

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра автоматизированного оборудования  
машиностроительного производства

# **ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

*МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*

*к выполнению практических работ направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» (профили «Технология машиностроения», «Металлообрабатывающие станки и комплексы» и «Конструкторско-технологическое обеспечение кузнечно-штамповочного производства»)  
всех форм обучения*

Воронеж 2021

УДК 621.01 (07)  
ББК 34.5я7

**Составитель:**

*О. К. Битюцких, канд. пед. наук*

**Теория механизмов и машин:** методические указания к выполнению практических работ направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» (профили «Технология машиностроения», «Металлообрабатывающие станки и комплексы» и «Конструкторско-технологическое обеспечение кузнечно-штамповочного производства») всех форм обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: О. К. Битюцких. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. – 25 с.

В методических указаниях представлена методика структурного, кинематического и силового анализа шарнирно-рычажного механизма, а также приведены расчётные зависимости для построения планов скоростей и ускорений. Представленный материал позволяет студентам провести силовой анализ с нахождением уравновешивающей силы на кривошипе с помощью двух предложенных методик расчета.

Предназначены для студентов 2-го курса, обучающихся по направлению 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» (профили «Технология машиностроения», «Металлообрабатывающие станки и комплексы» и «Конструкторско-технологическое обеспечение кузнечно-штамповочного производства») всех форм обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ ПР ТМиМ.pdf.

Ил. 14. Табл. 1. Библиогр. 6 назв.

**УДК 621.01(07)**  
**ББК 34.5я7**

*Рецензент – М. Н. Краснова, канд. техн. наук, доц. кафедры автоматизированного оборудования машиностроительного производства ВГТУ*

*Издается по решению редакционно-издательского совета  
Воронежского государственного технического университета*

# 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Механизмом называется кинематическая цепь, имеющая стойку (т.е. звено, принятое за неподвижное), в которой движение одного или нескольких звеньев полностью определяет характер движения остальных звеньев этой цепи.

Другими словами, — это кинематическая цепь, обладающая определённой движением всех звеньев. Только одним звеньям даётся принудительное движение (определённым образом задаются их законы движения, например, подсоединением к двигателю), а другие получают движение от этих звеньев. В итоге механизм можно трактовать как механическую систему тел, предназначенную для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемое движение других тел.

Плоские механизмы образуются соединением подвижных звеньев посредством кинематических пар 4-го и 5-го класса, примеры которых даны в таблице (табл. 1).

Структурный анализ механизма подразумевает определение его подвижности и класса, а также выделения начальной системы.

Механизм, показанный на рис. 1, имеет пять ( $n=5$ ) подвижных звеньев: 1 — ведущее звено АВ, 2 — шатун ВС, 3 — коромысло DE, 4 — шатун EF, 5 — ползун F. Звенья образуют друг с другом 6 вращательных и 1 поступательную кинематические пары 5-го класса:

$$P_5=6+1=7.$$

Степень подвижности механизма вычисляется по формуле (формула П. А. Чебышева) (плоские механизмы):

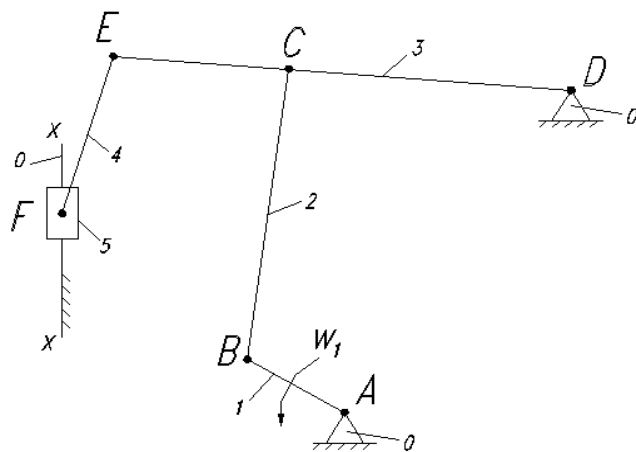


Рис. 1. Кинематическая схема механизма

$$\omega = 3 \cdot n - 2 \cdot P_5 - P_4 = 1, \quad (1)$$

где  $P_5, P_4$  — число кинематических пар 5-го и 4-го класса соответственно;  $n$  — число подвижных звеньев.

Степень подвижности приведённого выше механизма (при  $n=5, P_5=7, P_4=0$ ):

$$\omega = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1. \quad (2)$$

Согласно структурной классификации плоских рычажных механизмов, предложенной И. И. Артоболовским на основе идей Л. Н. Ассура, механизмы объединяются в классы от первого и выше по признаку построения их структуры. Механизм 1-го класса состоит из ведущего звена, присоединенного к стойке парой 5-го класса (рис.2).



Рис. 2. Механизм первого класса

Механизмы более высоких классов образуются последовательным присоединением к механизму первого класса кинематических цепей, имеющих степень подвижности, равную нулю при условии их присоединения к стойке, — структурных групп. Причём присоединение структурных групп должно производиться без увеличения степени подвижности вновь образующейся подвижной цепи (метод «наслоения»).

Таблица 1.

Примеры кинематических пар

Класс Пары	Подвижность	Краткая характеристика	Наименование	Изображение	
				Конструктивное	Условное
1	5	Высшая, с силовым замыканием	Шар-плоскость		
2	4	Высшая, с силовым замыканием и линейным контактом	Цилиндр-плоскость		
3	3	Низшие, с силовым замыканием	Плоскостная		
		Низшие, с геометрическим замыканием	Сферическая		

4	2	Низшие, с геометрическим замыканием	Цилиндрическая		
			Сферическая с пальцем		
5	1	Низшие, с геометрическим замыканием	Вращательная		
			Поступательная		
			Винтовая		

Структурные группы подразделяются на классы, порядки, виды. Номер класса численно равен числу кинематических пар при самом сложном независимом замкнутом контуре группы, порядок — числу кинематических пар, которыми группа присоединяется к механизму, вид — определяется сочетанием различных кинематических пар (рис. 3, 4).

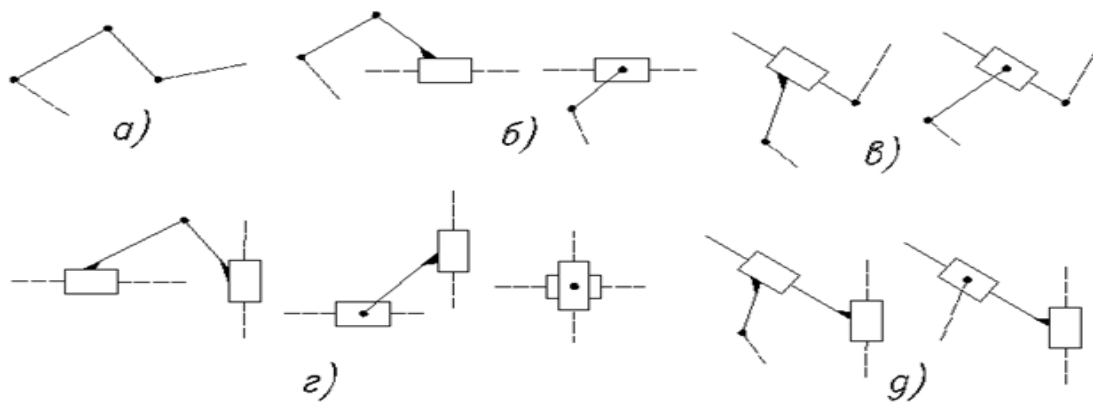


Рис. 3. Группы второго класса, второго порядка:  
 а) 1 — вида; б) 2 — вида; в) 3 — вида; г) 4 — вида; д) 5 — вида



Рис. 4. Группы третьего класса, третьего порядка

Класс механизма определяется наивысшим классом структурной группы, входящей в его состав. Для этого требуется расчленить механизм на структурные группы, начиная с самой удалённой от ведущего звена, таким образом, чтобы степень подвижности оставшейся кинематической цепи не изменялась относительно исходной (рис. 5).

