

822

# РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНОЙ БАЛКИ

*Методические указания  
к выполнению расчетной работы по курсу  
«Строительная механика»  
для студентов специальностей:  
270205 «Автомобильные дороги и аэродромы»,  
270102 «Промышленное и гражданское строительство»,  
270201 «Мосты и транспортные тоннели»*

Воронеж 2007

822

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Кафедра строительной механики

**РАСЧЕТ  
МНОГОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНОЙ БАЛКИ**

Методические указания  
к выполнению расчетной работы  
по курсу «Строительная механика» для студентов специальностей:  
270205 «Автомобильные дороги и аэродромы»,  
270102 «Промышленное и гражданское строительство»,  
270201 «Мосты и транспортные тоннели»

Воронеж 2007

Составители С.Ю. Гриднев, Р.А. Мухтаров

УДК 624

**Расчёт многопролётной шарнирной балки [Текст]:** метод. указания к выполнению расчетной работы по курсу «Строительная механика»/ Воронеж. гос. арх.-строит. ун-т; сост.: С.Ю. Гриднев, Р.А. Мухтаров, Воронеж, 2007.- 23 с.

Методические указания содержат описание расчетно-графической работы по курсу «Строительная механика» для студентов, обучающихся по специальностям 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы», 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270201 «Мосты и транспортные тоннели».

Описана техника построения эпюр изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  для многопролетной шарнирной балки и проверка их правильности с учетом закономерностей очертания эпюр в соответствии с характером и расположением нагрузок и расчетной схемой. Подробно излагается кинематический способ построения линий влияния для опорных реакции  $R$ , поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  в сечениях МШБ. Приведен порядок вычисления усилий с помощью загрузки линий влияния от постоянной и временной нагрузок. Рассмотрен пример расчета с подробным выполнением кинематического анализа и необходимыми комментариями.

Ил. 9. Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного архитектурно-строительного университета.

**Рецензент** - В.А. Козлов, д-р. ф.-м. наук, профессор

## Введение

Методические указания по курсу «Строительная механика» составлены в соответствии с учебной программой для студентов дневной формы обучения специальностей «Автомобильные дороги и аэродромы», «Промышленное и гражданское строительство», «Мосты и транспортные тоннели».

Выполняется статический расчет многопролётной шарнирной балки с определением реакций опор, построением эпюр поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . Рассматриваются статический и кинематический способы построения линий влияния для опорных реакций, поперечной силы и изгибающего момента в сечениях балки. Определяются расчетные усилия загрузением линий влияний от постоянной и сплошной временной нагрузок.

### 1.Задание на выполнение расчётной работы

В задании рассматривается статически определимая многопролётная шарнирная балка (МШБ), которая находится под действием системы распределённых и сосредоточенных нагрузок.

Расчётная схема МШБ, положение и величины нагрузок принимаются в соответствии с заданием, выдаваемым студенту, содержащим все исходные параметры.

Для выполнения работы требуется предварительная проработка теоретической части по соответствующим главам учебников строительной механики и разделам лекций по тому же курсу.

#### **В расчетной работе требуется:**

1. Вычертить многопролётную шарнирную балку с действующей на нее постоянной нагрузкой;
2. Выполнить кинематический анализ расчетной схемы балки (см. примечание);
3. Составить монтажную схему МШБ с выделением главных и второстепенных балок, описать очередность ее образования (монтажа) и последовательность расчета;
4. Вычислить реакции опор со всеми необходимыми для этого расчетными схемами;
5. Построить для каждой балки эпюры  $Q$  и  $M$  от постоянной нагрузки со всеми необходимыми для этого расчетами;
6. Построить сводные эпюры  $Q$  и  $M$ ;
7. Построить линии влияния для всех опорных реакций МШБ (при наличии защемления – так же и для реактивной пары);

8. Построить линии влияния  $Q$  и  $M$  для четырех сечений ( $a, b, c$ , отмеченных в задании, и одного сечения  $d$  по выбору студента; желательно, чтобы очертание линий влияния для сечения  $d$  отличалось от сечений  $a, b, c$ );
9. Вычислить с помощью линий влияния:
  - а) две опорные реакции (в крайних опорах);
  - б) поперечные силы и изгибающие моменты в сечениях  $a, b, c$ ;
10. Заполнить таблицу сравнения значений  $R, Q, M$ , определенных непосредственным расчетом и загрузением линий влияния;
11. Определить по линиям влияния усилия от временной нагрузки – минимальное и максимальное значения одной опорной реакции, изгибающего момента и поперечной силы для одного сечения (из числа рассмотренных, имеющих на линиях влияния участки разных знаков).

*Примечание: Если расчетная работа по календарному плану выполняется до изучения темы «Кинематический анализ», то пункт 2 из работы исключается (или может быть выполнен факультативно). Однако если студент сдает работу позже установленного срока и, следовательно, после изучения этой темы, то пункт 2 должен быть включен в работу.*

## 2. ЗАДАНИЕ

Студент получает, карточку содержащую: а) номер; б) расчетную схему балки и схему постоянной нагрузки с буквенным обозначением размеров и нагрузок; в) указание трех характерных сечений  $a, b, c$  для подробного расчета.

**Карточка должна быть вклеена в работу (на обороте обложки).**

*Примечание. Числовые значения вносятся преподавателями непосредственно в карточку или передаются в группу в виде ведомости.*

Выполнению работы должно предшествовать изучение теоретической части курса по соответствующим главам учебников строительной механики.

## 3. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ

1. Схему балки в пункте 1 и в последующем расчете, эпюры и линии влияния  $Q$  и  $M$  надо чертить с соблюдением масштаба, надписывая размеры, характерные ординаты и другие цифровые данные и указывая масштабы. Отдельно указывается линейный масштаб как отвлеченное число (1:...) и отдельно – масштабы ординат (1 см - ...кН и т.п.; для безразмерных величин 1 см - ...ед.; для ординат, имеющих линейную размерность 1 см - ...м).

Если для выразительности чертежа масштаб местами нарушен, это следует оговорить.

2. Все вычисления надо выполнять в единицах системы СИ, указывая размерности исходных данных и результатов вычисления, для сил - кН, для интенсивностей нагрузки - кН/м, для моментов - кНм и т.д.

3. Запись уравнений и вычисления решений надо приводить подробно, так чтобы преподаватель мог проверить их, не прибегая к собственным записям.

4. Вычисления приводятся, как правило, в десятичных дробях и лишь в простейших случаях – в простых дробях. Смешанные дроби не приняты в технических расчетах и не должны употребляться в расчетных работах, выполняемых студентами.

5. Не следует выписывать числа с большим количеством значащих цифр, не оправданных точностью исходных данных и практической целью расчета, проводя разумное округление. Запись результатов с избыточным числом значащих цифр (хотя бы списанных с экрана компьютера) рассматривается как существенный дефект работы.

С повышенной точностью определяют реакции опор, служащие исходными данными для последующих расчетов. Определение их с четырьмя - пятью значащими цифрами обеспечивает затем получение ординат  $M$  с тремя - четырьмя верными значащими цифрами.

Следует всюду соблюдать правила округления.

6. При проверочных расчетах расхождение считается допустимым, если его можно объяснить проведенным ранее округлением в промежуточных расчетах.

7. Работа оформляется в виде «пояснительной записки», содержащей расчеты и пояснения к ним. Чертежи и схемы размещаются в тексте записки. Текст разбивается на параграфы и пункты в соответствии с разделом 1 методических указаний (здесь, в примере расчета разбивка на параграфы опущена, в работе ее следует дать). Указываются и наименования таблиц.

