) / \eta$.

4.9. Найти КПД цикла, состоящего из двух изохор и двух изотерм, если в пределах цикла объем изменяется в ν раз, а абсолютная температура – в τ раз. Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ . Ответ: $\eta = \frac{(\tau - 1) \ln \nu}{\tau \ln \nu + (\tau - 1)(\gamma - 1)}$.

4.10. Рассчитать КПД тепловой машины использующей в качестве рабочего тела идеальный одноатомный газ и работающей по циклу, изображенному на рис. 4.8. Ответ: 17,4%.

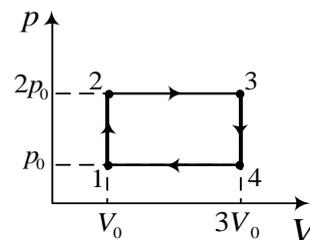


Рис. 4.8

4.11. Цикл состоит из изотермы ($T_1=600$ К), изобары и изохоры (рис.4.9). Отношение $V_2/V_3=2$. Рабочее вещество идеальный газ ($i=5$). Определить КПД цикла. Ответ: 10 %.

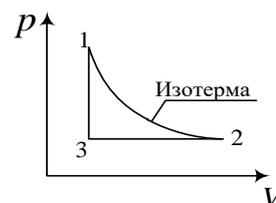


Рис. 4.9

4.12. Найти изменение энтропии 30 г льда при превращении его в пар, если начальная температура льда -40 °С, а температура пара 100 °С. Теплоемкость воды и льда считать постоянными, а все процессы – происходящими при атмосферном давлении. Ответ: 265 Дж/К.

4.13. Найти приращение энтропии при превращении 1 кг воды при 0 °С в пар при 100 °С. Ответ: 7,5 кДж/К.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение круговому процессу или циклу.
2. Каково отличие обратимых процессов от необратимых?
3. Чем отличается холодильная машина от теплового двигателя?
4. Можно ли осуществить процесс, в котором тепло, взятое от нагревателя, полностью превращается в работу?
5. Какой процесс называется циклом Карно?
6. Что характеризуют равенство и неравенство Клаузиуса?
7. Как изменяется энтропия в фазовых переходах?
8. Сформулируйте второе начало термодинамики.
9. Какую тепловую машину можно назвать двигателем второго рода?
10. Приведите объединенную форму первого и второго начал термодинамики?
11. Существует ли процесс, при котором тепло, полученное от нагревателя, преобразуется в работу полностью?
12. Как изменяется энтропия замкнутой системы и незамкнутой системы?
13. В каком состоянии энтропия и термодинамическая вероятность максимальны?
14. Приведите связь энтропии и термодинамической вероятности.
15. Приведите формулировку третьего начала термодинамики.
16. Каково основное следствие из третьего начала термодинамики?

ГЛАВА 5. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

5.1. Свободный пробег частицы

Из главы 1 знаем, что молекулы (атомы, частицы) в газе перемещаются быстро. Однако распространение газов идет гораздо медленнее, это связано с тем, что молекулы движутся беспорядочно и хаотично, постоянно испытывают соударения между собой, траектория движения у молекул газа не прямолинейная, а изломанная.

Введем обозначение l_i – длина свободного пробега частицы.

Молекула газа все время испытывает столкновение с другими молекулами. При соударении у молекулы меняется абсолютная величина и направление скорости. Среднее расстояние, которое пройдет молекула «без столкновений, называется средней длиной свободного пробега молекулы» [5].

Определим среднюю длину свободного пробега как $\bar{l} = \bar{v}\tau$, «где \bar{v} – средняя скорость теплового движения молекулы, τ – среднее время между двумя последовательными соударениями (рис. 5.1)» [5].

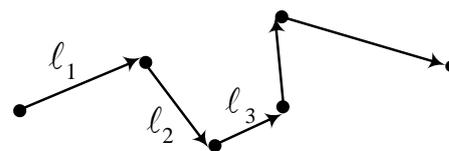


Рис. 5.1.

Введем физическую величину σ – и назовем ее эффективным сечением частицы, которое характеризует сечение рассеяния, при парном соударении между молекулами (рис. 5.2). Тогда $\sigma = \pi d^2$ – площадь, в которую не может «пройти» середина другой частицы. На рис. 5.2 $d=2r$ – диаметр частицы.

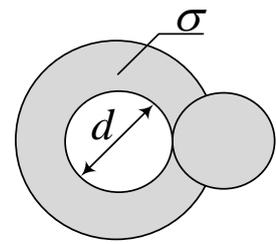


Рис. 5.2.

За единицу времени частица пройдет расстояние, численно равное средней арифметической скорости молекулы \bar{v} . За единицу времени частица претерпевает z соударений. Значит, средняя длина свободного пробега $\bar{l} = \frac{\bar{v}}{z}$.

Определим число столкновений для двух частиц.

Теория вероятности показывает, что вероятность столкновения трех и более частиц очень мала.

Столкновения одной молекулы могут произойти только с молекулами, центры которых попадут в цилиндр радиусом d (рис. 5.3).