Структуру показанного на рис. 5 механизма можно записать в виде:

$$I(0,1) - II(2,3) - II(4,5).$$

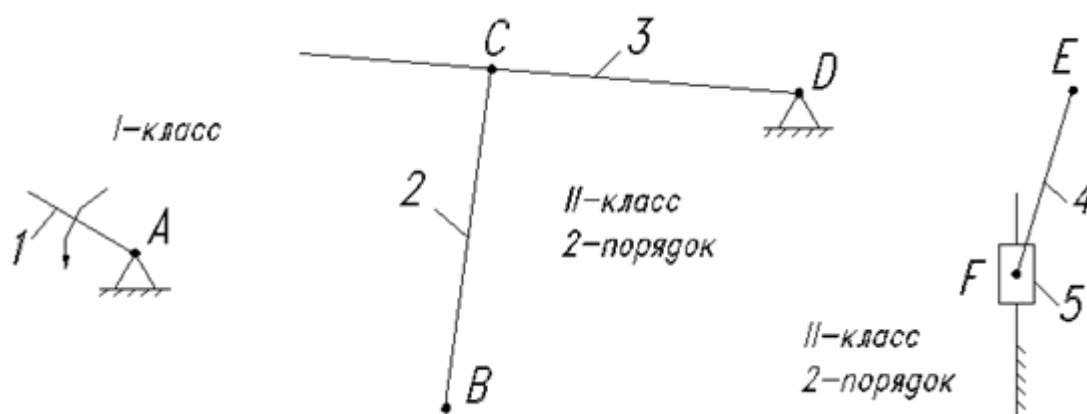


Рис. 5. Расчленение механизма на структурные группы

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

Кинематические характеристики кривошипно-ползунного (и любого другого) механизма могут быть определены и с помощью графоаналитического метода, или, как его чаще называют, метода планов положений, скоростей и ускорений.

Планом механизма называется масштабное графическое изображение кинематической схемы механизма, соответствующее заданному положению входного звена.

При известных размерах звеньев механизма синтез механизма в каком-либо положении осуществляется методом «засечек», который заключается в геометрическом построении положения на плоскости центра вращательных пар. Последовательность построения с учётом заранее выбранного масштаба построения  $\mu$  плана механизма (рис. 6):

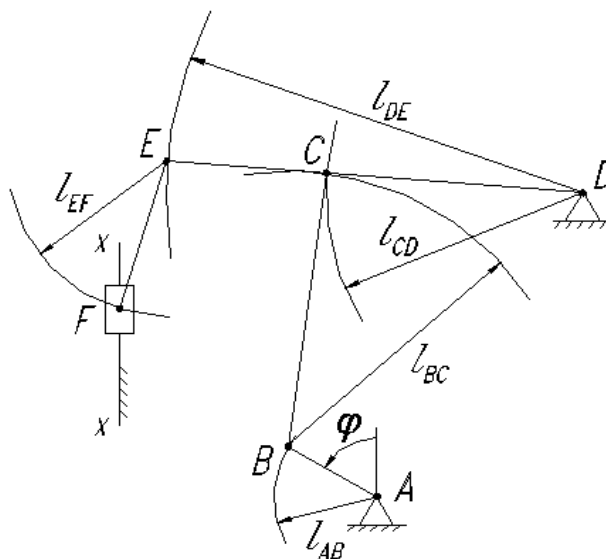


Рис. 6. Построение положения механизма

- 1) расположить на плоскости по заданным размерам элементы изображения стойки (точки A и D, ось x-x);
- 2) в одном из заданных углом  $\varphi$  положений присоединить ведущее звено AB;
- 3) из точки B и точки D провести дуги радиусом соответствующих заданных размеров ( $l_{BC}$ ,  $l_{CD}$ ), пересечение которых определит положение вращательной пары C;
- 4) на продолжении отрезка [DC] радиусом  $l_{DE}$  найти т. E;
- 5) из точки E радиусом  $l_{EF}$  провести дугу до пересечения с линией x-x движения ползуна, пересечение которых определит положение поступательной пары в точке F.

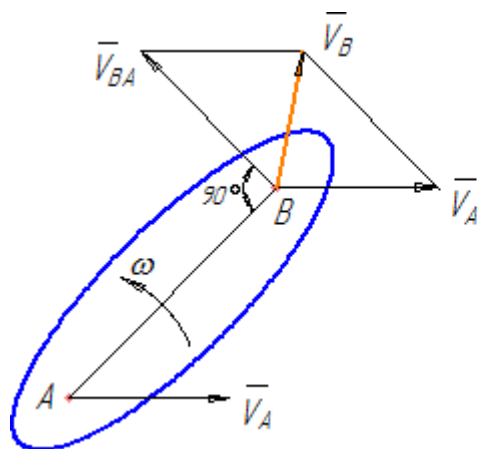
### 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

При кинематическом исследовании плоских механизмов методом планов скоростей и ускорений встречается два случая:

- 1) две точки (одна исследуемая, вторая с известным законом движения, которое принимается в качестве переносного) принадлежат одному и тому же жесткому звену.

В данном случае относительное движение этих точек получается за счёт вращательного движения звена, на котором они находятся.

При определении ускорений относительное ускорение раскладывается на нормальное (известное из физики как центростремительное — стремящееся к центру вращения) и тангенциальное.



$$\begin{aligned} \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ V_{BA} &= \omega \cdot AB \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t \\ \vec{a}_{BA}^n &= \omega^2 \cdot AB, \quad \vec{a}_{BA}^n \parallel AB \\ \vec{a}_{BA}^t &= \varepsilon \cdot AB, \quad \vec{a}_{BA}^t \perp AB \end{aligned}$$

Рис. 7. Точки жесткого звена

Для примера, приведённого на рис. 7, нормальное ускорение точки В относительно точки А будет направлено вдоль радиуса ВА к точке А. Тангенциальное — перпендикулярно этому радиусу;

2) звенья соединяются поступательной парой. В этом случае рассматриваются две точки, совпадающие в данный момент времени по своему положению, но принадлежащие разным звеньям — одна ползуну, другая направляющей.

#### 4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. МЕТОД ПЛАНА СКОРОСТЕЙ

Метод планов скоростей и ускорений относится к графоаналитическим методам исследования кинематики механизмов в теории механизмов и машин.

