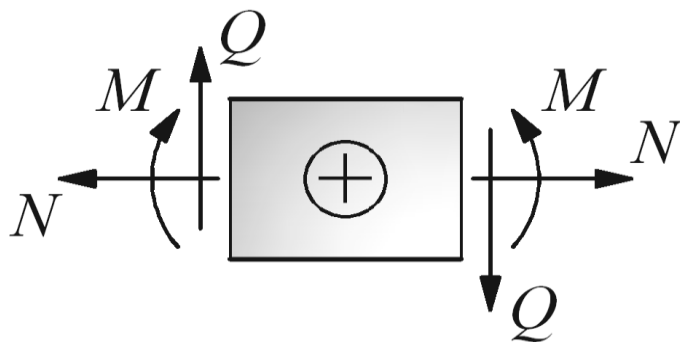


# РАСЧЁТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЁСТКОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Методические указания  
к выполнению расчётно-проектировочной работы  
по дисциплине «Сопротивление материалов»  
для студентов направлений подготовки 270100.62 «Архитектура»  
и 270300.62 «Дизайн архитектурной среды»



Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждения высшего профессионального образования

«Воронежский государственный архитектурно–строительный университет»

Кафедра строительной механики

## **РАСЧЁТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЁСТКОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ**

Методические указания  
к выполнению расчётно-проектировочной работы  
по дисциплине «Сопротивление материалов»  
для студентов направлений подготовки 270100.62 «Архитектура»  
и 270300.62 «Дизайн архитектурной среды»

Воронеж 2014

**УДК 624**  
**ББК 30.121**

Составители С.П. Попов, В.М. Суднин

**Расчёты на прочность и жёсткость при центральном растяжении-сжатии:** метод. указания к выполнению расчётно-проектировочной работы по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов направлений 270100.62 «Архитектура» и 270300.62 «Дизайн архитектурной среды»/ Воронежский ГАСУ; сост. С.П. Попов, В.М. Суднин. – Воронеж, 2014. – 21 с.

Даны общие рекомендации по выполнению расчётно-проектировочных работ, условие и варианты задач, входящих в расчётно-проектировочную работу. Приведены краткие теоретические сведения и основные расчётные формулы по теме расчётно-проектировочной работы. Дается пример выполнения работы, с подробными комментариями и рекомендациями. Даны рекомендации и приведен пример решения подобной задачи на ПЭВМ с использованием популярного математического пакета Mathcad.

Предназначены для студентов дневной формы обучения.

Табл. 1 . Ил. 5. Библиогр.: 4 назв.

**УДК 624**  
**ББК 30.121**

Печатается по решению научно-методического совета Воронежского ГАСУ

**Рецензент – А.В. Резунов**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры строительной механики Воронежского ГАСУ

## ВВЕДЕНИЕ

В процессе изучения курса «Сопротивление материалов» студенты выполняют расчетно-проектировочные работы (РПР). Цель РПР - сознательное усвоение теоретического курса и приобретение навыков решения задач, имеющих как академический, так и практический характер. Количество РПР и задач, входящих в каждую из этих работ, определяется рабочей программой дисциплины «Сопротивление материалов» для каждого направления (специальности).

Для студентов, обучающихся по направлениям 270100.62 «Архитектура» и 270300.62 «Дизайн архитектурной среды», рабочей программой дисциплины «Сопротивление материалов» предусмотрено выполнение двух расчетно-проектировочных работ по темам: «Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении – сжатии» и «Расчет балки на прочность при поперечном изгибе».

В данных методических указаниях даны общие рекомендации по выполнению расчетно-проектировочных работ, условие и варианты задач, входящих в расчетно-проектировочную работу по теме «Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении – сжатии». Приведены краткие теоретические сведения и основные расчетные формулы по теме расчетно-проектировочной работы. Дается пример выполнения работы с подробными комментариями и рекомендациями. Даны рекомендации и приведен пример решения подобной задачи на ПЭВМ с использованием популярного математического пакета Mathcad.

## **1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

### **1.1. Общие методические рекомендации по выполнению расчетно-проектировочных работ**

Для эффективного и своевременного выполнения расчетно-проектировочных работ следует придерживаться следующих рекомендаций:

- прежде чем приступать к выполнению расчетно-проектировочной работы, изучите основы теории по теме РПР.
- после изучения теории по теме РПР проверьте свои знания, отвечая на контрольные вопросы, приведенные в конце соответствующего раздела методических указаний;
- проанализируйте приведенные примеры решения типовых задач, относящихся к изучаемой теме;
- не откладывайте выполнение РПР на последнюю неделю перед сдачей, а начинайте с той же недели, когда она была выдана;
- выполненную часть РПР обязательно приносите на консультацию, где преподаватель проверит правильность ее выполнения и отметит ход выполнения работы в своем журнале.

### **1.2. Правила оформления и сдачи расчетно-проектировочных работ**

Расчетно-проектировочные работы следует оформлять на листах писчей бумаги формата А-4 (297x210 мм). Все листы должны быть сброшюрованы и снабжены титульным листом, форма которого приведена в приложении.

Исходные данные к задачам следует выбирать самостоятельно из таблиц, которые прилагаются к каждой задаче. При этом следует пользоваться номерами варианта расчетной схемы и исходных данных, которые выдает преподаватель индивидуально каждому студенту в начале семестра на практических занятиях.

Перед решением каждой задачи необходимо выписать для заданного варианта полное условие с числовыми данными, выполнить аккуратный чертеж расчетной схемы с соблюдением масштаба и показать на нем все размеры.

Каждый этап решения задачи должен быть озаглавлен. При выполнении расчетов сначала записывается формула, в нее подставляются исходные данные в системе СИ и подсчитывается результат. Все арифметические вычисления следует выполнять с точностью до трех значащих цифр – точностью, достаточной для инженерных расчетов.

Промежуточные выкладки нужно приводить только для громоздких формул. При подборе размеров сечения полученный в результате расчета размер следует округлить до соответствующего размера по ГОСТу.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами. Нужно указывать единицы измерения всех полученных результатов.

Задание, выполненное небрежно, без соблюдения всех перечисленных выше требований, не принимается.

Сдача и защита РПР производится в сроки, установленные графиком учебного процесса, в основном в часы консультаций в следующем порядке:

1. Преподаватель проверяет готовую РПР, указывает на ошибки, если они имеются, и задает несколько вопросов по теме работы, из числа приведенных в методических указаниях по выполнению РПР.

