ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра «высшей математики и физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400.62 «Управление и информатика в технических системах», 221000.62 «Мехатроника и робототехника», 140400.62 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800.62 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 3

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов

Мет. 3. rar	198 К ,байт	14.10.2008	уч.-изд. 1,9 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400.62 «Управление и информатика в технических системах», 221000.62 «Мехатроника и робототехника», 140400.62 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800.62 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 3

Lim

Воронеж 2008

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов
УДК 517

Методические указания для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400.62 «Управление и информатика в технических системах», 221000.62 «Мехатроника и робототехника», 140400.62 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800.62 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения. Ч. 3/ ГОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2008. 29 с.

Методические указания для выполнения типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса первого семестра.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Мет. 3.rar»

Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.П. Дубровская

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме: “Пределы”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

1. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить тождественные преобразования данного выражения, как говорят, раскрывать неопределенность. Неопределенности бывают нескольких видов: $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\{\infty-\infty\},\{0\cdot\infty\},\{1^{\infty}\},\{0^{0}\},\{\infty^{0}\},\{0^{\infty}\}$.

В последующих заданиях рассмотрим основные приемы, которыми обычно пользуются при таких преобразованиях для вычисления заданного предела.

Функция $f(x)$ называется функцией натурального аргумента, если множество значений x, для которых она определена, является множеством всех натуральных чисел: 1,2,3,..n.

Например, $f(n)=1+2+\ldots+n=(n+1)n/2$ - сумма n первых членов арифметической прогрессии.

Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел $a_1,a_2,\ldots a_n$, следующих одно за другим в определенном порядке и построенных по определенному за-

кону, по которому общий член a_n последовательности задается как функция натурального аргумента, т.е.
$f(n)= a_n$ (индекс n обозначает номер переменной величины a_n , т.е. n –го члена последовательности).

Число A называется пределом последовательности a_n , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N , зависящий от ε , что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство: $|a_n - A| < \varepsilon$

Пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$. ,или $a_n \to A$ при $n \to \infty$, если

для $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$, что при $\forall\ n > N : |a_n - A| < \varepsilon$.

Числовая последовательность не может иметь более одного предела. Последовательность $\{a_n\}$, имеющая предел, называется сходящейся**.** В противном случае $\{a_n\}$ будет расходящейся.

В следующих пяти заданиях типового расчета по теме «Пределы» требуется вычислить пределы числовых последовательностей.
Рассмотрим решение типовых задач с пояснениями на отыскание предела числовой последовательности.

Решение типовых задач на вычисление пределов.

Задание 1.

Вычислить: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$.

Решение. Здесь мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших величин, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Нельзя применить и теорему о пределе частного, т.к. для ее применения требуется, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы, а в

данном случае ни числитель, ни знаменатель дроби предела не имеют (0ни – величины бесконечно большие). Поэтому при вычислении предела воспользуемся тем, что $a^4 – b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ и $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$,
положив $a = n+2$, $b = n-2$ в числителе, и затем после приведения подобных членов, числитель и знаменатель дроби разделим на n^2 . Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{((n+2)^2-(n-2)^2)((n+2)^2+(n-2)^2}{n^2+10n+25+n^2-10n+25}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4n+4-n^2+4n-4)(n^2+4n+4+n^2-4n+4)}{2n^2+50}=.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n(2n^2+8)}{2n^2+5}=.\lim_{n\to\infty}\frac{8n(2+8/n^2)}{2+5/n^2}=.$$

$$=\lim_{n\to\infty}8n=\infty.$$

Ответ: ∞ .

Задание 2.

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

Решение. Выносим за скобки n в набольшей степени, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}.=\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{1/n-1/n^2}-\sqrt{1+1/n^2}}{n\sqrt[3]{3+3/n^3}+(n^{1,25})\sqrt[4]{1+1/n^5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{0-0}-\sqrt{1+0}}{n^{0,25}(0\cdot\sqrt[3]{3+0}+\sqrt[4]{1+0}}==\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^{0,25}}=0$$

Ответ: 0

Задание 3.

