

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

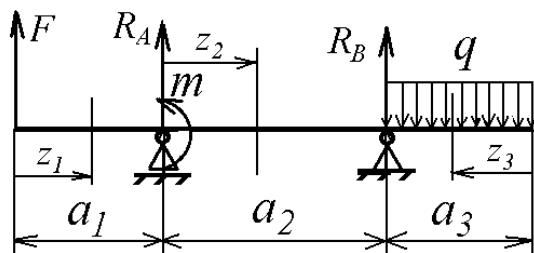
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

## ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к самостоятельной работе для студентов  
направления 22.03.02 «Металлургия»,  
профиль «Технология литьевых процессов»  
очной формы обучения



Воронеж 2022

УДК 539.42(07)  
ББК 22.2я7

*Составитель*  
доцент В. А. Рябцев

**Прикладная механика:** методические указания к самостоятельной работе для студентов направления 22.03.02 «Металлургия», профиль «Технология литьевых процессов» очной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. В. А. Рябцев. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. – 41 с.

Методические указания содержат задания для контрольной работы, состоящей из шести задач, кратких теоретических справок по тематике задач и примеры решения подобных задач.

Предназначены для очной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле ПММКРЛП.pdf.

Ил. 12. Табл. 13. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.42(07)  
ББК 22.2я7

**Рецензент -** Ю. Б. Рукин канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета  
Воронежского государственного технического университета*

## Введение

### Требования к оформлению контрольных работ

Основными критериями работоспособности деталей и узлов машин является прочность, жесткость и устойчивость.

Под прочностью понимается способность детали машины выдерживать в процессе эксплуатации заданные рабочие нагрузки без разрушения.

Под жесткостью понимается способность детали машины эксплуатироваться в заданных условиях при деформациях, не превышающих заданные пределы, определенные по условиям эксплуатации.

Под устойчивостью детали машины понимается ее способность сохранять заданную форму равновесия под действием рабочих нагрузок.

В данных методических указаниях рассматриваются четыре типовые задачи сопротивления материалов по оценке прочности и жесткости стержня при растяжении – сжатии, кручении и плоском изгибе и также по определению размеров сечения заданной формы из расчета стержня на устойчивость при продольном сжатии.

Для каждой задачи приведены десять расчетных схем и десять вариантов числовых исходных данных. Исходные данные к задаче выбираются по 3 цифрам -  $K, L, M$ , где:

$K$  – либо задает преподаватель (в случае очного обучения), либо последняя цифра номера года, в который выполняется задание;

$L$  – вторая справа цифра номера фамилии студента в списке группы или ноль (для первых 9 фамилий);

$M$  – последняя цифра этого номера.

При выборе значения некоторой величины или номера схемы из соответствующей таблицы из соответствующего столбца выбирается число, соответствующее строке с номером  $K, L$  или  $M$ . Например, при  $KLM=238$  из таблицы 1.1 получаем  $a = 0,12 M, b = 0,13M, c = 0,18 M, P=23 \text{ кН}$ .

На титульном листе контрольной работы (см. приложение) обязательно должны быть указаны полное наименование обучающей организации, факультета, на котором находится кафедра, производящая обучение, название этой кафедры, дисциплины, ФИО студента, шифр группы, номер варианта – число, получаемое по формуле  $100 * K + 10 * L + M$ . Работа должна быть подписана личной подписью студента. Также должен быть указаны ФИО и должность преподавателя, принимающего задание.

Задание должно быть оформлено в виде расчетно - пояснительной записи на бумаге формата А4 с соблюдением полей со всех сторон листа по 20 – 25 мм.

При решении каждой задачи должны быть приведены полный текст условия задачи и исходные данные (желательно в табличном формате, повторяющим формат соответствующей таблице в методичке), необходимые для проверки решения.

Все величины, входящие в формулы, кроме заданных в исходных данных должны быть определены в пояснениях к формулам.

При вычислениях сначала должна быть записана формула, затем в формулу, в порядке расположения в формуле должны быть подставлены величины в соответствующих размерностях. Далее нужно записать результат вычислений с точностью 0,001 с указанием размерности.

Рисунки и схемы, необходимые для решения задачи, должны быть аккуратно выполнены черной пастой с использованием линейки, или в одном из графических редакторов.

При рукописном выполнении контрольной работы текст должен быть легко читаемым и не должен содержать орфографических ошибок. Основные символы высотой менее 5 мм и индексы высотой менее 3 мм в формулах, схемах и рисунках не допускаются.

При выполнении контрольной работы рекомендуется пользоваться [1,2,3].

При невыполнении требований, изложенных в методичке, контрольная работа возвращаться на доработку.

1. Задача № 1

**Расчет на прочность и жесткость стержня при растяжении - сжатии**  
1.1. Задание.

Таблица 1.1

№ строки	№ схемы	$F, \text{ см}^2$	Расстояние, м			$P, \text{ кН}$
			$a$	$b$	$c$	
1	1	2,1	0,11	0,11	0,11	21
2	2	2,2	0,12	0,12	0,12	22
3	3	2,3	0,13	0,13	0,13	23
4	4	2,4	0,14	0,14	0,14	24
5	5	2,5	0,15	0,15	0,15	25
6	6	2,6	0,16	0,16	0,16	26
7	7	2,7	0,17	0,17	0,17	27
8	8	2,8	0,18	0,18	0,18	28
9	9	2,9	0,19	0,19	0,19	29
0	0	2,0	0,10	0,10	0,10	20
	$M$	$K$	$K$	$L$	$M$	$L$

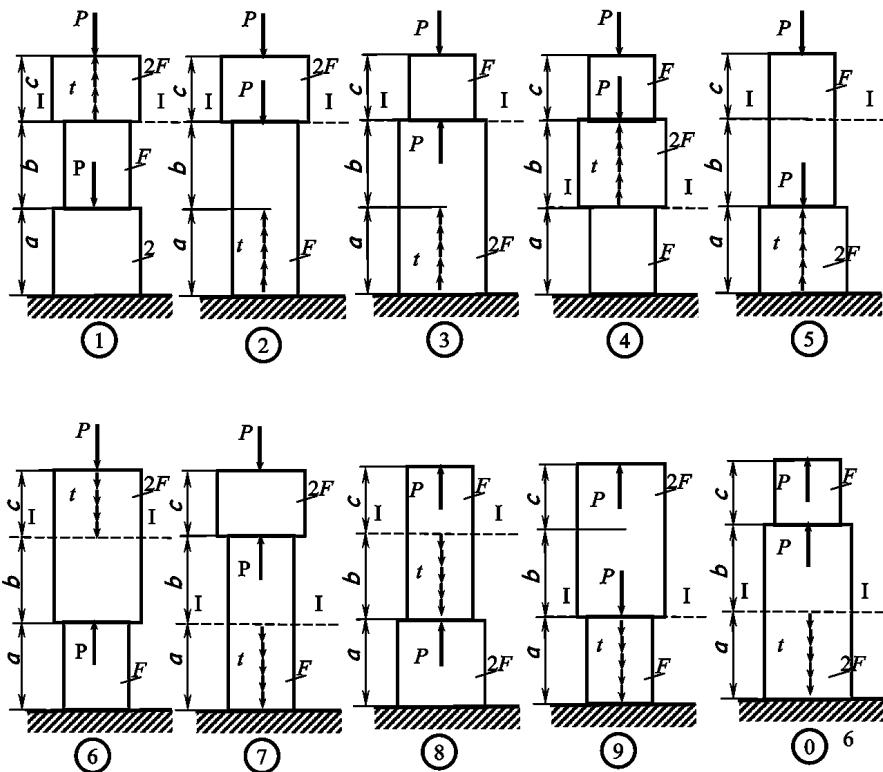


Рис. 1.1

Стальной стержень ( $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ), один конец которого жестко защемлен, другой – свободен, находится под действием продольных сил  $P$  и распре-

деленной нагрузки  $t = 20$  кН/м. Отдельные участки стержня имеют различную площадь по

перечного сечения,  $F$  или  $2F$  (рис. 1.1).

Требуется:

- сделать схематический чертеж стержня по заданным размерам, сблюдая масштаб длин по вертикали;
- вычислить значения продольной силы  $N$  и нормального напряжения  $\sigma$ , построить их эпюры;
- найти перемещение сечения I – I.

Данные взять из табл. 1.1.

## 1.2. Теоретическая справка

### 1.2.1. Внутреннее усилие

Стержнем называется твердое тело, два размера которого значительно (на порядок) меньше третьего размера.

Сечение стержня, перпендикулярное его продольной оси, называется нормальным поперечным сечением стержня.

Внешней нормалью к поперечному сечению стержня орт, перпендикулярный поперечному сечению стержня и направленный от отсеченной части стержня.

Растяжением - сжатием называют такой вид деформирования, при котором в поперечном сечении стержня возникает только нормальная (продольная) сила  $N$ .

Нормальная сила  $N$  в рассматриваемом сечении прямого стержня равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой части стержня, на внешнюю нормаль к поперечному сечению стержня. Растягивающая внешняя сила дает положительную проекцию и положительную нормальную силу.

### 1.2.2. Напряжения

В поперечных (нормальных) сечениях стержня

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (1.1)$$

В произвольном сечении нормальное и касательное напряжения определяются по формулам

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad (1.2)$$

где  $\alpha$  – угол между нормалью к произвольному сечению и внешней нормалью к поперечному сечению.

### 1.2.3. Условие прочности

$$\frac{|N|}{F} \leq [\sigma]. \quad (1.3)$$

Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{np}}{n}, \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{np}$  – предельное (опасное) для материала стержня напряжение;  $n$  – коэффициент запаса прочности.

При растяжении  $[\sigma] = [\sigma]_p$ , при сжатии  $[\sigma] = [\sigma]_c$ . Здесь  $[\sigma]_p$ ,  $[\sigma]_c$  – допускаемые напряжения для материала стержня, соответственно при растяжении и сжатии.

#### 1.2.4. Деформации

Абсолютное удлинение стержня

$$\Delta l = l_k - l, \quad (1.5)$$

где  $l$ ,  $l_k$  – длина стержня, соответственно до и после деформирования.