2. При удовлетворительных ответах на вопросы студенту предлагается решить небольшую задачу по теме РПР в присутствии преподавателя.

3. Если в РПР были обнаружены не очень значительные ошибки, они могут быть исправлены тут же, в аудитории, и работа сдается преподавателю. При наличии существенных ошибок РПР дорабатывается студентом и сдается преподавателю на следующей консультации.

4. РПР не засчитывается, если студент не смог ответить на вопросы по теме или не смог решить предложенную задачу. После дополнительного изучения темы он повторно допускается к защите РПР.

## 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ - СЖАТИЕ

### 2.1. Основные понятия и зависимости

Центральным растяжением - сжатием называется такой вид деформирования, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один отличный от нуля внутренний силовой фактор – нормальная (или продольная) сила  $N$ , а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю. Растяжение-сжатие реализуется в случаях, когда линия действия равнодействующей нагрузок совпадает с продольной осью бруса  $x$ . Брус, работающий на растяжение-сжатие, принято называть стержнем.

Для нормальных сил вводится следующее правило знаков: растягивающие нормальные силы принято считать положительными, а сжимающие - отрицательными.

Для определения величины нормальной силы  $N$  используется метод сечений. Согласно методу сечений нормальная сила  $N$  в рассматриваемом сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекции на ось стержня всех нагрузок, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения (т.е. к отсеченной части стержня). При этом нагрузка, вызывающая растяжение отсеченной части стержня, дает в выражении для  $N$  положительное слагаемое, а вызывающая сжатие – отрицательное слагаемое.

Нормальная сила  $N$  может быть переменной по длине стержня. График её изменения, т.е. график функции  $N(x)$ , называют эпюрой нормальной (продольной) силы. При построении эпюры  $N$  стержень разбивают на участки. Участком называют часть стержня, в пределах которой закон изменения нормальной силы  $N$  описывается одним аналитическим выражением.

При разбиении стержня на участки используют следующее правило: границами участков являются сечения, в которых приложены сосредоточенные силы, а также места резкого изменения интенсивности распределенной нагрузки и геометрии поперечного сечения стержня.

При растяжении-сжатии в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению и определяемые по формуле

$$\sigma = N/A, \quad (2.1)$$

где  $N$  – нормальная сила в сечении стержня,  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Оценку прочности стержней ведут по максимальным нормальным напряжениям. Для оценки прочности элементов строительных конструкций используют метод предельных состояний, согласно которому условие прочности для стержня из пластичного материала записывают в виде

$$|\sigma|_{max} = \frac{|N|_{max}}{A} \leq R, \quad (2.2)$$

где  $|N|_{max}$  – наибольшее по абсолютной величине значение нормальной силы;  $R$  – расчетное сопротивление материала стержня по пределу текучести.

Если стержень изготовлен из хрупкого материала, т.е. когда расчетные сопротивления на растяжение и сжатие различны ( $R_t \neq R_c$ ), то условие прочности имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max}^P &= \frac{N_{max}^P}{A} \leq R_t \\ |\sigma|_{max}^{сж} &= \frac{|N|_{max}^C}{A} \leq R_c \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где  $N_{max}^P$  – наибольшая растягивающая продольная сила (на эпюре  $N$  имеет знак «+»);  $|N|_{max}^C$  – наибольшая по абсолютной величине сжимающая нормальная сила (на эпюре  $N$  имеет знак «-»);  $R_t$ ,  $R_c$  – расчетные сопротивления материала на растяжение и сжатие по пределу прочности.

Из условий прочности (2.2) и (2.3) выполняют три вида расчетов:

1. Проверочный расчет. Заданы нагрузки, размеры поперечных сечений и материал стержня. Расчет заключается в проверке выполнения условий прочности (2.2) или (2.3).
2. Проектный расчет, т.е. подбор поперечных сечений стержня при известных нагрузках и материале. Приняв  $|\sigma|_{max} = R$ , определяем требуемую величину площади поперечного сечения стержня  $A_{тр}$  из формулы (2.2):

$$A_{тр} = \frac{|N|_{max}}{R}. \quad (2.4)$$

Зная эту площадь, можно определить размеры сечения заданной формы.

Для хрупкого материала из формул (2.3) требуемую площадь сечения находим отдельно:

$$\text{для растянутой зоны} - A_{тр}^P = \frac{|N|_{max}^P}{R_t}$$

$$\text{и сжатой зоны} - A_{тр}^C = \frac{|N|_{max}^C}{R_c}.$$

Из полученных значений площади выбираем наибольшую.

3. Расчет грузоподъемности стержня, т.е. определение максимальных значений нагрузок, при известных размерах сечений и материале стержня.

Приняв  $|\sigma|_{max} = R$ , определяем величину наибольшей допускаемой нормальной силы:

- для пластичного материала

$$[N] = R \cdot A;$$

- для хрупкого материала

$$[N]_P = R_t A.$$

$$[N]_C = R_c A.$$

Для хрупкого материала из двух полученных значений нормальной силы в качестве допускаемого выбирают наименьшее.



По значению  $[N]$  с помощью эпюры  $N(x)$  определяет максимальные значения нагрузок.

В некоторых случаях работоспособность элемента конструкции (т.е. стержня) определяется не только его прочностью, но и жесткостью, т.е. способностью воспринимать нагрузки без недопустимых упругих деформаций.

При расчетах на жесткость определяют максимальные перемещения сечений и сопоставляют их с допустимыми перемещениями, т.е. условие жесткости стержня записывают в виде

$$|u|_{max} \leq [u], \quad (2.5)$$

где  $|u|_{max}$  – наибольшее значение перемещения сечения, взятое по абсолютной величине (из эпюры перемещений);

$[u]$  – допустимое значение перемещения сечения для данного элемента конструкции, устанавливаемое в нормах.

Перемещение любого  $j$ -го сечения стержня при растяжении – сжатии определяется как сумма абсолютных удлинений  $n$  участков стержня, заключенных между рассматриваемым и неподвижным (закрепленным) сечениями, т.е.

$$u_j = \sum_{i=0}^{i=n} \Delta l_i, \quad (2.6)$$

где  $\Delta l_i$  – абсолютное удлинение  $i$ -го участка стержня.