Планом скоростей называют чертёж, на котором скорости различных точек изображены в виде векторов, показывающих направления и величины (в масштабе) этих скоростей в данный момент времени.

Построение планов скоростей и ускорений проводится на основе последовательного составления векторных уравнений для точек звеньев механизма, начиная с ведущего звена, угловая скорость  $\omega_1$  которого задана.

Скорость точки В (рис. 6) находится из выражения:

$$V_B = \omega_1 \cdot l_{AB}. \quad (3)$$

И вектор скорости точки В направлен в сторону вращения ведущего звена перпендикулярно звену АВ.

Скорость точки С определяется из векторной системы уравнений:



$$\begin{cases} \bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}; \\ \bar{V}_C = \bar{V}_D + \bar{V}_{CD}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\bar{V}_B, \bar{V}_C, \bar{V}_D$  — векторы абсолютных скоростей точек;

$\bar{V}_{CB}, \bar{V}_{CD}$  — векторы относительных скоростей.

Система уравнений (4) решается графическим способом. При этом учитывается, что  $\bar{V}_{CD} \perp CD$ ,  $\bar{V}_{CB} \perp BC$ ,  $\bar{V}_D = 0$ .

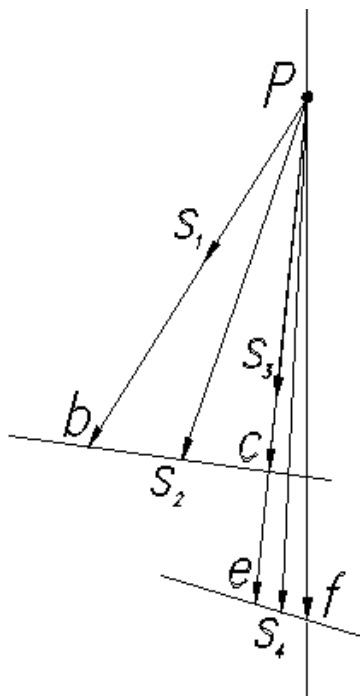


Рис. 8. План скоростей

Из полюса  $P$  плана скоростей в направлении вектора  $\bar{V}_B$  необходимо провести отрезок  $\langle pb \rangle$ , равный 100...150 мм (рис. 8). Направление вектора абсолютной скорости  $\bar{V}_C$  провести до полюса  $P$ , а вектор относительной скорости  $\bar{V}_{CB}$  из точки  $B$ . Пересечение линий даёт точку  $C$ . Причём масштаб плана скоростей  $\mu_v$  вычисляется по известным величинам:

$$\mu_v = \frac{V_B}{\langle pc \rangle} \left( \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right), \quad (5)$$

где  $\langle pc \rangle$  — длина вектора скорости  $\bar{V}_{CB}$ .

Величины  $V_{CB}$  и  $V_C$  из плана скоростей с учётом масштаба изображения рассчитываются по формулам:

$$V_{CB} = \langle cb \rangle \cdot \mu_v, \quad (6)$$

$$V_C = \langle pc \rangle \cdot \mu_v. \quad (7)$$

Определяем скорость точки E, принадлежащей кривошипу CD. Согласно свойству плана скоростей

$$\frac{\langle pc \rangle}{\langle pe \rangle} = \frac{l_{CD}}{l_{DE}}. \quad (8)$$

Графически  $\langle pe \rangle$  находим на продолжении отрезка  $\langle pc \rangle$ . Причём абсолютная скорость точки E

$$V_E = \langle pe \rangle \cdot \mu_v. \quad (9)$$

Скорость точки F определяется аналогично, с помощью графического решения системы векторных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{V}_F = \bar{V}_E + \bar{V}_{FE}; \\ \bar{V}_F = \bar{V}_X + \bar{V}_{XX}, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\bar{V}_E, \bar{V}_F, \bar{V}_X$  — векторы абсолютных скоростей точек;

$\bar{V}_{CB}, \bar{V}_{CD}, \bar{V}_{XX}$  — векторы относительных скоростей;

$\bar{V}_X, \bar{V}_{XX}$  — скорость движения системы координат (прямой x-x),  $\bar{V}_{XX} = 0$ .

При решении уравнений (10) учитываем, что  $\bar{V}_{FE} \perp EF$ ,  $\bar{V}_X // x-x$ .

Направление вектора  $\bar{V}_{FE}$  перпендикулярно EF проводится из точки E; вектор  $\bar{V}_F$  — из полюса P вертикально (в направлении абсолютного перемещения звена 5).

Значения абсолютной и относительной скоростей точки F:

$$V_{FE} = \langle fe \rangle \cdot \mu_v, \quad (11)$$

$$V_F = \langle pf \rangle \cdot \mu_v. \quad (12)$$

Скорости центров масс  $V_{S_i}$ , находящихся в геометрическом центре звеньев (стержней), определяются нахождением точки  $S_i$  на планах скоростей на соответствующих звеньях отрезках в том же пропорциональном делении.

## 5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. МЕТОД ПЛАНА УСКОРЕНИЙ

Чертёж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению ускорениям различных точек звеньев механизма в данный момент, называют планом ускорений механизма.

Исходными данными для построения плана ускорения являются план положения механизма (рис. 6), план скоростей (рис. 8) и ускорения точек ведущего звена АВ.

Ускорение точки В ведущего звена, вращающегося равномерно равно

$$a_B = a_B^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB} . \quad (13)$$

Ускорение точки С определяется из векторных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau ; \\ \bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^\tau , \end{cases} \quad (14)$$

где  $\bar{a}_B, \bar{a}_C, \bar{a}_D$  — векторы абсолютных ускорений точек, причём  $\bar{a}_D = 0$ ;

$\bar{a}_{CB}^n, \bar{a}_{CD}^n$  — векторы нормальных ускорений;

$\bar{a}_{CB}^\tau, \bar{a}_{CD}^\tau$  — векторы тангенциальных ускорений.

Векторы нормальных ускорений направлены перпендикулярно траектории движения точки, а векторы касательных ускорений параллельны траектории движения точки.

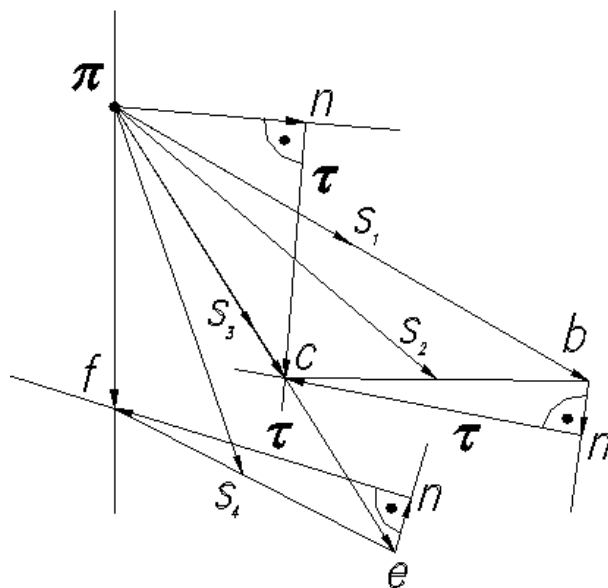


Рис. 9. План ускорений

В системе уравнений (14) известны направления всех шести векторов (кроме  $\bar{a}_C$ ) и модули четырёх из шести векторов. При этом:

$$a_{CB}^n = \frac{V_{CB}^2}{l_{BC}} , \quad (15)$$

$$a_{CD}^n = \frac{V_C^2}{l_{CD}} . \quad (16)$$

Векторное уравнение, имеющее две неизвестные величины, может быть решено графически, аналогично решению векторного уравнения скоростей.