Относительное продольное удлинение участка стержня длиной  $dz$

$$\varepsilon = \frac{\Delta z}{dz}. \quad (1.6)$$

Для стержня длиной  $l$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.7)$$

Относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta a}{a}, \quad (1.8)$$

где  $a$  – характерный линейный размер поперечного сечения, например диаметр;  $\Delta a$  – изменение этого размера.

Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона)

$$\mu = |\varepsilon_n / \varepsilon|. \quad (1.9)$$

Закон Гука при растяжении - сжатии

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1.10)$$

Абсолютное удлинение стержня длиной  $l$  при переменной нормальной силе или площади стержня

$$\Delta l = \int_l \frac{Ndz}{EF}. \quad (1.11)$$

Величина  $EF$  называется жесткостью стержня при растяжении – сжатии.

При  $N = const$ ,  $EF = const$ ,

$$\Delta l = NI / EF. \quad (1.12)$$

Удлинение стержня под действием собственного веса при  $F = const$

$$\Delta l_\gamma = \rho l^2 / 2E, \quad (1.13)$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня.

Для растянутого и одновременно нагретого на  $\Delta t$  стержня удлинение определяется по формуле

$$\Delta l = \int_l \frac{Ndz}{EF} + \alpha \cdot l \cdot \Delta t. \quad (1.14)$$

Перемещение некоторого сечения стержня определяется величиной алгебраической суммы удлинений частей стержня, расположенных между указанным сечением и сечением, относительно которого определяется. Модуль вектора перемещения равен модулю указанной суммы, а направление определяется ее знаком.

### 1.3. Пример решения задачи

Стальной стержень ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа), один конец которого жестко защемлен, другой свободен, находится под действием продольных сил  $P$  и распределенной

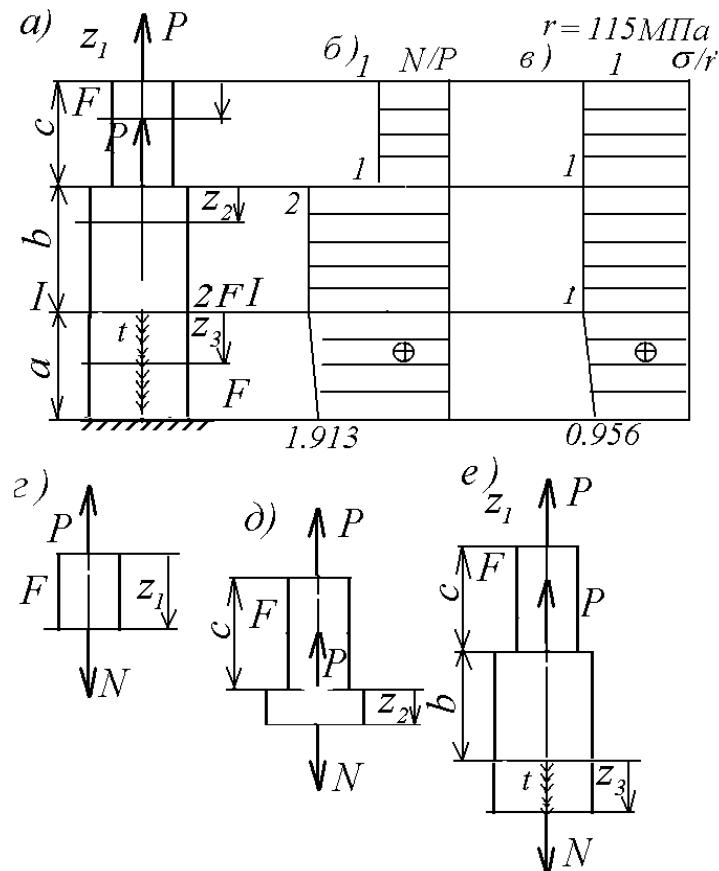


Рис. 1.2

нагрузки  $q = 20$  кН/м. (рис. 1.2). Отдельные участки стержня имеют различную площадь поперечного сечения  $F$  или  $2F$  (рис. 1.2).

Требуется:

- Сделать схематический чертеж стержня по заданным размерам, соблюдая масштаб длин по вертикали.
- Вычислить значения продольной силы  $N$  и нормального напряжения  $\sigma$ , построить их эпюры.
- Найти перемещение сечения  $I - I$ .

Данные взять из табл. 1.1.

Исходные данные

Схема 0;  $F = 2.0 \text{ см}^2$ ;  $a = 0.10 \text{ м}$ ;  $b = 0.13 \text{ м}$ ;  $c = 0.10 \text{ м}$ ;  $P = 23 \text{ кН}$ .

## Решение

а). Схематический чертеж стержня в масштабе по вертикали приведен на рис. 1.2.

б) Стержень имеет три участка, в пределах которых нормальная сила описывается единственным аналитическим выражением.

Для определения нормальной силы в поперечном сечении стержня используем метод сечений. При этом рассматриваем верхние отсеченные части стержня.

1 участок  $0 \leq z_1 < c = 0.10$  м (рис 1.2 г).

Нормальная сила на участке

$$N(z_1) = P = 23 \text{ кН}, \quad N(0) = P, \quad N(c) = P.$$

$$\text{Пусть } r = P/F = 23*1000/2*10^{-4} = 115 \text{ МПа}$$

Нормальное напряжение на участке

$$\sigma(z_1) = P/F = r, \quad \sigma(0) = P/F = r, \quad \sigma(c) = P/F = r.$$

2 участок  $0 \leq z_2 < b = 0.13$  м (рис 1.2 д).

Нормальная сила на участке

$$N(z_2) = 2P, \quad N(0) = 2P, \quad N(b) = 2P.$$

Нормальное напряжение на участке

$$\sigma(z_2) = N(z_2)/2F = 2P/2F = r, \quad \sigma(0) = r, \quad \sigma(b) = r.$$

3 участок  $0 \leq z_3 < a = 0.10$  м (рис 1.2 е).

Нормальная сила на участке

$$N(z_3) = 2P - tz_3 = P(2 - tz_3/P) = P(2 - 0.869z_3), \quad N(0) = 2P, \quad N(a) = 1.913P.$$

Нормальное напряжение на участке

$$\sigma(z_3) = N(z_3)/2F, \quad \sigma(0) = N(0)/2F = 2P/2F = r,$$

$$\sigma(a) = N(a)/2F = 1.913P/2F = 0.956r.$$

По полученным величинам нормальной силы и нормального напряжения строим эпюры нормальной силы и нормального напряжения (рис. 1.2 б, 1.2 в).

в) Искомое перемещение  $u$  определяем относительно заделки стержня. В данном случае модуль этого перемещения равен модулю удлинения  $\Delta l_3$  третьего участка стержня, а направление определяется знаком  $\Delta l_3$

$$\begin{aligned} \Delta l_3 &= \int_0^a \frac{N(z_3)dz_3}{2EF} = \int_0^a \frac{P(2 - 0.869z_3)dz_3}{2EF} = \frac{P}{2EF}(2a - 0.5 * 0.869a^2) = \\ &= \frac{23 * 10^3}{2 * 10^{11} * 2 * 10^{-4}}(2 * 0.10 - 0.5 * 0.869 * 0.1^2) = 5.625 * 10^{-5} \text{ м.} \end{aligned}$$

Положительность величины  $\Delta l_3$  означает, что данное сечение переместились вверх.

## 2. Задача № 2

### Расчеты на прочность и жесткость статически неопределенной стержневой системы при растяжении - сжатии

2.1. Задание. Для заданной стержневой системы (табл. 2.1), состоящей из стальных стержней круглого поперечного сечения, требуется:

- а) раскрыть статическую неопределенность системы;
- б) подобрать диаметры поперечных сечений стержней, если известны: соотношения площадей, величины действующих нагрузок и допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа;
- в) при рассчитанных величинах площадей определить перемещение точки приложения силы  $P$  или момента  $M$ , возникающее под действием заданной нагрузки;
- г) при рассчитанных величинах диаметров определить напряжения в стержнях, возникающие при изменении температуры стержней системы на  $\Delta t$ , считая внешнюю нагрузку отсутствующей.

Принять значение модуля упругости для стали равным  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа, а коэффициент температурного расширения стали принять равным  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$  1/м.

Номер варианта числовых данных к задаче №1 (столбца) выбирается по величине  $M$  по таблицам 1 – 3.

Направление сосредоточенной силы или момента определяется числом  $L$ . При четном  $L$  сосредоточенная сила или момент направлены в соответствии с данными табл. 2.1-2.3. При нечетном  $L$  эти нагрузки имеют противоположные направления.

