Методические указания обсуждены на заседании методического совета СПК «19» 03 2021 года. Протокол № 7,

Председатель методического совета СПК
Сергеева С.И.______ ________________________________.
(подпись)

Методические указания одобрены на заседании педагогического совета СПК

«26» 03 2021 года. Протокол № 7.

Председатель педагогического совета СПК
Облиенко А.В.________________________________.
(подпись)

Производная

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов направлений

23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортых, строительных, дорожных машин и оборудования (по отрослям).

Воронеж 2021

Министерство науки и высшего образовании Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

ПРОИЗВОДНАЯ

Методические указания к выполнениюконтрольных работ
для студентов направлений
23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортых, строительных, дорожных машин и оборудования (по отрослям).

Методические указания обсуждены на заседании методического совета СПК/учебно-методического совета ВГТУ «___»_______20__ года. Протокол № ____,
Председатель методического совета СПК/учебно-методического совета ВГТУ
____.

Методические указания одобрены на заседании педагогического совета СПК/ученого совета филиала ВГТУ «___»_______20__ года. Протокол № ________.
Председатель педагогического совета СПК/ученого совета филиала ВГТУ
____.

Воронеж 2021

УДК
ББК

Составители С. Л. Рыбина, И. И. Корчагин

Производная: методические указания к выполнению контрольных работ для студентов направления 23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортых, строительных, дорожных машин и оборудования (по отрослям). /ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: С. Л. Рыбина, И. И. Корчагин. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2020.– 25 с.

Приводятся основные теоретические сведения связанные с понятием производной и ее применением. Показаны примеры решения заданий и способы использования производной в исследовании функций, прикладное применение производной.

Предназначены для студентов направления 08.02.05 «Строительство и эксплуатация автомобильных дорог и аэродромов», 09.02.07 «Информационные системы и программирование» всех форм обучения.

УДК
ББК

Рецензент –

Печатается по решению учебно-методического совета Воронежского государственного технического университета

Введение

Математика - это наука, изучающая пространственные формы и количественные отношения действительного мира.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. В то же время математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также элементом общей культуры. Поэтому основной задачей курса математики в образовательных заведениях среднего профессионального образования является обеспечение обучающихся математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин.

Теоретический материал, который содержится в каждом методическом пособии, призван систематизировать и обобщить имеющиеся у учащихся знания по уже изученной теме. Разобранные и решённые типовые примеры позволяют учащимся вспомнить основные приёмы и методы решения того или иного примера, сформировать алгоритм действий при выполнении заданий.

Предусмотренная индивидуальность (30 вариантов) контрольной работы помогает определить полноту и прочность знаний каждого учащегося, умения применять полученные знания при решении практических задач, а также навыков самостоятельной работы с учебной литературой, и что немаловажно, позволяют учитывать темп работы каждого учащегося.

Каждая контрольная работа состоит из нескольких заданий, (каждое задание может содержать в себе несколько примеров). Задания для выполнения индивидуальных домашних контрольных работ отвечают следующим требованиям: - охватывают основные вопросы материала (по разделам и темам); - степень сложности всех вариантов заданий одинакова;

Новизна предлагаемого учебно-методического пособия обусловлена тем, что имеющаяся в продаже литература, а также информационные ресурсы в сети Internet, не предлагают комплектности и системности таких разработок как по объёму , так и по содержанию.

Общие методические рекомендации при изучении темы

Изучение материала по учебнику

При самостоятельном изучении материала полезно вести конспект. В конспект по мере проработки материала рекомендуется вписывать определения, теоремы, формулы, уравнения и т.п. Поля конспектов могут послужить для выделения тех вопросов, на которые необходимо получить письменную или устную консультации. Ведение конспекта должно быть аккуратным, расположение текста хорошо продуманным. Конспект поможет в подготовке к выполнению контрольной работы.

Решение задач

Чтение учебника должно сопровождаться разбором предлагаемых решений задач. Каждый этап решения задачи должен быть обоснован, исходя из теоретических положений курса. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и других математических констант.

Консультации

При изучении теоретического материала или при решении задач у обучаюшегося могут возникнуть вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается. В такой ситуации следует обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации, при этом следует указать характер затруднения, привести план решения.

Контрольная работа

В процессе изучения темы обучающийся должен выполнить одну контрольную работу, которая проходит рецензирование. По полученным результатам обучающийся может сделать выводы о степени усвоения им темы, внести коррективы в процесс последующей самостоятельной работы по изучению следующей темы.

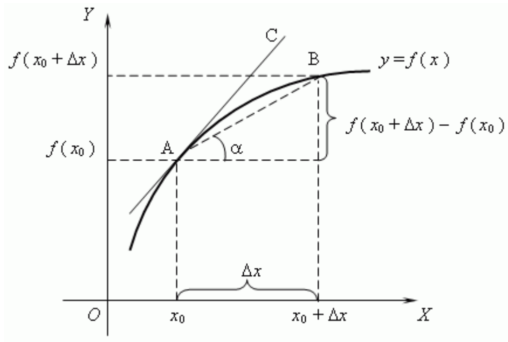
К выполнению контрольной работы следует приступать после тщательного разбора имеющихся в учебно-методическом комплексе задач решений с ответами.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно, так как в противном случае рецензирование работы как диалог общения преподавателя – обучающегося с целью оказания последнему методической помощи не достигнет цели.

Содержание учебно – методического пособия

Тема 1: Вычисление производной функции;
Тема 2: Применение производной функции;

Содержание темы «Вычисление производной функции»



Производная степенной функции. Таблица производных.