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$

Решение. Здесь снова мы имеем дело с разностью двух положительных бесконечно больших величин (неопределенность вида $((\infty-\infty)\cdot\infty)$ и применить теорему о пределе разности двух переменных величин не можем, обе переменные не имеют предела; у нас при $n\to\infty$: $\sqrt[3]{5+n^3}\to\infty$ и $\sqrt[3]{3+n^3}\to\infty$ и без специального исследования об этой разности ничего определенного сказать нельзя. Поэтому перенесем иррациональность в знаменатель, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$

$$\lim_{n\to\infty} n^2((5+n^3)^{1/3}-(3+n^3)^{1/3})\times$$

$$\times\frac{((5+n^3)^{\frac{2}{3}}+(3+n^3)^{\frac{2}{3}}+(5+n^3)^{\frac{1}{3}}(3+n^3)^{\frac{1}{3}})}{((5+n^3)^{\frac{2}{3}}+(3+n^3)^{\frac{2}{3}}+(5+n^3)^{\frac{1}{3}}(3+n^3)^{\frac{1}{3}})}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(5+n^3-3-n^3)}{n^2((5/n^3+1)^{\frac{2}{3}}+(3/n^3+1)^{\frac{2}{3}}+((5/n^3+1)(3/n^3+1))^{\frac{1}{3}})}=$$

$$=\frac{2}{((0+1)^{\frac{2}{3}}+(0+1)^{\frac{2}{3}}+((0+1)(0+1))^{\frac{1}{3}})}=\frac{2}{3}$$

Так как $(a-b)(a^2+b^2+ab)=a^3-b^3$, то, полагая $a=(5+n^3)^{1/3}$, $b=(3+n^3)^{1/3}$, умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на неполный квадрат a^2+b^2+ab.
Ответ: 2/3.

Задание 4.

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1+5+9+...+(4n-3)}{n+1}-\frac{4n+1}{2}]$.

Решение. Числитель первой дроби является суммой первых n членов арифметической прогрессии (разность $d=4$).
$S_n=(a_1+a_n)n/2$, где n -число членов, $a_1=1$, $a_n=4n-3$, получим $1+5+\ldots+(4n-3)=(1+4n-3)n/2=2n^2-n$.

Затем, приводя к общему знаменателю, имеем

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1+5+9+...+(4n-3)}{n+1}-\frac{4n+1}{2}].=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{2n^2-n}{n+1}-\frac{4n+1}{2}).=\lim_{n\to\infty}\frac{-7n-1}{(n+1)2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-7/2$$

(Здесь числитель и знаменатель поделили на n).
Ответ: -7/2.

Задание 5.

Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-3+5-7+9+...+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}.$$

Решение. Числитель дроби запишем в виде
$1-3+5-7+\ldots+(4n-3)-(4n-1)=1+5+\ldots+(4n-3)-$
$-(3+7+11+\ldots+(4n-1))$.
Каждую из двух сумм вычисляем как сумму n первых членов арифметической прогрессии по формуле $S_n=(a_1+a_n)n/2$.

В результате получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-3+5-7+9+\ldots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}.=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2-n)-(2n^2+n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}.=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n(\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1+1/n^2+1/n}}.=$$

$$=\frac{-2}{(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0+0}}.=-1.$$

(Здесь числитель и знаменатель разделили на n).

Ответ: -1

Задание 6 .

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

Решение. Символом *k!* обозначают для кратности произведение k первых чисел натурального ряда. Поэтому $k!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k$, и $(k+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k+1)$. Очевидно, что $k!=k(k-1)!$, $(k+1)!=k(k+1)!$ или $(k+1)!=(k-1)!k(k+1)$.

Обозначим $k=3n$. Тогда $k!=(3n)!$, $(k-1)!=(3n-1)!$, $(k+1)!=(3n+1)!$. Сначала упростим выражение:

$$\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!}=\frac{(3n-1)!(1+3n(3n+1))}{3n(3n-1)!}=\frac{(1+3n^2+3n)}{3n}.$$

Вычислим теперь искомый предел с учетом предыдущего упражнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n+1}{3n(n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2(1+1/n+1/(3n^2))}{3n^2(1-1/n)}=1$$

Ответ: 1

Задание 7.