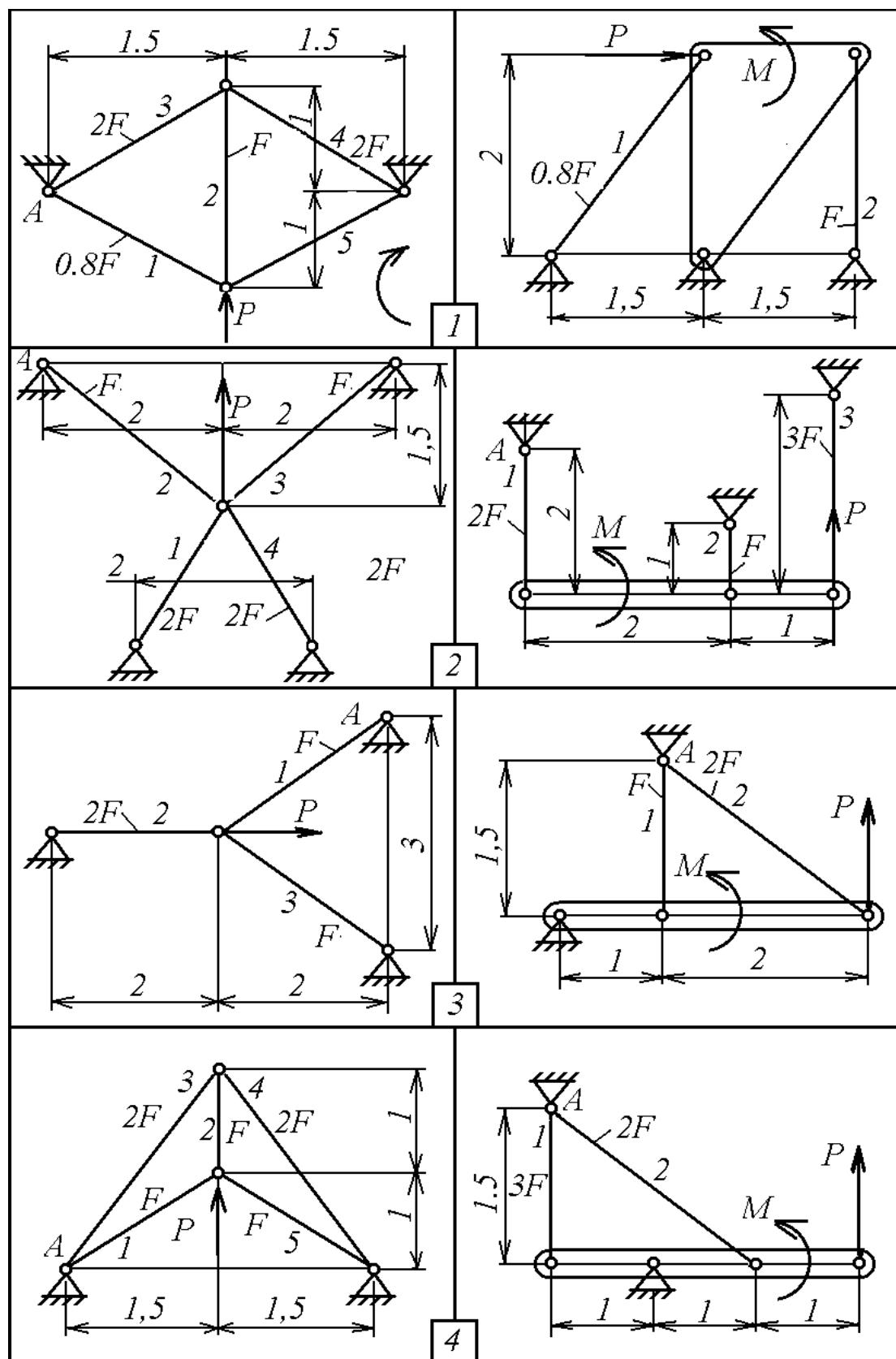
Изменение температуры дано в градусах Кельвина, силы в кН, моменты – в кН\*М. Проекции силы  $P$  даны на оси  $x$ , у системы координат традиционного положения.

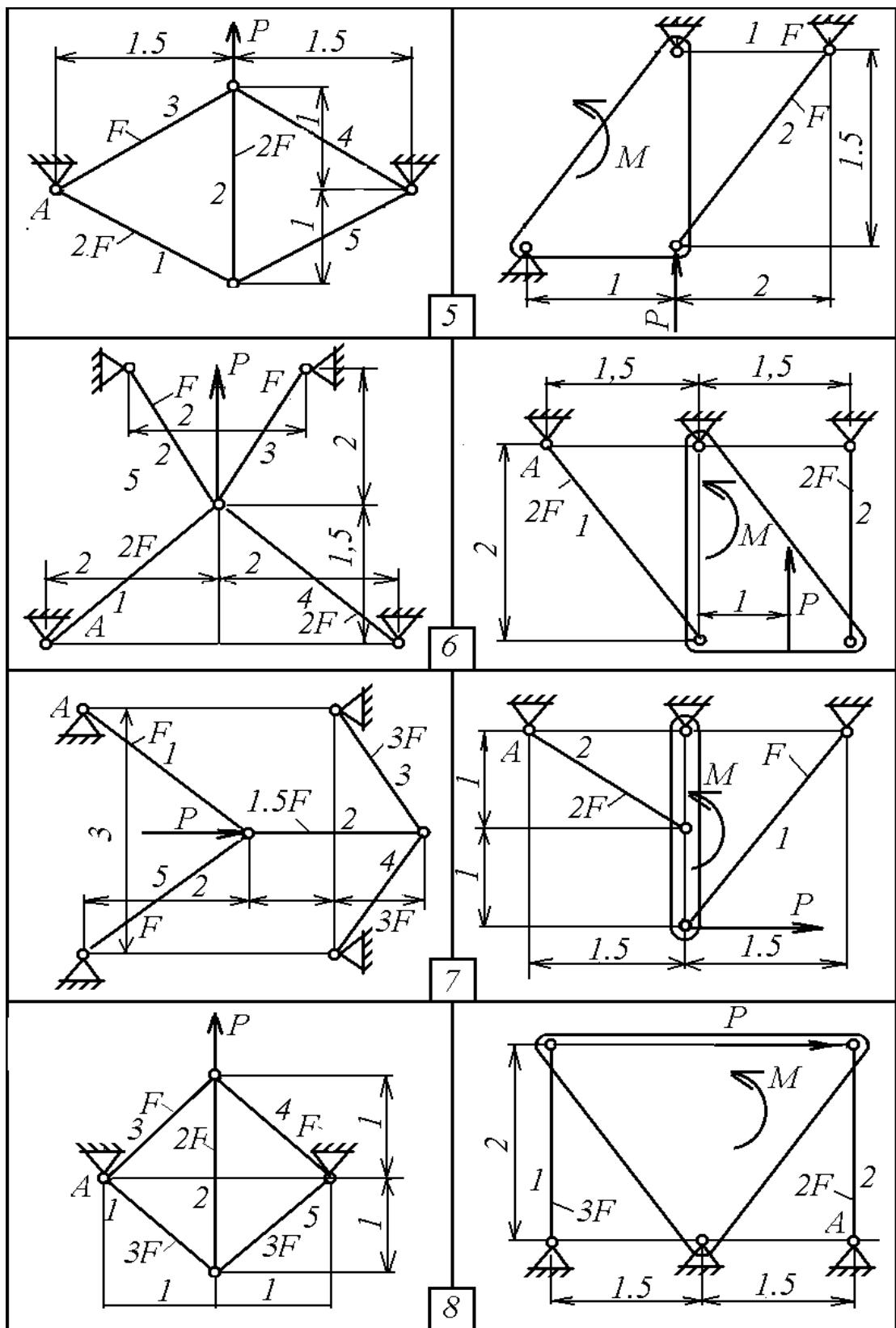
Направление сосредоточенной силы или момента определяется числом  $L$ .

Задача выполняется по одной из двух расчетных схем табл. 2.1.

Первую схему, содержащую жесткое тело (правый столбец табл. 2.1) берут студенты, у которых число  $K$  нечетное. Исходные данные для этой схемы выбираются из табл. 2.2. В противном случае берется вторая расчетная схема, содержащая только стержни (левый столбец табл. 2.1) и исходные данные для этой схемы выбираются из табл. 2.3.

Таблица 2.1





Окончание табл. 2.1

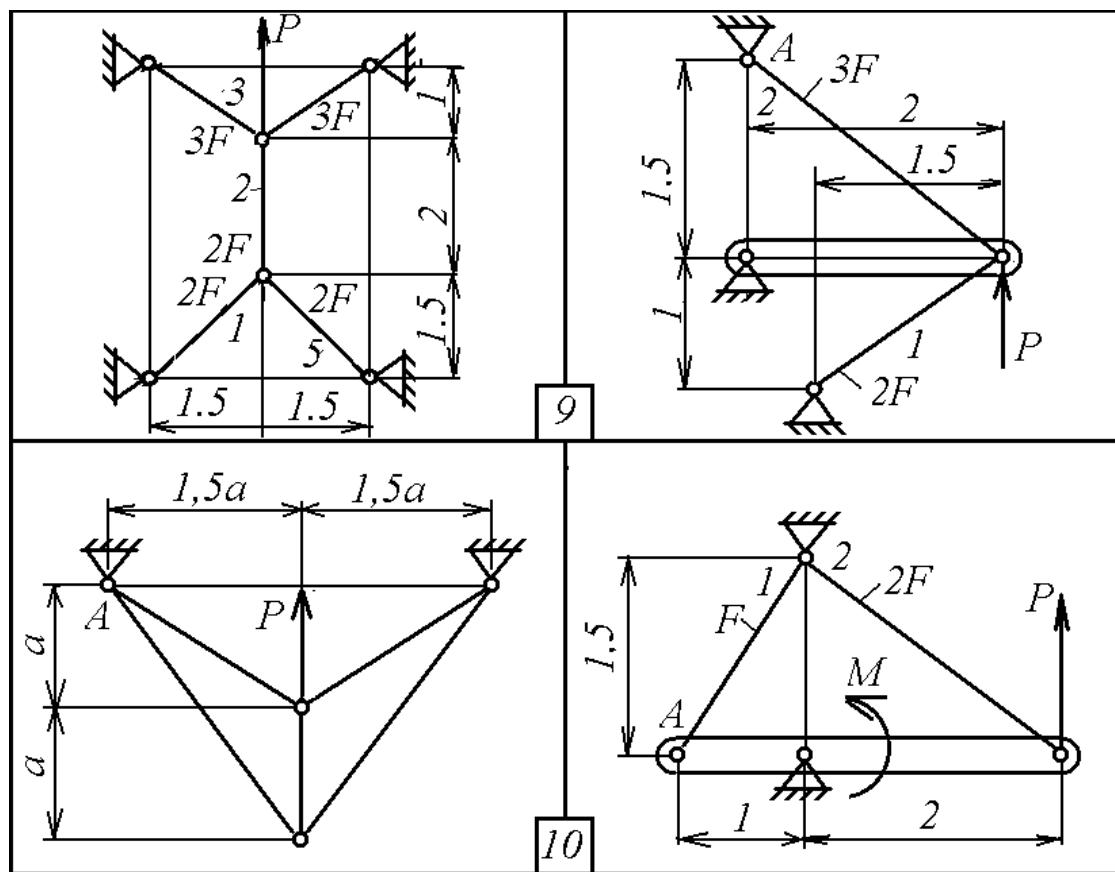


Таблица 2.2

№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_x$	0	-20	0	0	0	0	0	20	40	0
$P_y$	10	0	-20	-30	25	20	-32	0	0	-25
$M$	15	25	0	-10	30	0	10	15	-20	0
$\Delta t$	-30	+20	-40	+45	-20	+50	-60	+25	-30	+35

Таблица 2.3

№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_x$	0	0	0	-15	0	0	0	-20	0	0
$P_y$	-10	-25	-20	0	20	35	-18	0	40	-25
$\Delta t$	-30	+20	-40	+45	-20	+50	-60	+25	-30	+35

## 2.2. Теоретическая справка

Системы, состоящие из элементов, имеющих форму стержня, называют стержневыми. Стержневые системы подразделяют на статически определимые и статически неопределенные.