8. Все вышеперечисленное здесь относится и к выполнению всех последующих расчетных работ по строительной механике.

#### 4. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Составление монтажной схемы позволяет:

а) проследить за порядком сборки, обеспечивающим для каждого последовательно монтируемого звена опирание на две опоры (или защемление звена на одном конце); этим проверяется правильность структуры балки (в дополнение к кинематическому анализу или взамен его) и устанавливается наличие в системе необходимого числа связей, отсутствие избыточных связей в системе в целом или в какой-либо ее части, отсутствие дефицита связей в системе в целом или в какой-либо ее части;

б) выделить главные (опертые на землю) и второстепенные балки (опертые на «нижележащие» и на землю);

в) проследить за последовательностью передачи нагрузки и очередностью расчета звеньев (она противоположна очередности сборки).

2. Расчет начинается с («верхней») второстепенной балки. Ее давление передается на главную или «нижележащую» второстепенную и учитывается в расчете этих балок.

В соответствии с III законом Ньютона давление на опору и реакция этой опоры равны по величине и обратны по направлению. Они приложены к разным звеньям системы – реакция – к «вышележащему» звену, давление – к «нижележащему» звену.

3. Если по заданию груз приложен в шарнире, его следует считать приложенным либо к «верхнему», либо к «нижнему» звену балки (по монтажной схеме); эпюры  $M$  и  $Q$  в обоих случаях будут одинаковы, но расчет будет во втором случае несколько проще.

4. При определении реакций опор (в том числе и реактивной пары в защемлении) для каждого звена составляют два уравнения равновесия ( $\sum M = 0$  или  $\sum Y = 0$ ) так, чтобы в каждое уравнение входила только одна неизвестная реакция. После решения уравнений для контроля составляется еще одно уравнение ( $\sum M = 0$  или  $\sum Y = 0$ ), в которое входят обе уже найденные реакции. В заключение проверяется равновесие балки в целом составлением уравнения  $\sum Y = 0$ .

5. При построении эпюр всюду будут вычисляться поперечные силы  $Q_y(x)$  и изгибающие моменты  $M_z(x)$ , где  $z$  – главная центральная ось поперечного сечения балки, перпендикулярная плоскости действия сил  $XOY$ ;  $x$  – ось балки.

Для упрощения записи в дальнейшем будем опускать индексы  $y$  и  $z$  и записывать в виде  $Q(x)$ ,  $M(x)$ .

Порядок вычисления и правило знаков для  $Q(x)$ ,  $M(x)$  здесь не поясняются, они известны студенту из курса сопротивления материалов.

6. Очень важно отчетливо представлять себе принципиальное отличие линий влияния какого-либо усилия (например, изгибающего момента) от эпюры такого же усилия:

- эпюра в графической форме дает информацию о значениях этого усилия во всех сечениях балки, но при какой-то определенной нагрузке на ней;
- линия влияния в графической форме дает информацию о значениях этого усилия в одном определенном сечении балки, но при различных положениях приложенного к ней вертикального единичного безразмерного груза.

7. Необходимо понимать, что при построении линий влияния кинематическим способом происходит замена реальной задачи статики (определение  $R$ ,  $Q$ ,  $M$  при различных положениях груза) вспомогательной задачей кинематики (определение формы отклонения воображаемого механизма); в теоретической части курса на основе принципа возможных перемещений доказано, что решения этих задач совпадают.

8. Обратите внимание, что размерность ординаты линии влияния не совпадает с размерностью усилия, определяемого по ней, поскольку ордината вычисляется при действии безразмерного груза, а усилия – от нагрузки, имеющей размерность.

### 5. ПРИМЕР РАСЧЕТА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ

Расчетная схема многопролетной шарнирной балки

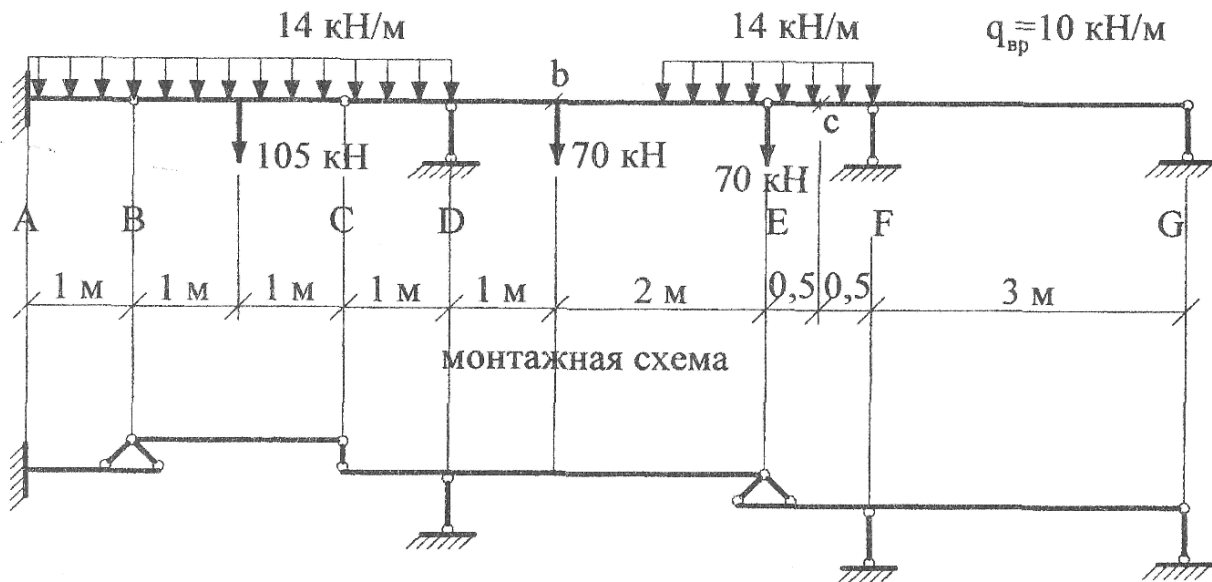


Рис.1

Здесь звено AB – главная балка (защемлена в A); звено EFG – главная балка (оперта в F и G). Звено CDE – второстепенная балка (оперта в D на землю и в E на другую балку); звено BC – второстепенная балка (оперта в B и C на другие балки).

При сборке на первом этапе монтируются главные балки AB и EFG, далее балка CDE и на последнем этапе монтируется балка BC.

Очередность расчета противоположна очередности сборки. Расчет начинаем с второстепенной балки BC. Ее давления передаются на главную балку AB и второстепенную CDE в точках B и C и учитываются в расчете этих балок.

Давление второстепенной балки CDE в точке E передается на главную балку EFG и учитывается при ее расчете. Давления в точках A, D, F, G через опорные связи передаются на землю. Каждое давление со стороны вышележащей балки определяется по уже найденным реакциям опор. Напомним, что они приложены к разным звеньям системы. Например, в шарнире B реакция опоры приложена к звену BC, а давление – к звену AB.



### Кинематический анализ

а) определение числа степеней свободы  $W$  по формуле

$$W = (3D + 2Y) - (2Ш + C + C_0),$$

где  $D$  – число дисков (не считая «земли»),  $Y$  – число узлов (материальных точек, не вошедших в состав дисков),  $Ш$  – число шарниров между дисками (с учетом кратности),  $C$  – число соединительных стержней,  $C_0$  – число опорных стержней.