В общем случае абсолютное удлинение  $i$ -го участка стержня определяется по формуле

$$\Delta l_i = \int_0^{l_i} \frac{N_i(x) dx}{E_i A_i}, \quad (2.7)$$

где  $N_i(x)$  – аналитическое выражение нормальной силы на  $i$ -ом участке стержня;  $l_i$  – длина этого участка;  $A_i$  – площадь поперечного сечения  $i$ -го участка стержня;  $E_i$  – модуль упругости первого рода или модуль Юнга для материала  $i$ -го участка стержня.

Если нормальная сила  $N_i$  постоянна (т.е.  $N_i = const$ ) по длине участка  $l_i$ , то формула (2.7) преобразуется к виду:

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (2.8)$$

Произведение  $E_i A_i$  называют жесткостью  $i$ -го участка стержня при растяжении – сжатии.

## 2.2 Условие расчетно-проектировочной работы на тему «Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении-сжатии»

Для стойки из бетона ( $E = 0,27 \cdot 10^5$  МПа;  $R_c = 12$  МПа;  $R_t = 0.9$  МПа), нагруженной сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой, расчетная схема которой задана, требуется:

- рассчитать из условия прочности по методу предельных состояний необходимые площади поперечных сечений при соблюдении заданного соотношения между площадями на различных участках;
- построить эпюру нормальных напряжений;
- проверить жесткость стойки, если допускаемое значение перемещения верхнего сечения  $[u] = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м.

Собственным весом стойки пренебречь.

Расчетная схема стойки берется согласно варианту (Рис. 2.1), а числовые данные из табл. 1 по строке, заданной преподавателем (в таблице даны расчетные значения нагрузок).

Таблица 1

Номер строки	$a, м$	Силы, кН			$q, кН/м$
		$F_1$	$F_2$	$F_3$	
1	1,5	85	100	45	20
2	1,2	90	55	30	25
3	1,3	100	125	60	30
4	1,1	110	75	40	35
5	1,4	115	80	35	25
6	1,5	80	90	60	20
7	1,6	120	85	45	22
8	1,7	140	160	50	25
9	1,8	135	85	40	20
10	1,2	150	180	35	25