Определение производной, формулы производных элементарных функций, простейшие правила вычисления производных.

Формулы производной степенной функции.

Правила дифференцирования: суммы и функции с постоянным множителем.

Правила нахождения производных суммы, произведения и частного, производная сложной функции.

Производные некоторых элементарных функций.

Определение элементарных функций, формулы производных показательной, логарифмической, тригонометрических функций.

Производные сложных функций.

Понятие сложной функции, формулу производной сложной функции, условие дифференцируемости функции.

Правила дифференцирования: произведения и частного.

Основные правила дифференцирования.

Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

Угловой коэффициент прямой, угол между прямой и осью Ox; геометрический смысл производной, уравнение касательной к графику функции; способ построения касательной к параболе.

1. Основные сведения из теории

1.1. Определение производной

Пусть x - произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности точки x_0 (окрестность точки x_0- это интервал $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$).

Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента:

$\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции:

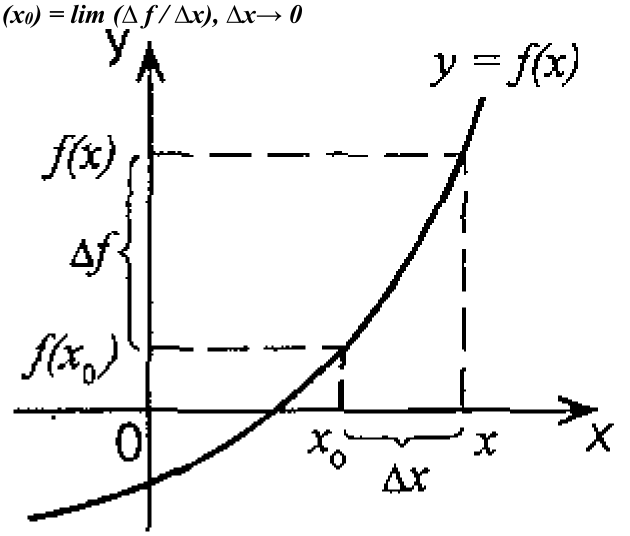
$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ или

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Отсюда $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

Геометрический смысл приращений Δx и Δf показан на рисунке. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx, стремящегося к "нулю."

$f'(x_0) = \lim (\Delta f / \Delta x)$, $\Delta x \to 0$



Определение: Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Обозначение: Если ***$f(x)$*-**функция, то ***$f'(x)$*** – её производная

Определение: Операция вычисления производной называется дифференцированием.

Определение: Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке.

1.2. Правила дифференцирования

1) $(f(x)+g(x))' = f(x)' + g(x)'$
2) $(f(x)-g(x))' = f(x)' - g(x)'$
3) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

1.3. Формулы вычисления производных

1) $(c)'=0$, где с – число
2) $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$
3) $(x)'=1$
4) $(e^x)' = e^x$
5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x>0$
6) $(\sin x)' = \cos x$
7) $(\cos x)' = -\sin x$
8) $(a^x)' = a^x \ln x$
9) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

1.4. Производная сложной функции

Если *f (g(x))* - сложная функция, то ее производная равна произведению производных внешней и внутренней функций, т.е. $[f(g(x))]' = f'(g) \circ g'(x)$.

1) $(u^p)' = p \cdot u^{p-1} \cdot u'$
2) $(e^u)' = e^u \cdot u'$
3) sinu)'=cosu·u'
4) (cosu)'=-sinu·u'
5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

1.5. Производная произведения и частного

1) Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то их произведение также дифференцируемо в точке x_0 причем

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

2) Если функции υ и ν дифференцируемы в точке x_0 и

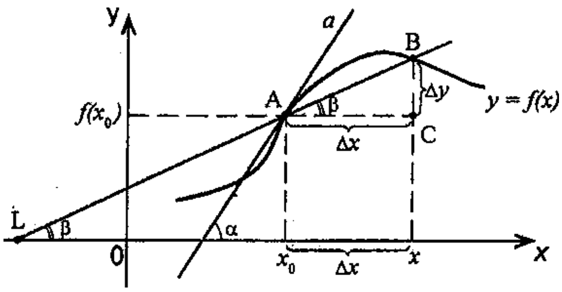
ν'(x0) ≠ 0, то их частное также дифференцируемо в точке x_0, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

3) Если функция и дифференцируема в точке x_0 и c = const. то их произведение также дифференцируемо в точке x_0 причем (cu)' = c·u'.

1.6.Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, дифференцируемой в окрестностях точки x_0 .



Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку графика функции - точку A(x_0, f (x_0)) и пересекающую график в некоторой точке 'B(x;f(x)).

Геометрический смысл производной заключается в следующем:

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой x_0.