В данном случае  $D=4$  (диски АВ, ВС, СDE, EFG),  $Y=0$ ;  $Ш=3$  (шарниры В, С, Е; все они простые),  $C=0$ ,  $C_0=3+1+1+1=6$  (три связи – защемление конца А). Получаем

$$W = 3 \cdot 4 - (2 \cdot 3 + 6) = 0.$$

Избыточных связей нет, система обладает достаточным числом связей, чтобы при правильной структуре быть геометрически неизменяемой;

б) анализ структуры

Диск АВ защемлен на конце А и потому неподвижен, может рассматриваться как «земля».

Диск EFG прикреплен к земле двумя параллельными опорными стержнями F, G; эти стержни не препятствуют его поступательному движению по горизонтали, но такому движению препятствуют диски ВС и СDE, связанные с неподвижной точкой В. Следовательно, диск неподвижен.

Диск СDE связан с землей:

- 1) через диск EFG, подвижный по горизонтали (это равносильно прикреплению одним вертикальным стержнем);
- 2) вертикальным опорным стержнем F;
- 3) через диск ВС (это равносильно прикреплению горизонтальным стержнем).

Но прикрепление тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке стержнями обеспечивает неподвижность диска.

Диск ВС связан с землей:

- 1) неподвижным шарниром в точке В;
- 2) через диски СDE и EFG подвижные по горизонтали (это равносильно прикреплению точки с одним вертикальным стержнем).

Прикрепление шарниром и стержнем, не лежащими на одной прямой, обеспечивает неподвижность диска;

в) вывод: структура системы правильная (нет признаков мгновенной изменяемости, нет дефицита связей в одной части системы при избытке их в другой). Система геометрически неизменяема, и, так как в ней нет избыточных связей, она статически определена.

### Вычисление реакций опор от постоянной нагрузки

Звено BC (рис.2а)

$$\sum X = 0: H_b = 0$$

Из условия симметрии нагрузки  $R_b = R_c$ :

$$\sum Y = 0: R_b + R_c - 105 - 14 \cdot 2 = 0$$

или

$$2R_b = 133 \text{ кН}; R_b = R_c = 66,5 \text{ кН}.$$

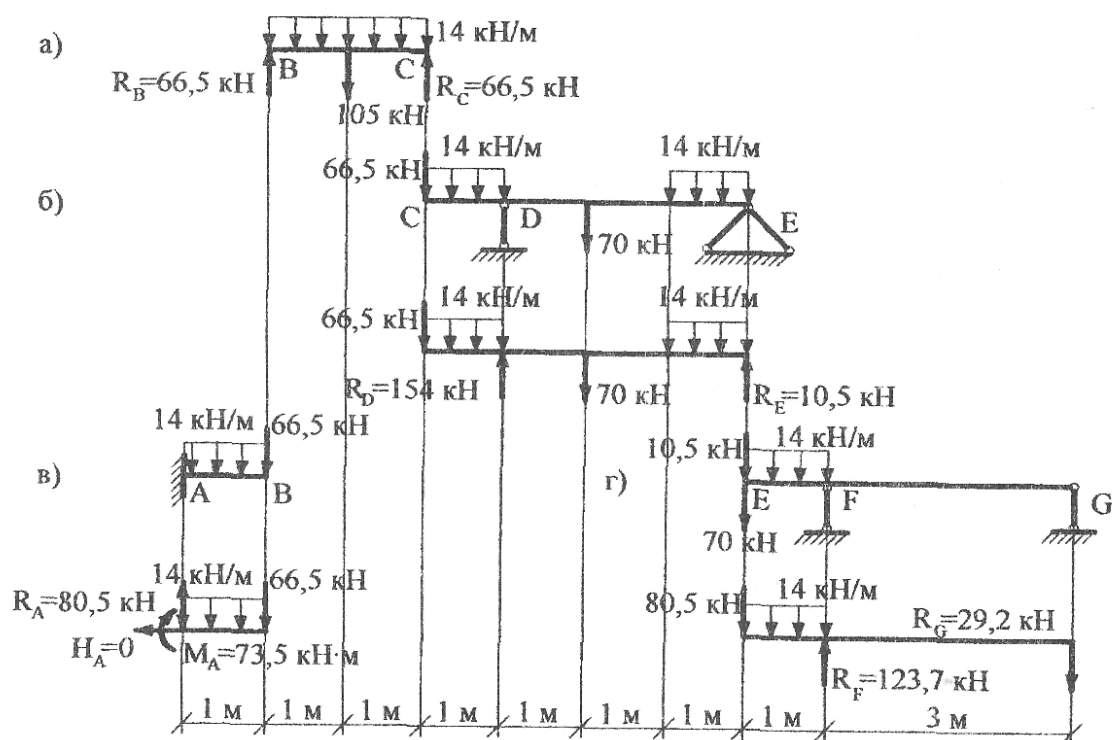


Рис.2

Звено CDE (рис.2б). Здесь к нагрузке присоединено давление в точке С (66,5 кН – см. расчет звена BC). Нагрузка на шарнир E будет учтена в расчете соседнего (нижележащего звена).

$$\sum X = 0: H_c = 0.$$

$$\sum M_E = 0: -66,5 \cdot 4 - 14 \cdot 1 \cdot 3,5 + R_D \cdot 3 - 14 \cdot 1 \cdot 0,5 - 70 \cdot 2 = 0.$$

$$\sum M_D = 0: -66,5 \cdot 1 - 14 \cdot 1 \cdot 0,5 + 14 \cdot 1 \cdot 2,5 + 70 \cdot 1 - R_E \cdot 3 = 0.$$

отсюда:

$$R_D = 154,0 \text{ кН}, \quad R_E = 10,5 \text{ кН}$$

(процесс решения здесь опущен).

$$\sum Y = 0 \text{ (контроль)}: 154,0 + 10,5 - 66,5 - 70 - 14 \cdot 1 - 14 \cdot 1 = 0.$$

$$164,5 - 164,5 = 0.$$

(удовлетворяется тождественно).

Звено АВ (рис.2в). Здесь к нагрузке присоединено давление в точке В (66,5 кН) – см. расчет звена ВС.

$$\sum X = 0: H_A = 0.$$

$$\sum Y = 0: R_A - 14 \cdot 1 - 66,5 = 0, \quad R_A = 14 + 66,5 = 80,5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0: M_A + 14 \cdot 1 \cdot 0,5 + 66,5 \cdot 1 = 0, \quad M_A = 73,5 \text{ кНм}.$$

$$\sum M_B = 0 \text{ (контроль)}: -73,5 + 80,5 \cdot 1 - 14 \cdot 0,5 = 0.$$

$$-80,5 + 80,5 = 0$$

(удовлетворяется тождественно).

Звено EFG (рис.2г). Здесь к нагрузке присоединено давление 10,5 кН в точке Е (см. расчет звена CDE). К той же точке приложен груз 70 кН.

Уравнения составляются аналогично (здесь не приводятся). Получаем  $R_F = 123,7 \text{ кН}$ ,  $R_G = 29,2 \text{ кН}$ .

Общий контроль для всей балки

$$\sum Y = 0: 80,5 + 154,0 + 123,7 - 29,2 - 105 - 70 - 70 - 14 \cdot 4 - 14 \cdot 2 = 0.$$

$$358,2 - 358,2 = 0.$$

(удовлетворяется тождественно).