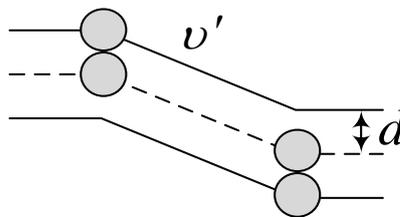


Рис. 5.3

Путь, который пройдет частица за единицу времени, численно равен длине этого цилиндра \bar{v}' . Если перемножим объем цилиндра $\bar{v}'\sigma$ на число частиц в единичном объеме n , то получим среднее число столкновений в единицу времени $\nu = \pi d^2 \bar{v}' \cdot n$.

Все частицы двигаются в разных направлениях, количество соударений определяется средней относительной скоростью движения частиц.

Среднюю относительную скорость вычислим так:

$$\bar{v}' = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2v^2} = \bar{v}\sqrt{2}.$$

Как как было определено выше, для средней длины свободного пробега для $\bar{l} = \frac{\bar{v}}{z}$. Подставляя значение средней относительной скорости, придем к выражению

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}. \quad (5.1)$$

Применив уравнение состояния идеального газа, выразим концентрацию n , $n = \frac{p}{kT}$, значит, средняя длина свободного пробега окончательно будет равна

$$\bar{l} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 p} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}. \quad (5.2)$$

5.2. Диффузия газов

«Диффузия – процесс взаимного проникновения молекул или атомов одного вещества между молекулами или атомами другого, приводящий к самопроизвольному выравниванию их концентраций по всему занимаемому объёму» [12].

В состоянии термодинамического равновесия в системе частиц концентрация n во всех ее частях одинакова, а значит и плотность. При изменении плотности от равновесной в некоторой части системы появляется перемещение структур вещества в направлениях, приводящих к выравниванию концентрации во всем объеме. Диффузионный поток, связанный с переносом вещества, прямо пропорционален градиенту концентрации:

$$J \sim \frac{dn}{dx}.$$

Предположим, что в газе есть примесь концентрации n и расположена она в определенной точке $A(x, y, z)$.

Тогда градиент концентрации:

$$\text{grad } n = \frac{dn}{dx}i + \frac{dn}{dy}j + \frac{dn}{dz}k.$$

Если взять одно выделенное направление, то

$$\text{grad } n = \frac{dn}{dx}.$$

При наличии $\text{grad } n$ хаотичность в движении будет уменьшаться, появится течение частиц примеси, направленное от координат с большей концентрацией к координатам с меньшей концентрацией.

Определим в плоскости, содержащую координату x , единичную площадку dS , которая перпендикулярна оси ox . Вычислим число частиц, которые проскакивают через единичную площадку слева направо dN_+ и справа налево dN_- , за время dt . Вывод аналогичен выводу уравнения идеального газа:

$$dN_+ = \frac{1}{6}n_1\bar{v} \cdot dSdt, dN_- = \frac{1}{6}n_2\bar{v} \cdot dSdt,$$

где n_1 – концентрация частиц слева от площади, а n_2 – концентрация частиц справа от площадки dS . Значит, разница в числе частиц во встречных потоках будет равна

$$dN = dN_+ - dN_-.$$

Суммарный диффузионный поток через единичную площадки в единицу времени будет равен

$$J = \frac{dN}{dSdt} = \frac{1}{6}(n_1 - n_2) \cdot \bar{v}, \quad J = -\frac{1}{3} \lambda \cdot \bar{v} \cdot \frac{n_2 - n_1}{2\lambda}.$$

Заменяем $n_2 - n_1 = dn$; $2\lambda = dx$. Тогда

$$\frac{n_2 - n_1}{2\lambda} = \frac{dn}{dx}.$$

Введем обозначение коэффициента диффузии $D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}$. Тогда поток диффузии определяется как

$$J = -D \frac{dn}{dx} \text{ т.е.} \quad (5.3)$$

$$J = -D \text{ grad } n. \quad (5.4)$$

Выражение называют уравнением Фика.

Из (5.4) следует, что поток диффузии всегда направлен в сторону уменьшения концентрации. Коэффициент диффузии численно равен диффузионному потоку через единичную площадку в единицу времени при $\text{grad } n = 1$, его размерность $[\text{м}^2/\text{с}]$.

5.3. Вязкость, внутреннее трение газов

Рассмотрим случай, когда в неподвижном газе перемещается вверх пластина со скоростью v_0 перпендикулярно оси x , причём со скоростью много меньшей чем скорость теплового движения молекул ($v_0 \ll v_T$). Пластина увлекает за собой ближнюю прослойку газа, эта прослойка – соседнюю и так далее. Вся толща газа разделяется на тоненькие прослойки или небольшие слои, перемещающиеся вверх тем медленнее, чем дальше они от пластины. Так как прослойки газа перемещаются с различными скоростями, то возникает трение. Каждая частица газа в такой прослойке участвует в двух движениях: в тепловом и направленном по движению пластины.