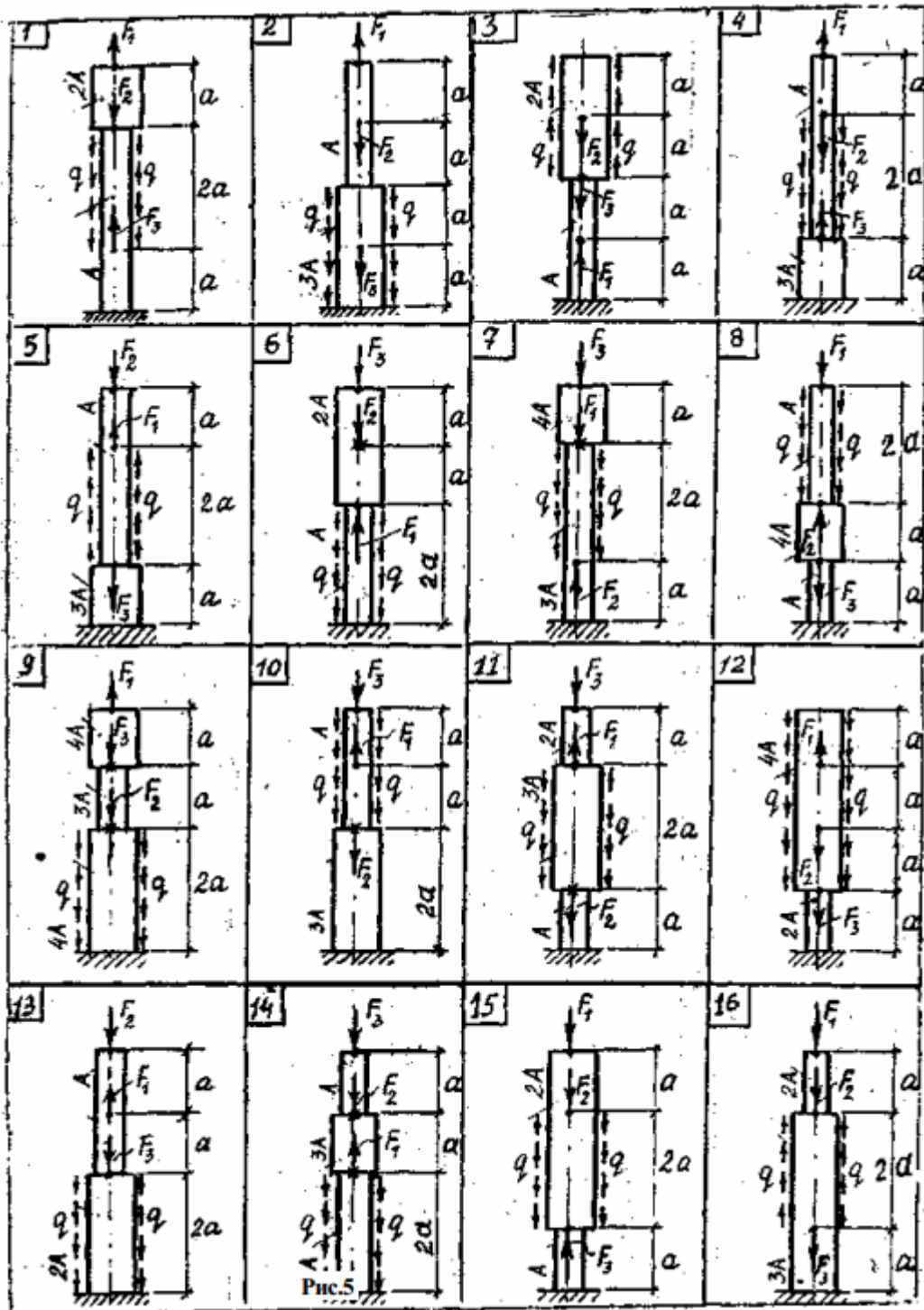


Рис. 2.1. Расчетные схемы к задаче

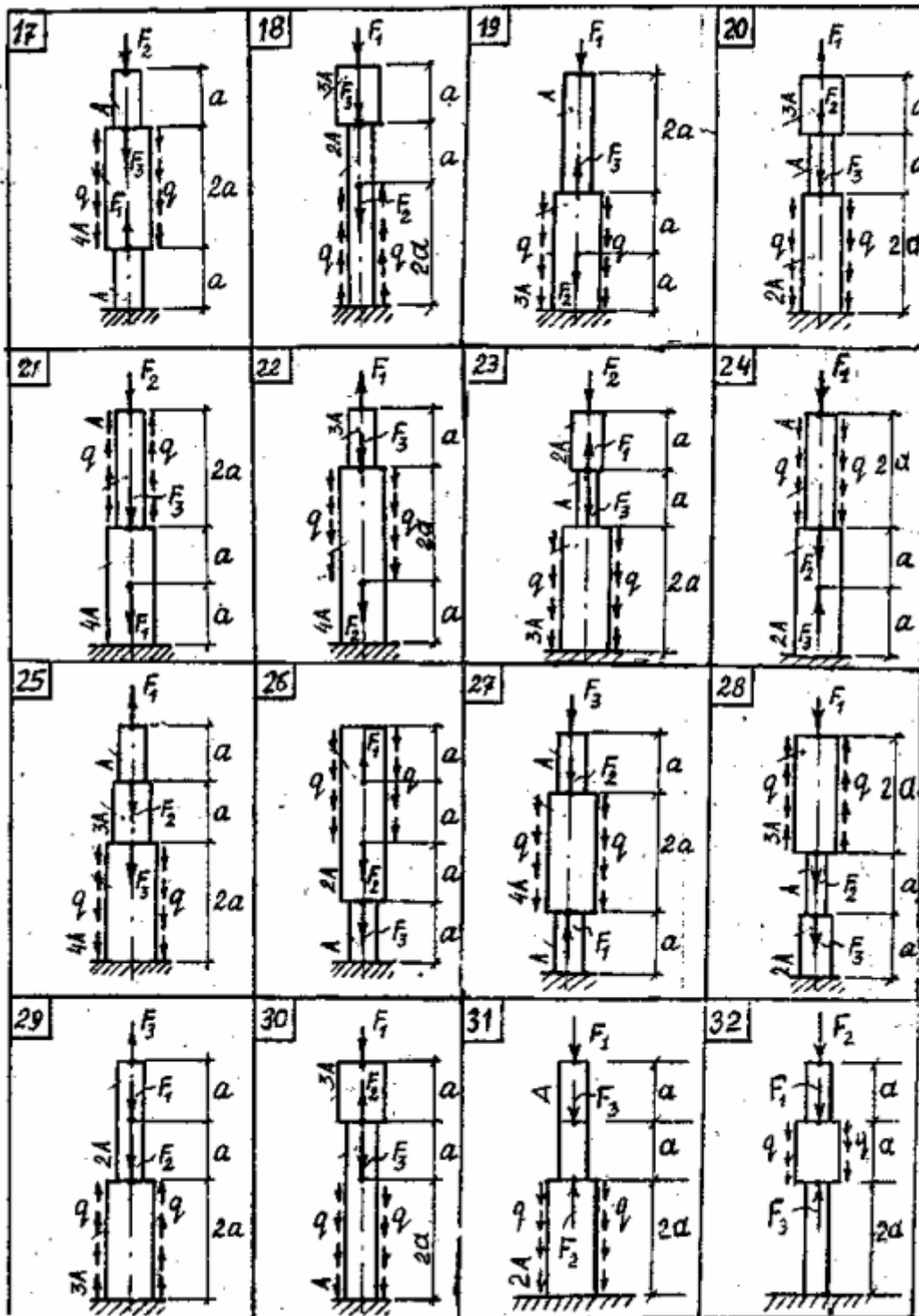


Рис. 2.1. (окончание). Расчетные схемы к задаче

### 2.3. Пример. Расчет на прочность и жесткость ступенчатого стержня

Для стойки из бетона, нагруженной сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой, расчетная схема которой изображена на рис. 2.2а, требуется:

- рассчитать из условия прочности по методу предельных состояний необходимые площади поперечных сечений при соблюдении заданного соотношения площадей на различных участках, приняв расчетное сопротивление на растяжение  $R_t = 0,9$  МПа, на сжатие  $R_c = 12$  МПа, а модуль упругости  $E = 0,27 \cdot 10^5$  МПа;

- построить эпюру нормальных напряжений;

- оценить жесткость стойки, если допускаемое перемещение верхнего сечения  $[u] = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м.

Собственным весом стойки пренебречь.

Расчетные значения нагрузок:  $F_1 = 120$  кН;  $F_2 = 140$  кН;  $F_3 = 100$  кН;  $q = 20$  кН/м. Размер  $a = 1$  м.

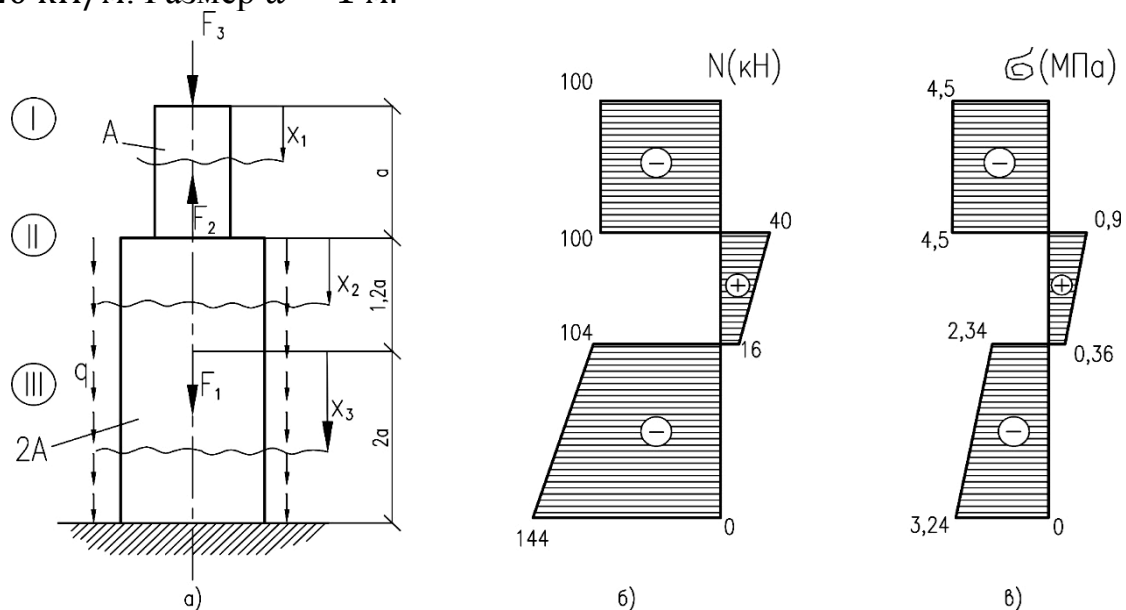


Рис. 2.2. Расчетная схема стойки и эпюры нормальных сил и напряжений

#### Решение

##### 1. Определение вида расчета

Заданная стойка работает на растяжение-сжатие. По условию задачи требуется провести проектный расчет, который из условия прочности выполняется по соотношениям (2.4):

$$A_{\text{тр}}^p = \frac{|N|_{\text{max}}^p}{R_t}, \quad A_{\text{тр}}^c = \frac{|N|_{\text{max}}^c}{R_c}.$$

Для определения  $|N|_{\text{max}}^p$  и  $|N|_{\text{max}}^c$  строим эпюру нормальных сил.