### Построение эпюр Q и M от постоянной нагрузки

Звено ВС (рис.3)

Участок I (отсчет x от В вправо)

$$0 \leq x \leq 1 \text{ м}$$

$$Q(x) = 66,5 - 14 \cdot x \quad (\text{кН}),$$

$$M(x) = 66,5 \cdot x - 14 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \quad (\text{кНм}).$$

Функция Q(x) оказалась линейной, M(x) – квадратичной. Поэтому для построения эпюры Q(x) вычисляем две ординаты, для M(x) необходимо не менее трех. Имеем

$$Q(0) = 66,5 \text{ кН}, \quad Q(1) = 52,5 \text{ кН};$$

$$M(0) = 0, M(0,5) = 66,5 \cdot 0,5 - 14 \cdot \frac{0,5^2}{2} = 33,25 - 1,75 = 31,5 \text{ кНм};$$

$$M(1) = 66,5 \cdot 1 - 14 \cdot \frac{1^2}{2} = 66,5 - 7,0 = 59,5 \text{ кНм}.$$

Участок II. (отсчет от С влево).

$$0 \leq x \leq 1 \text{ м}$$

В соответствии с правилом знаков для Q и M

$$Q(x) = -66,5 + 14 \cdot x \text{ кН},$$

$$M(x) = 66,5 \cdot x - 14 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \text{ кНм}.$$

Аналогично участку I:

$$Q(0) = -66,5 \text{ кН}, Q(1) = -52,5 \text{ кН};$$

$$M(0) = 0, M(0,5) = 31,5 \text{ кНм}, M(1) = 59,5 \text{ кНм}.$$

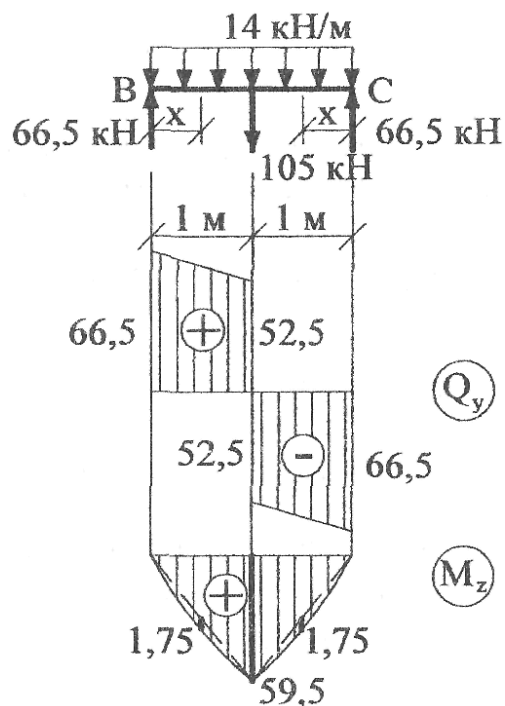


Рис.3

Замечаем:

- в связи с симметрией нагрузки эпюра Q оказалась антисимметричной, эпюра M - симметричной.
- эпюра M на участках I и II представлена двумя разными парабололами. Слева и справа от груза Q имеет разные знаки (+52,5 и -52,5 кН), поэтому  $dM/dx=Q$  также имеет разные значения и касательная к эпюре M здесь имеет разный наклон к горизонтали, т.е. в эпюре M под грузом должен быть излом.

Звено CDE (рис.4)

Участок I (отсчет от С вправо)

$$0 \leq x \leq 1 \text{ м}$$

$$Q(x) = -66,5 - 14 \cdot x,$$

$$M(x) = -66,5 \cdot x - 14 \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

$$Q(0) = -66,5 \text{ кН}, Q(1) = -80,5 \text{ кН},$$

$$M(0) = 0, M(0,5) = 35,0 \text{ кНм}, M(1) = -73,5 \text{ кНм}.$$

Участок II (отсчет x такой же)

$$1 \text{ м} \leq x \leq 2 \text{ м}$$

$$Q(x) = -66,5 - 14 \cdot 1 + 154 = 73,5 \text{ кН}.$$

$$M(x) = -66,5 \cdot x - 14 \cdot 1 \cdot (x - 0,5) + 154,0 \cdot (x - 1)$$

Здесь  $Q = \text{const}$ ;  $M(x)$  – линейная функция, ее эпюра строится по двум ординатам:

$$M(1) = -73,5 \text{ кНм}, \quad M(2) = 0.$$

Участок III (отсчет  $x$  такой же)

$$2 \text{ м} \leq x \leq 3 \text{ м}$$

$$Q(x) = -66,5 - 14 \cdot 1 + 154,0 - 70 = 3,5 \text{ кН}.$$

$$M(x) = -66,5 \cdot x - 14 \cdot 1 \cdot (x - 0,5) + 154,0 \cdot (x - 1) - 70 \cdot (x - 2)$$

$$M(2) = 0, \quad M(3) = 3,5 \text{ кНм}.$$

Участок IV (отсчет  $x$  от E влево)

$$0 \leq x \leq 1 \text{ м}$$

$$Q(x) = -10,5 + 14 \cdot x; \quad M(x) = 10,5 \cdot x - 14 \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

$$Q(0) = -10,5 \text{ кН}; \quad Q(1) = 3,5 \text{ кН};$$

$$M(0) = 0, \quad M(0,5) = 3,5 \text{ кНм}, \quad M(1) = 3,5 \text{ кНм}.$$

На границе участков III и IV значения  $Q$  одинаковы (3,5 кН), следовательно, одинаковы и углы наклона касательной к эпюре  $M(x)$ , поэтому сопряжение линейной эпюры  $M(x)$  на участке IV происходит плавно (без излома).

Значения  $Q$  на участке IV изменяют знак. Определим абсциссу  $x$ , сечения, где  $Q=0$ , из уравнения:

$$-10,5 + 14 \cdot x_0 = 0; \quad \text{получим} \quad x_0 = \frac{10,5}{14} = 0,75 \text{ м}$$

В этом сечении  $M = M_{\text{max}}$ , причем

$$M_{\text{max}} = M(0,75) = 10,5 \cdot 0,75 - 14 \cdot 0,75 \cdot 0,375 = 3,94 \text{ кНм}.$$

Для звеньев АВ и EFG (рис.5) вычисления аналогичны и здесь не приводятся. Отсчет  $x$  рекомендуем вести на участке EF от E вправо, на участке FG – от G влево; на участке АВ – от В влево. Эпюры  $Q$  и  $M$  для этих участков даны на рис.5, сводные эпюры – на рис.6.