Стержневые системы, в которых нормальные силы и реакции связей определяются при помощи метода сечений и уравнений статики или динамики, называются статически определимыми. В статически неопределенных системах использование метода сечений и уравнений равновесия для определения нормальных сил и реакций связей оказывается недостаточным. Разность между числом неизвестных усилий, подлежащих определению, и количеством независимых уравнений равновесия, которые могут быть составлены для их определения, называется степенью статической неопределенности системы.

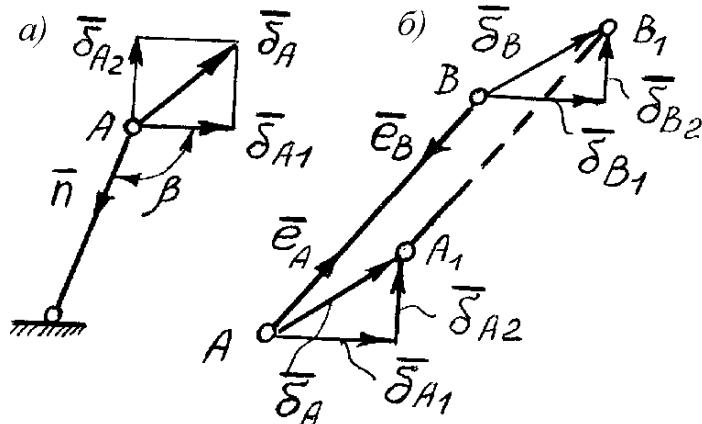


Рис. 2.1

Для определения усилий в статически неопределенных системах необходимо составить, помимо уравнений статики, уравнения совместности перемещений, основанные на рассмотрении геометрической стороны деформации системы и использовании закона Гука. Необходимое число этих уравнений должно быть равно степени статической неопределенности системы.

Уравнения совместности деформаций можно получить рассматривая деформации системы или используя базовые перемещения (БП) ее точек, которыми называют возможные перемещения, удовлетворяющие связям, наложенным на систему.

Для использования БП нужно устанавливать связь нормальных сил в стержнях системы с базовыми перемещениями. При этом могут быть два случая.

Один конец стержня неподвижен, то есть, присоединен к стойке (рис. 2.1, а). При этом деформации в стержне определяются только перемещениями подвижного конца стержня (точка  $B$ )  $\bar{\delta}_1$  и  $\bar{\delta}_2$ . Из рис. 2.1, а следует, что удлинение стержня равно

$$\Delta l = -\vec{n} \cdot \bar{\delta}_A = -\vec{n} \cdot (\bar{\delta}_{A1} + \bar{\delta}_{A2}) , \quad (2.1)$$

где  $\vec{n}$  - орт, направленный по оси недеформированного стержня от подвижной точки к неподвижной;  $\bar{\delta}_A$  - полное перемещение.

Пусть  $\beta_1$  - угол, образуемый  $\vec{n}$  и  $\vec{\delta}_A$ . Тогда

$$\Delta l = -\delta_{A_1} \cos \beta_1 - \delta_{A_2} \cos \beta_2 \quad (2.2)$$

Оба конца стержня подвижны (рис. 2.1, б). В этом случае удлинения стержня определяются в общем случае четырьмя БП  $\vec{\delta}_{A_1}, \vec{\delta}_{A_2}, \vec{\delta}_{B_1}, \vec{\delta}_{B_2}$  и

$$\Delta l = -\vec{e}_A \vec{\delta}_A - \vec{e}_B \vec{\delta}_B, \quad (2.3)$$

где  $\vec{e}_A$  и  $\vec{e}_B$  - орты, указанные на рис. 2.1, б.

Нормальная сила

$$N = \Delta l / C, \quad (2.4)$$

где

$$C = \frac{l}{EF}. \quad (2.5)$$

Последняя формула применима только при постоянной жесткости стержня.

Определение усилий в стержнях статически неопределенной системы, т.е. раскрытие ее статической неопределенности, производят в последовательности, рассмотренной в задачах 2.1 и 2.2.

### 2.3. Пример решения задачи

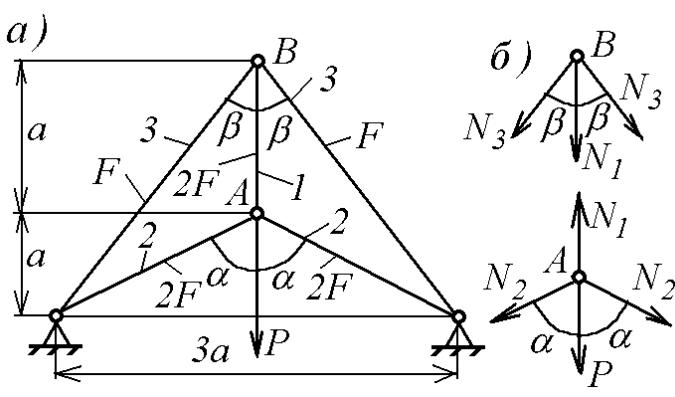


Рис. 2.2

Для заданной стержневой системы (рис. 2.2), состоящей из стальных стержней круглого поперечного сечения, требуется:

а) подобрать диаметры поперечных сечений стержней, если известны: отношения площадей, величина действующей нагрузки  $P = 60 \text{ кН}$  и допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

#### Решение

Поскольку вследствие симметрии системы узлы  $A$  и  $B$  могут перемещаться независимо друг от друга только по вертикали, перемещения в рассматриваемой системе определяются 2 перемещениями узлов  $A$  и  $B$ , которые предполагаются направленными вниз.

Для определения сил и напряжений в стержнях системы используем принцип суперпозиции.

Пусть  $\delta_1$  и  $\delta_2$  перемещения точек  $A$  и  $B$  соответственно. Закрепив мысленно точку  $B$ , сообщаем точке  $A$  перемещение  $\delta_1$ . Тогда удлинения стержней будут равны  $\Delta l_{11} = \delta_1$ ,  $\Delta l_{21} = -\delta_1 \cos \alpha$ ,  $\Delta l_{31} = 0$ . Нормальные силы в стержнях, вызванные перемещением  $\delta_1$

$$N_{11} = c_1 \Delta l_{11} = c_1 \delta_1, \quad N_{21} = c_2 \Delta l_{21} = -c_2 \delta_1 \cos \alpha, \quad N_{31} = c_3 \Delta l_{31} = 0.$$

Закрепив точку  $A$ , сообщаем точке  $B$  перемещение  $\delta_2$ . Тогда удлинения стержней будут равны

$$\Delta l_{12} = -\delta_2, \quad \Delta l_{32} = -\delta_2 \cos \beta, \quad \Delta l_{22} = 0.$$

Нормальные силы в стержнях, вызванные перемещением  $\delta_2$  определяются по формулам

$$N_{12} = c_1 \Delta l_{12} = -c_1 \delta_2, \quad N_{32} = c_3 \Delta l_{32} = -c_3 \delta_2 \cos \beta, \quad N_{22} = c_2 \Delta l_{22} = 0.$$

Таким образом, за счет обоих перемещений в стержнях будут действовать нормальные силы

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{11} + N_{12} = c_1 \delta_1 - c_1 \delta_2 = c_1 (\delta_1 - \delta_2), \\ N_2 &= N_{21} + N_{22} = -c_2 \delta_1 \cos \alpha + 0 = -c_2 \delta_1 \cos \alpha, \\ N_3 &= N_{31} + N_{32} = 0 - c_3 \delta_2 \cos \beta = -c_3 \delta_2 \cos \beta. \end{aligned}$$

При рассмотрении равновесия элементов расчетной схемы действующие на них силы, равные нормальным силам в стержнях, следует направлять вдоль осей стержней так, чтобы эти силы вызывали в стержнях растяжение. В противном случае неизбежны качественные ошибки в решении, влияющие на знаки нормальных сил.

Уравнение равновесия узлов  $A$  и  $B$  имеют вид (рис. 1,2,б)

$$-P - 2N_2 \cos \alpha + N_1 = 0, \quad -N_1 - 2N_3 \cos \beta = 0.$$

Подставляя сюда выражения для нормальных сил, получаем уравнения для  $\delta_1$  и  $\delta_2$ :  $c_1(\delta_1 - \delta_2) + 2c_2 \delta_1 \cos^2 \alpha = P$ ,  $c_2(\delta_1 - \delta_2) - 2c_3 \delta_2 \cos^2 \beta = 0$ ,

или

$$(c_1 + 2c_2 \cos^2 \alpha) \delta_1 - c_1 \delta_2 = P, \quad c_1 \delta_1 - (c_1 + 2c_3 \cos^2 \beta) \delta_2 = 0. \quad (2.6)$$

Далее проще эту систему численно, для чего нужно определить коэффициенты при  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

Из рис. 2.3, а следуют выражения для длин и жесткостей стержней и углов между их осями

$$\begin{aligned} l_1 &= a, \quad l_2 = \sqrt{a^2 + (1,5a)^2} = 1,802a, \quad l_3 = \sqrt{(2a)^2 + (1,5a)^2} = 2,5a, \\ \cos \alpha &= a/l_2 = a/(1,802a) = 0,5547, \quad \cos \beta = 2a/l_3 = 2a/(2,5a) = 0,8, \\ c_1 &= E_1 F_1 / l_1 = 2EF/a, \quad c_2 = E_2 F_2 / l_2 = 2EF/(1802a) = 1,111EF/a, \\ c_3 &= E_3 F_3 / l_3 = EF/(2,5a) = 0,4EF/a. \end{aligned}$$

Тогда

$$c_1 + 2c_2 \cos^2 \alpha = \frac{2EF}{a} + \frac{2 \cdot 1,111EF}{a} 0,5547^2 = 2,683 \cdot EF/a,$$

$$c_1 + 2c_3 \cos^2 \beta = \frac{2EF}{a} + \frac{2 \cdot 0,4EF}{a} 0,8^2 = 2,512 \cdot EF/a.$$

Система (2.6) приобретает вид

$$2,683 \frac{EF}{a} \delta_1 - 2 \frac{EF}{a} \delta_2 = P, \quad \frac{2EF}{a} \delta_1 - 2,512 \frac{EF}{a} \delta_2 = 0.$$

$$\text{Отсюда следует } \delta_1 = 1,256 \delta_2 = 0, \quad \delta_2 = 0,730 \frac{Pa}{EF}, \quad \delta_1 = 0,917 \frac{Pa}{EF}.$$

Тогда

$$N_1 = c_1(\delta_1 - \delta_2) = \frac{2EF}{a}(0,917 - 0,730) \frac{Pa}{EF} = 0,374P = 22,426 \text{ кН},$$

$$N_2 = -c_2 \delta_1 \cos \alpha = -\frac{1,111EF}{a} 0,917 \frac{Pa}{EF} 0,5547 = -0,565P = -33,907 \text{ кН},$$

$$N_3 = -c_3 \delta_2 \cos \beta = -\frac{0,4EF}{a} 0,730 \frac{Pa}{EF} 0,8 = -0,234P = -14,016 \text{ кН}.$$

Следовательно, стержни 2 и 3 сжаты, а стержень 1 — растянут.