Известно, что направленность теплового движения постоянно изменяется, а это значит, что при усреднении вектор тепловой скорости равен нулю $\overline{v_T} = 0$. При направленном движении все частицы перемещаются с постоянной скоро-

стью дрейфа v . То есть средний импульс одной частицы массой m в прослойке определяется только дрейфовой скоростью v :

$$p_0 = mv.$$

Но из-за теплового движения, частицы будут перемещаться из прослойки в прослойку. При этом они будут переносить добавочный импульс, который будет определяться частицами той прослойки слоя, куда переместилась частица. Перемешивание частиц разных прослоек газа приводит к выравниванию дрейфовых скоростей частиц из различных прослоек, что проявляется как действие сил трения между прослойками.

Рассмотрим тело, движущееся в газе. При движении оно постоянно сталкивается с частицами газа и передает им импульс. Но тело тоже будет испытывать удары со стороны частиц и получать собственный добавочный импульс, но направленный в противоположную сторону. При ускорении газа тело будет терять скорость, так как на тело действуют силы трения. Такая же сила трения будет действовать и между двумя соседними прослойками газа, движущимися с различными скоростями. Это физическое явление называется внутренним трением, вязкостью газа. Возникающая при этом движении сила трения прямо пропорциональна градиенту скорости:

$$F_{mp} \sim \frac{dv}{dx}.$$

Рассмотрим единичную площадку dS перпендикулярную оси x аналогично тому как это было сделано в случае диффузии в п.5.2. Через единичную площадку за время dt и влево (+), и вправо (-) переходят частицы:

$$dN_+ = dN_- = \frac{1}{6} n\bar{v} \cdot dS dt.$$

Потоки переносят импульсы: $m_0 v_1 dN_+$ и $m v_2 dN_-$.

Таким образом, на прослойку действует сила трения между слоями газа, равная изменению импульса. Запишем второй закон Ньютона в импульсной форме. Перенесенный за время dt импульс $d(mv)$: $d(mv) = F dt$;

$$F dt = \frac{1}{6} n\bar{v} m (v_1 - v_2) dS.$$

Получим силу, действующую на единичную площадку, разделяющую две смежные прослойки газа:

$$\frac{F}{dS} = f = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} n m \left(\frac{v_1 - v_2}{2\lambda} \right) = -\frac{1}{3} \lambda \bar{v} n m \frac{v_2 - v_1}{2\lambda}. \quad (5.5)$$

$$f = -\eta \frac{dv}{dx}.$$

Если введем обозначение η для коэффициента вязкости, то

$$f = -\eta \text{grad } \bar{v}. \quad (5.6)$$

Это выражение – уравнение Ньютона. Существует связь между D – коэффициентом диффузии и η – коэффициентом вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} n m = D \rho \quad (5.7)$$

Физический смысл коэффициента вязкости состоит в том, что он численно равен импульсу, переносимому в единицу времени через единичную площадку при $grad v = 1$. Размерность – $[M^2/c]$.

5.4. Теплопроводность газов

Рассмотрим газ, находящийся между двумя параллельными плоскостями с разными температурами T_1 и T_2 .

Если через газ направить поток энергии, то возникнет градиент температуры $\left(\frac{dT}{dx} \neq 0\right)$. Из-за теплового движения частицы будут переходить из одного слоя газа в другой газ. Это приводит к перемешиванию частиц, имеющих разную кинетическую энергию $\bar{E} = \frac{m v_{KB}^2}{2} = \frac{i}{2} kT$, где i – число степеней свободы частицы.

Если в соседние слои газа имеют разную температуру, то между ними происходит обмен теплотой. За счет теплового движения частицы в смежных слоях будут перемешиваться и их средние энергии уравниются. Такой процесс называется теплопроводностью, то есть перенос энергии от более нагретых частей газа к более холодным. Поток теплоты прямо пропорционален градиенту температуры:

$$Q \sim \frac{dT}{dx}.$$

Рассмотрим единичную площадку dS аналогично п.5.2. Через нее за время dt слева направо двигается $dN_+ = \frac{1}{6} \bar{v}_T n dS dt$ частиц. Средняя энергия частиц \bar{E} равна энергии в том месте, где они испытывают последнее соударение. Для одной частицы газа: $\bar{E}_1 = \frac{i}{2} kT_1$. Тогда справа налево двигается $dN_- = \frac{1}{6} n \bar{v}_T dS dt$ частиц, каждая переносит энергию $\bar{E}_2 = \frac{i}{2} kT_2$.

Суммарный поток теплоты через единичную площадку равен разности потоков dQ_+ и dQ_- :

$$dQ = \frac{1}{6} n \bar{v}_T dS dt \frac{i}{2} k(T_1 - T_2).$$

Аналогично рассуждая, запишем результирующий поток q через единицу площади в единицу времени, который направлен противоположно градиенту температур:

$$\frac{dQ}{dSdt} = q = -\frac{1}{3} \lambda \bar{v}_T n \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx},$$

$$q = -\chi \frac{dT}{dx}, \text{ т.е.} \quad (5.8)$$

$$q = -\chi \text{ grad} T. \quad (5.9)$$

Это выражение – уравнение теплопроводности Фурье.

