

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра технологии машиностроения

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсового проекта
для студентов направления 15.03.05
«Конструкторско-технологическое
обеспечение машиностроительных производств»
(профили «Конструкторско-технологическое
обеспечение кузнечно-штамповочного производства»,
«Металлообрабатывающие станки и комплексы»,
«Технология машиностроения»)
всех форм обучения

Воронеж 2022

УДК 51:621(07)
ББК 22.1:34.я73

Составитель

канд. техн. наук А. В. Перова

Математическое моделирование в машиностроении: методические указания к выполнению курсового проекта для студентов направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» (профили «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Металлообрабатывающие станки и комплексы», «Технология машиностроения») всех форм обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А. В. Перова. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. 23 с.

Методические указания включают краткие теоретические сведения по математическому моделированию в машиностроении, методику и порядок выполнения курсового проекта, снабжены перечнем рекомендуемой литературы и конкретными примерами моделирования с использованием численных методов.

Предназначены для студентов направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» (профили «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Металлообрабатывающие станки и комплексы», «Технология машиностроения») всех форм обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_МММ.pdf.

Ил. 3. Табл. 9. Библиогр.: 8 назв.

УДК 51:621(07)
ББК 22.1:34.я73

Рецензент – Е. В. Смоленцев, д-р техн. наук, проф.
кафедры технологии машиностроения ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ВВЕДЕНИЕ

Цель изучения дисциплины «Математическое моделирование в машиностроении» - это освоение методов математического моделирования в машиностроении и формирование практических навыков выполнения расчетов и исследований.

Задачами освоения дисциплины «Математическое моделирование в машиностроении» являются:

- изучение методов математического моделирования, применяемых при проектировании, изготовлении и эксплуатации продукции машиностроительных производств, а также при исследованиях и испытаниях оборудования;
- освоение практических приемов использования методов математического моделирования;
- построение и исследование математических моделей с выполнением компьютерных расчетов и программирования в автоматизированных математических системах.

Дисциплина «Математическое моделирование в машиностроении» относится к дисциплинам обязательной части блока Б.1 учебного плана.

Процесс изучения дисциплины «Математическое моделирование в машиностроении» направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-6 - способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности;

ОПК-8 - способен участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами, выборе оптимальных вариантов прогнозируемых последствий решения на основе их анализа.

Примерная тематика курсового проекта: «Метод анализа иерархий. Планирование эксперимента».

1. Выбор материала для изготовления штуцера из 5 видов по 10 критериям методом анализа иерархий. Построение регрессионных моделей влияния технологических показателей на качество обработки детали.

2. Выбор материала для изготовления шестерни редуктора из 4 видов по 10 критериям методом анализа иерархий. Построение регрессионных моделей влияния технологических показателей на качество обработки детали.

3. Выбор материала для изготовления жиклера из 4 видов по 9 критериям методом анализа иерархий. Построение регрессионных моделей влияния технологических показателей на качество обработки детали.

4. Выбор материала для изготовления шпинделя из 5 видов по 10 критериям методом анализа иерархий. Построение регрессионных моделей влияния технологических показателей на качество обработки детали.

5. Выбор оборудования для изготовления вала из 4 видов по 10 критериям методом анализа иерархий. Построение регрессионных моделей влияния технологических показателей на качество обработки детали.

Необходимо построить линейную, неполную квадратичную, полную квадратичную математические модели в кодированных значениях технологической операции формирования некоторого размера детали.

Задачи, решаемые при выполнении курсового проекта:

- освоение практических приемов использования методов математического моделирования;
- построение и исследование математических моделей с выполнением компьютерных расчетов и программирования.

Курсовой проект включают в себя:

- титульный лист;
- лист задания;
- содержание;
- введение;
- теоретические сведения;
- анализ детали, оборудования;
- расчетная часть;
- построение регрессионных моделей;
- заключение;
- список литературы;
- приложения (графическая часть).

ЗАДАНИЕ 1. МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Во многих задачах управления сложными процессами и объектами нам приходится сталкиваться с проблемой принятия решений при выполнении операций в условиях неопределенности. Неопределенными могут быть как условия выполнения операции, так и сознательные действия конкурентов или других лиц, от которых зависит успех операции. Кроме того, неопределенность в той или иной степени может относиться также и к целям (задачам) операции, успех которой далеко не всегда может быть исчерпывающим образом охарактеризован одним единственным числом – интегральным показателем эффективности. В машиностроении подобные ситуации возникают при планировании развития производства, рассмотрении альтернативных вариантов выбора технологий, оборудования, материала, анализе эффективности работы.

В этом плане к числу наиболее эффективных методов принятия решений в сложных ситуациях относится метод анализа иерархий (МАИ), предложенный американским ученым Т. Саати. Данный метод опирается на декомпозицию сложной проблемы, на ее более простые составляющие части и дальнейшую математическую обработку (моделирование) последовательности суждений лиц, принимающих решения (ЛПР), которые формируются в виде совокупности парных сравнений.

В рамках МАИ на первом этапе решения проблемы образуется доминантная иерархия, формируемой начиная с вершины (цели – с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии или факторы, от которых зави-

сят последующие уровни) к самому нижнему уровню (который обычно определяет перечень альтернатив, подлежащих выбору). Иерархия считается полной, если каждый элемент заданного уровня функционирует как критерий для всех элементов нижестоящего уровня.

Рассмотрим простой пример, наглядно иллюстрирующий формирование иерархии при реализации МАИ.