2. Примеры и упражнения

Пример 1 : Найти производную функции:

а) $(2x^5)'=2\cdot5x^{5-1}=10x^4$

б) $(4x^{12})'=4\cdot12x^{12-1}=48x^{11}$

в) $(3x^4+2x^{15})'=(3x^4)'+(2x^{15})'=3\cdot4x^3+2\cdot15x^{14}=12x^3+30x^{14}$

г) $(3x^2+4x-46)'= (3x^2)'+(4x)'-(46)'=3\cdot2x+4\cdot1-0=6x+4$

д) $(6\cos x-2\sin x+5e^x)'= (6\cos x)' -(2\sin x)'+(5e^x)'=6\cdot(-\sin x)-2\cdot\cos x +5\cdot e^x= =6\sin x-2\cos x+5e^x$

е) $(23\ln x-12x^4)'= (23\ln x)'-(12x^4)'=23\cdot \frac{1}{x} -12\cdot4x^3=\frac{23}{x}-48x^3$

ж) $((3x+15)^7)'=7\cdot(3x+15)^{7-1}\cdot(3x+15)'=7\cdot(3x+15)^6\cdot(3)=21(3x+15)^6$

з) $((5x-7)\cdot(4+3x))'= (5x-7)'\cdot(4+3x)+ (5x-7) \cdot (4+3x)'=5\cdot(4+3x)+(5x-7)\cdot4=20+15x+20x-28=35x-8$

и) $(\frac{\cos x}{x^2})' = \frac{(\cos x)'\cdot x^2-\cos x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{-\sin x\cdot x^2-\cos x\cdot 2x}{x^4} = \frac{x(-\sin x\cdot x-2\cos x)}{x^4} = \frac{-\sin x\cdot x-2\cos x}{x^3}$

к) $(\sin(\frac{7}{9}x-5))'=\cos(\frac{7}{9}x-5)\cdot(\frac{7}{9}x-5))'= \cos(\frac{7}{9}x-5)\cdot\frac{7}{9}= \frac{7}{9}\cos(\frac{7}{9}x-5)$

Пример 2: Вычислить значение производной в точке

а)Найти; $f'(-2)$,если $f(x)=(2x+3)^5$

Решение:

$f'(x)= ((2x+3)^5)'=5\cdot(2x+3)^{5-1}\cdot(2x+3)'=5\cdot(2x+3)^4\cdot(2)=10(2x+3)^4$

$f'(-2)= 10(2\cdot(-2)+3)^4=10(-1)^4=10$

Ответ: $f'(-2)=10$

б) Найти; $f'(1)$,если $f(x) = e^{\frac{8-5x}{3}}$

Решение:

$f'(x)= (e^{\frac{8-5x}{3}})'=e^{\frac{8-5x}{3}}\cdot(\frac{8-5x}{3})'=e^{\frac{8-5x}{3}}\cdot(\frac{8}{3}-\frac{5x}{3})'=e^{\frac{8-5x}{3}}\cdot(\frac{5}{3})=\frac{5}{3}e^{\frac{8-5x}{3}}$

$f'(1)=\frac{5}{3}e^{\frac{8-5\cdot1}{3}}=\frac{5}{3}e$

Ответ: $f'(1)=\frac{5}{3}e$

Пример 3: Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0.

$f(x) = 5x^3-6x^2+8x-10$, $x_0=1$

Решение:

к= $f'(x_0)$- угловой коэффициент касательной

$f'(x)= (5x^3-6x^2+8x-10)'=15x^2-12x+8$

к= $f'(x_0)= f'(1)=15\cdot1^2-12\cdot1+8=11$

Ответ: к=11

Пример 4: Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0

$y=\frac{10x-1}{x+2}$, $x=1$

Решение :

$y= f(x_0)+ f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ – уравнение касательной

$f(x_0)= f(1)= \frac{10\cdot1-1}{1+2}=\frac{9}{3}=3$

$f'(x)=(\frac{10\tilde{o}-1}{\tilde{o}+2})' = \frac{(10\tilde{o}-1)'\cdot(\tilde{o}+2)-(10\tilde{o}-1)\cdot(\tilde{o}+2)'}{(\tilde{o}+2)^2} = \frac{10\cdot(\tilde{o}+2)-(10\tilde{o}-1)\cdot1}{(\tilde{o}+2)^2} = \frac{10\tilde{o}+20-10\tilde{o}+10}{(\tilde{o}+2)^2} = \frac{30}{(\tilde{o}+2)^2}$

$f'(x_0) = f'(1) = \frac{30}{(1+2)^2} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 3 + \frac{10}{3}(x-1) = 3 + \frac{10}{3}x - \frac{10}{3} = \frac{10}{3}x - \frac{1}{3}$ - уравнение касательной

Ответ: $y = \frac{10}{3}x - \frac{1}{3}$ - уравнение касательной

Варианты контрольной работы

<u>Задание 1:</u> Найти производную

Вариант 1: $(\frac{5}{2}x^4 - 3x^2 + 2x - 1)'$, $(15x^2 + e^x)'$, $(20(7x+4)^4)'$, $(\frac{x}{\cos x})'$

Вариант 2: $(2x^3 + \sin x)'$, (15e^x-4lnx)' , $(\sin(3x+2))'$, $(\frac{x-5}{x-9})'$

Вариант 3: $(-\frac{5}{4}x^4 + 3x^2 - 2x + 11)'$, $(2e^{5x})'$, $(\cos(3x+2))'$ $(\frac{3x+15}{x-2})'$

Вариант 4: $(3\cos x + x^2)'$, $(20x^4 - e^x)'$, $((4+3x)^6)'$, $(\frac{4x-3}{x+2})'$

Вариант 5: (3x^2+$2x+5$)', $(4e^x - \ln x)'$, (sinx-5cosx)', $(\frac{1+x}{x^2})'$

Вариант 6: (6x^2+$2x+5$)', (20 sin x - 7 cos x + 1)' ,(ln(x^2–$3x$))' , $(\frac{x+4}{x^2})'$

Вариант 7: $(-\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14)'$, (sin (3x+2))', $((2x+3)^5)'$, $(\frac{36x+1}{x-2})'$

Вариант 8: $(x^6 - 4\sin x)'$, $(10x^3 - e^x)'$ $((4x+7)^7)'$ $(\frac{6x+1}{3x+3})'$

Вариант 9: $(\frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 13x - \frac{7}{15})'$, $(12x^3 - e^x)'$,$((-5x+11)^4)'$ $(\frac{4x+1}{x+3})'$

Вариант 10: $(-\frac{7}{9}x^9 - \frac{2}{5}x^5 - 2x^3 - \frac{3}{5})'$, $(e^x - 4\sin x)'$,$((7x+4)^5)'$,$(\frac{2x-3}{x+7})'$.