В этом выражении q – тепловой поток; χ – коэффициент теплопроводности, который определяют так:

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}_T n \frac{i}{2} k, \text{ или } \chi = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}_T \rho C_V, \quad (5.10)$$

где \bar{v}_T – тепловая скорость движения молекул; C_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Измеряется коэффициент теплопроводности в $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}} \right]$.

Примеры решения задач

Задача 5.1

Определите среднюю длину свободного пробега молекулы воздуха и частоту столкновений молекул воздуха при н.у. Принять эффективный диаметр молекулы воздуха $d=3 \cdot 10^{-10}$ м, молярная масса воздуха $\mu=29$ кг/кмоль.

Решение

Запишем формулу средней длины свободного пробега для частицы:

$$\bar{\ell} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

С учетом, что $n = p_0 / kT_0$, получим $\bar{\ell} = \frac{kT_0}{\sqrt{2} \pi d^2 p_0}$.

Частота столкновений определится по формуле

$$\bar{z} = \sqrt{2} \pi d^2 n_0 \bar{v}, \text{ где } \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi \mu}}.$$

Вычисляя выражения выше, получим $\bar{\ell} = 9,50 \cdot 10^{-8}$ м, $\bar{z} = 4,70 \cdot 10^9$.

Задача 5.2

Коэффициент вязкости для CO_2 (углекислого газа) при н.у. $1,4 \cdot 10^{-2}$ кг/с. Определите длину свободного пробега и коэффициент диффузии для углекислого газа при заданных условиях.

Решение

Применим формулу для коэффициента вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\ell}, \text{ выразим } \bar{\ell} = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}}.$$

Вычислим среднюю арифметическую скорость и плотность при $T_0=273 \text{ К}$, $p_0=1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $\mu=44 \text{ кг/кмоль}$.

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi\mu}}, \quad \rho = m/V = \frac{p_0\mu}{RT_0},$$

Отсюда $\rho=1,94 \text{ кг/м}$; $\bar{v}=362 \text{ м/с}$, $\bar{\ell}=5,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

Сравнивая полученные выражения для коэффициентов диффузии и вязкости с учетом $\eta = D\rho$ и выражения для плотности, получим $D = \frac{\eta RT_0}{p_0\mu}$.

Вычисляя выражения выше, найдем $D=7,21 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Задача 5.3

Определите, как и во сколько раз изменится вязкость двухатомного газа, если уменьшить объем в два раза. Рассмотреть процессы перехода: а) изотермические, б) изобарические, в) адиабатические:

Решение

Формула для коэффициента вязкости газа $\eta = \frac{\rho \bar{v} \bar{\ell}}{3}$, объем в явном виде не содержит. Установим зависимость от объема для $\rho, \bar{v}, \bar{\ell}$.

Средняя длина свободного пробега определяется по формуле

$$\bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Так как $n = N/V$, то $\bar{\ell} \sim V$, то есть прямо пропорциональна. Но плотность $\rho = m/V \sim 1/V$, напротив, обратно пропорциональна объему.

Это значит, что η может зависеть от объема только посредством средней скорости.

При изотермическом процессе температура постоянна, значит, и $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$.

Для изобарного процесса $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8pV}{\pi m}} \sim \sqrt{V}$.

Отсюда следует, что $\eta \sim \sqrt{V}$, то есть при уменьшении объема в 2 раза при изобарном процессе, вязкость уменьшается в $\sqrt{2}$ раза.

Для адиабатного процесса $pV^\gamma = const$, значит, $\bar{v} = \sqrt{\frac{8pV}{\pi m}} \sim V^{\frac{1-\gamma}{2}}$, где $\gamma = (i+2)/i = 1,4$ ($i = 5$).

Коэффициент вязкости будет пропорционален $\eta \sim V^{-0,2}$.

Задача 5.4

Объем между двумя протяженными параллельными пластинами наполнен гелием. Расстояние между пластинами $L=50$ мм. Одна пластина находится при температуре $T_1=290$ К, другая пластина – при $T_2=330$ К. Давление газа соответствует нормальному. Найдите плотность потока теплоты.

Решение

Так как температуры пластин постоянна, то плотность потока тепла не зависит от времени и определится так:

$$j_Q = \frac{\Delta Q}{S \Delta t} = \lambda \frac{dT}{dx} = const.$$

Коэффициент теплопроводности $\lambda = \frac{1}{3} C_v \rho \bar{v} \bar{\ell}$,

$$\text{здесь } C_v = \frac{i}{2} R, \quad \rho = \frac{p\mu}{RT}, \quad \bar{\ell} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}; \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Подставляя выражения, получим

$$\lambda = \frac{ik}{3d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi^3 \mu}} = A\sqrt{T}, \quad \text{где } A = \frac{ik\sqrt{R}}{3d^2 \pi^{3/2} \sqrt{\mu}},$$

тогда для плотности потока тепла имеем уравнение

$$j_Q = A\sqrt{T} \frac{dT}{dx}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{j_Q}{A} \int_0^L dx = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{T} dT, \quad \frac{j_Q}{A} \int_0^L dx = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{T} dT.$$

$$\text{Окончательно } j_Q = \frac{2A}{3l} (T_2^{3/2} - T_1^{3/2}).$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Найти среднюю длину свободного пробега и среднее время между столкновениями молекул азота, находящегося: а) при нормальных условиях; б) при температуре $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ и давлении $p=1\text{ нПа}$. Ответ: а) $0,06\text{ мкм}$, $0,13\text{ нс}$; б) 6 нм , $3,8\text{ ч}$.