Для определения площадей поперечных сечений стержней используются условия прочности стержней

$$|\sigma_i| = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma_i] = [\sigma] \text{ или } F_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}.$$

Отсюда получаем три неравенства для определения  $F$ :

$$F_1 = 2F \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = 22,426 * 10^3 / 160 = 140,16 \text{ мм}^2;$$

$$F_2 = 2F \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = 33,907 * 10^3 / 160 = 211,91 \text{ мм}^2;$$

$$F_3 = F \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = 14,016 * 10^3 / 160 = 87,63 \text{ мм}^2.$$

Отсюда получаем 3 неравенства для определения величины площади  $F$   
 $F \geq 70,08 \text{ мм}^2$ ,  $F \geq 105,955 \text{ мм}^2$ ,  $F \geq 87,63 \text{ мм}^2$ .

Тогда

$$F = 105,955 \text{ мм}^2, \text{ и } F_1 = F_2 = 211,91 \text{ мм}^2, F_3 = 105,955 \text{ мм}^2.$$

Диаметры стержней

$$d_1 = d_2 = 2\sqrt{F_1 / \pi} = 2\sqrt{211,91 / \pi} = 16,426 \text{ мм},$$

$$d_3 = 2\sqrt{F_3 / \pi} = 2\sqrt{105,955 / \pi} = 11,633 \text{ мм}.$$

Принимаем  $d_1 = d_2 = 18 \text{ мм}$ . Тогда

$$F_1 = F_2 = \pi d_1^2 / 4 = \pi 18^2 / 4 = 254,469 \text{ мм}^2, F_3 = 0,5F_1 = 127,235 \text{ мм}^2.$$

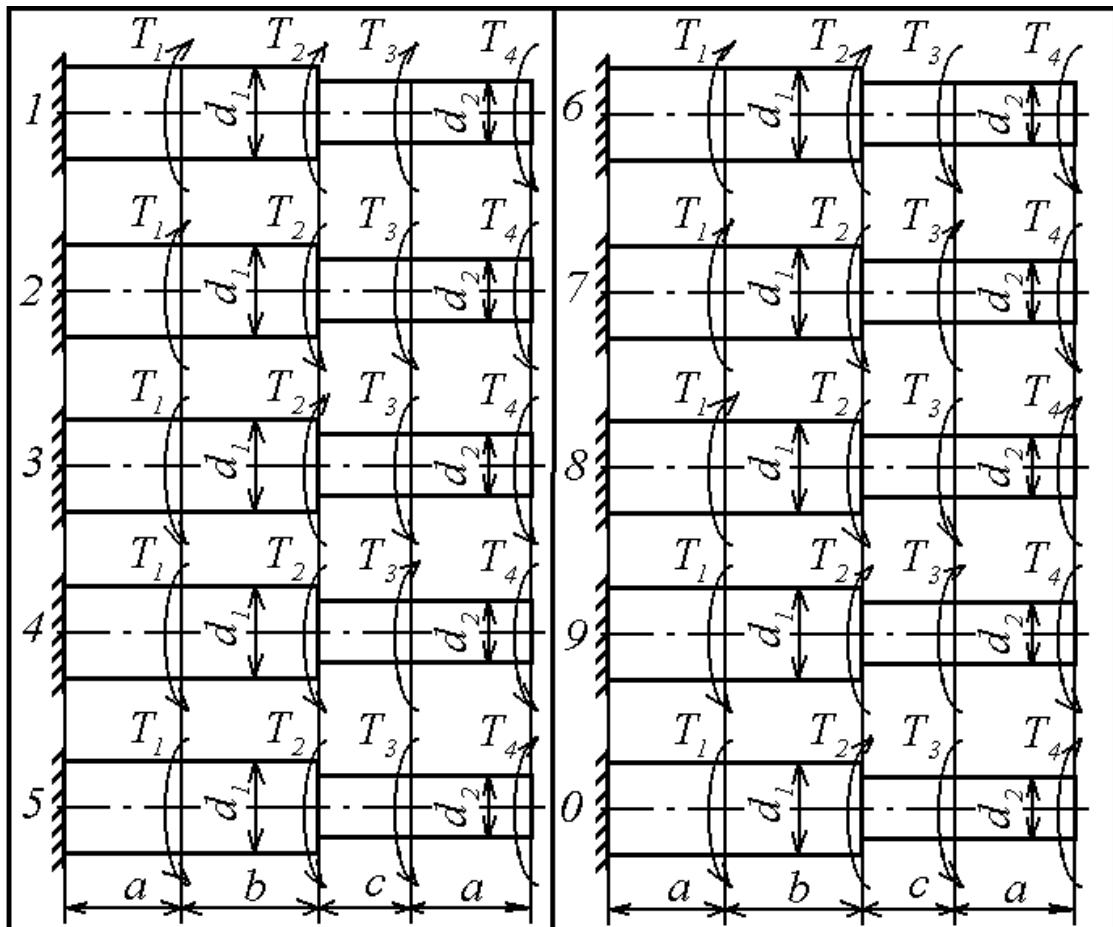
$$\text{Тогда } d_3 = 2\sqrt{F_3 / \pi} = 2\sqrt{127,235 / \pi} = 12,728 \text{ мм}.$$

Округлять диаметр  $d_2$  до 13 мм нельзя, поскольку при этом нарушаются заданные условием задачи соотношений между площадями стержней.

### 3. Задача № 3

#### Расчеты на прочность и жесткость при кручении вала круглого сечения

Таблица 3.1



#### 3.1. Задание.

К стальному ступенчатому валу, имеющему сплошное круглое поперечное сечение, приложены четыре момента. Левый конец вала защемлен в опоре, а правый конец свободен.

Требуется:

- Определить крутящие моменты  $M_k$  в поперечных сечениях вала и построить их эпюру.
- При заданном значении допускаемого касательного напряжения  $[\tau]$  определить диаметры  $d_1$  и  $d_2$  вала из расчета на прочность, учитывая, что диаметры  $d_1$  и  $d_2$  вала связаны соотношением  $d_1 = kd_2$ , где  $k$  - заданное число. Полученное значение  $d_2$  выразить в миллиметрах и округлить до целых значений из предпочтительного ряда чисел в машиностроении (числа, заканчивающиеся цифрой 0, 2, 4, 5, 6, 8). Затем определить  $d_1$ . В общем случае  $d_1$  может оказаться любым рациональным числом.

- Построить эпюру модуля максимальных касательных напряжений в сечениях вала.
- Построить эпюру углов закручивания поперечных сечений вала относительно защемленного сечения, приняв модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Схему вала выбрать из табл. 3.1 по величине  $M$ , а числовые данные взять из табл. 3.2.

Таблица 3.2

Но- мер стро- ки	Рас- стояния, м			Моменты, кН*м				Номер схемы	$k$	[ $\tau$ ] МПа
	$a$	$b$	$c$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$			
1	1.0	1.0	2.0	5,1	2,1	1,1	0,1	1	1.1	25
2	1.1	2.1	1.1	5,2	2,2	1,2	0,2	2	1.2	30
3	2.2	1.2	1.2	5,3	2,3	1,3	0,3	3	1.3	35
4	1.3	2.3	1.3	5,4	2,4	1,4	0,4	4	1.4	40
5	1.4	1.4	2.4	5,5	2,5	1,5	0,5	5	1.5	45
6	1.5	2.5	1.5	5,6	2,6	1,6	0,6	6	1.6	50
7	2.6	1.6	1.6	5,7	2,7	1,7	0,7	7	1.7	55
8	1.7	2.7	1.7	5,8	2,8	1,8	0,8	8	1.8	60
9	1.8	1.8	2.8	5,9	2,9	1,9	0,9	9	1.9	65
0	1.9	2.9	1.9	6,0	3,0	2,0	1,0	0	2.0	70
	$K$	$L$	$M$	$M$	$K$	$L$	$M$	$M$	$L$	$M$

### 3.2. Теоретическая справка

Кручением стержня называется вид нагружения, при котором в его поперечных сечениях возникает только крутящий момент  $M_k$ .

Крутящий момент  $M_k$  определяется методом сечений, который иллюстрируется при решении ниже рассмотренной задачи. Крутящий момент  $M_k$  направляют так, чтобы наблюдатель, смотрящий на отсеченную часть вала в направлении, противоположном внешней нормали к сечению, был направлен против хода часовой стрелки (рис. 3.2). Такой момент считается положительным.

В каждой точке поперечного сечения вала возникает касательное напряжение  $\tau$ , определяемое по формуле

$$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p}, \quad (3.1)$$

где  $\rho$  - расстояние от центра тяжести сечения до рассматриваемой точки сечения;  $J_p$  - полярный момент инерции поперечного сечения.