Директору предприятия необходимо купить оборудование для своего предприятия (цель управления). В результате обсуждения удалось определить восемь критериев, уточняющих цель, которым, как им, кажется, должно удовлетворять оборудование. Задача заключается в выборе одного из трех станков (альтернативы). Соответствующая нисходящая иерархическая декомпозиция представлена на рис. 1.

После иерархического воспроизведения проблемы реализуется второй этап – установления приоритетов для критериев и оценка альтернатив в соответствии с принципом дискриминации и сравнительных суждений. Проводится опрос лиц принимающих решения (ЛПР) или экспертов. В МАИ элементы проблемы сравниваются попарно по отношению к их воздействию («весу», «интенсивности») на общую для них характеристику. Очевидно, что установление важности элементов при попарном сравнении есть отражение способности человека к высказыванию относительных (сравнительных) суждений притом, что он обычно затрудняется сразу оценить многоаспектную проблему в целом.

Другой пример выстраивания иерархии для решения сложной проблемы представлен на рис. 2.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – множество n элементов некоторого уровня иерархии и $\omega_1, \dots, \omega_n$ абсолютные веса или интенсивности этих элементов, которые нам неизвестны заранее. В рамках МАИ с участием ЛПР формируется матрица попарных сравнений элементов на основе субъективных суждений, численно оцениваемых по определенной шкале. На основе выраженных численно результатов попарных сравнений потом решается задача нахождения абсолютных весов. В идеале, при полной согласованности суждений матрица попарных сравнений имеет вид рис. 3.

Матрица $A = \|a_{ij}\|$ является квадратной и обладает свойством обратной симметричности:

$$a_{ij} = \omega_i / \omega_j = 1 / a_{ji}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

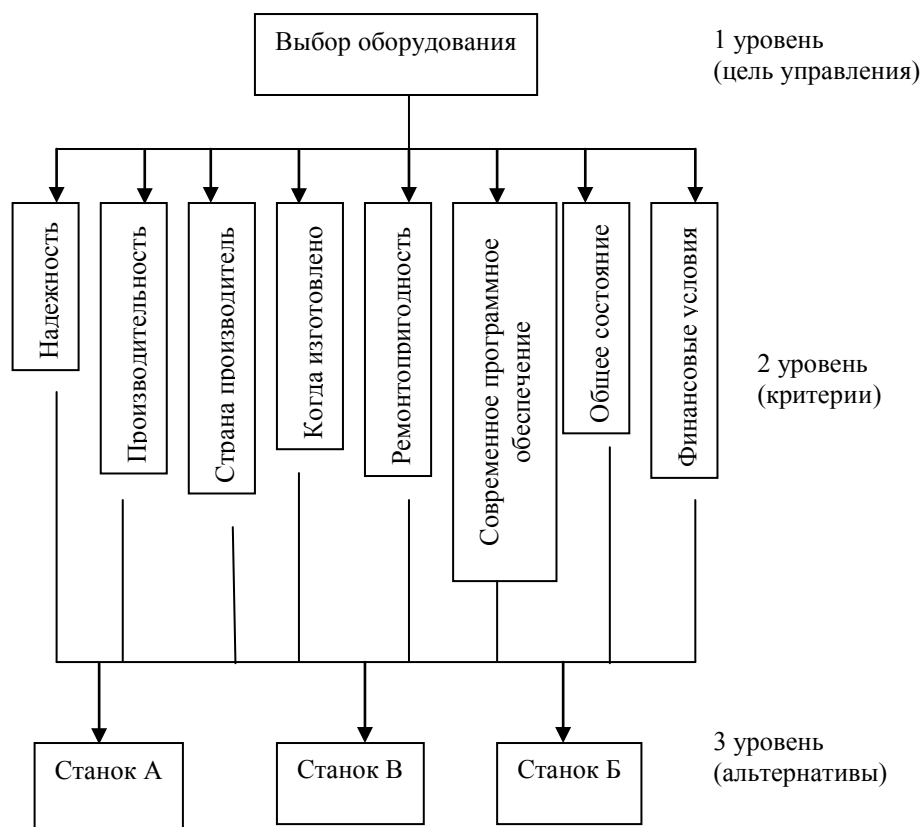


Рис. 1. Формирование иерархии при решении проблемы «выбор оборудования»

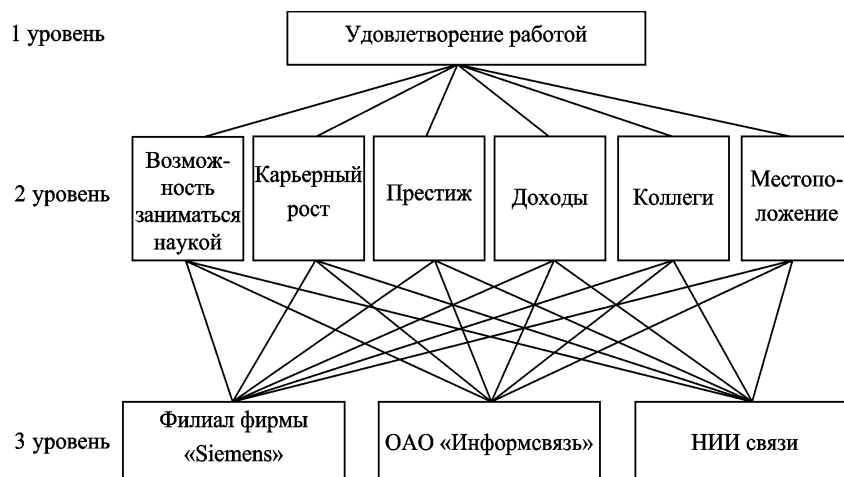


Рис. 2. Деконпозиция проблемы «выбор работы»

Реально получаемые матрицы сравнений при опросе людей не всегда являются полностью согласованными, то есть структура матрицы, представленная на рис. 3, нарушается.