Вариант 11: $(-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18)'$ (sin(53x+2))', $(\frac{x-34}{x+5})'$.

Вариант 12: $(x^5 + 6\sin x)'$, $(17x^3 - 6e^x)'$ $((2x+7)^8)'$ $(\frac{x-78}{x+1})'$

Вариант 13: $(5x^4 - 3{,}5x^2 + x + 6)'$, $\left(\frac{4}{x^6} + x^2\right)'$, (sin (3x+2))' , $\frac{1+x}{4-x^2}$)'

Вариант 14: $(0{,}7x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 0{,}75x^2 + \frac{1}{10})'$,(5e^x)' , $((x+2)\sin x)'$, $(\frac{x^2}{x+3})'$.

Вариант 15: $(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5)'$, $\left(\frac{8}{x} + x^2\right)'$, (sin(53x+2))',((2x-3)·(3x+6))'

Вариант 16:(8x – $x^2 - \frac{x^3}{3}$)', (6lnx-45)' , $(\cos 5x)'$; $(\frac{x^2-3}{x+2})'$

Вариант 17: (2x- 3)' , (65e^x)' , $((x+3)\cdot\cos x)'$, $(\frac{x}{x+2})'$.

Вариант 18: $(x^2+2)'$, $\left(\frac{5}{x^6} + x^8\right)'$, $(10x^3 - e^x)'$, ((5x-2)·(x+6))'

Вариант 19: (x^4-3x^2-7)' , (7lnx-x)' , $((2x+3)^5)'$, ((6x-3)·(8x+6))'

Вариант 20: (4x^3-6x)' , (2sin(2x-4))' , $(\sqrt{x})'$,((5x-4)^5)'

Вариант 21:(3x^2+5x-6)' , (cos(2x-4)' , ((5x-4)^5)' , ((7x-3)·(x+6))'

Вариант 22: ((x-3)(x+4))' , (2x^4)' , ((3x+1)^6)' , $(\frac{7}{x^2})'$

Вариант 23: (3x^2-5x+1)' , ((x+5)(x-4))' , $(\frac{x}{x+2})'$, $(x^6 - 4\sin x)'$

Вариант 24: $(\frac{-2x^3}{3}+x^2+12)'$, $(6\ln x-45)'$, $(\cos 5x)'$, $(\frac{x^2-3}{x+2})'$

Вариант 25: $(x^3-x^4)'$, $(2e^{5x})'$, $(\cos(3x+2))'$, $(\frac{3x+15}{x-2})'$

Вариант 26: $(3\cos x + x^2)'$, $(15x^2+e^x)'$, $(20(7x+4)^4)'$, $(\frac{x-5}{x-9})'$

Вариант 27: $(-\frac{1}{3}x^3+4x^2-7x+18)'$, $(2e^{5x})'$, $(\cos(3x+2))'$, $(\frac{3x+15}{x-2})'$

Вариант 28: $(20x^4-e^x)'$, $(x^5+6\sin x)'$, $((2x+7)^8)'$, $(\frac{x-78}{x+1})'$

Вариант 29: $(x^9-x^5-2x^3-\frac{3}{5})'$, $(4e^x-\ln x)'$, $(\sin(53x+2))'$, $(\frac{1+x}{x^2})'$

Вариант 30: $(x^4-3x^2+2x-1)'$, $(17x^3-6e^x)'$, $((7x+4)^5)'$, $(\frac{2x-3}{x+7})'$.