5.2. Баллон вместимостью $V=10\text{ л}$ содержит водород массой $m=1\text{ г}$. Определить среднюю длину свободного пробега молекул. Ответ: $1,55\text{ нм}$.

5.3. Определить плотность ρ разреженного водорода, если средняя длина свободного пробега 1 см . Ответ: $1,55\text{ кг/м}^3$.

5.4. Найти зависимость среднего числа столкновений \bar{z} молекулы идеального газа в 1 с от давления при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изотермическом. Изобразить эти зависимости на графиках. Ответ: 1) $\bar{z} \sim \sqrt{p}$; 2) $\bar{z} \sim p$.

5.5. Азот находится при нормальных условиях. Найти: а) число столкновений, испытываемых в среднем каждой молекулой за одну секунду; б) число всех столкновений, происходящих между молекулами в 1 см^3 азота ежесекундно. Ответ: а) $0,74 \cdot 10^{10}\text{ с}^{-1}$; б) $1 \cdot 10^{29}\text{ с}^{-1}\text{ см}^{-3}$.

5.6. Оценить среднюю длину свободного пробега $\bar{\ell}$ и коэффициент диффузии D ионов в водородной плазме. Температура плазмы 10^7 К , число ионов в 1 см^3 плазмы равно 10^{15} . При указанной температуре эффективное сечение иона водорода считать равным $4 \cdot 10^{-20}\text{ см}^2$. Ответ: $\lambda \sim 10^2\text{ м}$, $D \sim 10^7\text{ м}^2/\text{с}$.

5.7. Найти, как зависят от давления средняя длина свободного пробега и число столкновений в 1 с молекул идеального газа, если газ совершает процесс: а) изохорический, б) изотермический, в) адиабатический. Эффективный диаметр молекул считать постоянным. Ответ: а) $\bar{\ell} = \text{const}$, $\bar{z} \sim \sqrt{p}$; б) $\bar{\ell} \sim 1/p$, $\bar{z} \sim p$.

5.8. Найти, как зависят от температуры средняя длина свободного пробега и число столкновений в 1 с молекул идеального газа, если масса газа постоянна и газ совершает процесс: а) изохорический, б) изобарический, в) адиабатический. Ответ: а) $\bar{\ell} = \text{const}$, $\bar{z} \sim \sqrt{T}$; б) $\bar{\ell} \sim T$, $\bar{z} \sim 1/\sqrt{T}$.

5.9. Зная коэффициент вязкости гелия при нормальных условиях ($\eta=18,9\text{ мкПа}\cdot\text{с}$), вычислить эффективный диаметр его атома. Ответ: $d=0,18\text{ нм}$.

5.10. Коэффициент теплопроводности гелия при нормальных условиях в $8,7$ раза больше, чем у аргона. Найти отношение эффективных диаметров атомов аргона и гелия. Ответ: $1,7$.

5.11. Коэффициент диффузии кислорода (O_2) при температуре $0\text{ }^{\circ}C$ равен $0,19\text{ см}^2/с$. Определить среднюю длину свободного пробега молекул газа. Ответ: $1,35 \cdot 10^{-7}\text{ м}$.

5.12. Давление двухатомного газа вследствие сжатия увеличивается в 10 раз. Определить, как изменится длина свободного пробега молекул в газе и коэффициент вязкости газа. Рассмотреть случай, когда сжатие происходит: а) изотермически, б) адиабатически. Ответ: а) $\bar{\ell}$ уменьшится в 10 раз; η останется неизменным, б) $\bar{\ell}$ уменьшится в 5,2 раза, η увеличится в 1,39 раза.

5.13. Двухатомный газ адиабатически расширяется до объема, в два раза большего начального. Определить, как изменится коэффициент теплопроводности и коэффициент диффузии газа. Ответ: λ уменьшится в 1,15 раза; D увеличится в 1,75 раза.

5.14. Между двумя параллельными плоскими очень большими пластинами имеется зазор $a=1\text{ см}$. Между пластинами поддерживается разность температур $\Delta T=1\text{ К}$ ($T_1=299,5\text{ К}$, $T_2=300,5\text{ К}$). Зазор заполнен аргоном при давлении $1,0 \cdot 10^5\text{ Па}$. Оценить плотность потока тепла. Ответ: $0,5\text{ Вт/м}^2$.

Контрольные вопросы

1. Назовите явления переноса, происходящие в газах.
2. В чем заключается суть явлений переноса?
3. Сформулируйте понятие средней длины свободного пробега частицы.
4. В чем заключается физический смысл эффективного сечения частицы?
5. Как зависит средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа?
6. Как изменяется средняя длина свободного пробега частицы с ростом давления?
7. Объясните физический смысл законов Фурье, Фика, Ньютона.
8. В чем заключается физический смысл коэффициентов диффузии, вязкости, теплопроводности?
9. Какова зависимость коэффициента теплопроводности газа от температуры?
10. Какова зависимость коэффициента диффузии газа от температуры?