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/3^2+1/3^3+...+1/3^n}{1+1/5+1/5^2+...+1/5^n}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби являются суммами n первых членов геометрических прогрессий (знаменателями $q_1=1/3$, $q_2=1/5$ соответственно). Найдем эти суммы по формуле $S_n=b_1(1-q^n)/(1-q)$, где b_1–первый член геометрической прогрессии.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/3^2+1/3^3+...+1/3^n}{1+1/5+1/5^2+...+1/5^n}.=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3^n-1)\cdot 4\cdot 5^{n-1}}{(5^n-1)\cdot 2\cdot 3^{n-1}}=.\lim_{n\to\infty}\frac{(1-1/3^n)\cdot 4\cdot 5^{-1}}{(1-1/5^n\cdot 2\cdot 3^{-1}}=\frac{6}{5}.$$

Ответ. 6/5.

<u>Число е и его применение.</u>

Числом e называют предел

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$$

или $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$, где =2,718.

Число e бывает полезным при раскрытии неопределенности вида 1^{∞}. Приведенную выше форму называют вторым замечательным пределом. Заметим, что при существовании $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ имеет место формула $\lim\limits_{n\to\infty}e^{f(n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}f(n)}$.

Задание 8.

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

Решение. Здесь основание степени $\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)\to\infty$ при $n\to\infty$, а показатель степени $(2n-n)^3\to\infty$. Таким образом, имеет место неопределенность вида $\{1^{-\infty}\}$.

<u>Способ 1</u>**.** Разделив числитель и знаменатель на n^3, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n^3)^{2n}(1+1/n^3)^{-n^3}}{(1-1/n^3)^{2n}(1-1/n^3)^{-n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n^3)^{\frac{2n^3}{n^2}}(1+1/n^3)^{-n^3}}{(1-1/n^3)^{\frac{-n^3}{-n^2}}(1-1/n^3)^{-n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty}2/n^2}\;e^{-1}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-2/n^2)}\;e^{1}}=e^{-2}$$

ибо $(1+1/n^3)^{-n^3}\to e^{-1},(1-1/n^3)^{-n^3}\to e$.

<u>Способ 2.</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}=(1^{-\infty})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)^{-2n+n^3}=(1^{\infty})=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}-1\right)\right)^{-2n+n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-2)}{n^3+1}\right)^{\frac{(-2n+n^3)(n^3+1)}{(-2)}\cdot\frac{(-2)}{(n^3+1)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)(-2n+n^3)}{(n^3+1)}} = e^{-2}.$$

Ответ: e^{-2}.

Задание 9.

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$

Решение. Основание степени $\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+2n+3}\right)\to 1$, а показатель степени $(1-2n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

Поэтому представим выражение под знаком предела так:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n} = (1^{-\infty}) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$$

Здесь дробь $a = \left(\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{(1-2n)\cdot\frac{(4n^2+2n+3)}{(2n-4)}\cdot\frac{(2n-4)}{(4n^2+2n+3)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-4)(1-2n)}{(4n^2+4n+3)}}=e^{-1}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-4)(1-2n)}{4n^2+2n+3}\right)\to -1$$

Ответ: e^{-1}.

2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

<u>Определение.</u> Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon>0$ (хотя бы как угодно малого) существует положительное число $\delta>0$, вообще говоря, зависящее от ε , т.е. $\delta(\varepsilon)$, такое, что при всех значениях $x\neq a$ и удовлетворяющих условию

$|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если для $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,

такое, что при $\forall\ x\in D(f): 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

Аналогично число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $M>0$, зависящее от ε, такое, что при $|x|>M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Правила предельного перехода.
Основные теоремы.

Если функции *f(x)* и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, то

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$

б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$

в) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) / \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$,при $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \ne 0$.

г) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^n$, где n целое число, *n>0* ;

д) $\lim\limits_{x\to a}(c\,f(x)) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$,где *c=const* , причем $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

е) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Предел дробно-рациональной функции.

Задание 10.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+3}\right)$

Решение. Здесь отыскивается предел отношения двух многочленов дробно-рациональной функции**.** Подстановка в данную функцию неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Следовательно, прежде чем преобразовать, а именно, числитель и знаменатель дроби разделить на *(x-3)*, которые, согласно теореме Безу, делятся без остатка нацело (т.к. обращаются в ноль при *x=3*), т.е. можно представить:

$x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x^2-x-6)$ и

$x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(x^2-2x+9)$

Имеем:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x^2-x-6}{(x-3)(x^2-2x-3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}\right)=1{,}25$$

Полученные после деления многочлены при $x\to 3$ будут бесконечно малыми. Поэтому снова каждый из них делим на бином *(x-3)* или раскладываем на множители квадратные трехчлены, найдя их корни.