Когда проблема представлена иерархически, матрица попарных сравнений составляется для сравнения относительной важности критериев на втором уровне по отношению к общей цели управления.

Затем подобные матрицы строятся для парных сравнений альтернатив по отношению к каждому из критериев второго уровня.

	A_1	A_2	...	A_n
A_1	$\frac{\omega_1}{\omega_1}$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	...	$\frac{\omega_1}{\omega_n}$
A_2	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{\omega_2}{\omega_2}$	...	$\frac{\omega_2}{\omega_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_n	$\frac{\omega_n}{\omega_1}$	$\frac{\omega_n}{\omega_2}$	...	$\frac{\omega_n}{\omega_n}$

Рис. 3. Матрица попарных сравнений при согласованности суждений

Матрица составляется, если записать сравниваемую цель (или критерий) вверху и перечислять сравниваемые элементы слева и сверху. В примере, связанном с выбором оборудования, требуется сформировать девять матриц: одну для второго уровня и восемь – для третьего уровня (по числу введенных критериев второго уровня). Для проведения субъективных парных сравнений разработана шкала относительной важности, представленная в табл. 1.

Таблица 1

Шкала относительной важности	
Значение относительной важности или приоритетности	Определение ситуации
1	Равная важность (равный вклад в общую цель, отсутствие преимущества)
3	Умеренное превосходство одного над другим
5	Существенное (сильное) превосходство
7	Весьма значительное превосходство
9	Подавляющее превосходство
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между двумя соседними суждениями (применяются в компромиссных ситуациях)

Таким образом, значение элемента a_{ij} матрицы A , равное 5, означает, что i -ый элемент (критерий, альтернатива) имеет существенное превосходство над j -ым элементом и, напротив, важность (приоритетность) j -го элемента по отношению к i -му составляет всего $a_{ji} = 1/5$.

В табл. 2 и 3 приведены примеры заполнения матриц попарных сравнений, формируемых при решении проблемы «выбор оборудования».

Для того, чтобы понять суждения участников дадим краткое описание станков.

Станок А. Это – самый надежный станок, страна производитель Россия, производительность высокая, год выпуска 2003. Ремонтпригодность выше, чем у станков Б и В. Тем не менее, общее состояние не очень хорошее, нужна основательная починка и проведение ремонтных работ. Из-за того, что кредит на покупку станка финансируется банком с высокой процентной ставкой, финансовые условия можно считать неудовлетворительными.

Станок Б. Этот станок менее надежный станка А, производительность ниже. Год выпуска 2007. Общее состояние очень хорошее. Финансовые условия вполне удовлетворительны.

Таблица 2

Выбор оборудования: матрица попарных сравнений
для уровня 2

Общее удовлетворение оборудованием	Надежность	Производительность	Страна производитель	Когда изготовлено	Ремонтпригодность	Современное программное обеспечение	Общее состояние	Финансовые условия	Вектор приоритетов
Надежность	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	0.175
Производительность	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0.063
Страна производитель	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5	0.149
Когда изготовлено	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0.019
Ремонтпригодность	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0.036
Современное программное обеспечение	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0.042
Общее состояние	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2	0.167
Финансовые условия	4	7	5	8	6	6	2	1	0.35
$\lambda_{\max} = 9,863$									
ИС = 0,266									
ОС = 0,189									

Станок В. Надежность ниже, чем у станков А, Б. Страна производитель Китай, год выпуска 2006. Ремонтпригодность выше, чем у станка Б, установлено современное программное обеспечение. Общее состояние станка – хорошее. Финансовые условия намного лучше, чем для станка А, но не так хороши, как для станка Б.

После формирования матриц попарных суждений наступает третий этап окончательного определения (синтеза) приоритетов, обеспечивающих получение

ние осмысленных решений в рамках проблемы многокритериального планирования.

Таблица 3

Выбор оборудования: матрицы попарных сравнений
для уровня 3, решения и согласованность

Надежность	A B	Вектор приоритетов	Ремонтопригодность	A B	Вектор приоритетов
A	1 6 8	0,754	A	1 5 4	0,674
B	1/6 1 4	0,181	B	1/5 1 1/3	0,101
B	1/8 1 1/4 1	0,065	B	1/4 3 1	0,226
		$\lambda_{\max} = 3,136$			$\lambda_{\max} = 3,086$
		ИС = 0,068			ИС = 0,043
		ОС = 0,117			ОС = 0,074
Производительность	A B	Вектор приоритетов	Современное программное обеспечение	A B	Вектор приоритетов
A	1 7 1/5	0,233	A	1 8 6	0,747
B	1/7 1 1/8	0,005	B	1/8 1 1/5	0,060
B	5 8 1	0,713	B	1/6 5 1	0,193
		$\lambda_{\max} = 3,247$			$\lambda_{\max} = 3,197$
		ИС = 0,124			ИС = 0,099
		ОС = 0,213			ОС = 0,170
Страна производитель	A B	Вектор приоритетов	Общее состояние	A B	Вектор приоритетов
A	1 8 6	0,745	A	1 1/2 1/2	0,200
B	1/8 1 1/4	0,065	B	2 1 1	0,400
B	1/6 4 1	0,181	B	2 1 1	0,400
		$\lambda_{\max} = 3,130$			$\lambda_{\max} = 3,000$
		ИС = 0,068			ИС = 0,000
		ОС = 0,117			ОС = 0,000
Когда изготовлено	A B	Вектор приоритетов	Финансовые условия	A B	Вектор приоритетов
A	1 1 1	0,333	A	1 1/7 1/5	0,072
B	1 1 1	0,333	B	7 1 3	0,650
B	1 1 1	0,333	B	5 1/3 1	0,278
		$\lambda_{\max} = 3,000$			$\lambda_{\max} = 3,065$
		ИС = 0,000			ИС = 0,032
		ОС = 0,000			ОС = 0,056