Вариант 2

1. В сосуде объемом $V=2$ л находится кислород количеством вещества $\nu=0,2$ моль. Чему равна концентрация молекул?

Ответ: _____.

2. Газ при температуре $T=309^{\circ}\text{K}$ и давлении $p=0,7$ МПа имеет плотность $\rho=12$ кг/м³. Чему равна молярная масса газа?

Ответ: _____.

3. При уменьшении объема газа в 3 раза и увеличении средней кинетической энергии молекул в 2 раза давление газа

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) не изменилось | 2) увеличилось в 2 раза |
| 3) увеличилось в 3 раза | 4) увеличилось в 6 раз |

Ответ: _____.

4. Как изменяется площадь под кривой распределения молекул по скоростям при соответствующих изменениях?

- | | |
|---|--|
| 1) увеличивается при увеличении температуры | 2) увеличивается при уменьшении давления |
| 3) зависит от соотношения значений давления и температуры | 4) остается постоянной |

Ответ: _____.

5. Какие коэффициенты переноса не зависят от плотности газа: коэффициент вязкости (а), коэффициент диффузии (б), коэффициент теплопроводности (в)?

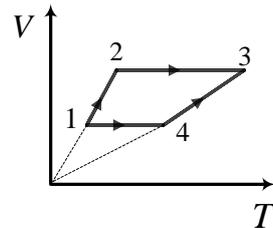
- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| 1) коэффициент вязкости | 2) коэффициент диффузии |
| 3) зависит все | 4) коэффициент теплопроводности |

Ответ: _____.

6. Внутренняя энергия газа 55 МДж, если на долю энергии вращательного движения приходится 22 МДж, то чему равно число атомов в молекуле?

Ответ: _____.

7. Газ переходит из состояния 1 в состояние 3 по пути 1-2-3 и 1-4-3 как показано на рис. При этом справедливо выражение



1) $A_{123} = A_{143}$

2) $A_{123} > A_{143}$

3) $A_{123} < A_{143}$

4) информации недостаточно

Ответ: _____.

8. Чему равно количество подведенной к газу теплоты, если работа расширения одноатомного идеального газа при изобарном процессе равна 2 кДж?

Ответ: _____.

9. Показатель адиабаты одноатомного идеального газа равен

Ответ: _____.

10. Удельная теплоемкость идеального газа изохорного процесса определяется выражением:

1) $iR/2M$

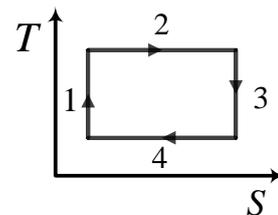
2) $(i + 2) \cdot R/2M$

3) $(i + 2) \cdot R/2$

4) $iR/2$

Ответ: _____.

11. Цикл Карно представлен в координатах T, S на рис. На каком этапе показано адиабатическое расширение?



1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

Ответ: _____.

Вариант 3

1. В сосуде объемом $V = 5$ л находится кислород, концентрация его молекул равна $9,4 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Чему равна масса газа?

Ответ: _____.

2. В газовом процессе, для которого плотность зависит от температуры как $\rho \sim T^{-1}$, с ростом температуры давление

- 1) увеличивается : T 2) уменьшается : T^{-1}
 3) остается неизменным 4) увеличивается : T^2

Ответ: _____.

3. Чему равно давление при плотности идеального газа $\rho = 6 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$ и средней квадратичной скорости его молекул $v_{\text{кв}} = 500 \text{ м/с}$?

Ответ: _____.

4. Функция распределения молекул по скоростям определяет

- 1) число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$ 2) относительное число молекул, имеющих скорость v
 3) число молекул, имеющих скорость v 4) относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$

Ответ: _____.

5. Теплопроводность в газах обусловлена

- 1) силами межмолекулярного взаимодействия 2) переносом импульса упорядоченного движения молекул
 3) переносом энергии молекул 4) переносом массы молекул из одного слоя в другой

Ответ: _____.

6. Если в газе средние энергии поступательного и вращательного движения молекул одинаковы, то молекула газа состоит из

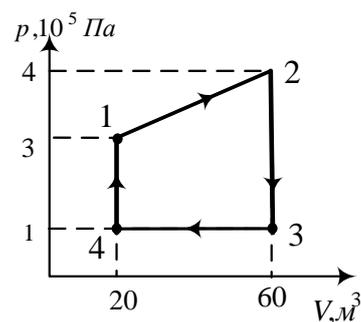
- 1) 3 атомов 2) 2 атомов
 3) 1 атома 4) недостаточно данных

Ответ: _____.

7. Работа, выполняемая идеальным газом за один цикл как на рис., равна

- 1) 5 МДж 2) 10 МДж
 3) 15 МДж 4) 20 МДж

Ответ: _____.



8. Какая часть теплоты в изобарном процессе идет на изменение внутренней энергии одноатомного газа?