Экстремальное касательное напряжение  $\tau_{max}$  возникает в точках поперечного сечения, для которых  $\rho = \rho_{max}$ . Оно определяется по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_k \rho_{max}}{J_p} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (3.2)$$

где  $W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$  - полярный момент сопротивления поперечного сечения вала.

Для сплошного круглого поперечного сечения с диаметром  $d$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (3.3)$$

При кручении вала в пределах применимости закона Гука каждое поперечное сечение (кроме жёстко закреплённого сечения) поворачивается, как це-лое, на одинаковый угол относительно продольной оси вала и остается пло-ским. При этом расстояния между поперечными сечениями не изменяются.

Взаимный угол поворота  $\varphi_l$  двух поперечных сечений, отстоящих на рас-стоянии  $l$ , определяется по формуле

$$\varphi_l = \int_l \frac{M_k dz}{GJ_p} \quad (3.4)$$

где  $G$  - модуль сдвига материала;  $dz$  - дифференциал координаты  $z$  вдоль оси вала.

### 3.3. Пример решения задачи

Рассмотрим стальной ступенчатый вал (рис. 3.1 а); имеющий круглое по-перечное сечение и нагруженный четырьмя моментами  $T_1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $T_2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $T_3 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $T_4 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

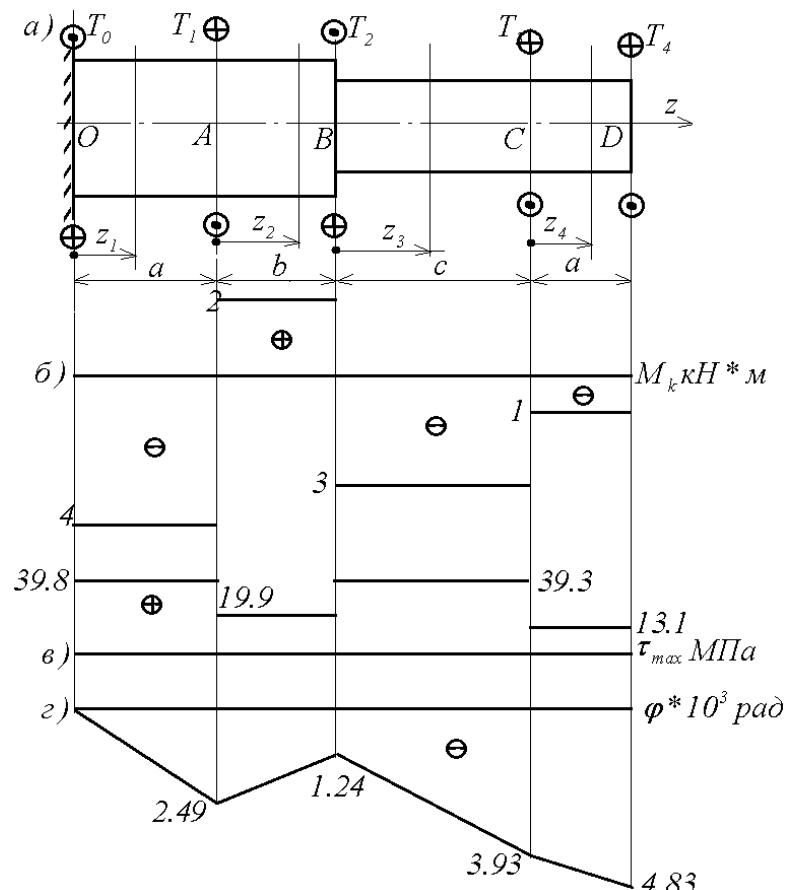


Рис. 3.1

Левый конец вала жестко защемлен в опоре, а правый конец свободен. Допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 40 \text{ МПа}$ , модуль сдвига материала вала  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ , расстояния  $a = b = c = 0.2 \text{ м}$ ,  $k = 1.08$ .

Подобные задачи решаются в следующем порядке.

а) Определение момента в опоре.

Опорный момент  $T_0$  определим из уравнения равновесия моментов, приложенных к валу, относительно оси  $Oz$

$$\sum M_z = 0, -T_4 - T_3 + T_2 - T_1 + T_0 = 0.$$

В итоге имеем:

$$T_0 = T_4 + T_3 - T_2 + T_1 = 1 + 2 - 5 + 6 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

б) Построение эпюры крутящих моментов по длине вала.

Вал имеет четыре участка. Крутящий момент  $M_K$  в поперечных сечениях вала определяем методом сечений. При этом следует рассматривать все участки вала.

1 участок,  $0 \leq z < a$ .

Рассечём мысленно вал на две части поперечным сечением, отстоящим на

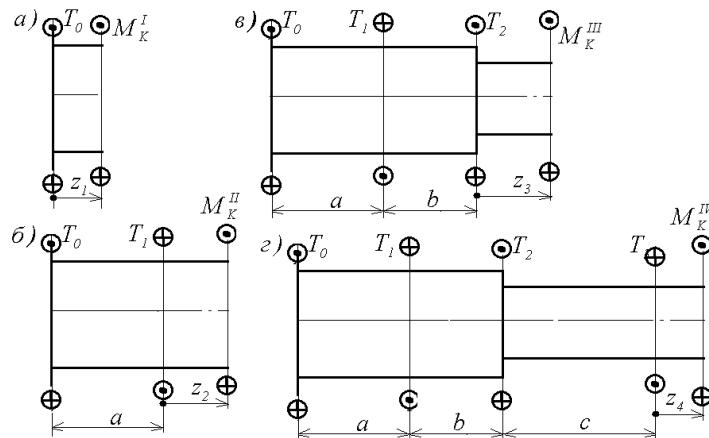


Рис. 3.2

расстоянии  $z$  от левого конца (рис. 3.2 а), отбросим правую часть вала, её действие на левую часть вала заменим крутящим моментом  $M_K^I$ , направленным против хода часовой стрелки при взгляде на сечение со стороны внешней нормали к сечению. Составим уравнение равновесия для оставшейся левой части вала, а именно, приравняем нулю сумму моментов относительно оси  $Oz$ :

$$\sum M_z = 0, M_K^I + T_0 = 0, M_K^I = -T_0 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассуждая аналогично, получим

2 участок,  $a \leq z < (a+b)$ , рис. 3.2, б

$$\sum M_z = 0, M_K^{II} + T_0 - T_1 = 0, M_K^{II} = -T_0 + T_1 = -4 + 6 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 участок,  $(a+b) \leq z < (a+b+c)$ , рис. 3.2, в

$$\sum M_z = 0, M_K^{III} + T_0 - T_1 + T_2 = 0,$$

$$M_K^{III} = -T_0 + T_1 - T_2 = -4 + 6 - 5 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 участок,  $(a+b+c) \leq z < (2a+b+c)$ , рис. 3.2, г

$$\sum M_z = 0, M_K^{IV} + T_0 - T_1 + T_2 - T_3 = 0,$$

$$M_K^{IV} = -T_0 + T_1 - T_2 + T_3 = -4 + 6 - 5 + 2 = -1\kappa H \cdot M.$$

Таким образом, на каждом из участков крутящие моменты постоянны. Эпюра крутящих моментов  $M_K$  приведена на рис. 3.1, б.

в) Определение диаметров  $d_1, d_2$  вала из расчёта на прочность.

Расчёт на прочность проводится по схеме

$$|\tau|_{max} = \frac{|M_K|_{max}}{W_p} \leq [\tau], \text{ отсюда } W_p \geq \frac{|M_K|_{max}}{[\tau]}.$$

На участке бруса  $0 < z < (a+b)$  имеем

$$|M_K|_{max} = 4\kappa H \cdot M, W_{p1} = \frac{|M_K|_{max}}{[\tau]} = \frac{4 \cdot 10^6}{40} = 10^5 \text{ мм}^3,$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_{p1}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10^5}{3,14}} = 79,9 \text{ мм}.$$

Тогда  $d_2 = d_1 / k = 79,9 / 1,08 = 73,98 \text{ мм.}$

На участке вала  $(a+b) < z < (2a+b+c)$  имеем

$$|M_K|_{max} = 3\kappa H \cdot M, W_{p2} = \frac{|M_K|_{max}}{[\tau]} = \frac{3 \cdot 10^6}{40} = 7,5 \cdot 10^4 \text{ мм}^3,$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_{p2}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7,5 \cdot 10^4}{3,14}} = 72,6 \text{ мм.}$$

Из полученных величин  $d_2$  выбирается большее и округляется в соответствии с условием задачи до 74 мм. Тогда

$$d_2 = 74 \text{ мм}, d_1 = kd_2 = 1,08 \cdot 74 = 79,92 \text{ мм.}$$

Величину  $d_1$  округлять нельзя.

г) Построим эпюру максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}$  по длине вала.

На 1 участке

$$\tau_{max} = \frac{|M_K^I|}{W_{p1}} = \frac{16 \cdot |M_K^I|}{\pi \cdot d_1^3} = -\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 79,92^3} = -39,8 \text{ МПа}.$$

На 2 участке

$$\tau_{max} = \frac{|M_K^{II}|}{W_{p1}} = \frac{16 \cdot |M_K^{II}|}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 79,92^3} = 19,9 \text{ МПа}.$$

На 3 участке

$$\tau_{max} = \frac{|M_K^{III}|}{W_{p2}} = \frac{16 \cdot |M_K^{III}|}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 74^3} = 39,3 \text{ МПа}.$$

На 4 участке

$$\tau_{max} = \frac{|M_K^{IV}|}{W_{p2}} = \frac{16 \cdot |M_K^{IV}|}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{16 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 74^3} = 13,1 \text{ МПа}.$$

Эпюра напряжений  $\tau_{max}$  приведена на рис. 3.1, в.

д) Построение эпюры углов взаимного поворота сечений (углов закручивания)  $\varphi$ .