##### 2. Построение эпюры $N$ :

- а) поскольку верхний конец стойки свободен, то нет необходимости определять реакцию заделки;
- б) разбиваем стойку на три участка (руководствуясь правилом, приведенным в разделе 2.1) и нумеруем участки, следуя от свободного конца к заделке;
- в) в пределах каждого из участков проводим произвольное поперечное сечение на расстоянии  $x_i$  от начала участка ( $i$  – номер участка) т.е. используем локальную систему координат;
- г) используя рабочее правило определения нормальной силы  $N$  и правило знаков, запишем аналитические выражения  $N(x)$  на каждом участке, рассматривая каждый раз отсеченную верхнюю часть стойки.

*I* участок:  $0 \leq x_1 \leq a$ ,

$$N_I(x_1) = -F_3 = -100 \text{ кН.}$$

Как видим на *I* участке, нормальная сила не зависит от координаты сечения ( $x_1$ ) т.е. постоянна во всех сечениях *I* участка.

*II* участок:  $0 \leq x_2 \leq 1,2a$ ,

$$N_{II}(x_2) = -F_3 + F_2 - qx_2.$$

Из полученного выражения следует, что  $N_{II}(x_2)$  изменяется по линейной зависимости

$$\text{при } x_2 = 0 \quad N_{II}(0) = -F_3 + F_2 = -100 + 140 = +40 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x_2 = 1,2a = 1,2 \text{ м} \quad N_{II}(1,2) = -100 + 140 - 20 \cdot 1,2 = +16 \text{ кН.}$$

*III* участок:  $0 \leq x_3 \leq 2a$ ,

$$N_{III}(x_3) = -F_3 + F_2 - F_1 - q(1,2a + x_3).$$

Так же, как и на предыдущем участке,  $N_{III}(x_3)$  – линейная функция координат  $x_3$ .

$$\text{При } x_3 = 0 \quad N_{III}(0) = -F_3 + F_2 - F_1 - q(1,2a + 0) = -100 + 140 - 120 - 20 \cdot 1,2 = -104 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x_3 = 2a = 2 \text{ м} \quad N_{III}(2) = -F_3 + F_2 - F_1 - q3,2a = -100 + 140 - 120 - 64 = -144 \text{ кН.}$$

По полученным данным строим эпюру нормальных сил (рис. 2.2,б).

### 3. Расчет необходимой площади поперечного сечения стержня:

а) на первом участке  $|N|_{max}^c = 100 \text{ кН}$ ,  $A_I = A$ .

$$A = A_{\text{тр}}^c = \frac{|N|_{max}^c}{R_c} = \frac{100 \cdot 10^3 (\text{Н})}{12 (\text{МПа})} = 8\,333 \text{ мм}^2 = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

б) на втором участке  $|N|_{max}^p = 40 \text{ кН}$ ,  $A_{II} = 2A$ .

$$2A = A_{\text{тр}}^p = \frac{|N|_{max}^p}{R_t} = \frac{40 \cdot 10^3 (\text{Н})}{0,9 (\text{МПа})} = 44\,444 \text{ мм}^2 = 44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Отсюда следует, что  $A = 22,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ;

в) на третьем участке  $|N|_{max}^c = 144 \text{ кН}$ ,  $A_{III} = 2A$ .

$$2A = A_{\text{тр}}^c = \frac{|N|_{max}^c}{R_c} = \frac{144 \cdot 10^3 (\text{Н})}{12 (\text{МПа})} = 12\,000 \text{ мм}^2 = 12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Отсюда следует, что  $A = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ .

Из трех найденных значений  $A$  выбираем наибольшее. Т.е. принимаем  $A = 22,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ . Таким образом, получим

$$A_I = A = 22,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2. \quad A_{II} = A_{III} = 2A = 44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

#### 4. Построение эпюры нормальных напряжений

Нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}.$$

Учитывая, что  $A_I = A$ ;  $A_{II} = A_{III} = 2A$  и выражения нормальной силы  $N_i$ , полученные в п.2, получим

*I* участок:  $0 \leq x_1 \leq a$ ,

$$\sigma_I(x) = \frac{N_I}{A_I} = -\frac{F_3}{A} = -\frac{100 \cdot 10^3}{22 \cdot 220} = -4,5 \text{ МПа} < R_c.$$

*II* участок:  $0 \leq x_2 \leq 1,2a$ ,

$$\sigma_{II}(x_2) = \frac{N_{II}(x_2)}{A_{II}} = \frac{1}{2A} (F_2 - F_3 - qx_2),$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad \sigma_{II}(0) = +\frac{40 \cdot 10^3}{2 \cdot 22 \cdot 220} = +0,9 \text{ МПа} = R_t;$$

$$\text{при } x_2 = 1,2a \quad \sigma_{II}(1,2) = \frac{16 \cdot 10^3}{2 \cdot 22 \cdot 220} = +0,36 \text{ МПа} < R_t.$$

*III* участок:  $0 \leq x_3 \leq 2a$ ,

$$\sigma_{III}(x_3) = \frac{N_{III}(x_3)}{2A} = \frac{1}{2A} [F_2 - F_1 - F_3 - q(1,2a + x_3)],$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad \sigma_{III}(0) = -\frac{104 \cdot 10^3}{2 \cdot 22 \cdot 220} = -2,34 \text{ МПа} < R_c;$$

$$\text{при } x_3 = 2a \quad \sigma_{III}(2a) = -\frac{144 \cdot 10^3}{2 \cdot 22 \cdot 220} = -3,24 \text{ МПа} < R_c.$$

По полученным данным строим эпюру  $\sigma(x)$ . (Рис. 2.2,в).