Ответ: 5/4

Таким образом, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, заданную отношением двух многочленов, надо в числителе и знаменателе выделить множитель, равный нулю при предельном значении, и сократить на него.

При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ надо числитель и знаменатель разделить на старшую входящую в них степень, а затем перейти к пределу.

<u>Предел иррационального выражения</u>.

Задание 11.

Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы ее раскрыть, перенесем иррациональность из числителя в знаменатель, воспользовавшись формулой $(a-b)(a^2+b^2+ab)=a^3-b^3$.

Положим $a=\sqrt[3]{8+3x-x^2}$, $b=2$ и умножим числитель и знаменатель дроби под знаком предел на множитель $(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)$, чтобы получить в числителе разность кубов a^3-b^3. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}.=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}\times$$

$$\times\frac{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2)^3}-2^3}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}.\times\frac{1}{(\sqrt[3]{(8+0)^2}+2\sqrt[3]{8+0}+4)}=$$

$$=(1/12)\lim_{x\to 0}\frac{x(3-x)}{x^{2/3}(x+1)^{1/3}}=\times 0{,}25\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0\times$$

Ответ: 0.

Задание 12.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

Решение. Имеем также неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}.=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}\times$$

$$\times\frac{(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 3}\frac{x+13-4x-4}{8\times\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{x-3}}\times=$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+13-4x-4}{8\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{x-3}} = \frac{1}{8\cdot\sqrt[3]{6}}\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{\sqrt[3]{x-3}} = 0.$$

Ответ: 0.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, в выражении, в котором числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует соответствующим образом попытаться избавиться от иррациональности.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции, при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов ∞, $-\infty$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/\beta(x)=A$, $A\neq 0$.

Если же число $A=0$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/(\beta(x))^{p}=A$ и $A\neq 0$, то бесконечно малая функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка p по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(x)$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными,** если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/\beta(x)=1$. В этом случае пишут: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

<u>Теорема</u> (о замене бесконечно малых функций им эквивалентными). Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменяется, если каждую из них или какую-либо одну заменить им эквивалентными функциями.

Если при некотором предельном переходе функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то

$Sin(\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $\mathrm{tg}(\alpha(x))\sim\alpha(x)$;

$arcsin(\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $arc\mathrm{tg}(\alpha(x))\sim\alpha(x)$;

$ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $ln(1+k\alpha(x))\sim k\alpha(x)$,

$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$, $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$

4. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Во многих случаях используется первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)/x=1$ (x- длина дуг или угол, выраженный в радиана x) и предполагается известным, что $\lim\limits_{x\to a}\sin(x)=\sin a$.

Иногда при отыскании предела полезно сделать замену переменной с тем, чтобы упростить вычисление предела и использовать известные пределы. Если пол знаком предела делается замена переменной, то все величины, находящиеся под знаком, должны быть выражены через эту новую переменную. Из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, надо определить предельное значение новой переменной.

Например, при нахождении предела $\lim\limits_{x\to 0} tg(kx)/x$ обозначаем $t=kx$, где при $x\to 0$ новая переменная $t\to 0$, $x=t/k$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} tg(kx)/x = \left(\frac{0}{0}\right) = k\lim_{t\to 0} tg(t)/t = k\lim_{t\to 0}\sin(t)/(t\cos(t)) = k$$

(т.к.cos *(0)=1).*

Полезно помнить, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin(kx)/x = \left(\frac{0}{0}\right) = k$, где

k -постоянная величина. Например, при $x\to 0$ функция *sin(x)* и *tg(x)* эквивалентные бесконечно малые, т.е. s*in(x)~tg(x)*; т.к.

$$\lim_{x\to 0} tg(x)/\sin(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} 1/\cos(x) = 1\,.$$

Пример 1.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(kx)}{x^2}$

Решение. Применим сначала формулу тригонометрии *1-cos(t)=2sin²(t/2).* У нас *1-cos(kx)=2sin²(kx/2)***,** при $x\to 0$; $\sin^2(mx/2)\sim(mx/2)^2$.

По теореме “замены эквивалентной” получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(kx/2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(kx/2)^2}{x^2} = \frac{k^2}{2}\,.$$

Заметим, что можно было воспользоваться первым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(kx/2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(k/2)^2\sin^2(kx/2)}{x^2(k/2)^2} = 2k^2/4 = k^2/2.$$

Ответ: $k^2/2$.