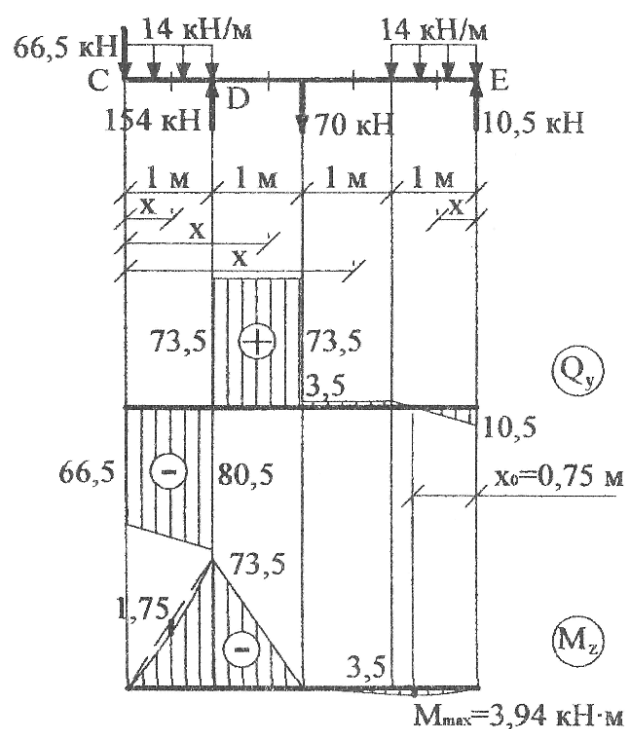


Рис.4

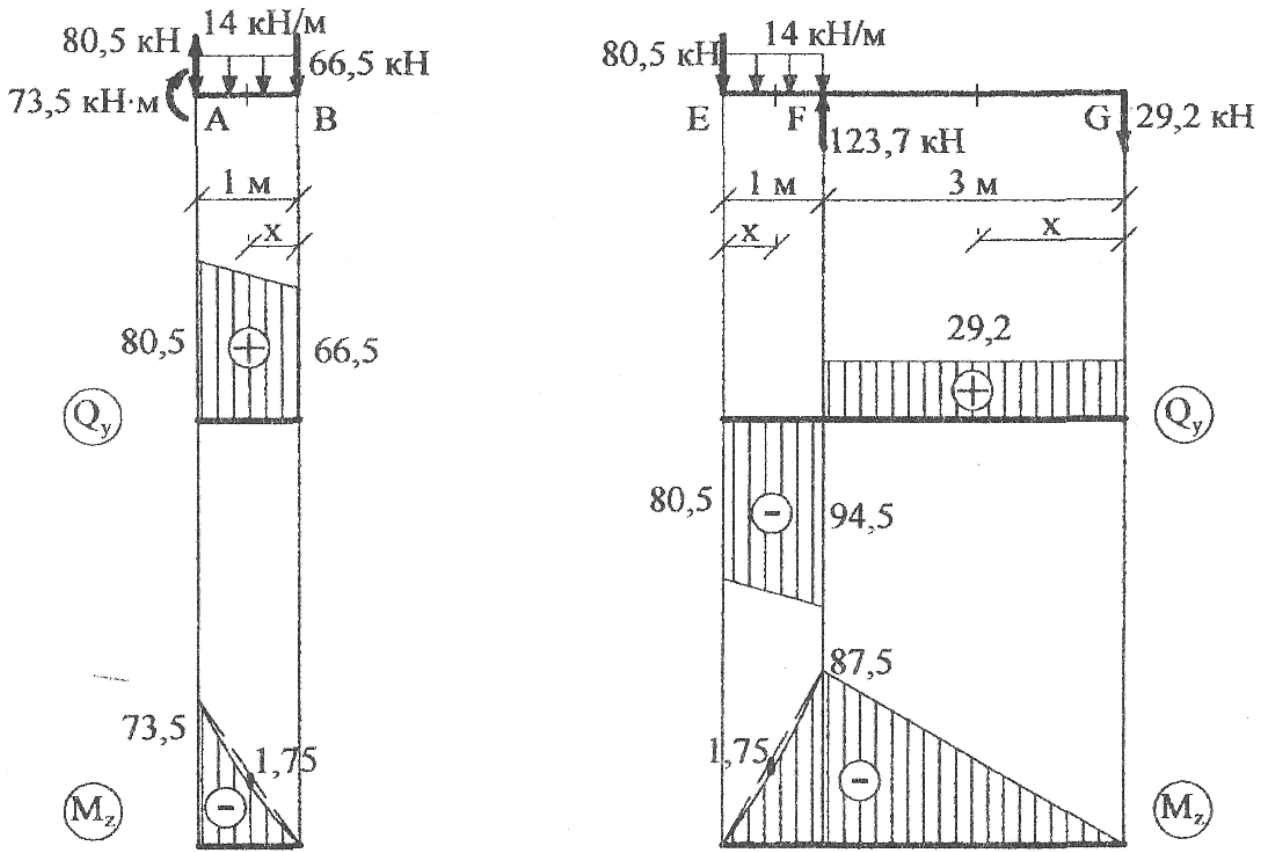


Рис.5

Сводные эпюры  $Q_y$  и  $M_z$

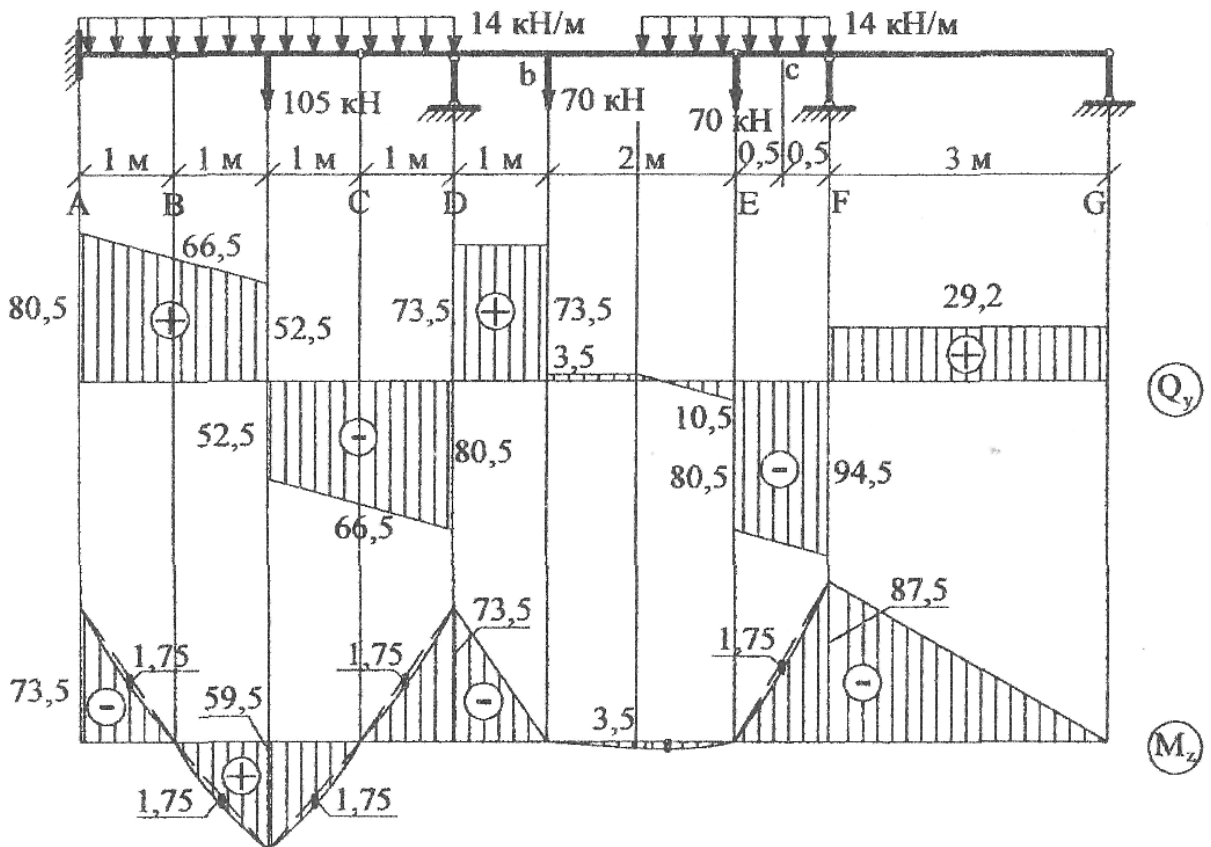


Рис.6

Обратите внимание на следующие особенности очертания эпюр:

- плавное сопряжение соседних параболических участков эпюры  $M$  в точках  $B$  и  $C$  (здесь нет скачка в эпюре  $Q$ );
- излом при сопряжении соседних параболических участков в точке  $E$  (здесь на эпюре  $Q$  есть скачок от ординаты  $-10,5$  к ординате  $-80,5$  кН, обусловленный приложением груза  $70,0$  кН);
- одинаковый наклон всех участков эпюры  $Q$ , над которыми задана сплошная нагрузка с одной и той же интенсивностью  $14$  кН/м.