Ответ: _____.

9. Чему равен показатель адиабаты двухатомного идеального газа?

Ответ: _____.

10. Какая формула соответствует выражению удельной теплоемкости идеального газа при постоянном давлении:

- 1) $(i + 2) \cdot R/2$ 2) $(i + 2) \cdot R/2M$
3) $(i + 2) \cdot R/2$ 4) $i R/2M$

Ответ: _____.

11. В цикле Карно температуру нагревателя и холодильника увеличили в 2 раза. КПД тепловой машины при этом

- 1) уменьшился в 4 раза 2) уменьшился в 2 раза
3) не изменился 4) увеличился в 2 раза

Ответ: _____.

Вариант 4

1. Чему равна плотность ρ азота, который находится в сосуде под давлением $p=2$ МПа и при температуре $T=400$ К?

Ответ: _____.

2. С ростом концентрации частиц уменьшается средняя энергия поступательного движения одной частицы, если процесс

- 1) *изохорический* 2) *изобарический*
3) *изотермический* 4) *адиабатный*

Ответ: _____.

3. При повышении температуры в 1,5 раза происходит диссоциация молекул двухатомного газа; при этом давление газа

- 1) *увеличилось в 3 раза* 2) *увеличилось в 2 раза*
3) *увеличилось в 1,5 раза* 4) *увеличилось в $\sqrt{2}$ раз*

Ответ: _____.

4. Чему равна высота над уровнем моря, на которой плотность воздуха уменьшается в e раз в сравнении с уровнем моря:

- 1) $RT/(m_0g)$ 2) $kT/(Mg)$
3) $RT/(Mg \cdot e)$ 4) $RT/(Mg)$

Ответ: _____.

5. Внутреннее трение в газах вызвано

- 1) силами межмолекулярного взаимодействия 2) переносом импульса упорядоченного движения молекул
3) переносом энергии молекул 4) переносом массы молекул из одного слоя в другой

Ответ: _____.

6. Как относится для молекул газа средняя кинетическая энергия вращательного движения к их внутренней энергии, выраженная через число степеней свободы

- 1) $(i + 2)/2$ 2) $(i - 3)/3$
3) $3/i$ 4) $(i - 3)/i$

Ответ: _____.

7. Трехатомный газ изобарически расширяется, в этом процессе его внутренняя энергия изменилась на 24 МДж. Вычислите, какая работа была совершена газом?

Ответ: _____.

8. Моль идеального газа числом степеней свободы, равным трем, нагревается изобарически. В процессе нагревания ему было передано 5000 Дж теплоты. Вычислите, как изменилась внутренняя энергия?

Ответ: _____.

9. Уравнение Пуассона представляется формулами

- а) $pV^\gamma = const$ б) $TV^{\gamma-1} = const$
в) $T^\gamma V^{1-\gamma} = const$ г) $T^{\gamma-1} p^\gamma = const$

- 1) а, б 2) в, г
3) а 4) б

Ответ: _____.

10. Удельная теплоемкость c_v двухатомного газа при его диссоциации

- 1) увеличивается в 6,5 раз 2) увеличивается в 2 раза
3) увеличивается в 1,2 раза 4) не изменяется

Ответ: _____.

11. Температура нагревателя T_1 выше температуры холодильника T_2 в 4 раза в цикле Карно. Какую часть составляет количество теплоты, полученной от нагревателя за один цикл и переданной холодильнику:

- 1) $1/2$ 2) $1/3$ 3) $1/4$ 4) $1/5$.

Ответ: _____.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы, которые изучает молекулярная физика и термодинамика, обладают свойством макроскопичности, то есть в них содержится очень большое число элементов этой системы. В случае макроскопических систем движение элементов не зависит от начальных условий и число самих элементов системы очень велико, что не позволяет изучать закономерности движения этих элементов в пространстве, как в механике. Эта особенность макросистем и определяет два подхода (метода) к их изучению, которые отражены в данном пособии: статистический и термодинамический.

Так как значительное место в пособии отводится контролю теоретических знаний и умению пользоваться современной терминологией и символикой, то студенты после изучения пособия должны быть мотивированы и на овладение основными умениями.

В результате освоения пособия студенты научатся описывать и объяснять физические явления и свойства газов, жидкостей и твердых тел; применять полученные знания для решения физических задач; использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, в будущей профессии.

Обучающиеся будут знать основные понятия молекулярно-кинетической теории, а также понимать смысл физических величин и законов молекулярно-кинетической теории. Кроме того, студенты познакомятся с вкладом в этот раздел науки российских и зарубежных ученых, оказавших наибольшее влияние на развитие молекулярной физики и термодинамики.