Из точки  $\pi$  полюса плана ускорений в направлении отрезка  $CD$  плана положений необходимо провести вектор  $\pi b$  размером 80...100 мм (рис. 9). Масштаб плана ускорений тогда будет равным

$$\mu_A = \frac{a_B}{\langle \pi b \rangle} , \quad \left( \frac{M/c^2}{\text{мм}} \right) . \quad (17)$$

Из точки  $b$  плана ускорений в масштабе, в направлении  $BC$  провести отрезок  $\langle bn \rangle$ , равный

$$\langle bn \rangle = \frac{a_{CB}^n}{\mu_A} , \quad (18)$$

из точки  $n$  которого провести направление тангенциального ускорения точки  $C$  относительно точки  $B$  перпендикулярно  $\langle bn \rangle$ .

Из полюса  $\pi$  провести отрезок  $\langle \pi n \rangle$ , равный

$$\langle \pi n \rangle = \frac{a_{CD}^n}{\mu_A} , \quad (19)$$

в направлении отрезка  $CD$ , из точки  $n$  которого провести направление тангенциального ускорения точки  $C$  относительно точки  $D$  перпендикулярно  $\langle \pi n \rangle$ .

Пересечение линий тангенциальных ускорений даёт точку  $C$ , ускорение которой с учетом масштаба равно

$$a_C = \langle \pi c \rangle \cdot \mu_A . \quad (20)$$

Ускорение точки  $E$  находят по аналогии с планом скоростей из соотношения

$$\frac{\langle \pi c \rangle}{\langle \pi e \rangle} = \frac{l_{CD}}{l_{DE}} . \quad (21)$$

Графически  $\langle \pi e \rangle$  также находится на продолжении отрезка  $\langle \pi c \rangle$ . Причём значение ускорения точки  $E$

$$a_E = \langle \pi e \rangle \cdot \mu_A. \quad (22)$$

Векторное уравнение для определения ускорения точки F:

$$\begin{cases} \bar{a}_F = \bar{a}_E + \bar{a}_{FE}^n + \bar{a}_{FE}^\tau; \\ \bar{a}_F = \bar{a}_X + \bar{a}_{XX}^n + \bar{a}_{XX}^\tau, \end{cases} \quad (23)$$

где  $\bar{a}_E, \bar{a}_F, \bar{a}_X$  — векторы абсолютных ускорений точек;

$\bar{a}_{FE}^n, \bar{a}_{XX}^n$  — векторы нормальных ускорений, причём  $\bar{a}_{XX}^n = 0$ ;

$\bar{a}_{CB}^\tau, \bar{a}_{XX}^\tau$  — векторы тангенциальных ускорений, причём  $\bar{a}_{XX}^\tau = 0$ .

Система уравнения (23) также имеет два неизвестных компонента и может быть решена графически.

Величина нормального ускорения точки F относительно E равна

$$a_{FE}^n = \frac{V_{FE}^2}{l_{EF}}. \quad (24)$$

Из точки e плана ускорений в масштабе, в направлении EF провести отрезок  $\langle en \rangle$ , равный

$$\langle en \rangle = \frac{a_{FE}^n}{\mu_A}, \quad (25)$$

из точки n которого провести направление тангенциального ускорения точки F относительно точки E перпендикулярно  $\langle en \rangle$  до пересечения с вертикальной линией x-x. Пересечение двух прямых даст точку f, а значение ускорения точки F будет равно

$$a_F = \langle \pi f \rangle \cdot \mu_A. \quad (26)$$

Ускорение центров масс определяется из планов ускорений аналогично определению их скоростей из планов скоростей.

## 6. УГЛОВЫЕ СКОРОСТИ И УГЛОВЫЕ УСКОРЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ

Планы скоростей и ускорений обладают следующими свойствами:

- на плане абсолютные скорости (ускорения) изображаются векторами, выходящими из полюса плана. На конце вектора абсолютной скорости (ускоре-

ния) ставится строчная (маленькая) буква, соответствующая той точке механизма, скорость (ускорение) которой данный вектор изображает;

- отрезок, соединяющий концы векторов абсолютных скоростей, представляет собой вектор относительной скорости соответствующих точек. Вектор относительной скорости направлен на плане к той точке, которая в индексе скорости стоит на первом месте;

- фигуры, образованные точками одного и того же жесткого звена на плане и на механизме, подобны. Поэтому, если на звене известны скорости и ускорения двух точек, то скорость и ускорение любой третьей точки этого же звена можно найти по подобию;

- имея план скоростей, можно найти угловую скорость любого звена механизма. Для определения угловой скорости исследуемого звена надо взять относительную скорость двух любых точек данного звена и разделить на расстояние между этими точками на механизме;

- имея план ускорений, можно найти угловое ускорение любого звена механизма. Для определения углового ускорения исследуемого звена надо взять тангенциальную составляющую относительного ускорения двух любых точек данного звена и разделить на расстояние между этими точками на механизме;

- звенья, соединённые в поступательную кинематическую пару, имеют одинаковые угловые скорости и одинаковые угловые ускорения.

Угловые скорости и ускорения вращения звеньев определяют из планов скоростей и ускорений по линейным кинематическим параметрам и точек относительно  $i$ -х точек этих же звеньев с учетом соотношений:

$$\omega_i = \frac{V_i}{l_i}, \quad (27)$$

$$\varepsilon_i = \frac{a_i^{\tau}}{l_i}. \quad (28)$$

## 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД

При экспериментальном методе исследования механизмов кинематические характеристики точек и звеньев механизма регистрируются с помощью датчиков. Датчики регистрируют, а потом преобразуют кинематические параметры в пропорциональные электрические сигналы, которые после усиления регистрируются различными приборами. В последние годы для регистрации и обработки результатов экспериментальных исследований широко используются компьютеры. В экспериментальной установке используются для измерений:

- перемещения выходного звена — потенциметрический датчик перемещения, в котором пропорционально положению движка потенциметра изменяется его сопротивление;

- скорости выходного звена — индукционный датчик скорости, в котором напряжение на концах катушки, движущейся в поле постоянного магнита, пропорционально скорости катушки;

- ускорения выходного звена — тензометрический акселерометр. Он состоит из пластинчатой пружины, один конец которой закреплен на выходном звене механизма, а на втором закреплена масса. На пластину наклеены проводочные тензопреобразователи.

При движении выходного звена с ускорением инерционность массы вызывает изгиб пластины, деформацию тензопреобразователей и изменение их сопротивления, пропорциональное ускорению выходного звена.

## 8. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Графический метод кинематического исследования механизмов сводится к решению задач построения диаграмм (графиков) движения исследуемого звена или точки.

При этом строятся диаграммы перемещений, скоростей и ускорений, поэтому данный метод часто называют *методом кинематических диаграмм*.