### Поверочный расчет на ПЭВМ

Сотрудниками кафедры строительной механики разработана программа «БАЛКА», которая предназначена для расчета статически определенной балки постоянной жесткости на действие сосредоточенных и линейно распределенных нагрузок. В вычислительном центре ВГАСУ на ПЭВМ можно произвести поверочный расчет поперечных сил  $Q(x)$  и изгибающих моментов  $M(x)$  по программе «БАЛКА», описание которой изложено в /4/.

Ниже приведен листинг с результатами расчетов для звена CDE по программе «БАЛКА». Напоминаем, что начало отсчета выбрано на левом конце балки, ось  $x$  направлена вправо. Сосредоточенные силы и распределённые нагрузки считаются положительными, если направлены вверх. Момент пары сил считается положительным, если направлен по часовой стрелке.

#### Листинг с результатами расчетов по программе «БАЛКА»

Расчет выполнил: Иванов И.И., АД.

Исходные данные.

Тип балки – шарнирно опёртая.

Длина балки – 6.00 м.

Координата левой опоры – 0.00 м.

Координата правой опоры – 3.00 м.

Жесткость балки  $EJ_z$  - 1000.000 кН·м<sup>2</sup>.

На балку действуют 2 сосредоточенные силы.

Величина 1-ой силы - -66.500 кН, её координата - -1.0 м.

Величина 2-ой силы - -70.000 кН, её координата - 1.0 м.

На балку действуют 0 пара сил.

На балку действуют 2 распределённых нагрузки.

Величина первой нагрузки:

$q_1 = -14$  кН/м,  $q_2 = -14$  кН/м,

её координаты  $x_1 = -1.000$  м,  $x_2 = 0.000$  м.

Величина второй нагрузки:

$$q_1 = -14 \text{ кН/м}, q_2 = -14 \text{ кН/м},$$

её координаты  $x_1 = 2.000 \text{ м}$ ,  $x_2 = 3.000 \text{ м}$ .

Результаты расчетов.

Значения опорных реакций:  $R_a = 154.000 \text{ кН}$ ,  $R_b = 10.500 \text{ кН}$ .

Величина максимального изгибающего момента:

$$M_{\max} = 3.940 \text{ кН} \cdot \text{м}, X_{\max} = 2.250 \text{ м}.$$

$$M_{\min} = -75.000 \text{ кН} \cdot \text{м}, X_{\min} = 0.000 \text{ м}.$$

x, м	M(x), кНм	Q(x), кН
-1.0	0.00	-66.50
-0.5	-35.00	-73.50
0.0	-73.50	-80.50
0.0	-73.50	73.50
0.5	-36.75	73.50
1.0	0.00	73.50
1.0	0.00	3.50
1.5	1.75	3.50
2.0	3.50	3.50
2.5	3.50	-3.50
3.0	0.00	-10.50

### Построение линий влияния (л.вл.)

На рис. 7 показан образец оформления л.вл. реакции опоры  $R_D$ , изгибающего момента  $M_b$  и поперечной силы  $Q_c$ .

В работу не требуется включать письменное обоснование очертания л.вл., но студент обязан его изложить устно при защите работы, применяя в ходе рассуждений как статический, так и кинематический способы. Примерный ход рассуждений для л.вл.  $M_b$  и  $Q_c$  приводится ниже.

**Статический способ.** Построение линия влияния  $R_D$ . Л.вл. опорной реакции  $R_D$  для звена CDE ( шарнирно-опертая балка с левым консольным свесом) является типовой. Напомним, что уравнения линий влияния можно получить с помощью составления уравнения равновесия балки, по которой движется единичный безразмерный груз  $\sum M_E = 0 \dots -R_D \cdot 3 + 1 \cdot x = 0$ . Решая это уравнение относительно  $R_D$ , находим  $R_D = \frac{x}{3}$ , т.е. закон изменения  $R_D$  линейный. Прямую можно построить по двум наиболее просто определяемым ординатам:  $R_D = 0$  при  $x = 0$  ( $P=1$  над опорой E),  $R_D = 1$  при  $x = 3$  ( $P=1$  над опорой D).



Полученная прямая является линией влияния  $R_D$ . Она ограничена крайними положениями подвижной единичной силы  $-1\text{ м} \leq x \leq 3\text{ м}$ .

Из монтажной схемы видно, что от груза, приложенного к звену EFG, давление на звено CDE не передается, и потому  $R_D = 0$  при любом положении груза на участках балки EFG. Аналогичные рассуждения можно сделать для звена AB. От груза, приложенного к звену BC, давление на звено CDE передается, при этом  $R_D \neq 0$ . Для двух положений груза (в точках B и C) значения  $R_D$  известны (уже известны ординаты л.вл. в этих точках). Поскольку  $R_D$  зависит от абсциссы груза линейно, соединяем эти ординаты прямой. Исходя из известной ординаты над опорой  $R_D = 1$ , остальные в дальнейшем определяем геометрическим путем.

Нетрудно заметить, что ординаты линий влияния опорных реакций безразмерны и зависят от отношения абсциссы точки приложения силы  $P=1$  к величине пролета.

Построение линия влияния  $M_b$ . Л.вл. изгибающего момента в сечении  $b$  звена CDE, расположенная между опорами, является типовой. Она состоит из двух наклонных прямых ветвей, пересекающихся под сечением  $b$  и проходящих через точки D и E. Правая ветвь заканчивается в E (здесь конец звена), левая ветвь распространяется на консоль. Для ординаты под сечением  $b$  известно значение  $\frac{1,0 \cdot 2,0}{3,0} \approx 0,667\text{ м}$ .

Из монтажной схемы видно, что от груза, приложенного к звену AB или к звену EFG, давление на звено CDE не передается и потому  $M_b = 0$  при любом положении груза на участках балки AB и EFG. Следовательно, л.вл.  $M_b$  имеет на этих участках нулевые ординаты.

Из монтажной схемы также видно, что от груза, приложенного к звену BC, давление на звено CDE передается; при этом  $M_b \neq 0$ . Для двух положений груза (в точках B и C) значения  $M_b$  известны (уже известны ординаты л.вл. в этих точках). Поскольку  $M_b$  зависит от абсциссы груза линейно, соединяем эти ординаты прямой. Исходя из известной ординаты  $0,667\text{ м}$ , остальные определяем геометрическим путём.

Построение линия влияния  $Q_c$ . Сечение  $c$  расположено на консоли. Для этого случая используем типовое очертание л.вл., состоящее из двух горизонтальных прямых, со «ступенькой» между ними под сечением. При грузе справа от сечения «с» имеем  $Q_c = 0$  (часть консоли слева от сечения не нагружена); при грузе слева от сечения  $Q_c = -1$ . Распространяем л.вл. влево от звена EFG.

Из монтажной схемы видно, что от груза, приложенного к звену BC и к звену CDE, давление на звено EFG передается и потому  $Q_c \neq 0$ , причем от абсциссы груза  $Q_c$  зависит (в пределах каждого звена) линейно.