Пример 2.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x(a^{1/x}-1)$

Решение. При $x\to\infty$ функция $(1/x)\to 0$ (бесконечно малая). Тогда $a^{1/x}-1 \sim (1/x)\,ln\ a$.Следовательно, по теореме о замене эквивалентной имеем:

$$\lim_{x\to\infty} x(a^{1/x}-1) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to\infty} x(1/x)\cdot\ln(a) = \ln(a).$$

Ответ: $ln(a)$.

Пример 3.

Найти $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$

Решение. Так как $ln(e)=1$, то

$ln(x)-1=ln(x)-ln(e)=ln(x/e)=ln(1+((x/e)-1))\sim(x/e)-1$ при $x\to e$, поскольку функция $\alpha(x)=(x/e)-1$ - бесконечно малая.

Тогда

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to e}\frac{\ln((1+(x/e))-1)}{x-e} =$$

$$= \lim_{x\to e}\frac{(x/e)-1}{x-e} = 1/e.$$

<u>Решение типовых задач на вычисление</u>
<u>предела функций.</u>

Задание 13.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$

Решение. По формуле тригонометрии

$sin(5(x+\pi))= sin(5x+5\pi)=- sin(5x).$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(5x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-5x}{3x}=-\frac{5}{3}.$$

Поскольку при $x\to 0$, $\sin(5x)\sim 5x$, $e^{3x}-1\sim 3x$

Ответ: $-5/3$.

Задание 14.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x)}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

Решение. Так как при $x\to 0$, $\arcsin(3x)\sim 3x$ то, применяя теорему о замене эквивалентной, и избавляясь от иррациональность в знаменателе, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{2+x-2}=6\sqrt{2}.$$

Ответ: $6\sqrt{2}$.

Задание 15.

Вычислить $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos(3x)-\cos(x)}{tg^2(2x)}$

Решение. По формуле $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

имеем $\cos(3x)-\cos(x)=-2\sin(2x)\sin(x)$. Обозначим $x-\pi=t$, где $t\to 0$ при $x\to\pi$ и используя формулы приведения относительно t, применяя первый замечательный предел, получаем:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{tg^2(2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2t)\sin(t)}{tg^2(2t)}=$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{(2t)\cdot\sin(2t)\cdot\sin(t)(4t)^2\cdot t}{(2t)tg^2(2t)\cdot(4t)^2\cdot t} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 1/2.

Задание 16.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(x^2-2x)}{\sin(3\pi x)}$

Решение. В числителе и знаменателе данной дроби - бесконечно малые функции, т.е. имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, Предел отношения этих функций не изменится, если их заменить эквивалентной. При $x\to 2$, $arctg(x^2-2x)\sim(x^2-2x)$. Сделаем замену $x-2=t$, где $t\to 0$ при $x\to 2$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{(t^2-2t)}{\sin(3\pi t)} = \lim_{x\to 2}\frac{arctg(x^2-2x)}{\sin(3\pi x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-2x)}{\sin(3\pi x)} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(t^2+2t)}{\sin(3\pi t)} = = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)\cdot 3\pi t}{\sin(3\pi t)3\pi t} = \frac{2}{3\pi}$$

Ответ: $\dfrac{2}{3\pi}$.

Задание 17.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln(\cos(x))}{3^{\sin(2x)}-1}$

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Пусть $x=2\pi+t$, где $t\to 0$ при $x\to 2\pi$. Тогда

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\ln(\cos(x))}{3^{\sin(2x)}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos(t))}{3^{\sin(2t)}-1} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-(t^2/2))}{3^{2t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{2\cdot 2t\cdot\ln 3}=-\frac{1}{4\ln 3}\lim_{t\to 0}t=0.$$

т.к. *$\cos(t)\sim 1-t^2/2$; $3^{2t}-1\sim 2t\ln 3$; $\ln(1-t^2/2)\sim -t^2/2$.*

Ответ: 0.

Задание 18.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin(2x)-\sin(x)}$.

Решение. Когда под знаком предела имеется сумма или разность тригонометрических функций, то часто бывает полезным преобразовать их в произведение по известным формулам тригонометрии.

(например, $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$).