Определим геометрическое среднее элементов строк полностью согласованной матрицы попарных сравнений А, представленной на рис. 3.

$$x_i = \sqrt[n]{\frac{\omega_i}{\omega_1} \times \frac{\omega_i}{\omega_2} \times \dots \times \frac{\omega_i}{\omega_n}} = \frac{\omega_i}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \omega_k}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.1)$$

После нормализации вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ получаются компоненты вектора приоритетов

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} = \frac{\omega_i}{\sum_{k=1}^n \omega_k}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Если теперь умножить матрицу A на вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T$, то получим

$$y = A\tilde{x} = n\tilde{x}. \quad (1.3)$$

Приведенные соотношения (1.1), (1.3) означают, что в случае полной согласованности попарных суждений, что выполняются для матрицы, имеющей приведенный на рис. 3 вид, проводимые вычисления восстанавливают истинные веса элементов по результатам попарных сравнений. Это позволяет оценить степень их важности в целом. Полная согласованность попарных сравнений означает, что элементы матрицы A удовлетворяют уравнению $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$.

Как уже отмечалось, получаемые на практике матрицы попарных сравнений не являются согласованными. Поэтому требуется оценить степень согласованности высказанных суждений. Полученные соотношения (1.1) – (1.3) определяют возможность подобной оценки степени согласованности суждений для любой обратносимметричной матрицы. Действительно, как следует из соотношения (1.3) для полностью согласованной матрицы A , величина n играет роль собственного числа, соответствующего собственному вектору $\tilde{x}$. В общем же случае для любой обратносимметричной матрицы A' величина наибольшего собственного числа $\lambda_{\max}$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\max} \geq n, \quad A'\tilde{x} = \lambda_{\max}\tilde{x}.$$

Поэтому величина

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

в МАИ используется в качестве индекса согласованности. Кроме того, вводится отношение согласованности

$$ОС = \frac{ИС}{ИС_r} \cdot 100\%,$$

где $ИС_r$ – индекс согласованности, получаемый при усреднении множества данных для матриц попарных сравнений при случайном равновероятном (то есть полностью неосмысленном) выборе количественных значений суждений из шкалы $1/10, 1/9, \dots, 9, 10$, но с сохранением свойства обратной симметрии.

Значения $ИС_r$ приведены в табл. 4. Величина $ОС$ считается приемлемой, если она имеет значения порядка 20% и менее. Если $ОС$ выходит из этих пределов, то можно рекомендовать лицам, формулирующим суждения, пересмотреть их с использованием дополнительной информации. В табл. 2, 3 приведены значения $\lambda_{\max}$, $ИС$, $ОС$, соответствующие попарным оценкам, также приведенным в этих таблицах для данной конкретной задачи.

Таблица 4

Индекс согласованности при случайной
оценке сравнений

n	1	2	3	4	5	7	8	9	10
$ИС_r$	0	0	0,58	0,90	1,12	1,32	1,41	1,45	1,49

Таким образом, чтобы оценить степень согласованности реально получаемых в ходе опроса матриц попарных сравнений требуется рассчитать $ИС$, $ОС$ на основе определения величины $\lambda_{\max}$ по следующим формулам:

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n y_i, \quad y = (y_1, \dots, y_n)^T = A' \tilde{x}', \quad (1.4)$$

$$\tilde{x}' = (\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_n), \quad \tilde{x}'_i = \frac{x'_i}{\sum_{k=1}^n x'_k}, \quad x'_i = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a'_{ik}},$$

где $A' = \|a'_{ij}\|$ – исследуемая матрица. Выражения (1.4) по сути повторяют цепочку выражений (1.1) – (1.3), проводимых для согласованной матрицы A .

После того как, возможно и не с первого раза, получены достаточно согласованные оценки на различных уровнях и их локальные приоритеты, в МАИ осуществляется синтез глобальных приоритетов. Для этого по каждой i -ой альтернативе вычисляется величина

$$\Gamma_i = \sum_{k=1}^{n_2} \tilde{x}_k^{(2)} \tilde{x}_i^{(3),k}, \quad (1.5)$$

где $\tilde{x}_i^{(3),k}$ – компонент вектора локальных приоритетов $\tilde{x}^{(3),k} = (\tilde{x}_1^{(3),k}, \dots, \tilde{x}_{n_3}^{(3),k})^T$ для i -ой альтернативы третьего (нижнего) уровня относительно k -го критерия верхнего (второго на рис. 1) уровня; $\tilde{x}_k^{(2)}$ – компонент вектора приоритетов $\tilde{x}^{(2)} = (\tilde{x}_1^{(2)}, \dots, \tilde{x}_{n_2}^{(2)})^T$ критериев второго уровня; n_2, n_3 – количество элементов, выделенных в иерархии на втором и третьем уровнях.

В табл. 5 приведены итоговые результаты определения приоритетов выбора для различных уровней и полученные глобальные приоритеты, поясняющие смысл формул (1.4), (1.5).