Задание 2: Вычислить значение функции

Вариант 1: Найти значение производной функции $y=(2x-3)$ в точке $x_0=2$.
Вариант 2: Найти значение производной функции $y=x\cdot(x-2)$ в точке $x_0=1$.
Вариант 3: Найти значение производной функции $f(x)=\sin x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$.
Вариант 4: Найти значение производной функции $y=x(x-2)$. в точке $x_0=3$.
Вариант 5: Найти значение производной функции $f(x)=x^4-2x^2+1$ в точке $x_0=2$.
Вариант 6: Найти значение производной функции y= $\frac{2x^2}{3-x}$ в точке $x_0=2$.
Вариант 7: Найти значение производной функции y= $\frac{x}{4-x}$ в точке $x_0=1$.
Вариант 8: Найти значение производной функции $f(x)=sin3x$ в точке $x_0=0$.
Вариант 9: Найти значение производной функции $y(x)=5x^7-8x$ в точке $x_0=1$
Вариант 10: Найти значение производной функции $y(x)=x^2-3x$ в точке $x_0=-78$
Вариант 11: Найти значение производной функции $y=3x^3$ в точке $x_0=10$
Вариант 12: Найти значение производной функции $y(x)= 6x^5-4x^3+6x^2$ в точке $x_0=1$
Вариант 13: Найти значение производной функции $y(x)= x^5-x^3+2x^2$в точке $x_0=1$
Вариант 14: Найти значение производной функции $y(x)= x^6-x^4+6x^3-3$в точке $x_0=1$
Вариант 15: Найти значение производной функции $y(x)= x^6-x^4+6x^3-3$в точке $x_0=1$
Вариант 16: Найти значение производной функции $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)$ в точке $x_0=2$
Вариант 17: Найдите значение производной функции $y=\frac{x-18}{x}$ в точке $x_0 = 3$.
Вариант 18: Найти значение производной функции $f(x)=((2x+1))^6$ в точке $x_0=1$
Вариант 19: Найти значение производной функции y(x)= x^6-12x^4+8x в точке $x_0=2$
Вариант 20: Найти значение производной функции y(x)= x^4-12x^2 в точке $x_0=-2$
Вариант 21: Найти значение производной функции $f(x)=\frac{1}{5}x^5-4x^3+8$ в точке $x_0=-2$
Вариант 22: Найти значение производной функции $f(x)=\frac{1}{7}x^7+2x^4-7$ в точке $x_0=-1$
Вариант 23: Найти значение производной функции y(x)= x^5-4x^3 в точке $x_0=1$
Вариант 24: Найти значение производной функции y(x)= x^3-6x в точке $x_0=4$
Вариант 25: Найти значение производной функции y = 12 cos x в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$
Вариант 26: Найти значение производной функции $y(x)=x^6-13x^4+11$ в точке $x_0=1$
Вариант 27: Найти значение производной функции y(x)= $\frac{1}{3}$ x^3+x^2+2x; в точке $x_0=-3$
Вариант 28: Найти значение производной функции y(x)= $\frac{2-3x}{x+2}$ в точке $x_0=1$
Вариант 29: Найти значение производной функции y(x)= $3x^2-2-7x$ в точке $x_0=6$
Вариант 30: Найти значение производной функции $y(x)=\frac{5x}{1+x}$. в точке $x_0=2$

Задание 3

Вариант 1: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=x^6-2x^5+3x^4+x^2+4x+5$ в точке $x_0=-1$.

Вариант 2: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)=2x^4+5x^2-3$ в точке с абсциссой $x_0=-1$.

Вариант 3: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y=x^2-7x+10$ в точке с абсциссой $x_0=4$.

Вариант 4: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=x^5+2x^4+x^3+1$ в точке $x_0=1$.

Вариант 5: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=x$ в точке $x_0=9$.

Вариант 6: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=4x^3+x+7$ в точке $x_0=-1$.

Вариант 7: Найдите значение производной функции $f(x)=\sin x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Вариант 8: Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=x^4-2x^3+3x-13$ в точке $x_0=-1$.

Вариант 9: Написать уравнение касательной к графику функции в точке x_0 $y=\ln x$, $x_0=1$

Вариант 10: Напишите уравнения касательной к графику функции $y=x^3+2x^2-4x-3$, в точке $x_0=5$.

Вариант 11: Напишите уравнения касательной к графику функции $y=4x-7x$ в точке $x=4$.

Вариант 12: Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ в точке $x=1$

Вариант 13: Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y(x)=5x^4-7$ в точке $x_0=-1$

Вариант 14: Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2+5$ в точке $x_0=-1$

Вариант 15: Напишите уравнения касательной к графику функции y= x^4-3x^2 в точке $x=4$.

Вариант 16: Напишите уравнения касательной к графику функции y= x^5-6x^3+5x в точке $x=4$.

Вариант 17: Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\frac{1}{7}x^7+2x^4-7$ в точке $x_0=1$

Вариант 18: Напишите уравнения касательной к графику функции y= x^6+8x^3 в точке $x=1$.

Вариант 19: Напишите уравнения касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ в точке $x=4$.

Вариант 20: Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3$ в точке $x=-1$

Вариант 21: Напишите уравнения касательной к графику функции $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^4$ в точке $x=2$.

Вариант 22: Напишите уравнения касательной к графику функции f(x) = $x^{3}-6x^{2}$ в точке $x=2$.

Вариант 23: Найти угловой коэффициент касательной к графику функции y = x^5+19x^3+61 в точке $x=-1$

Вариант 24: Напишите уравнения касательной к графику функции f(x) = $2x^4-8x^3$ в точке $x=2$

Вариант 25: Напишите уравнения касательной к графику функции f(x) = $4x^2+10$ в точке x=4

Вариант 26: Напишите уравнения касательной к графику функции f(x) = $3x^2-2-7x$ в точке x=5

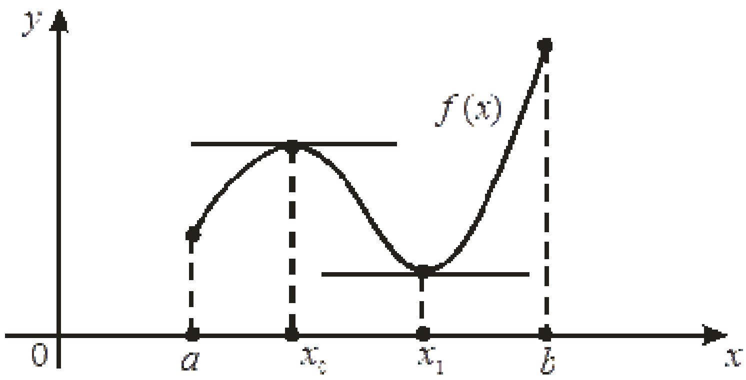
Вариант 27: Напишите уравнения касательной к графику функции $f(x)=2x-x^{3}$. в точке x=3

Вариант 28: Напишите уравнения касательной к графику функции f(x) = $5x^2-12$ в точке x=7

Вариант 29: Напишите уравнения касательной к графику функции $f(x)=x^2-3x-6.$ в точке x=5

Вариант 30: Напишите уравнения касательной к графику функции f(x)=$-\frac{1}{3}x^3+4x^2+2x;$ в точке x=3

Содержание темы «Применение производной функции»



Нахождение стационарных точек и промежутков монотонности.