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{\sin(2x)-\sin(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^x-1)}{2\sin(x/2)\cdot\cos(3x/2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^0(e^x-1)}{(x/2)\cdot(1-9x^2/8)}=1$$

т.к. при $x\to 0$; *$\sin(x/2)\sim x/2$*; *$\cos(3x/2)\sim 1-(3x/2)^2/2$*;

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{x}=1.$$

Ответ: 1.

Задание 19.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tg(x)-x^2}$

Решение. Имеется вновь неопределенность. Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{3x}-3^{2x}}{tg(x)-x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{7^{3x}-1-3^{2x}+1}{tg(x)-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(7^{3x}-1)\cdot 3x}{3x\cdot(tg(x)-x^2)}-\lim_{x\to 0}\frac{(3^{2x}-1)\cdot 2x}{2x\cdot(tg(x)-x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3\ln 7-2\ln 3)\cdot x}{(tg(x)-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(3\ln 7-2\ln 3)\cdot}{(tg(x)/x-1)}=\ln\frac{343}{9}.$$

Т.к. $\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\ln a$, *(a=7;3)*

Ответ $\ln\frac{343}{9}$.

Задание 20.

Вычислить $\lim_{x\to \pi/3}\frac{1-2\cos(x)}{\sin(\pi-3x)}$

Решение. Делаем замену переменной *x-π/3=t*, где $t\to 0$ при $x\to \pi/3$. Откуда *x=t+π/3* и применим формулу $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$. В результате получаем $\cos(x+\pi/3)=\frac{1}{2}\cos x\cdot-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot$ Имеем

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-2\cos(t+\pi/3)}{\sin(\pi-3(t+\pi/3))}==\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t+\sqrt{3}\cdot\sin t}{\sin(-3t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t+\sqrt{3}\cdot\sin t)\cdot(-3t)}{(-3t)\sin(-3t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\cos t-1)}{3t}-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1-t^2/2-1)}{3t}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задание 21.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}$

Решение. Вводим новую переменную $x=t+1$; $t=x-1$ при $t\to 0$; получаем $x\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t+1}-e}{\sin(t^2+2t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e(e^t-1)\cdot(t^2+2t)\cdot t}{(t^2+2t)\cdot t\cdot\sin(t^2+2t)}=\infty$$

т.к., если функция $\varphi(x)$ является бесконечно малой, то функция $\alpha(x)=1/\beta(x)$ является бесконечно большой при том же предельном переходе и – обратно.

Ответ: ∞ .

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=C$

Следует иметь ввиду, что:

1) если существуют конечные пределы

$\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=B$, то $C=A^B$, т.е.

имеет место формула

$$\lim_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=(\lim_{x\to a}u(x))^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$$

Заметим, что предельное значение a может обозначать и число, и один из символов $\infty,+\infty,-\infty$;

2) если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\pm\infty$,

то вопрос о нахождении $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}$ затруднений обычно не вызывает. В том случае полезны иногда формулы:

$$\lim_{x\to+\infty} x^k=\begin{cases}0, & \text{если } 0<k<1\\ +\infty, & \text{если } k>1\end{cases};\quad \lim_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}\infty, & \text{если } 0<k<1\\ 0, & \text{если } k>1\end{cases}$$

3) если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$, т.е. имеем неопределенность вида $\{1^{\infty}\}$, то полагают $u(x)=1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$ и, следовательно,

$$C=\lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}\right\}^{\alpha(x)\cdot v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\cdot v(x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)\cdot v(x)}$$

Проиллюстрируем общий прием вычисления таких пределов на следующем примере (раскрытие неопределенности вида $\{1^{\infty}\}$).

Пример 4.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{5x}$

Решение. Здесь основание степени $u(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\to 1$ при $x\to\infty$,а показатель степени $5x\to\infty$, т.е. имеется неопределенность вида 1^{∞}. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^{5x\left(\frac{-2}{x+1}\right)}=$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-10x}{x+1}} = e^{10}$$

(Получили в качестве $\alpha(x) = \dfrac{-2}{x+1} \to 0$ при $x \to \infty$)

Заметим, что данный предел можно найти иначе, если разделить на x числитель и знаменатель дроби в основании степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{5x} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-1/x}{1+1/x}\right)^{5x} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left((1-1/x)^{-x}\right)^{-5} / \lim_{x\to\infty}\left((1+1/x)^{x}\right)^{-5} = \frac{e^{-5}}{e^{5}} = e^{-10}.$$

Вообще, полезно помнить, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+k/x\right)^{x} = e^{k}$,

k - постоянная величина.