Так как на каждом из четырёх участков вала величины  $M_K$ ,  $G$ ,  $J_p$  постоянны, то из формулы (3.4) следует, что угол  $\varphi$  линейно меняется по длине вала. Угол поворота левого (закреплённого) поперечного сечения вала равен нулю; а углы поворота:

сечения  $A$  относительно сечения  $O$  -  $\varphi_{A,O}$

сечения  $B$  относительно сечения  $A$  -  $\varphi_{B,A}$

сечения  $C$  относительно сечения  $B$  -  $\varphi_{C,B}$

сечения  $D$  относительно сечения  $C$  -  $\varphi_{D,C}$

соответственно равны:

$$\varphi_{A,O} = \frac{M_K^I \cdot a}{G \cdot J_{P1}} = \frac{32 \cdot M_K^I \cdot a}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = -\frac{32 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 200}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 79,92^4} = -0,00249 \text{ rad},$$

$$\varphi_{B,A} = \frac{M_K^{II} \cdot b}{G \cdot J_{P1}} = \frac{32 \cdot M_K^{II} \cdot b}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{32 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 200}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 79,92^4} = 0,00125 \text{ rad},$$

$$\varphi_{C,B} = \frac{M_K^{III} \cdot c}{G \cdot J_{P2}} = \frac{32 \cdot M_K^{III} \cdot c}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = -\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 200}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 74^4} = -0,00269 \text{ rad},$$

$$\varphi_{D,C} = \frac{M_K^{IV} \cdot a}{G \cdot J_{P2}} = \frac{32 \cdot M_K^{IV} \cdot a}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = -\frac{32 \cdot 10^6 \cdot 200}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 74^4} = -0,000897 \text{ rad}.$$

Углы поворота сечений  $B$ ,  $C$ ,  $D$  относительно закрепленного сечения  $O$  соответственно, равны

$$\varphi_{B,O} = \varphi_{B,A} + \varphi_{A,O} = -0,00249 - 0,00125 = -0,00124 \text{ rad},$$

$$\varphi_{C,O} = \varphi_{C,B} + \varphi_{B,O} = -0,00124 - 0,00269 = -0,00393 \text{ rad},$$

$$\varphi_{D,O} = \varphi_{D,C} + \varphi_{C,O} = -0,00393 - 0,000897 = -0,00483 \text{ rad}.$$

Эпюра углов поворота  $\varphi$  сечений вала приведена на рис. 3.1, г.

#### 4. Задача № 4

#### Расчет балки на прочность при плоском изгибе

4.1. Задание. Размеры стальных балок заданы величинами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $l$  (табл. 4.1, 4.2). Сосредоточенная сила и момент выражены через величину распределенной нагрузки  $q$  и длину  $a$  формулами  $M = k_M qa^2$ ,  $F = k_F qa$ .

Таблица 4.1

Номер строки	$a$ , м	$\frac{c}{a}$	$k_F$	$k_M$	$q$ , кН/м	Номер схемы
1	0.5	1.2	0.6	0.2	6	1
2	1.0	1.4	0.5	0.4	8	2
3	1.5	1.6	0.8	0.6	10	3
4	2.0	1.8	1.2	0.8	12	4
5	2.5	2.0	1.5	1.0	14	5
6	1.5	1.1	1.6	0.1	16	6
7	2.0	1.3	1.0	0.3	11	7
8	1.0	1.5	1.8	0.5	9	8
9	2.5	1.7	2.4	0.7	7	9
0	0.5	1.9	2.0	0.9	5	0
	$M$	$M$	$K$	$M$	$L$	$M$

Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в масштабе, определить максимальный расчетный изгибающий момента  $|M|_{\max}$ , и подобрать сечения балки. Для консольной балки определить диаметр сплошного круглого сечения при допускаемом нормальном напряжении, равном  $[\sigma] = 280$  МПа. Для двухпорной балки подобрать номер двутаврового поперечного сечения из расчета на прочность, если допускаемое нормальное напряжение равно  $[\sigma] = 200$  МПа. Числовые данные взять из табл. 4.1. Собственный вес балок не учитывать.

Значения моментов сопротивления сечений при изгибе  $W_x$  для некоторых номеров двутавровых сечений (ГОСТ 8239-72) приведены в табл. 4.3.

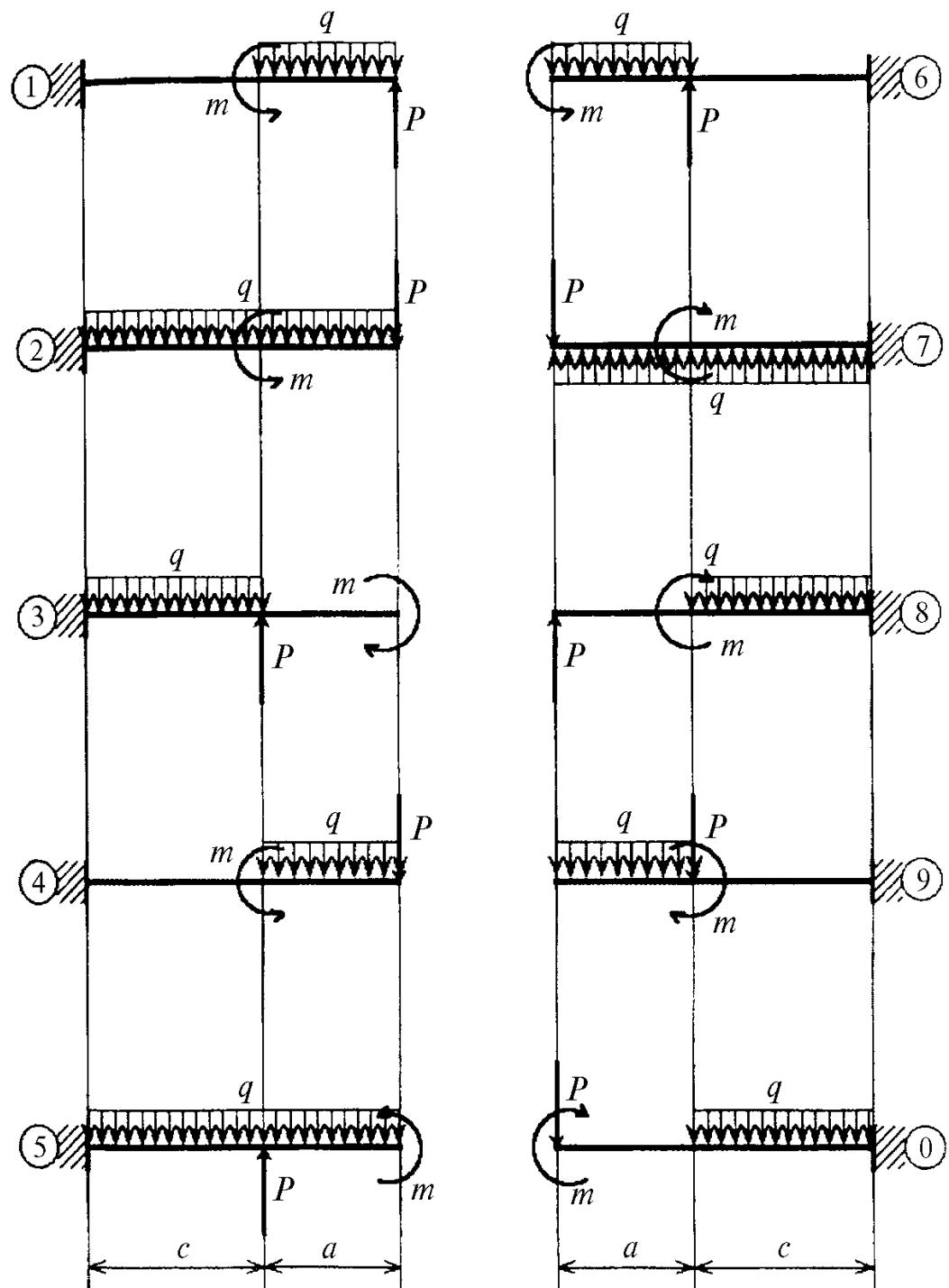
Руководствуясь эпюрой изгибающих моментов, приблизительно изобразить изогнутую ось балки.

#### 4.2. Теоретическая справка

Пусть ось у системы координат расположена в плоскости действия нагрузок и направлена вверх, а ось  $x$  - перпендикулярно этой плоскости от наблюдателя.

Изгиб стержня – это вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только изгибающие моменты  $M_x$  и поперечные силы  $Q_y$ . Стержень, работающий на изгиб, называют балкой (рис. 4.1).