Исследование начинается с построения различных положений механизма. Строится «N» последовательных положений механизма, которые он занимает в процессе работы в пределах одного цикла (обычно один полный оборот входного звена). Построение ведётся строго в масштабе  $K_L$ .

Количество положений механизма «N» выбирается в зависимости от необходимой точности исследования. При чисто графическом решении задачи обычно принимают  $N=12$ . Это обеспечивает в большинстве случаев достаточную практическую точность при относительно небольшом количестве построений. Большее количество положений делает метод весьма громоздким, приводит к значительному затемнению чертежа и трудности его чтения.

При использовании графического метода в качестве алгоритма решения задачи с помощью ЭВМ количество положений механизма, выбираемых для исследования, не имеет ограничений.

Построение отдельных положений механизма ведётся по группам Ассура и обычно сводится к графическому решению элементарных геометрических задач.

После построения «N» положений механизма строится диаграмма перемещений исследуемого звена. Одно из положений механизма принимается за нулевое (в качестве нулевого положения можно назначать любое положение механизма, но при чисто графическом решении задачи обычно в качестве нулевого принимают положение механизма, в котором исследуемое звено занимает одно из своих крайних положений).

От нулевого положения производится нумерация остальных положений механизма, последовательно занимаемых им в процессе работы (на входном звене нумерация должна совпадать с направлением его движения).

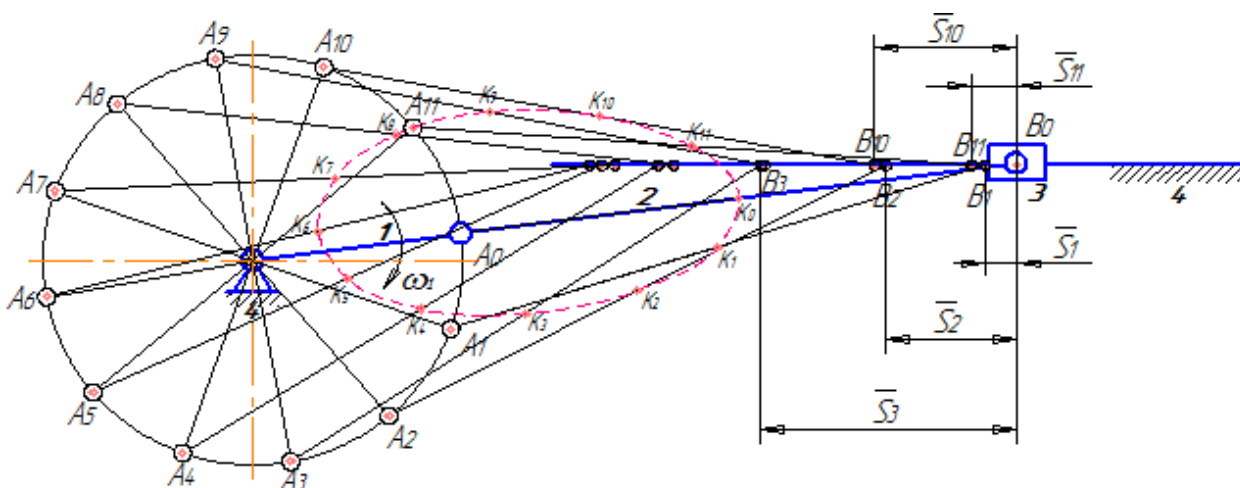


Рис. 10. 12 положений механизма

Отметив последовательные положения исследуемого звена, измеряют расстояние до каждого из них от нулевого (рис. 10) и определяют истинные значения перемещений через масштаб чертежа.

Примечание — если величины отрезков, изображающих перемещение звена на чертеже, подходят для построения диаграммы, то можно без дополнительных расчётов откладывать их по оси ординат на диаграмме перемещений для соответствующих положений. При этом ось абсцисс на диаграммах движения является осью времени  $t$ . Однако при построении диаграмм обычно отмечаются положения механизма, для которых производится исследование, а затем (в зависимости от выбранного отрезка на оси абсцисс, соответствующего полному циклу работы механизма, и скорости входного звена) рассчитывается масштаб времени  $K_t$ .

Двойным дифференцированием диаграммы перемещений получают диаграмму скоростей и диаграмму ускорений исследуемого звена или точки.

Так как диаграмма перемещений строится по точкам и уравнение полученной кривой неизвестно, то дифференцирование проводится графическими методами.

Если исследуемое звено является коромыслом (т.е. совершает возвратно-вращательное движение), то строится диаграмма угловых перемещений (углов поворота) данного звена, а при дифференцировании соответственно получают диаграмму угловых скоростей и диаграмму угловых ускорений данного звена.

Примечание — при измерении углов поворота исследуемого звена надо иметь в виду, что, независимо от масштаба построения механизма, углы на чертеже имеют истинную величину. Углы измеряют в радианах и переводят в отрезки на диаграмме через масштаб углов поворота.

Для построения траектории движения какой-либо точки надо отметить положение данной точки во всех  $N$  положениях механизма и последовательно соединить полученные точки плавной кривой.



## 9. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

Силы и пары сил (моменты), приложенные к механизму машины, можно разделить на следующие группы:

1. Движущие силы и моменты, совершающие положительную работу за время своего действия или за один цикл, если они изменяются периодически. Эти силы и моменты приложены к звеньям механизма, которые называются ведущими.

2. Силы и моменты сопротивления, совершающие отрицательную работу за время своего действия или за один цикл. Эти силы и моменты делятся, во-первых, на силы и моменты полезного сопротивления, которые совершают требуемую от машины работу и приложены к звеньям, называемым ведомыми, и, во-вторых, на силы и моменты сопротивления среды (газа, жидкости), в которой движутся звенья механизма. Силы сопротивления среды обычно малы по сравнению с другими силами, поэтому в дальнейшем они учитываться не будут, а силы и моменты полезного сопротивления будут называться просто силами и моментами сопротивления.

3. Силы тяжести подвижных звеньев и силы упругости пружин. На отдельных участках движения механизма эти силы могут совершать как положительную, так и отрицательную работу. Однако за полный кинематический цикл работа этих сил равна нулю, так как точки их приложения движутся циклически.

4. Силы и моменты, приложенные к корпусу машины (стойке) извне. К ним помимо силы тяжести корпуса относятся реакция основания (фундамента) машины на её корпус и многие другие силы. Все эти силы и моменты, поскольку они приложены к неподвижному корпусу (стойке), работы не совершают.

5. Силы взаимодействия между звеньями механизма, т.е. силы, действующие в его кинематических парах. Эти силы, согласно 3-му закону Ньютона, всегда взаимнообратны. Их нормальные составляющие работы не совершают, а касательные составляющие, т.е. силы трения, работу совершают, причём работа силы трения на относительном перемещении звеньев кинематической пары отрицательна.