Достаточный признак убывания (возрастания) функции, теорема Лагранжа, понятия «промежутки монотонности функции»

Экстремумы функции и значения в них

Определения точек максимума и минимума, необходимый признак экстремума (теорему Ферма) и достаточный признак максимума и минимума, знать определения стационарных и критических точек функции

Исследование и построение графиков функций.

Схема исследования функции, метод построения графика чётной (нечётной) функции

Нахождение наибольших и наименьших значений функций.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке и на интервале

2. Основные сведения из теории

2.1.Экстремумы функции

Определение: Точка x_0 называется точкой максимума **т.max** функции f(x) если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$

Другими словами: **т.max** – точка, выше которой график не поднимается
(в примере: x=4 –т.max)

Определение: Точка x_0 называется точкой минимума **т.min** функции f(x) если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$

Другими словами: **т.min** – точка, ниже которой график не опускается
(в примере: x=-1 –т.min)

Определение: Точки минимума **т.min** и точки максимума **т.max** называются точками экстремума функции.

Теорема Ферма: Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Если x_0 – точка экстремума функции f(x), то $f'(x_0)=0$.

Другими словами: Необходимое условие существования точек экстремума: $f'(x_0)=0$

Алгоритм нахождения точек экстремума функции **(**т.max, т.min**)** :

1) Найти интервалы возрастания и убывания функции:
   1. Найти производную функции $f'(x)$;
   2. Найти стационарные точки (точки, в которых производная f(x) равна нулю), т.е. решить уравнение $f'(x)=0$;
   3. Отметить эти точки на числовой оси, указать промежутки;
   4. Выявить знаки производной $f'(x)$ на каждом из полученных промежутков (подставить любое число из проверяемого промежутка в производную и узнать знак);
   5. Записать ответ.
2) По схеме определить точки максимума и точки минимума.

2.2.Исследование функции с помощью производной

Алгоритм исследования функции для построения графика

1. Найти область применения функции;
2. Найти производную функции $f'(x)$;
3. Найти стационарные точки;
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Определить точки экстремума (т.max, т.min);
6. Найти значение функции в стационарных точках;
7. Заполнить таблицу;
8. Построить график.

2.3 Наибольшее и наименьшее значение функции

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке [а;в]

1) Найти значение функции на концах отрезка, т.е. f(а), f(в);
2) Найти производную функции $f'(x)$;
3) Найти стационарные точки ($f'(x)=0$)
4) Проверить входят ли стационарные точки в отрезок [а;в];
5) Найти значение функции в стационарных точках;
6) Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

2. Примеры и упражнения

Пример 1: Найти точки экстремума функции:

$$f(x) = x^3+6x^2+4$$

Решение:

1) $\underline{f'(x)} = (x^3+6x^2+4) = (x^3)'+(6x^2)'+(4)'= 3x^2+6\cdot 2x+0=\underline{3x^2+12x}$
2) $f'(x)=0 \quad 3x^2+12x=0$

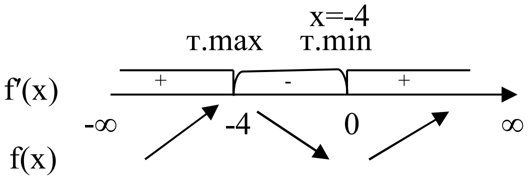
$x(3x+12)=0$

$x=0$ или $3x+12=0$

$3x=-12$

$x=\frac{-12}{3}$

$x=-4$

3) 

4) На интервале $(-\infty;-4)$ возьмём число -5, подставим в производную $f'(x)$:

$f'(-1)=3\cdot(-5)^2+12\cdot(-5)=75-60=15>0$, знак «+», значит (↑)

На интервале $(-4;0)$ возьмём число -1, подставим в производную $f'(x)$:

$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+12\cdot(-1)=3-12=-9<0$, знак «-», значит (↓)

На интервале $(0;\infty)$ возьмём число 1, подставим в производную $f'(x)$:

$f'(1)=3\cdot 1^2+12\cdot 1=3+12=15>0$, знак «+», значит (↑)

5) На схеме определяем, что $x=-4$ т.max, $x=0$ – т.min

<u>Ответ:</u> $x=-4$ т.max, $x=0$ – т.min

Пример 2: Исследовать функцию и построить график $f(x) = 6x^2-2x^3$

Решение:

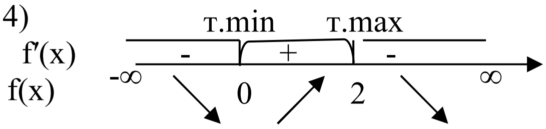
1) Область применения: любое x;
2) $f'(x) = (6x^2)'-(2x^3)'=6\cdot 2x-2\cdot 3x^2=12x-6x^2$
3) $f'(x) =0 \quad 12x-6x^2=0$

$x(12-6x)=0$

$x=0$ или $12-6x=0$

$-6x=-12$

$x=\frac{-12}{-6}$, $x=2$

4) 

$(-\infty;0)$ «-1» $f'(-1)=12\cdot(-1) -6\cdot(-1)^2=-12-6=-18<0$, знак «-», значит (↓)