Таблица 5

Выбор оборудования: глобальные приоритеты выбора

$\tilde{x}^{(2)}$ $\tilde{x}^{(3)}$	1 (0,175)	2 (0,063)	3 (0,149)	4 (0,019)	5 (0,036)	6 (0,042)	7 (0,167)	8 (0,35)	Обобщенные или глобальные при- оритеты Γ_i
	0,754	0,233	0,745	0,333	0,674	0,747	0,200	0,072	0,378
Б	0,181	0,055	0,065	0,333	0,101	0,060	0,400	0,650	0,351
В	0,065	0,713	0,181	0,333	0,226	0,193	0,400	0,278	0,269

Например, для числовых значений, приведенных в табл. 5, глобальный приоритет станка А вычисляется как

$$\Gamma_1 = (0,754 \times 0,175) + (0,233 \times 0,063) + \dots + (0,072 \times 0,35) = 0,378.$$

Этот станок и был куплен, так как он имеет наивысший приоритет $\Gamma_1 = 0,378$, тогда как варианты Б и В имеют приоритеты $\Gamma_2 = 0,351$ и $\Gamma_3 = 0,269$.

При проведении оценок следует иметь в виду все сравниваемые элементы, чтобы сравнения были релевантными. Нетрудно убедиться в том, что для проведения обоснованных сравнений не следует рассматривать более, чем 7...9 элементов. В таком случае маленькая погрешность в каждой относительной величине меняет ее не очень значительно.

В некоторых задачах при формировании оценок попарных суждений следует учитывать совокупное мнение группы независимых участников опроса. В этом случае каждая оценка a_{ij} формируется как геометрическое среднее мнений участников:

$$a_{ij} = \sqrt[k]{\prod_{r=1}^k a_{ij}^{(r)}},$$

где $a_{ij}^{(r)}$ – $r = \overline{1, k}$ – мнения k участников опроса.

Для курсового проекта предлагается задача оценки эффективности деятельности машиностроительных предприятий или производства изделий, оценки адекватности технологических процессов, выбора оборудования с целью аренды или покупки в интересах предприятия и т.д. Темы задания выбираются студентом самостоятельно или выдаются преподавателем. В приложении пояснительной записки необходимо представить графическую часть (чертёж детали, приспособления, заготовки).

ЗАДАНИЕ 2. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

1. Для построения математических моделей «Операций» применяют полный факторный эксперимент (ПФЭ). Ортогональность матрицы планирования ПФЭ позволяет получить отдельные оценки для коэффициентов в уравнении регрессии.

2. ПФЭ называется эксперимент, реализующий все возможные неповторяющиеся комбинации уровней независимых переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$, каждая из которых принудительно варьируется на двух уровнях.

3. Математическая модель ищется в виде неполного квадратичного уравнения регрессии взаимосвязи показателя качества «Операции» y от управляемых параметров. Например, для трех факторов это уравнение вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i < j}^3 b_{ij} x_i x_j + b_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (2.1)$$

или с учетом линеаризации путем замены переменных это

$$y = \sum_{i=1}^7 b_i x_i, \quad (2.2)$$

$$x_i = \frac{x_i - x_{i_0}}{\Delta_i}, \quad (1 \leq i \leq n), \quad (2.3)$$

где x_{i_0} - нулевой уровень варьирования i -ой переменной;

Δ_i - интервал варьирования i -ой переменной.

4. Матрицу планирования ПФЭ и результаты опытов представляют в виде табл. 6. Например для ПФЭ типа 2^3 ,

Таблица 6

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	$\bar{y}$		
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y_1		y_m
									y_1		y_m
1	+	-	-	-	+	+	+	-	y_{11}		y_{1m}
2	+	+	-	-	-	-	+	+	y_{21}		y_{2m}
3	+	+	-	-	+	-	+	-	-		-
4	+	+	+	-	+	-	-	-	-		-
5	+	+	+	+	-	-	+	-	-		-
6	+	+	-	+	-	+	-	-	-		-
7	+	-	+	+	-	+	-	-	-		-
8	+	+	+	+	+	+	+	+	y_{81}		y_{8m}

где x_0 – “фиктивная” переменная;

x_i – кодированные по формуле (2.3) значения переменных;

z_0 – новые переменные (после линеаризации);

$y_1, y_2, \dots, y_m$ - m параллельных наблюдений показателя качества y для каждого опыта;

“+”; “-” – кодированная запись +1 и -1 соответственно.

5. Так как изменение показателя качества у носит случайный характер, то в каждой точке $\bar{z}_i$ ($1 \leq i \leq N = 2^n$) надо проводить m параллельных опытов и результаты наблюдений $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}$ (табл. 6) усреднить

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.4)$$

6. Перед реализацией плана на объекте необходимо рандомизировать варианты проведения эксперимента, т.е. последовательность реализации опытов матрицы проводить случайно.

7. Проверка воспроизводимости заключается в проверке однородности выборочных дисперсий, т.е. в проверке гипотезы $H_0: \sigma^2\{y_1\} = \sigma^2\{y_2\} = \dots = \sigma^2\{y_N\}$; при экспериментах соответственно в точках $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_N$.

Для этих целей используется критерий Кохрена

$$G_p = \frac{\max_i \{\tilde{\sigma}^2(y_i)\}}{\sum_{i=1}^N \sigma^2\{y_i\}} \quad (2.5)$$

с числами степеней свободы для числителя $\nu_1 = m - 1$ и знаменателя $\nu_2 = N$. Если вычисленное значение критерия G_p окажется меньше значения $G_{кр}$, найденного по статистической таблице для выбранного уровня значимости q , то H_0 принимается.