Силы и моменты первых трёх групп относятся к категории активных. Обычно они известны или могут быть оценены. Все эти силы и моменты приложены к механизму извне, а поэтому являются внешними. К числу внешних относятся также все силы и моменты 4-й группы. Однако не все они являются активными. Силы 5-й группы, если рассматривать механизм в целом, не выделяя отдельных его частей, являются внутренними. Эти силы представляют собой реакции на действие активных сил. Реакцией будет также и сила (или момент), с которой основание (фундамент) машины действует на её корпус (т.е. на стойку механизма). Реакции заранее неизвестны. Они зависят от активных сил и моментов и от ускорений звеньев механизма. Наибольшее влияние на закон движения механизма оказывают движущие силы и моменты, а также силы и моменты сопротивления. Их физическая природа, величина и характер действия определяются рабочим процессом машины или прибора, в которых использован рассматриваемый механизм. В большинстве случаев эти силы и мо-

менты не остаются постоянными, а изменяют свою величину при изменении положения звеньев механизма или их скорости. Эти функциональные зависимости, представленные графически или массивом чисел, или аналитически, носят название механических характеристик и при решении задач считаются известными.

Центры тяжести звеньев (стержней) находятся на середине их длины. Центр тяжести ползуна совпадает с центром шарнира.

Масса звеньев определяется по формуле

$$m_i = q \cdot l_i , \quad (29)$$

где  $l$  — длина звена;

$q$  — масса, приходящаяся на 1 м длины звена,  $q = 8 \dots 25$  кг/м.

Масса ползуна  $F$  определяется по формуле

$$m_{\text{ПОЛЗ}} = (4 \dots 18) \cdot m_1 , \quad (30)$$

где  $m_1$  — масса кривошипа АВ.

Вес звеньев определяется по формуле

$$G_i = m_i \cdot g , \quad (31)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

Система сил инерции звена, как и всякая плоская система сил, приложенная к твердому телу, в общем случае приводится к одной силе  $P_{\text{И}}$ , её значение равно

$$P_{\text{Иi}} = -m_i \cdot a_{\text{Si}} , \quad (32)$$

где  $a_{\text{Si}}$  — ускорение центра масс звена.

Знак « $\rightarrow$ » показывает, что инерционные силовые факторы противоположны по направлению соответствующим кинематическим параметрам.

Момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости движения, равен

$$J_{\text{Si}} = \frac{1}{12} \cdot m_i \cdot l_i^2 . \quad (33)$$

Момент инерции треугольного звена принять в 2,5 раза больше, чем момент инерции наибольшего из стержней звена.

Момент инерции звена от действия силы инерции  $P_{\text{Иi}}$  определяется из формулы

$$M_{\text{Иi}} = -J_{\text{Si}} \cdot \varepsilon_i . \quad (34)$$

## 10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕЙ СИЛЫ НА КРИВОШИПЕ МЕТОДОМ ПЛАНОВ СИЛ

Основной задачей кинетостатического расчёта является определение реакций в кинематических парах механизмов или, иначе говоря, давлений, возникающих в местах соприкосновения элементов кинематических пар, а также в определении уравновешивающих моментов или уравновешивающих сил.

Одним из графоаналитических методов определения уравновешивающего момента на кривошипе является метод последовательного нахождения реакций в кинематических парах, в основе которого находятся принцип Д'Аламбера и статическая определимость структурных групп механизма.

Динамическая система группы звеньев механизма условно сводится к статической путём приложения сил инерции, равновесие которой описывается следующим уравнением:

$$\Sigma \bar{F}_i + \Sigma \bar{G}_i + \Sigma \bar{R}_i + \Sigma \bar{P}_{ii} = 0 , \quad (35)$$

- где  $\Sigma \bar{F}_i$  — сумма всех внешних сил, действующих на  $i$ -е звено;  
 $\Sigma \bar{G}_i$  — сумма сил тяжести звеньев;  
 $\Sigma \bar{R}_i$  — сумма реакций со стороны других звеньев на  $i$ -е звено;  
 $\Sigma \bar{P}_{ii}$  — сумма сил инерции на  $i$ -м звене.

Так как данное векторное уравнение представляет собой векторный контур, оно может быть решено его построением графически при двух неизвестных параметрах.

Вектор сил характеризуется тремя параметрами: точка приложения (в механизме этот параметр известен), направление и модуль.

При наличии большого числа неизвестных  $N-2$  параметра определяется аналитически решением системы уравнений равновесия. Кроме того, аналитическое нахождение неизвестных параметров в виде уравнений моментов позволяет представлять систему действующих силовых факторов в виде системы равнодействующих: главного вектора (силы) и главного момента. Главные моменты, таким образом, учитываются в векторном уравнении равновесия группы, а посредственно при определении некоторых из известных реакций аналитически. Последовательность решения задачи следующая:

1) Вычертить в масштабе самую удалённую от ведущего звена структурную группу в положении, которое она занимает при заданном положении ведущего звена (рис. 11);

2) Приложить систему внешних силовых факторов, сил веса, сил и моментов сил инерции;

3) Заменить связи с соседними звеньями реакциями, представив их в естественных координатах ( $n$  — вдоль оси,  $\tau$  — перпендикулярно оси звена);

4) Составить уравнение равновесия в виде уравнения моментов, например, для группы Ассур 4-5:

$$\Sigma M_F = M_{И4} + P_{И4} \cdot h_{И4} + P_{И5} \cdot h_{И5} + G_4 \cdot h_{G4} + G_5 \cdot h_{G5} + R_{34}^{\tau} \cdot l_{EF} = 0, \quad (36)$$

где  $h_i$  — плечи сил инерции и тяжести звеньев относительно точки F.

Решив уравнение (36) аналитическим способом, находим тангенциальную составляющую реакции  $R_{34}^{\tau}$  в шарнире E.

Полное векторное уравнение сил приложенных к рассматриваемой группе Ассур 4-5 имеет вид

$$\bar{G}_4 + \bar{G}_5 + \bar{P}_{И4} + \bar{P}_{И5} + \bar{R}_{05} + \bar{R}_{34}^n + \bar{R}_{34}^{\tau} + \bar{F}_{ПС} = 0, \quad (37)$$

где  $F_{ПС} = 1,5...3$  (кН) — сила полезного сопротивления.

5) Построить векторный контур — план сил.

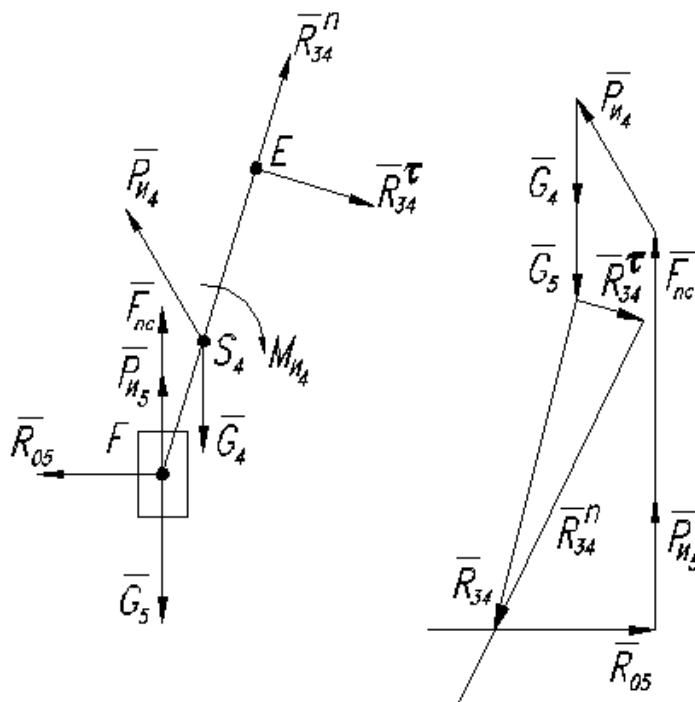


Рис. 11. План сил группы Ассур 4-5

В первую очередь необходимо сложить векторно все известные силы, последовательно выстраивая в масштабе каждый последующий вектор, из конца последнего и начала первого вектора провести направления неизвестных векторов (рис. 10). Направление всех векторов в полученном замкнутом контуре должно показывать обход контура в одну сторону.