Сравнение напряжений в сечениях стойки с расчетными сопротивлениями на растяжение и сжатие показывает, что условие прочности выполняется во всех сечениях. Это говорит о том, что площади сечений подобраны верно.

#### 5. Проверка выполнения условия жесткости:

$$|u| \leq [u],$$

где  $u$  – перемещение верхнего сечения стойки.

Согласно (2.6)

$$u = \sum_{i=1}^3 \Delta l_i = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3.$$

Определим абсолютные удлинения (ускорения) участков стойки:

I участок:  $N_I = -F_3 = \text{const}; A_I = A; l_I = a;$

тогда  $\Delta l_I = \frac{N_I l_I}{EA_I} = -\frac{F_3 a}{EA} = -\frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,27 \cdot 10^5 \cdot 22 \cdot 220} = -0,17 \text{ мм.}$

II участок:  $N_{II}(x) = -F_3 + F_2 - qx_2; A_{II} = 2A; l_{II} = 1,2a;$

тогда  $\Delta l_{II} = \int_0^{l_{II}} \frac{N_{II}(x) dx}{EA_{II}} = \frac{1}{2EA} \int_0^{1,2a} (-F_3 + F_2 - qx_2) dx =$   
 $= \frac{1}{2EA} \left[ -F_3 \cdot 1,2a + F_2 \cdot 1,2a - q \frac{(1,2a)^2}{2} \right] = \frac{1,2a}{2EA} [F_2 - F_3 - 0,6qa] =$   
 $= \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,27 \cdot 10^5 \cdot 22 \cdot 220} (140 - 100 - 12) = +0,028 \text{ мм.}$

III участок:  $N_{III} = F_2 - F_1 - F_3 - q(1,2a + x_3); A_{III} = 2A; l_{III} = 2a;$

тогда  $\Delta l_{III} = \int_0^{2a} \frac{N_{III}(x) dx}{EA_{III}} = \frac{1}{2EA} \int_0^{2a} [F_2 - F_1 - F_3 - q(1,2a + x_3)] dx =$   
 $= \frac{1}{2EA} \left[ (F_2 - F_1 - F_3) 2a - q 2,4a^2 - q \frac{(2a)^2}{2} \right] =$   
 $= \frac{2a}{E 2A} [F_2 - F_1 - F_3 - q(1,2a + a)] =$   
 $= \frac{10^3 \cdot 10^3}{0,27 \cdot 10^5 \cdot 22 \cdot 220} (140 - 100 - 120 - 44) = -0,207 \text{ мм.}$

Перемещение верхнего сечения стойки

$u = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} = +0,17 + 0,028 - 0,207 = -0,349 \text{ мм} =$   
 $= -0,349 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Проверяем выполнение условия жесткости:

$$|u|_{\max} = 0,349 \cdot 10^{-3} \text{ м} < [u] = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Требуемая жесткость стойки обеспечена.

## 2.4. Контрольные вопросы по теме «Центральное растяжение-сжатие»

1. Какой вид деформирования называется центральным растяжением – сжатием?
2. Каково правило знаков для нормальной силы?
3. Приведите, вытекающее из метода сечений, рабочее правило определения нормальных (продольных) сил в поперечных сечениях стержня?
4. Зачем и из каких соображений стержень разбивают на участки при построении эпюры нормальных сил?
5. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях стержня и как они определяются?
6. Как записывается условие прочности при растяжении-сжатии для стержней из пластических и хрупких материалов?
7. Какие виды расчетов выполняются из условия прочности?
8. Как производится расчет требуемой площади поперечного сечения стержня из условия прочности?



9. Что такое расчетное сопротивление материала и как оно определяется?
10. Как определить перемещение поперечного сечения стержня при растяжении-сжатии?
11. Как определяется абсолютное удлинение участка стержня?
12. Как записывается условие жесткости при растяжении - сжатии?

### 3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ MATHCAD

#### 3.1. Решение задачи по расчету на прочность и жесткость ступенчатого стержня с использованием системы MATHCAD

Для выполнения расчетов с использованием вычислительной среды системы MATHCAD студенту необходимо задать исходные данные. Вначале вводят исходные размерности, а затем исходные данные, умноженные на размерность:

$$\begin{aligned} \dot{N} &:= N; \quad \dot{\epsilon} &:= 10^3 \cdot N; & \dot{\sigma} &:= 1 \cdot \frac{N}{2}; & \dot{\sigma} &:= 10^6 \cdot \dot{\sigma}; \\ L1 &:= 1 \cdot \dot{i} & L2 &:= 2.2 \cdot \dot{i} & L3 &:= 4.2 \cdot \dot{i} \\ F1 &:= 120 \cdot \dot{\epsilon} & F2 &:= 140 \cdot \dot{\epsilon} & F3 &:= 100 \cdot \dot{\epsilon}; & q &:= 20 \cdot \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{i}}. \end{aligned}$$