Тогда оценка дисперсии воспроизводимости будет равна

$$\tilde{\sigma}^2\{y\} = \frac{\sum_{i=1}^N \tilde{\sigma}^2\{y_i\}}{N}. \quad (2.6)$$

Оценки дисперсий $\tilde{\sigma}^2\{y_i\}$ для всех i ищутся по формуле

$$\tilde{\sigma}^2\{y_i\} = \frac{\sum_{i=1}^m (y_{i,\varepsilon} - \bar{y}_{i,\varepsilon})^2}{m-1}. \quad (2.7)$$

8. Независимые оценки коэффициентов в уравнении регрессии (2.2) ищутся по формуле

$$\tilde{b}_i = \frac{\sum_{i=1}^N z_{ig} \times \bar{y}_i}{N}, \quad (g = 0, 1, \dots, n). \quad (2.8)$$

9. Значимость коэффициентов регрессии b_i проверяется с помощью t – критерия Стьюдента, который в этом случае преобразуется к виду

$$t_{p_i} = \frac{|\tilde{b}_q|}{\sigma^2\{\tilde{b}_q\}}, (q = 0, 1, \dots, n), \quad (2.9)$$

где

$$\sigma^2\{\tilde{b}_q\} = \frac{\tilde{\sigma}^2\{y\}}{N \times m}, \text{ (для всех } i) \quad (2.10)$$

- дисперсия ошибки определения коэффициентов регрессии.

Если вычисленное значение t_{p_i} превышает значение $t_{кр}$, определенное по таблице приложения для числа степеней свободы $\nu = N \times (m - 1)$ при заданном уровне значимости q , то коэффициент b_i признается значимым. В противном случае $b_i = 0$.

10. Проверка адекватности полученной модели проводится по F - критерию Фишера:

$$F_P = \frac{\tilde{\sigma}^2_{aq}}{\tilde{\sigma}^2\{y\}}, \quad (2.11)$$

где

$$\tilde{\sigma}^2_{aq} = \frac{\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - y_i)^2}{N - d} \quad (2.12)$$

d - число значимых коэффициентов уравнения регрессии.

Если вычисленное значение F_P критерия меньше $F_{кр}$ найденного по статистической таблице для соответствующих степеней свобода $\nu_1 = N - d$ и $\nu_2 = N(m - 1)$ при заданном уровне значимости q , то гипотеза об адекватности принимается. Полученная модель признается годной для дальнейших исследований.

Проверка адекватности возможна только при $\nu_1 > 0$, Если $\nu_1 = 0$, то адекватность проверить нельзя.

Порядок выполнения задания

1. Выбрать вид модели (регрессионного уравнения - линейное, неполное квадратичное, полное квадратичное).
2. Выбрать матрицу планирования, сформировать табл. 6.
3. Вычислить осредненные значения $\tilde{y}_i$.
4. Проверить воспроизводимость по критерию Кохрена.
5. Вычислить оценки коэффициентов регрессии. Записать уравнение.
6. Проверить значимость коэффициентов b_i , по критерию Стьюдента. Сформировать, если нужно новое уравнение регрессии.
7. Проверить адекватность полученного уравнения.
8. Сделать выводы, оформить задание.

Пример расчета линейной модели и содержание отчета

Построить линейную математическую модель в кодированных значениях и проверить ее адекватность с доверительной вероятностью $\beta = 0,95$ технологического процесса крашения, если на протекание процесса оказывают влияние два фактора – X_1 – концентрация красителя, (%); X_2 – температура, $^{\circ}\text{C}$. Результаты трех параллельных наблюдений над показателем качества операции - времени протекания процесса (мин) при реализации матрицы планирования представлены в табл. 7 (порядок опытов определяется табл. 6).

Таблица 7

№\y	1	2	3	4
y_1	0.20	1.00	1.45	4.08
y_2	0.01	0.42	2.81	4.16
y_3	0.14	1.86	1.73	3.99

1. Из условия задачи при $n = 2$ модель выбираем в виде

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2. \quad (2.13)$$

2. $n = 2$. Зная матрицу планирования для ПФЭ типа 2^2 сформируем таблицу вида 8.

3. Вычислим $\bar{y}_i$ ($1 \leq i \leq 4$). При $m = 3$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \frac{0.2+0.01+0.14}{3} \approx 0.12, & \bar{y}_2 &= \frac{1.0+0.42+1.86}{3} \approx 1.09, \\ \bar{y}_3 &= \frac{1.45+2.81+1.73}{3} \approx 2, & \bar{y}_4 &= \frac{4.08+4.16+3.99}{3} \approx 4.08. \end{aligned}$$

4. Проверим воспроизводимость, для этого вычислим оценки дисперсий по формуле (2.7)

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2\{y_1\} &= \frac{(0.2-0.12)^2 + (0.01-0.12)^2 + (0.14-0.12)^2}{2} \approx 0.009, \\ \tilde{\sigma}^2\{y_2\} &= \frac{(1-1.09)^2 + (0.42-1.09)^2 + (1.86-1.09)^2}{2} \approx 0.5249, \\ \tilde{\sigma}^2\{y_3\} &= \frac{(1.45-2)^2 + (2.81-2)^2 + (1.73-2)^2}{2} \approx 0.5157, \\ \tilde{\sigma}^2\{y_4\} &= \frac{(4.08-4.08)^2 + (4.16-4.08)^2 + (3.99-4.08)^2}{2} \approx 0.0072. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } G_p = \frac{0.5249}{0.5249 + 0.5157 + 0.0072 + 0.009} \approx 0.497.$$

Найдем $v_1 = m - 1 = 3 - 1 = 2$; $v_2 = N = 2^2 = 4$;
 $q = 100 \% (1 - \beta) = 5 \%$.