Знания, полученные при изучении этого раздела физики, будут полезны при освоении специальных курсов, связанных со структурой вещества, не только по таким специальностям, как «Электроника и наноэлектроника», «Биотехнические системы и технологии» «Материаловедение и технология материалов», «Металлургия», «Наноинженерия», но и многих других.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – СПб: Спец. лит, 2002. – 327 с.
2. Гинзбург В.Л. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика / В.Л. Гинзбург, Л.М. Левин, Д.В. Сивухин, И.А. Яковлев. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1976. – 207 с.
3. Гладской В.М. Сборник задач по физике с решениями: пособие для втузов / В.М. Гладской, П.И. Самойленко. – М.: Дрофа, 2004. – 288 с.
4. Иродов И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 432 с.
5. Кузнецов С.И. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 113 с.
6. Молекулярная физика и термодинамика: методические указания к решению задач по дисциплине «Общая физика» для студентов физико-технического факультета очной формы обучения / ГОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А.Г. Москаленко, М.Н. Гаршина, Е.П. Татьяна. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2009. – 42 с.
7. Савельев И.В. Курс общей физики - Т. 1. М.: Наука, 1977. – 416 с.
8. Сивухин Д.В. Курс общей физики - Т. 2. М.: Наука, 1979. – 552 с.
9. Трофимова Т.И. Курс физики. 11-е изд., стер. – М.: 2006. – 560 с.
10. Трофимова Т.И. Сборник задач по физике с решениями / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова – М.: Высш.шк., – 2004. – 591 с.
11. Чертов А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев – М.: Интеграл Пресс, 1997. – 544 с.
12. Электролитно-плазменная модификация металлов: учебник / П.Н. Белкин [и др.]. – Кострома: КГУ, 2014. – 306 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Основные физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с ²
Гравитационная постоянная	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль · К)
Стандартный объем (молярный объем идеального газа при нормальных условиях)	V_m	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{м}^3 / \text{моль}$
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{Дж/К}$

Таблица П.2

Относительные атомные массы некоторых элементов

Элемент	Символ	A	Z	Элемент	Символ	A	Z
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56	Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1	Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Железо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сера	S	32	16
Калий	K	39	19	Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20	Углерод	C	12	6
Кислород	O	16	8	Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1.МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ	4
1.1. Температура и термодинамические состояния. Основные понятия молекулярно-кинетической теории	4
1.2. Идеальный газ. Экспериментальные законы идеального газа.....	6
1.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов .	9
1.4. Реальные газы	11
Примеры решения задач	13
Задачи для самостоятельного решения	19
Контрольные вопросы.....	20
ГЛАВА 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ИЛИ АТОМОВ ГАЗА ПО СКОРОСТЯМ, ЭНЕРГИЯМ	21
2.1. Скорость молекул или атомов в газах	21
2.2. Функция распределения Максвелла по скоростям	22
2.3. Наиболее вероятная, среднеквадратичная и средняя арифметическая скорости молекул или атомов газа.....	23
2.4.Формула Максвелла для относительных скоростей молекул газа	24
2.5. Барометрическая формула	24
2.6. Распределение Больцмана	25
2.7. Закон распределения Максвелла-Больцмана.....	25
Примеры решения задач	26
Задачи для самостоятельного решения	32
Контрольные вопросы.....	33
ГЛАВА 3. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА И ТЕПЛОТА. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ.....	34
3.1. Внутренняя энергия газа. Работа и теплота.....	34
3.2. Теплоёмкость идеального газа. Уравнение Майера	35
3.3. Теплоёмкости одноатомных газов.....	36
3.4. Теплоёмкости многоатомных газов.....	37
3.5. Первое начало термодинамики в применении к изопроцессам идеальных газов	39
3.6. Политропические процессы	42
Примеры решения задач	42
Задачи для самостоятельного решения	48
Контрольные вопросы.....	50
ГЛАВА 4. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ. ВТОРОЕ И ТРЕТЬЕ НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ. ЭНТРОПИЯ.....	51
4.1. Круговые обратимые и необратимые процессы.....	51
4.2. Тепловые машины	52
4.3. Энтропия.....	55
4.4. Энтропия в процессах изменения агрегатного состояния.....	56
4.5. Изменения энтропии в циклах Карно.....	58
4.6. Второе начало термодинамики	59
4.7. Третье начало термодинамики	60
Примеры решения задач	61

Задачи для самостоятельного решения	66
Контрольные вопросы.....	68
ГЛАВА 5. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ.....	68
5.1. Свободный пробег частицы.....	68
5.2. Диффузия газов.....	70
5.3. Вязкость, внутреннее трение газов.....	71
5.4. Теплопроводность газов	73
Примеры решения задач	74
Задачи для самостоятельного решения	77
Контрольные вопросы.....	78
ТЕСТЫ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ И ТЕРМОДИНАМИКЕ	79
Вариант 1	79
Вариант 2	81
Вариант 3	83
Вариант 4	84
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	86
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	87
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	88
Основные физические постоянные.....	88
Относительные атомные массы некоторых элементов	88

Учебное издание

Дубовицкая Татьяна Викторовна
Москаленко Александр Георгиевич
Татьянина Елена Павловна
Тураева Татьяна Леонидовна

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Учебное пособие

Редактор Аграновская Н.Н.

Подписано в печать 12. 11. 2018. Формат 60x84 1/16.

Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. 5,6. Тираж 350 экз. Заказ № 189.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026, Воронеж, Московский проспект, 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026, Воронеж, Московский проспект, 14