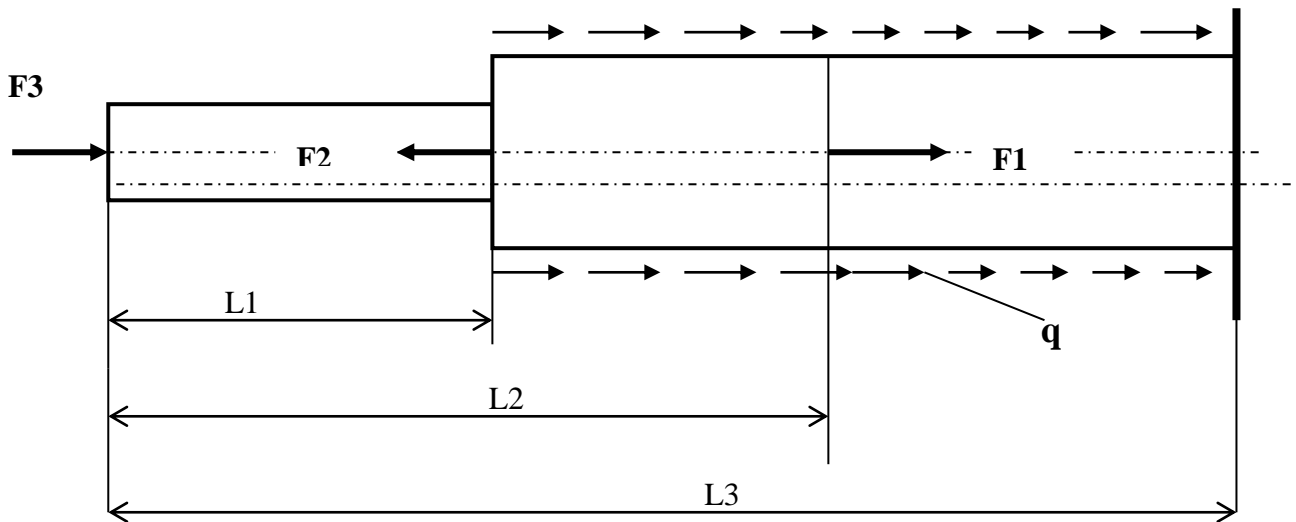


Рис. 3.1. Расчетная схема стойки с нормативными нагрузками

Программирование в Mathcad наглядно и понятно, так как программа представляет собой последовательный набор формул. Основные операторы программирования расположены на панели Programming, вызываемой щелчком на кнопке Programming Toolbar математической панели.

Для создания программы надо выполнить следующее.

1. Вводится имя выражения-программы.
2. Вводится оператор присвоения ( $:=$ ).
3. Кнопкой Add Program Lane (Добавить строку программы) панели программирования вводится вертикальная линия.
4. В появившиеся места ввода вводятся нужные операторы. Чтобы создать необходимые места ввода, надо установить синий уголок курсора в конец строки и ввести новую строку.

$$N(x) := \begin{cases} (-F3) & \text{if } 0 \leq x \leq L1 \\ [-F3 + F2 - q \cdot (x - L1)] & \text{if } L1 \leq x \leq L2 \\ [-F3 + F2 - F1 - q \cdot (x - L1)] & \text{if } L2 \leq x \leq L3 \end{cases}$$

Для построения эпюры продольных сил ( $N(x)$ ) необходимо:

1. Установить курсор в то место, где должна быть построена эпюра.
2. На математической панели Graph (график) щелкнуть по кнопке X-Y Plot (двухмерный график).
3. В появившемся на месте курсора шаблоне двухмерного графика ввести на оси абсцисс значения длин ( $x$ ), а на оси ординат - имя эпюры.
4. Щелкнуть мышью вне графика – для заданного диапазона изменения длин эпюра будет построена.

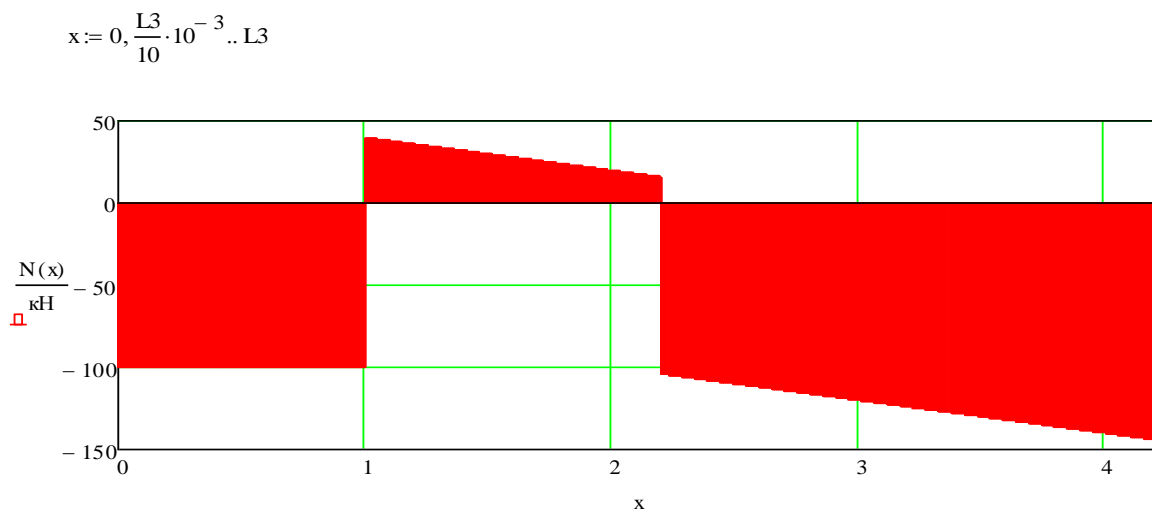


Рис. 3.2. Эпюра нормальных сил

### Расчет площади поперечного сечения бруса

Стержень имеет сжатые и растянутые зоны. Материал стержня по-разному сопротивляется растягивающим и сжимающим усилиям. Имеем систему условий прочности:

$$\sigma_c \leq R_c,$$

$$\sigma_t \leq R_t.$$

Максимальная растягивающая продольная сила  $N_t=40$  кН, площадь сечения -  $2A$ . Из условия прочности на растяжение получим:

$$A \geq N_t/2R_t ;$$

$$A_2 := \frac{40 \cdot \text{кН}}{2 \cdot 0,9 \cdot \text{МПа}} ; \quad A_2 = 0,022 \text{ м}^2.$$

Из условия прочности на сжатие будем иметь:

$$A_1 := \frac{100 \cdot \text{кН}}{12 \cdot \text{МПа}} ; \quad A_1 = 8,333 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2. \quad A_3 := \frac{144 \cdot \text{кН}}{2 \cdot 12 \cdot \text{МПа}} ; \quad A_3 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Расчет необходимо вести по двум различным сечениям - одно площадью  $A$ , а другое -  $2A$ . Из трех полученных значений площади принимаем наибольшее.

$$\text{Принимаем } A=0,022 \text{ м}^2.$$

### Построение эпюры нормальных напряжений

Программа для построения эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  создается аналогично программе построения эпюры продольных сил.

$$A := 0,022 \text{ м}^2 , \quad x := 0, \frac{L_3}{10} \cdot 10^{-3} \dots L_3,$$

$$\sigma(x) := \begin{cases} \left( \frac{-F_3}{A} \right) & \text{if } 0 \leq x \leq L_1, \\ \left[ \frac{-F_3 + F_2 - q \cdot (x - L_1)}{2 \cdot A} \right] & \text{if } L_1 \leq x \leq L_2, \\ \left[ \frac{-F_3 + F_2 - F_1 - q \cdot (x - L_1)}{2 \cdot A} \right] & \text{if } L_2 \leq x \leq L_3. \end{cases}$$