Из статистических таблиц находим табличное значение критерия Кохрена $G_{кр} = 0.7679$. И так как $G_p < G_{кр}$, то дисперсии однородны.

Таблица 8

Новые пе- рем. Номер опыта	z_0 x_0	z_1 x_1	z_2 x_2	y_1	y_2	y_3
1	+	-	-	0.2	0.01	0.14
2	+	+	-	1.0	0.42	1.86
3	+	-	+	1.45	2.81	1.73
4	+	+	+	4.08	4.16	3.99

Найдем оценку дисперсии воспроизводимости

$$\tilde{\sigma}^2\{y\} = \frac{0.5249 + 0.5157 + 0.0072 + 0.009}{4} \approx 0.2642.$$

5. Найдем оценки коэффициентов регрессии

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= \frac{0.12 + 1.09 + 2 + 4.08}{4} \approx 1.82, & \tilde{b}_1 &= \frac{-0.12 + 1.09 - 2 + 4.08}{4} \approx 0.76, \\ \tilde{b}_2 &= \frac{-0.12 - 1.09 + 2 + 4.08}{4} \approx 1.22. \end{aligned}$$

Тогда модель первоначально запишется в виде

$$y = 1,82 + 0,76x_1 + 1,22x_2. \quad (2.14)$$

6. Вычислим оценку дисперсии ошибки в определении коэффициентов

$$\tilde{\sigma}^2\{b\} = \frac{0.2642}{4 \times 3} \approx 0.022.$$

Тогда расчетные значения критерия Стьюдента равны

$$t_{p_0} \approx \frac{1.82}{0.022} \approx 82.73; \quad t_{p_1} \approx \frac{0.76}{0.022} \approx 34.55; \quad t_{p_2} \approx \frac{1.22}{0.022} \approx 55.45.$$

Найдем по статистической таблице табличное значение критерия Стьюдента $t_{кр}$ для $\nu = 4 \times 2 = 8$ и $q = 5\%$ - $t_{кр} = 2.31$.

И так как $t_{p_0}, t_{p_1}, t_{p_2} > t_{кр}$, то все коэффициенты значимы.

$$\text{Значит } \tilde{y} = 1,82 + 0,76x_1 + 1,22x_2. \quad (2.15)$$

7. Вычислим оценку дисперсии адекватности

$$\hat{\sigma}_{\text{ад}}^2 = \frac{(0.12 - 0.16)^2 + (1.09 - 1.36)^2 + (2 - 2.28)^2}{4 - 3} + \frac{(4.08 - 3.80)^2}{4 - 3} \approx 0.3081.$$

Тогда расчетное значение F - критерия равно $F_p \approx \frac{0.3081}{0.2642} \approx 1.17$.

Найдем по статистической таблице табличное значение критерия Фишера $\nu_1 = N - d = 1$ и $\nu_2 = 4 \times 2 = 8$ для $q = 5\%$ - $F_{\text{кр}} = 5.3$. И так как $F_p = 1.17 < 5.3 = F_{\text{кр}}$ делаем заключение, что модель вида (2.15) адекватно описывает рассматриваемую статистику, ее можно использовать в качестве математической модели.

Варианты задания № 2

Необходимо построить линейную, неполную квадратичную, полную квадратичную математические модели в кодированных значениях технологической операции формирования некоторого размера детали.

Адекватность проверить с доверительной вероятностью β . Известно, что на ход операции оказывают влияние два фактора X_1 – температура ($^{\circ}\text{C}$); X_2 - давление (атм). Результаты трех параллельных наблюдений над y представлены в табл. 9 (порядок определяется табл. 6).