<u>*Замечание 1.*</u> При вычислении пределов выражений вида $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}$, где $u(x)\to 1, v(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, удобно иногда пользоваться формулой

$$\lim_{x\to a}(u(x))^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\cdot\ln(u(x))}.$$

<u>*Замечание 2*</u>**.** При вычислении пределов полезно знать, что

а) если существует и положителен $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, то

$\lim\limits_{x\to c}(\log_a f(x)) = \log_a(\lim\limits_{x\to c} f(x))$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x)/x = 1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(a^{x}-1)/x = \ln a$.

<u>*Решение типовых задач*</u>

Задание 22.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

Решение. Имеем неопределенность вида $\{1^{\infty}\}$.
Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\left(\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)-1\right)\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(1-\frac{x^2(2^x-5^x)}{1+x^2\cdot 5^x}\right)^{\frac{1+x^2 5^x}{x^2(2^x-5^x)}}\right)^{\frac{x^2(2^x-5^x)}{(1+x^2\cdot 5^x)\cdot\sin^3 x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(2^x-5^x)}{(1+x^2\cdot 5^x)\sin^3 x}} = = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x\cdot((2/5)^x-1)}{(1+x^2\cdot 5^x)\sin x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^0\cdot((2/5)^x-1)}{(1+0)\cdot x}} = e^{\ln(2/3)} = 2/3.$$

Ответ: 2/3.

Задание 23.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+4}{x^3+9}\right)^{1/(x+2)}$

Решение. Имеем

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+4}{x^3+9}\right)=\dfrac{4}{9}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+4}{x^3+9}\right)^{1/(x+2)}=\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: 2/3.

Задание 24.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{x}=1.$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)x}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=\infty$.

Следовательно, имеем неопределенность $\{1^{\infty}\}$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\left(\frac{2x-1}{x}-1\right)\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=$$

$$=\left(\left\{\lim_{x\to 1}\left(1+\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)\right\}^{\frac{x}{x-1}}\right)^{\frac{(x-1)\cdot\ln(3+2x)}{x\cdot\ln(2-x)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot\ln(3+2x)}{x\cdot\ln(2-x)}}=e^{-\ln 5}=e^{\ln\frac{1}{5}}=\frac{1}{5},$$

т.к.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3+2x)\cdot(x-1)}{x\cdot\ln(2-x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3+2x)\cdot(x-1)}{x\cdot\ln(2-x)}=$$

$$=\ln 5\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x\ln(1+(1-x))}=-\ln 5\cdot$$

Здесь использовались формулы: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)\cdot}{z}=1,$

$a^{\log_a b} = b,$ b>0, a>0 , $a \ne 1$.

Ответ: 1/5.

Задание 25.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+\cos(\pi x)}{tg^2(\pi x)}\right)^{x^2}$

Решение. Здесь предел основания степени имеет неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Найдем этот предел.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+\cos(\pi x)}{tg^2(\pi x)}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(1+\cos(\pi x))\cdot\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+\cos(\pi x)\cdot}{1-\cos^2(\pi x)\cdot}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-\cos(\pi x)\cdot}\right)=\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+\cos(\pi x)}{tg^2(\pi x)}\right)^{x^2}=1/2.$$

Ответ: 1/2.

Задание 26.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^{\sin(\pi x)}$.

Решение. Так как при $x\to 3$ основания степени $(2-x/3)\to 1$,

показатель степени $\sin(\pi x)\to \sin 3\pi$, $\sin 3\pi = 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\sin(\pi x)}=1^0=1.$$

Ответ: 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. М.: Наука, 1972. Т.1. 429 с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов Т.Я. Кожевникова – М.: «Оникс 21 век» «Мир и образование», 2003. Ч. 1.
3. Мантуров О.В. Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной /О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. М., 2003.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов.М.: Высш. шк., 2007.204 с.
5. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов /В.С. Шипачев. М., 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400.62 «Управление и информатика в технических системах», 221000.62 «Мехатроника и робототехника», 140400.62 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800.62 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 3

Составители: Федотенко Галина Федоровна,
Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.10. 2008.
Уч.-изд. л. 1,9 «С»

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14