Значения  $Q_c$  известны для двух положений груза на звене CDE – при грузе, приложенном в точке E, имеем  $Q_c = -1$  (см. уже построенный участок л.вл. EC), а

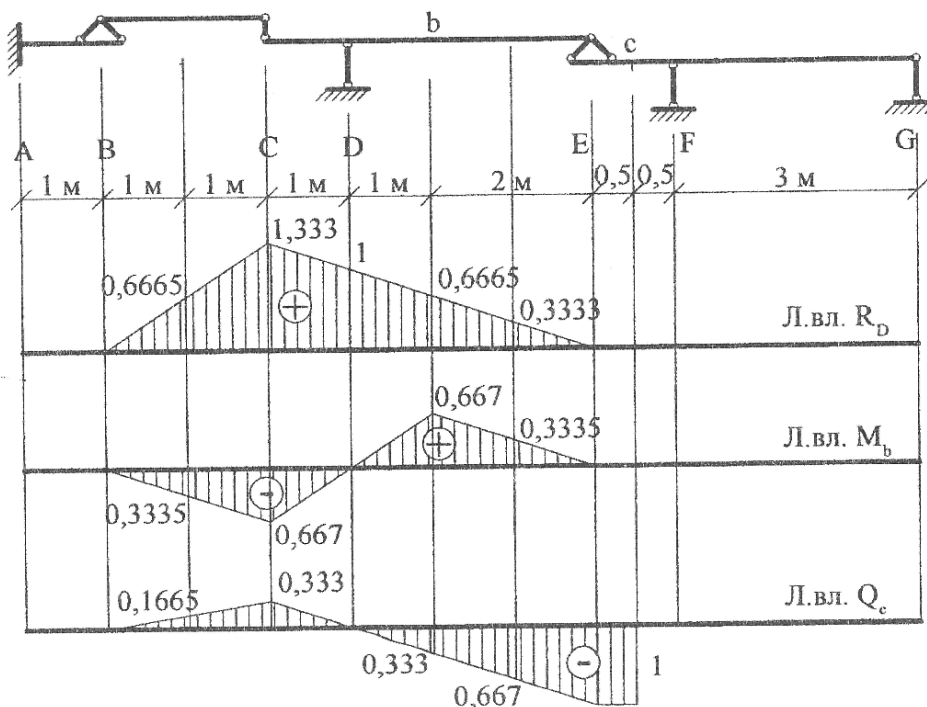


Рис.7

при грузе, приложенном над опорой D, имеем  $Q_c = 0$  (груз уравновешен реакцией  $R_D$ ). По этим двум ординатам строим прямолинейный участок л.вл. на всем звене CDE, включая консоль.

Теперь значения  $Q_c$  известны уже для двух положений груза на звене BC – при грузе в точке C (см. уже построенный участок л.вл. CDE) и при грузе в точке B (груз целиком передается на консоль AB, следовательно  $Q_c = 0$ ). По этим двум ординатам строим еще один прямолинейный участок л.вл. на звене BC.

Из монтажной схемы видно также, что давление от груза, приложенного к звену AB, не передается на звено EFG и потому  $Q_c = 0$  при любом положении груза на участке балки AB; л.вл.  $Q_c$  имеет здесь нулевые ординаты.

Исходя из известной ординаты – 1.0 ед., остальные определяем геометрическим путем.

При построении статическим способом л.вл. реакций опор, а также л.вл. M и Q для сечений на других участках отличаются от предыдущих.

**Кинематический способ.** Для построения линий влияния опорной реакции  $R_D$  вместо отброшенной опорной связи в точке D, не нарушая условий равновесия, приложим реактивную силу  $R_D$  (рис.8). Условие равновесия полученной системы запишем в виде равенство нулю работ всех приложенных сил на малых возможных перемещениях (последние выберем так, чтобы точка D переместилась по направлению  $R_D$ ):

$$R_D \cdot \delta_D - 1 \cdot \delta = 0, \text{ откуда } R_D = \frac{\delta}{\delta_D},$$

где  $\delta$  - перемещение произвольной точки системы. Откуда следует, что очертание линии влияния искомого усилия целиком совпадает с эпюрой перемещений полученного механизма с одной степенью свободы. Для вычисления ординаты линии влияния необходимо силу  $P=1$  поставить в определенную точку. Если  $P=1$ , например, в точке D, тогда  $\delta = \delta_D$  и  $R_D = 1$ . По-

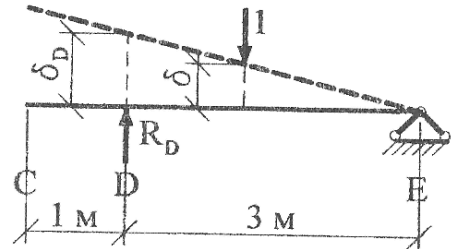


Рис. 8

лученная линия влияния  $R_D$  ничем не отличается от построенной статическим способом.

Обобщая результаты рассмотренного примера, можно отметить следующие характерные положения кинематического способа:

- отбрасывая связь, усилие в которой определяем, получаем механизм с одной степенью свободы;
- вместо отброшенной связи прикладываем искомое усилие (удобнее использовать положительное направление усилия);
- строим эпюру перемещений полученного механизма так, чтобы точка приложения искомого усилия переместилась по направлению усилия, и построенная эпюра даст очертание линии влияния;
- для получения ординаты линии влияния записываем уравнение работ при определенном положении силы  $P=1$ .

Для получения л.вл.  $M_b$  систему превращаем в механизм, вводя шарнир в сечении b. Механизму сообщаем возможное (не нарушающее связей) отклонение от исходного положения. Очертание механизма после отклонения должно совпадать с очертанием л.вл.  $M_b$ .

В данном случае двум торцам у введенного шарнира сообщаем взаимный угол поворота; направление его согласуем с положительным направлением  $M_b$ , притом звено механизма справа от b поворачивается по ходу часовой стрелки (центр вращения – шарнир E), звено слева от b – против хода часовой стрелки (центр вращения опора D). Неразрывность связей требует, чтобы звено BC также повернулось (центр вращения – шарнир B) и чтобы оставались неподвижными звено AB (оно защемлено на конце A) и звено EFG (оно закреплено в двух точках, на опорах F и G).

Масштаб ординат выбираем так, чтобы взаимный угол поворота торцов у введенного шарнира  $b$  был единичным. Для этого шарнир должен подняться на  $\frac{1,0 \cdot 2,0}{3,0} = 0,667 \text{ м}$ , которая и определяет одну из ординат л.вл., а остальные - геометрическим путем.

Для получения л.вл.  $Q_c$  систему превращаем в механизм, вводя «качели» в сечение  $c$ . Механизму сообщаем возможное отклонение от исходного положения. Очертание механизма после отклонения должно совпадать с очертанием л.вл.  $Q_c$ . В данном случае двум торцам у введенных «качелей» сообщаем взаимное поперечное смещение; направление его должно совпадать с положительным направлением  $Q_c$ . При этом звено механизма справа от  $c$  смещения вверх получить не может (оно закреплено в двух точках, на опорах  $F, G$ ) и только звено слева от  $c$  смещается поступательно вниз, оставаясь параллельным правому звену. Неразрывность связей требует, чтобы повернулись звено  $CDE$  (центр вращения опора  $D$ ) и звено  $BC$  (центр вращения – шарнир  $B$ ), и чтобы оставалось неподвижным звено  $AB$  (оно защемлено на конце  $A$ ).

Масштаб ординат выбираем так, чтобы взаимное поперечное смещение торцов у введенных «качелей» было единичным; исходя из этого, ординаты л.вл. определяются геометрическим путем.

При построении кинематическим способом л.вл. реакций опор, а также  $M$  и  $Q$  для сечений на других участках, рассуждения соответственно видоизменяются.

Составляя схему возможного отклонения механизма, нельзя допускать отрыва звеньев механизма от опор, излома или смещения между частями одного и того же звена, а также нарушения параллельности соседних звеньев, связанных с качелями.

### Вычисление с помощью линий влияния усилий от постоянной нагрузки

Приводим пример (рис.9) вычисления для изгибающего момента в сечении  $b$ .