Таблица 9

$\beta = 0.95$ Вариант 1

	1	2	3	4
y_1	1.20	2.03	4.16	4.58
y_2	2.19	3.44	2.34	5.88
y_3	0.99	0.2	1.41	4.74

$\beta = 0.9$ Вариант 2

	1	2	3	4
y_1	1.09	2.31	3.14	4.40
y_2	0.08	0.89	2.71	4.64
y_3	1.09	2.28	4.28	3.86

$\beta = 0.95$ Вариант 3

	1	2	3	4
y_1	2.95	3.47	5.18	5.87
y_2	0.23	4.47	4.00	4.45
y_3	4.38	4.68	3.42	5.81

$\beta = 0.9$ Вариант 4

	1	2	3	4
y_1	1.73	3.99	4.10	4.45
y_2	3.08	2.90	2.65	4.49
y_3	3.16	3.54	3.56	3.81

$\beta = 0.95$

Вариант 5

	1	2	3	4
y_1	0.7	5.79	4.04	6.41
y_2	2.36	4.61	4.92	5.12
y_3	2.91	2.64	5.83	6.42

 $\beta = 0.9$

Вариант 6

	1	2	3	4
y_1	2.74	5.38	4.40	4.54
y_2	1.75	4.97	5.01	6.41
y_3	1.79	3.24	5.21	6.12

 $\beta = 0.95$

Вариант 7

	1	2	3	4
y_1	0.94	0.76	4.49	3.87
y_2	0.40	2.25	2.66	3.39
y_3	0.35	2.15	2.80	2.38

 $\beta = 0.9$

Вариант 8

	1	2	3	4
y_1	0.15	1.30	3.89	4.86
y_2	2.11	4.19	3.51	2.84
y_3	2.22	2.84	2.29	5.88

 $\beta = 0.95$

Вариант 9

	1	2	3	4
y_1	0.44	2.22	1.88	4.72
y_2	0.22	0.47	3.51	2.58
y_3	0.25	1.67	1.89	2.57

 $\beta = 0.9$

Вариант 10

	1	2	3	4
y_1	2.65	3.07	4.83	4.15
y_2	0.87	0.86	4.08	5.61
y_3	4.92	2.49	4.56	4.77

 $\beta = 0.95$

Вариант 11

	1	2	3	4
y_1	0.83	0.18	2.69	4.71
y_2	0.08	1.81	1.05	3.12
y_3	0.56	0.77	1.55	2.70

 $\beta = 0.9$

Вариант 12

	1	2	3	4
y_1	0.11	3.99	4.36	3.33
y_2	2.44	3.39	3.63	2.23
y_3	0.83	3.14	3.77	3.67

 $\beta = 0.95$

Вариант 13

	1	2	3	4
y_1	1.36	1.53	3.39	5.17
y_2	0.63	0.13	3.32	3.22
y_3	0.78	1.67	4.31	5.14

$\beta = 0.9$

Вариант 14

	1	2	3	4
y_1	2.4	2.09	2.14	4.21
y_2	0.46	0.71	2.73	2.24
y_3	0.65	1.79	3.61	4.89

 $\beta = 0.95$

Вариант 15

	1	2	3	4
y_1	0.14	2.21	3.14	4.39
y_2	0.73	0.24	4.11	3.48
y_3	1.61	2.88	4.06	4.12

 $\beta = 0.9$

Вариант 16

	1	2	3	4
y_1	0.55	3.40	1.77	3.12
y_2	1.54	3.57	1.45	3.55
y_3	0.21	2.06	3.71	2.36

 $\beta = 0.95$

Вариант 17

	1	2	3	4
y_1	0.76	2.13	5.50	3.90
y_2	0.45	2.55	4.16	3.61
y_3	2.71	1.31	4.42	5.27

 $\beta = 0.9$

Вариант 18

	1	2	3	4
y_1	1.23	2.22	1.83	4.19
y_2	1.22	2.41	1.49	3.92
y_3	1.40	0.86	5.35	4.77

 $\beta = 0.95$

Вариант 19

	1	2	3	4
y_1	2.7	2.89	3.58	3.09
y_2	0.95	1.18	3.20	4.03
y_3	1.75	2.38	4.19	5.04

 $\beta = 0.9$

Вариант 20

	1	2	3	4
y_1	0.19	1.42	4.74	5.09
y_2	3.16	3.58	4.59	6.52
y_3	1.34	4.86	3.08	4.59

ПРИЛОЖЕНИЕ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВО «ВГТУ» ВГТУ)

ФАКУЛЬТЕТ МАШИНОСТРОЕНИЯ И АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ
КАФЕДРА ТЕХНОЛОГИИ МАШИНОСТРОЕНИЯ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА к курсовому проекту по дисциплине Математическое моделирование в машиностроении

Обучающийся _____
(Ф.И.О. обучающегося)

Группа _____

Тема _____

Обучающийся _____
(подпись, И.О. Фамилия, дата)

Проверила _____ доцент А.В. Перова
(подпись, И.О. Фамилия, дата)

Оценка _____

Воронеж 2023

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. - М.: Наука, 1976.
2. Гарбер Г. З. Основы программирования на Visual Basic в Microsoft Excel / Г. З. Гарбер. – М.: Торговый дом СПАРРК, 2004.
3. Колесов И. М. Основы технологии машиностроения: учебник для машиностр. вузов / И. М. Колесов. - М.: Машиностроение, 1997.
4. Руденко А. Н. Проектирование технологических процессов в машиностроении / А. Н. Руденко. - Киев: Вища шк., 1985.
5. Сафронов И. К. Visual Basic в задачах и примерах / И. К. Сафронов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
6. Перова А. В. Математическое моделирование в машиностроении: курс лекций: учеб. пособие [Электронный ресурс]. - Электрон. текстовые и граф. данные (3,088 Мб) / А. В. Перова, 2-е изд., перераб. и доп. - Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015.
7. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Кернс.– М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
8. Методические указания к выполнению самостоятельной работы по дисциплине «Математическое моделирование в машиностроении» для студентов направления 15.03.05 «Конструкторско–технологическое обеспечение машиностроительных производств» (профили «Технология машиностроения», «Металлообрабатывающие станки и комплексы», «Конструкторско–технологическое обеспечение кузнечно–штамповочного производства») [Электронный ресурс] / А.В. Перова. – Воронеж: ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2016. – 37 с. – Регистр. № 176-2016.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	2
Задание 1. Метод анализа иерархий.....	3
Задание 2. Полный факторный эксперимент.....	12
Приложение.....	20
Библиографический список.....	21

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсового проекта
для студентов направления 15.03.05
«Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»
(профили «Конструкторско-технологическое
обеспечение кузнечно-штамповочного производства»,
«Металлообрабатывающие станки и комплексы»,
«Технология машиностроения»)
всех форм обучения

Составитель

Перова Алла Владимировна

Издается в авторской редакции

Компьютерный набор А. В. Перовой

Подписано к изданию 19.09.2022.

Уч.-изд. л. 1,1.