Эпюра нормальных напряжений строится по тому же алгоритму, что и эпюра нормальных сил:

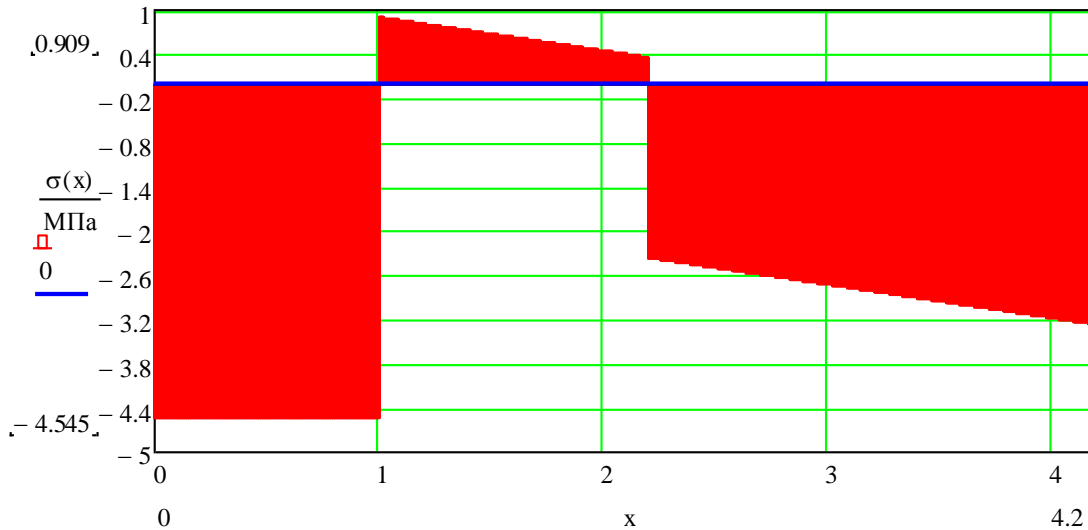


Рис. 3.3. Эпюра нормальных напряжений

### Проверка выполнения условия жесткости.

Перемещение верхнего сечения стойки не должно превышать допустимой величины:

$$|u| \leq [u].$$

С учетом размерностей, используемых в Mathcad, получим:

Деформация (укорочение) первого участка:

$$\Delta 1 := \frac{1}{(E \cdot \text{МПа} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2)} \cdot \int_0^{L1} N1 \, dx; \quad \Delta 1 = -1.684 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Деформация (удлинение) второго участка:

$$\Delta 2 := \frac{0.5}{(E \cdot \text{МПа} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2)} \int_0^L \left( -F3 \cdot \text{кН} + F2 \cdot \text{кН} - q \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot x \cdot \text{м} \right) dx; \quad \Delta 2 = 2.828 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Деформация (укорочение) третьего участка:

$$\Delta_3 := \frac{0,5}{(E \cdot \text{МПа} \cdot A \cdot \text{м}^2)} \int_0^{L_4} \left[ -F_3 \cdot \text{кН} + F_2 \cdot \text{кН} - F_1 \cdot \text{кН} - q \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot (x + L) \right] dx; \quad \Delta_3 = -2,088 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Здесь под  $L_4 = 2$  м принята длина третьего участка.

Перемещение верхнего сечения стержня равно сумме деформаций отдельных его частей:

$$|u| = |\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3|.$$

$$|u| = 3,488 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Перемещение верхнего сечения стержня равно  $0,3488 \cdot 10^{-3}$  м. Учитывая, что  $[u] = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м, делаем вывод, что условие жесткости (2.5) выполнено, то есть требуемая жесткость стойки обеспечена.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А. В. Сопротивление материалов: учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. – М. : Высшая шк., 1995. – 560 с. ; 2000. – 560 с.
2. Варданян Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян и др. – М. : ИНФА-М, 2003.-480с.
3. Валиев Ф. С. Сопротивление материалов : метод. указания и контрольные задания для студентов всех специальностей и форм обучения / Ф. С. Валиев. – Новосибирск: НГАСУ, 2003. – 47 с.
4. Андреев В.И., Паушкин А.Г., Леонтьев А.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): Учебник. - М., Издательство АСВ, 2012.-251с.

**Приложение****Образец оформления титульного листа**

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждения высшего профессионального образования

«Воронежский государственный архитектурно–строительный университет»

Кафедра строительной механики

**Расчетно-проектировочная работа № \_\_\_\_\_**

по сопротивлению материалов

**Тема:** \_\_\_\_\_

**Выполнил:** студент гр. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Принял:** \_\_\_\_\_

< \_\_\_\_\_ > \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Воронеж 201\_\_ г.

## Оглавление

Введение.....	3
1. Общие рекомендации.....	4
1.1. Общие методические рекомендации по выполнению расчетно-проектировочных работ.....	4
1.2. Правила оформления и сдачи расчетно-проектировочных работ.....	4
2. Центральное растяжение – сжатие.....	6
2.1. Основные понятия и зависимости.....	9
2.2. Условие расчетно-проектировочной работы на тему «Расчеты на прочность и жесткость при центральном растяжении-сжатии».....	9
2.3. Пример. Расчет на прочность и жесткость ступенчатого стержня.....	12
2.4. Контрольные вопросы по теме «Центральное растяжение-сжатие».....	15
3. Рекомендации по решению задачи с использованием системы Mathcad.....	16
3.1. Решение задачи по расчету на прочность и жесткость ступенчатого стержня с использованием системы МATHCAD.....	16
Библиографический список.....	19
Приложение. Образец оформления титульного листа.....	21

## РАСЧЁТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЁСТКОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Методические указания  
к выполнению расчётно-проектировочной работы  
по дисциплине «Сопротивление материалов»  
для студентов направлений 270100.62 «Архитектура» и  
270300.62 «Дизайн архитектурной среды»

СОСТАВИТЕЛИ: профессор ВГАСУ, канд. техн. наук  
Попов Сергей Петрович,  
профессор ВГАСУ, докт. техн. наук  
Суднин Валентин Митрофанович

Подписано в печать 00. 01.2014. Формат 60×84 1/16. Уч.-изд. л.1,3.  
Усл.-печ. л.1,4 . Бумага писчая. Тираж 150 экз. Заказ № \_\_\_\_\_.

---

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии  
издательства учебной литературы и учебно-методических пособий  
Воронежского ГАСУ  
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84