Каждый груз умножается на ординату л.вл. под этим грузом, а интенсивность сплошной распределенной нагрузки – на площадь загруженного участка л.вл. с учетом знаков ординат и площадей. Выражения для площадей заключены в скобки.

$$\begin{aligned} M_b &= -105 \cdot 0.333 + 70 \cdot 0.667 - 14 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0.667\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0.333\right) = \\ &= -34.96 + 46.69 - 14.01 - 2.33 = 0.03 \approx 0 \end{aligned}$$

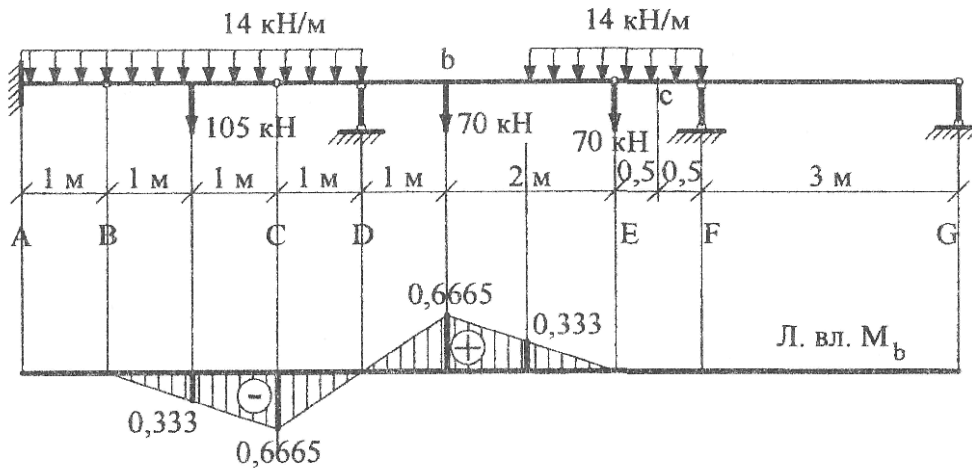


Рис.9

Ординаты линии влияния были округлены с сохранением 3-х верных значащих цифр, поэтому четвертая цифра в слагаемых – 34,96 и т.д. недостоверна, и результат должен быть округлен до 0,1 кНм, что и сделано.

### Вычисление с помощью линий влияния расчетных усилий от временной нагрузки

На рис.10 показаны два варианта расположения временной нагрузки интенсивностью  $q_{вр} = 10 \text{ кН/м}$  для получения расчетных значений  $M_b$ .

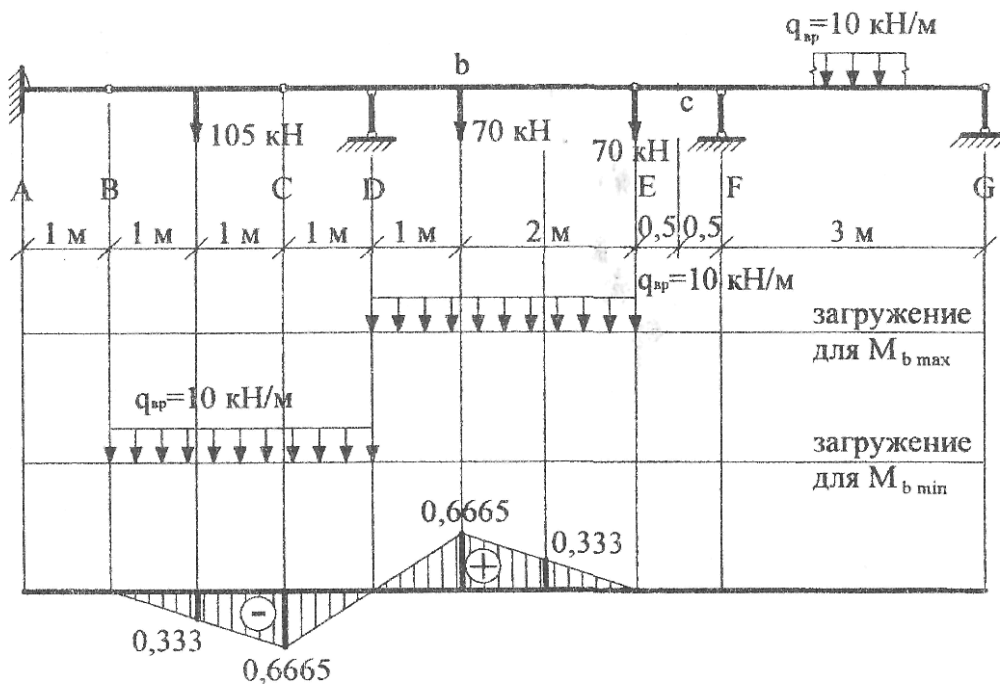


Рис.10

$$M_{b(сп)}^{max} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0.667\right) = 10 \text{ кНм}$$

$$M_{b(сп)}^{min} = -10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0.667\right) = -10 \text{ кНм}$$

Расчетные значения других усилий от временной нагрузки определяются аналогично.

### Таблица сравнения

Составляем таблицу сравнения усилий от действия постоянной нагрузки, найденных непосредственным расчетом и загрузением линий влияния. При выполнении расчетно-графической работы таблица заполняется для всех усилий определенных в заданных сечениях. Здесь в таблицу занесены значения усилий, которые определены в рассмотренном примере.

Способ определения	Название усилий			
	Q <sub>b</sub>	M <sub>b</sub>	Q <sub>c</sub>	M <sub>c</sub>
Анал. расчет	73,5	0,0	-87,5	-42
Расчет по л.вл.	73,4965	0,0	-87,5035	-42,0035

## Библиографический список

1. В.А. Киселев, Строительная механика. - М.: Стройиздат, 1986. 520 с.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1986. 606с.
3. Расчет многопролетной шарнирной балки: Методические указания по строительной механике / Воронеж, инж.-строит. инс-тут.; Сост.: Р. И. Мальцев. Воронеж. 1987. 19с.
4. Простые статически определимые балки. Часть 1. Расчет прочности: Методические указания по курсу «Сопротивление материалов»/ Воронеж., гос. арх.-строит. уни-т.; Сост.: А.Н. Синозерский и А.В.Резунов. Воронеж. 2003.16с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. Задание на выполнение расчетной работы.....	3
2. Задание.....	4
3. Требования к оформлению работы.....	4
4. Общие методические указания.....	5
5. Пример расчета с дополнительными методическими указаниями.....	7
Задание и монтажная схема.....	7
Кинематический анализ.....	8
Вычисление реакций опор от постоянной нагрузки.....	9
Построение эпюр Q и M от постоянной нагрузки.....	10
Поверочный расчет на ПЭВМ.....	14
Построение линий влияния.....	15
Вычисление с помощью линий влияния усилий от постоянной нагрузки ...	19
Вычисление с помощью линий влияния расчетных усилий от временной нагрузки.....	20
Таблица сравнения.....	21
Библиографический список.....	22

## **РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНОЙ БАЛКИ**

Методические указания  
к выполнению расчетной работы по курсу "Строительная механика"  
для студентов, обучающихся по специальностям  
270205 «Автомобильные дороги и аэродромы»,  
270102 «Промышленное и гражданское строительство»,  
270201 «Мосты и транспортные тоннели»

Составители: к. т. н. Сергей Юрьевич Гриднев

ст. преп. Ринат Абдуллаевич Мухтаров

Редактор Аграновская Н. Н.

Подп. в печать 06.03.2007. Формат 60x84 1/16. Уч.изд. 1,4.  
Усл. печ. 1.5 Бумага писчая. Тираж 300 экз. Заказ № 115.

---

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии  
Воронежского государственного архитектурно-строительного университета  
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84