$(0;2)$ «1» $f'(1)=12\cdot 1-6\cdot 1^2=12-6=6>0$, знак «+», значит (↑)

$(2;\infty)$ «3» $f'(3)=12\cdot 3-6\cdot 3^2=36-54=-18<0$, знак «-», значит (↓)

5) Определим по схеме, что $x=0$ – т.min, $x=2$ – т.max
6) $f(0) = 6\cdot 0^2-2\cdot 0^3=0-0=0$

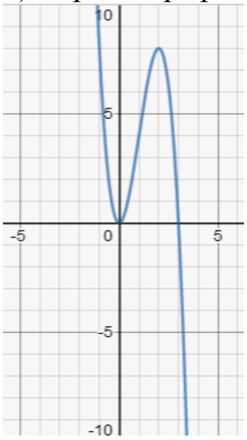
$f(2) = 6\cdot 2^2-2\cdot 2^3=24-16=8$

7) Заполним таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
f′(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘	0	↗	8	↘

т.min(0;0) т.max(2;8)

8) Строим график функции $f(x) = 6x^2-2x^3$



Пример 3: Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=2x^3-3x^2+2$ на отрезке $[-2;3]$

Решение:

1) $\mathbf{f(-2)}=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2+2=-16-12+2=\mathbf{-26}$

$\mathbf{f(3)}=2\cdot3^3-3\cdot3^2+2=54-27+2=\mathbf{29}$

2) $f'(x) =(2x^3-3x^2+2)'= (2x^3)'-(3x^2)'+(2)'=2\cdot3x^2-3\cdot2x+0=6x^2-6x$

3) $f'(x) =0 \quad 6x^2-6x =0$

$x(6x -6)=0$

$x=0$ или $6x-6=0$

$6x=6$, $x=\frac{6}{6}$

$x=1$

4) Получили стационарные точки $x_1=0$, $x_2=1$,
по заданию имеем отрезок $[-2;3]$, x_1 и x_2 <u>входят</u> в заданный отрезок, значит обе стационарные точки нам подходят.

5) $\mathbf{f(0)}=2\cdot0^3-3\cdot0^2+2=0-0+2=\mathbf{2}$

$\mathbf{f(1)}=2\cdot1^3-3\cdot1^2+2=2-3+2=\mathbf{1}$

6) Имеем:

f(-2)= <u>-26</u> **f(3)= <u>29</u>** **f(0)=<u>2</u>** **f(1)= <u>1</u>**

Выбираем самое большое и самое маленькое значение:

Наибольшее значение: $f(3)= 29$ **,** наименьшее значение: $f(-2)= -26$

Ответ: наибольшее значение: $f(3)= 29$ **,** наименьшее значение: $f(-2)= -26$

Варианты контрольной работы

Задание 1: Найти точки экстремума функции

Вариант 1:

а) $f(x)=-x^4+4x^2-3$

б) $f(x)=(6x-7)\cdot(2x+8)$

Вариант 2:

а) $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$

б) $f(x)=(4x+5)\cdot(x-7)$

Вариант 3:

а) $f(x)=-x^3-3x^2+24x-4$

б) $f(x)=(2x+1)\cdot(3x+6)$

Вариант 4:

а) $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$

б) $f(x)=(x-2)\cdot(9x+1)$

Вариант 5:

а) $f(x)=-x^3+6x^2+15x+1$

б) $f(x)=(8x+2)\cdot(4x-13)$

Вариант 6:

а) $f(x)=-x^3+x^2+8x$

б) $f(x)=(x+12)\cdot(12x-1)$

Вариант 7:

а) $f(x)=2x^3+9x^2-24x$

б) $f(x)=(8x-3)\cdot(2x-7)$

Вариант 8:

а) $f(x)=2x^3-3x^2-1$

б) $f(x)=(13x-6)\cdot(9x+1)$

Вариант 9:

а) $f(x)=2x^3-3x^2-36x$

б) $f(x)=(4x+3)\cdot(9x-5)$

Вариант 10:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2$

б) $f(x)=(2x-5)\cdot(3x-4)$

Вариант 11:

а) $f(x)= x^2-12x$

б) $f(x)=(6x+7)\cdot(4x-7)$

Вариант 12:

а) $f(x)=2x^3+3x^2-11$

б) $f(x)=(2x-8)\cdot(9x+1)$

Вариант 13:

а) $f(x)=0,5x^2-x^3$

б) $f(x)=(5x+1)\cdot(x+3)$

Вариант14:

а) $f(x)=x^3-3x^2$

б) $f(x)=(4x-9)\cdot(6x+2)$

Вариант 15:

а) $f(x)=x^4-10x^2+9$

б) $f(x)=(5x-6)\cdot(2x+10)$

Вариант 16:

а) $f(x)=4x^3-20x^2+25x-6$

б) $f(x)=(12x+13)\cdot(7x-1)$

Вариант 17:

а) $f(x)=11x^3-23x^2+16x+3$

б) $f(x)=(2x-8)\cdot(x-5)$

Вариант 18:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{2}x^2+24x+151$

б) $f(x)=(5x+6)\cdot(17x-1)$

Вариант1 9:

а) $f(x)=2x^3+3x^2-11$

б) $f(x)=(2x-8)\cdot(9x+1)$

Вариант 20:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{13}{2}x^2-14x+13$

б) $f(x)=(6x+6)\cdot(17x-71)$

Вариант 21:

а) $f(x)=2x^3+9x^2-24x$

б) $f(x)=(x+12)\cdot(12x-1)$

Вариант 22:

а) $f(x)=-x^3-3x^2+24x-4$

б) $f(x)=(8x-3)\cdot(2x-7)$

Вариант 23:

а) $f(x)=-x^3+x^2+8x$

б) $f(x)=(2x+1)\cdot(3x+6)$

Вариант 24:

а) $f(x)=-x^3+6x^2+15x+1$

б) $f(x)=(5x-6)\cdot(2x+10)$

Вариант 25:

а) $f(x)=x^4-10x^2+9$

б) $f(x)=(8x+2)\cdot(4x-13)$

Вариант 26:

а) $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$

б) $f(x)=(4x-8)\cdot(2x+81)$

Вариант 27:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

б) $f(x)=(5x-2)\cdot(4x+6)$

Вариант 28:

а) $f(x)=-3\,x^3+6x-5x^2$

б) $f(x)=(\,x+3)\cdot(9x+1)$

Вариант 29:

а) $f(x)=2x^3+3x^2-11$

б) $f(x)=(13x-6)\cdot(9x+1)$

Вариант 30:

а) $f(x)=-x^4+4x^2-3$

б) $f(x)=(2x-8)\cdot(9x+1)$

Задание 2: Исследовать и построить график функции

Вариант 1: $f(x)=3x^3-9x$

Вариант 2: $f(x)=x^4-8x^2+9$

Вариант 3: $f(x)=-x^4+8x^2-10$

Вариант 4: $f(x)=-x^3+12x-15$

Вариант 5: $f(x)=x^3-3x-7$

Вариант 6: $f(x)=x^3-12x-7$

Вариант 7: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x$

Вариант 8: $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$

Вариант 9: $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+16x+\frac{2}{3}$

Вариант 10: $f(x)=x^3+6x^2-4$

Вариант 11: $f(x)=x^3+3x^2+20$

Вариант 12: $f(x)=-x^3+3x-4$

Вариант 13: $f(x)=2+3x-x^3$

Вариант14: $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$

Вариант 15: $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-4$

Вариант 16: $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+8$

Вариант 17: $f(x)=x^2-3x+2$

Вариант 18: $f(x)=x^3-3x^2+4$

Вариант1 9: $f(x)=x^3-3x+1$

Вариант 20: $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+1{,}5x^2$

Вариант 21: $f(x)=2x^3-3x^2+5$

Вариант 22: $f(x)=2x^3-3x^2$

Вариант 23: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$

Вариант 24: $f(x)=-x^3+3x+2$

Вариант 25: $f(x)=x^3-x^2$

Вариант 26: $f(x)=x^3-3x-7$

Вариант 27: $f(x)=x^4-8x^2+9$

Вариант 28: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x$

Вариант 29: $f(x)=-x^3+12x-15$

Вариант 30: $f(x)=x^3+3x^2+20$

Задание 3: Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Вариант 1: $f(x)=x^4-2x^2-3$, $[0;2]$

Вариант 2: $f(x)=2x^2-4x+3$, $[0;4]$

Вариант 3: $f(x)=3x^2-x^3$, $[-1;3]$

Вариант 4: $f(x)=3x^3-9x^2+2$, $[-1;1]$

Вариант 5: $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$, $[0;2]$

Вариант 6: $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, $[-2;2]$

Вариант 7: $f(x)=-x^4+2x^2+3$

Вариант 8; $f(x)=2x^3+3x^2-12x-1$ $[-1;3]$

Вариант 9: $f(x)=4x^2-16x+17$ $[0;3]$

Вариант 10: $f(x)=5x^2-20x+3$ $[0;3]$

Вариант 11: $f(x)=2x^3-15x^2+24x+3$ $[0;3]$

Вариант 12: $f(x)=3x^2+18x+7$ $[-5;-1]$

Вариант 13: $f(x)=5-8x-x^2$ $[-6;-3]$

Вариант14: $f(x)=2x^3+3x^2+2$ $[-2;1]$

Вариант 15: $f(x)=x^3-3x^2-9x-4$ $[-4;4]$

Вариант 16: $f(x)=3x^2-12x+1$ $[1;4]$

Вариант 17: $f(x)=x^3+6x^2-4[-4;1]$

Вариант 18: $f(x)=x^3-x^2$ $[-1;1]$

Вариант1 9: $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, $[-2;2]$

Вариант 20: $f(x)=3x^4-6x^2+3$ $[-2;2]$

Вариант 21: $f(x)=3x^2-x^3$, $[-1;3]$

Вариант 22: $f(x)=-x^3-3x^2-+9x-2$ $[-2;2]$

Вариант 23: $f(x)=2x^3-9x^2-3$ $[-1;4]$

Вариант 24: $f(x)=2x^2-x^4$ $[0;2]$

Вариант 25: $f(x)=x^3-27x$ $[-1;4]$

Вариант 26: $f(x)=3x^2-12x+1$ $[1;4]$

Вариант 27: $f(x)=x^4-8x^2-9$ $[-3;3]$

Вариант 28: $f(x)=3x^4-6x^2+3$ $[-2;2]$

Вариант 29: $f(x)=2+3x^2-x^3$ $[-2;2]$

Вариант 30: $f(x)=3x^3+9x^2+10$ $[4;0]$

Литература

Основные источники:

1. «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
2. «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

Интернет-ресурсы*:*

www.edu.ru
www.mathtest.ru
www.allmatematika.ru
www.ega-math.narod.ru