Анализ равновесия следующей структурной группы проводится аналогично. Согласно третьему закону Ньютона  $\bar{R}_{43} = \bar{R}_{34}$ , т.е. вектор известный, а неизвестными будут реакции связи в точках B и D (рис. 12).

Для структурной группы Ассур 2-3 составляются два уравнения равновесия в виде уравнений моментов относительно точки C отдельно для второго и

третьего звеньев. Причем реакции связи звеньев группы между собой (в точке С) при их условном разделении в указанные уравнения не войдут, т.к. их плечи равны нулю:

$$\Sigma M_{C2} = M_{И2} + P_{И2} \cdot h_{И2} + G_2 \cdot h_{G2} + R_{12}^{\tau} \cdot l_{BC} = 0 \quad (38)$$

$$\Sigma M_{C3} = M_{И3} + P_{И3} \cdot h_{И3} + G_3 \cdot h_{G3} + R_{43} \cdot h_{R43} + R_{03}^{\tau} \cdot l_{CD} = 0. \quad (39)$$

Решив уравнения (38, 39), находим недостающие тангенциальные составляющие реакций  $\bar{R}_{12}^{\tau}$ ,  $\bar{R}_{03}^{\tau}$  в шарнирах В и D соответственно.

Векторное уравнение сил, приложенных к рассматриваемой группе Ассур 2-3, имеет следующий вид:

$$\bar{G}_2 + \bar{G}_3 + \bar{P}_{И2} + \bar{P}_{И3} + \bar{R}_{03}^n + \bar{R}_{03}^{\tau} + \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^{\tau} + \bar{R}_{43} = 0. \quad (40)$$

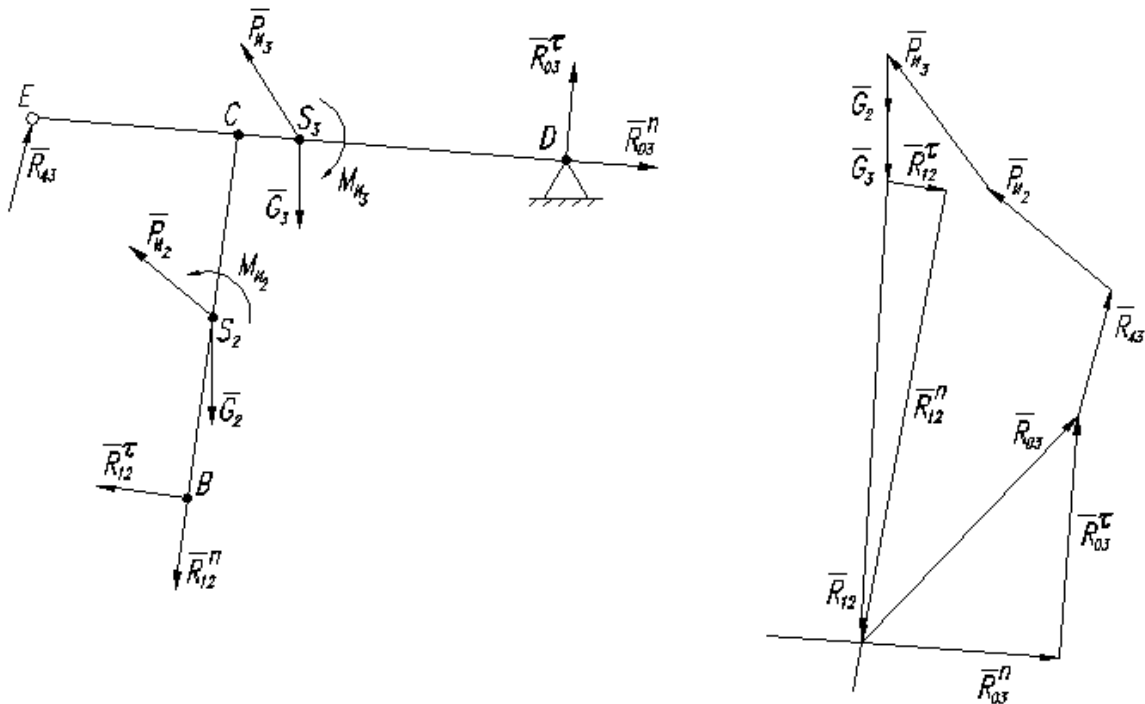


Рис. 12. План сил группы Ассур 2-3

Построение плана сил группы Ассур 2-3 целесообразно начать с известной составляющей  $\bar{R}_{12}^{\tau}$ , цепь известных векторов замкнуть вектором  $\bar{R}_{03}^{\tau}$ . Затем из конца вектора  $\bar{R}_{03}^{\tau}$  провести линию в направлении  $\bar{R}_{03}^n$ , из начала вектора  $\bar{R}_{12}^{\tau}$  — в направлении  $\bar{R}_{12}^n$  до их пересечения. Полный вектор  $\bar{R}_{12}$  получен сложением составляющих векторов  $\bar{R}_{12}^n$  и  $\bar{R}_{12}^{\tau}$ .

При рассмотрении равновесия ведущего звена (рис. 13), к нему кроме известных сил и моментов в точке В необходимо приложить перпендикулярно

звену АВ силу  $P_y$ , уравнивающую действие всех внешних сил, и реакцию связи в опоре А.

Для аналитического определения уравнивающего усилия  $P_y$  составляем уравнение суммы моментов сил относительно точки А:

$$\Sigma M_A = P_{И1} \cdot h_{И1} + G_1 \cdot h_{G1} + P_y \cdot l_{AB} = 0 . \quad (41)$$

Векторное уравнение сил приложенных к ведущему звену имеет следующий вид:

$$\bar{G}_1 + \bar{P}_{И1} + \bar{R}_{01} + \bar{R}_{21} + \bar{P}_y = 0 . \quad (42)$$

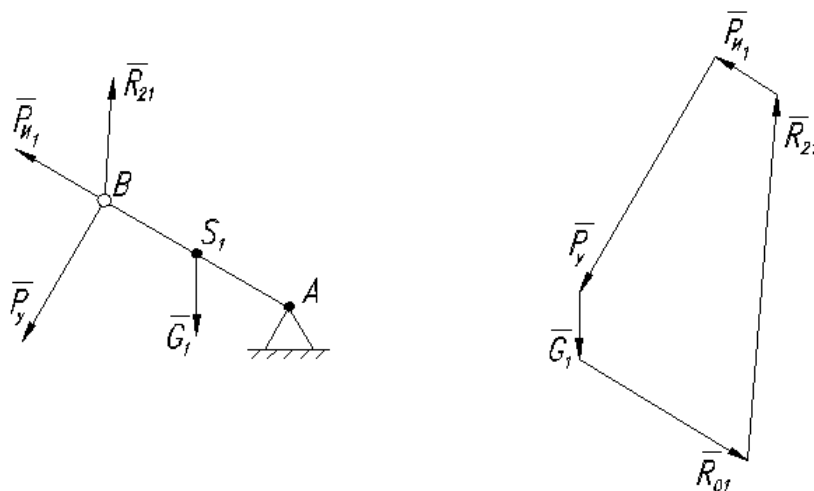


Рис. 13. План сил ведущего звена

Уравнивающий момент находится по формуле

$$M_y = P_y \cdot l_{AB} . \quad (43)$$

## 10.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕЙ СИЛЫ НА КРИВОШИПЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Соотношение между силами, приложенными к механизму (включая и силы инерции), можно получить с помощью вспомогательного рычага Жуковского.

Если какой-либо механизм под действием системы сил, приложенных к этому механизму, находится в равновесии, то повернутый на  $90^\circ$  в какую-либо сторону план скоростей, рассматриваемый как твёрдое тело, вращающееся вокруг полюса плана и нагруженное теми же силами, приложенными в соответствующих изображающих точках плана, также находится в равновесии.

Раскладываем моменты инерции звеньев на пару сил:

$$P_{M2} = \frac{M_{И2}}{I_{BC}}, \quad (44)$$

$$P_{M3} = \frac{M_{И3}}{I_{DE}}, \quad (45)$$

$$P_{M4} = \frac{M_{И4}}{I_{EF}}. \quad (46)$$

Определяем уравновешивающую силу  $P'_y$  путем решения уравнения равновесия суммы моментов действующих сил, относительно полюса P плана скоростей (рис. 14):

$$\Sigma M_P = P'_y \cdot l_{AB} + \Sigma P_{Иi} \cdot h_{Иi} + \Sigma G_i \cdot h_{Gi} + \Sigma P_{Mi} \cdot h_{Mi} + F_{ПС} \cdot h_F = 0, \quad (47)$$

где  $\Sigma P_{Иi} \cdot h_{Иi}$  — сумма моментов сил инерции звеньев;

$\Sigma G_i \cdot h_{Gi}$  — сумма моментов сил тяжести звеньев;

$\Sigma P_{Mi} \cdot h_{Mi}$  — сумма моментов от разложенных на силы моментов инерции стержней звеньев;

$F_{ПС} \cdot h_F$  — момент силы полезного сопротивления.

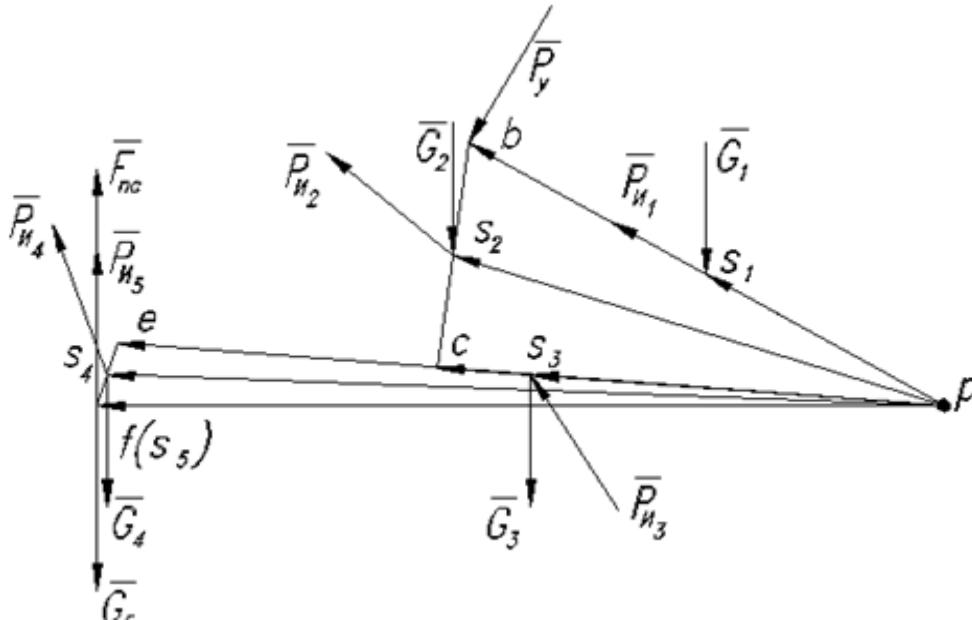


Рис. 14. Рычаг Н. Е. Жуковского

Для контроля правильности графических построений, произведённых методом планов сил, и нахождения уравновешивающей силы с помощью рычага Жуковского, определим относительную погрешность расхождения:

$$\delta = \frac{|P'_y - P_y|}{P_y^{\max}} \cdot 100\% \leq [\delta] = 10 \dots 15\% , \quad (48)$$

где  $P'_y$  — уравнивающая сила, рассчитанная с помощью рычага Жуковского;  
 $P_y$  — уравнивающая сила найденная графическим методом планов сил;  
 $P_y^{\max} = \max\{P'_y, P_y\}$ .

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин: Учебник для вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1988. — 640 с.
2. Ковалев, Н. А. Теория механизмов и машин. — М.: Высшая школа, 1974. — 319 с.
3. Левитский, Н. И. Курс теории механизмов и машин: Учеб. пособие для мех. спец. вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш.шк., 1985. — 279 с, ил.
4. Машнев, М. М., Красковский, Е. Я., Лебедев, П. А. Теория механизмов и машин и детали машин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Л: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1980. — 512 с.
5. Теория механизмов и машин: Учебник для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.; Под ред. К. В. Фролова. — М.: Высш. шк., 1987. — 496 с, ил.
6. Теория механизмов и машин : курс лекций / Г. А. Тимофеев. — М. : ИД Юрайт, 2010. — 351 с. — (Основы наук).



## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Структурный анализ механизмов.....	3
2. Построение положения механизма.....	6
3. Кинематический анализ механизма.....	7
4. Кинематический анализ. Метод плана скоростей.....	8
5. Кинематический анализ. Метод плана ускорений.....	10
6. Угловые скорости и угловые ускорения звеньев.....	13
7. Экспериментальный метод исследования.....	14
8. Графический метод исследования.....	15
9. Силовой анализ механизма.....	17
10.1. Определение уравновешивающей силы на кривошипе методом планов сил..	19
10.2. Определение уравновешивающей силы на кривошипе с помощью теоремы Н. Е. Жуковского.....	22
Библиографический список.....	24

## **ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

### *МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*

*к выполнению практических работ 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» (профили «Технология машиностроения», «Металлообрабатывающие станки и комплексы» и «Конструкторско-технологическое обеспечение кузнечно-штамповочного производства»)  
всех форм обучения*

**Составитель:**

**Битюцких Ольга Константиновна**

Издается в авторской редакции

Компьютерный набор Е. Д. Зотовой

Подписано к изданию 28.10.2021

Уч.-изд.л. 1,6

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»  
394026 Воронеж, Московский просп., 14