Таблица 4.2



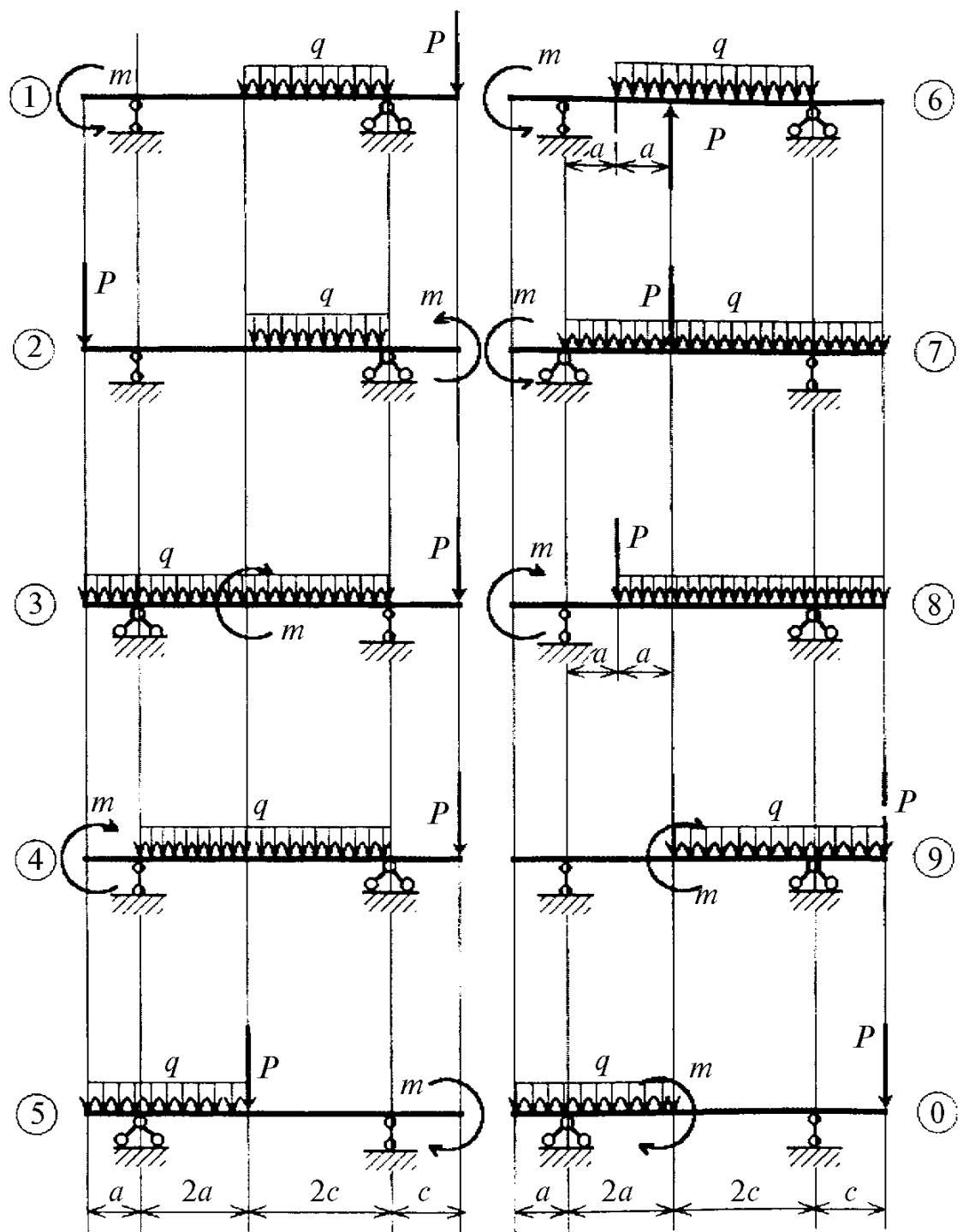


Таблица 4.3

Номер двутавра	10	12	14	16	18	18а	20	20а
$W_x, \text{ см}^3$	39,7	58,4	81,7	109	143	159	184	203
Номер двутавра	22	22а	24	24а	27	27а	30	30а
$W_x, \text{ см}^3$	232	254	289	317	371	407	472	518
Номер двутавра	33	36	40	45	50	55	60	65
$W_x, \text{ см}^3$	597	743	953	1231	1589	2035	2510	3120

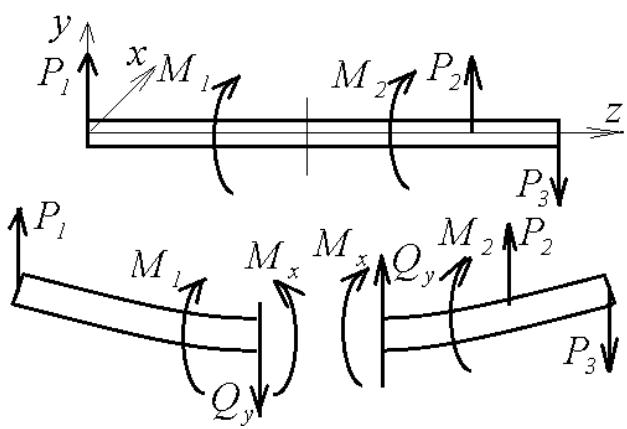


Рис. 4.1

От действия изгибающего момента в каждой точке поперечного сечения балки возникает нормальное напряжение  $\sigma$ . От действия поперечной силы  $Q_y$  возникает касательное напряжение  $\tau$ . Пусть  $Cx$ ,  $Cy$  главные центральные оси поперечного сечения балки,  $Cz$  – продольная ось балки. Если все внешние силы приложены в плоскости  $yCz$  (рис. 4.1 а), то реализуется прямой поперечный изгиб балки и на-

пряжения в поперечном сечении определяются по формулам

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{J_x}, \quad \tau = \frac{Q_y \cdot S_x^*}{J_x \cdot b}, \quad (4.1)$$

где  $M_x$  – изгибающий момент относительно оси  $Cx$ ;  $J_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси  $Cx$ ;  $y$  – координата точки, в которой определяется напряжение;  $b$  – ширина поперечного сечения;  $S_x^*$  – статический момент относительно оси  $Cx$  площади части поперечного сечения, расположенной выше точки с координатой  $y$ .

Для длинных балок касательными напряжениями  $\tau$ , ввиду их малости, пренебрегают и проводят расчет на прочность по нормальным напряжениям

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_x|_{max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (4.2)$$

где  $W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения при изгибе;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

#### 4.3. Пример решения задачи для двуопорной балки

Шарнирно закрепленная на двух опорах стальная двутавровая балка (рис. 4.3, а) нагружена равномерно распределенной по длине нагрузкой интенсивно-

сти  $q = 10$  кН/м, сосредоточенной силой и моментом, соответствующим  $k_F = 2$  и  $k_M = 0.9$ . Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа, расстояния  $a = 0.5$  м,  $c/a = 1.9$ . Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в масштабе, определить максимальный изгибающий момента  $|M|_{\max}$ , и подобрать номер двутаврового поперечного сечения из расчета на прочность.

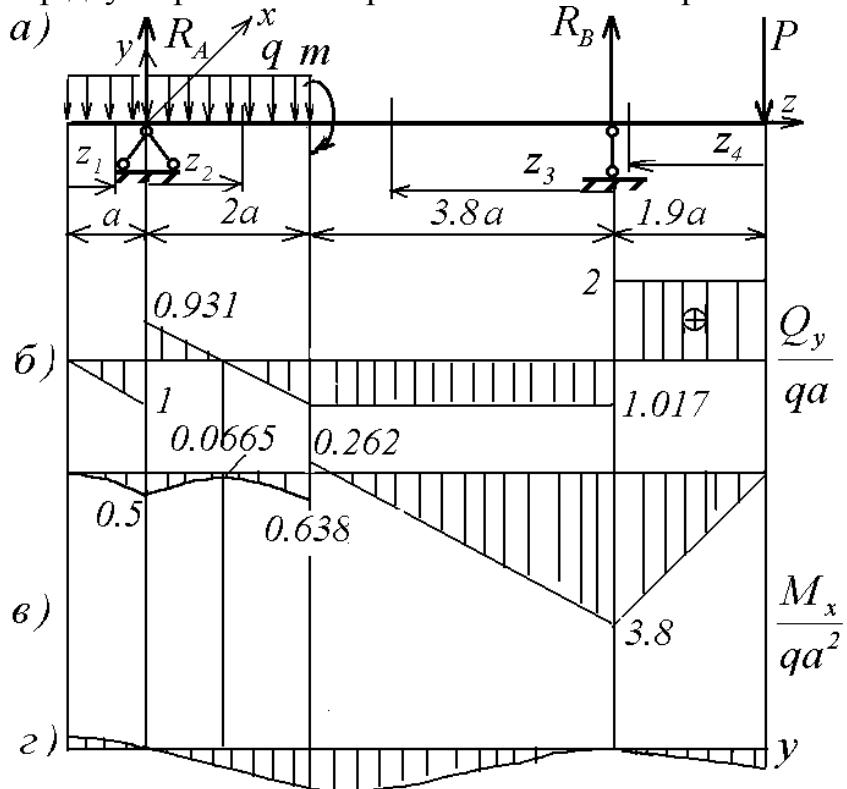


Рис. 4.4

Решение подобных задач ведется в следующем порядке.

а) Строится в масштабе расчетная схема балки (рис. 4.4).

б) Определение опорных реакций.

Балка имеет шарнирно – подвижную опору А и шарнирно – неподвижную опору В. Поскольку система сил, действующих на балку, включает только вертикальные силы и опора В перемещается горизонтально, горизонтальные составляющие реакции в опорах А и В будут равны нулю.

Вертикальные составляющие реакций  $R_A$  и  $R_B$  определим из уравнений равновесия моментов сил относительно точек А и В:

$$\sum M_{iA} = 0, R_B 5.8a - P 7.7a - m - 3aq * 0.5a = 0.$$

$$\sum M_{iB} = 0, -R_A 5.8a - P 1.9a - m + 3 * 5.3a^2 q = 0.$$

или

$$5.8aR_B - 17.800qa^2 = 0, -5.8aR_A + 11.200qa^2 = 0.$$

Отсюда следует

$$R_A = 11.200qa / 5.8 = 1.931qa, R_B = 17.800qa / 5.8 = 3.069qa.$$

Проверка

$$\sum P_{iy} = 0, R_A + R_B - P - 3aq = (3.069 + 1.931 - 2 - 3)qa = 0.$$

в) Составление аналитических выражений изменения изгибающего момента  $M_x$  и поперечной силы  $Q_y$  на всех участках.

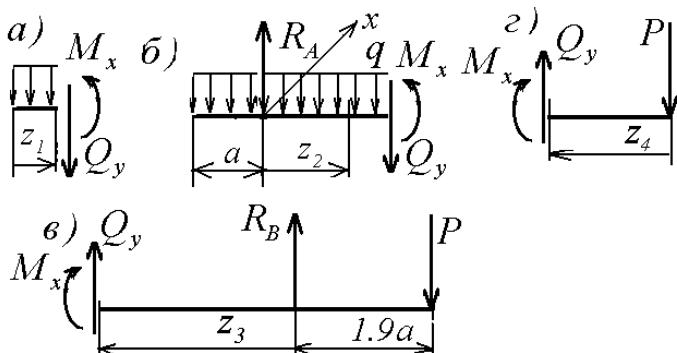


Рис. 4.5

Балка имеет 4 участка.

1 участок  $0 \leq z_1 < a$ .

Рассечем мысленно балку на две части поперечным сечением, отстоящим на расстояние  $z_1$  от левого конца балки. Рассматриваем левую отсеченную часть балки. Отбросим правую часть балки, ее действие на левую часть заменим поперечной силой  $Q_y$  и изгибающим

моментом  $M_x$ . Их положительные направления показаны на рис. 4.5, а.

Составим уравнения равновесия для сил, действующих на оставшуюся левую часть балки: сумма проекций сил на ось  $Cy$  равна нулю и сумма моментов относительно оси  $Cx$  равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0, \quad R_2 - qz_1 - Q = 0, \\ Q_y(z_1) &= -qz_1, \quad Q_y(0) = 0, \quad Q_y(a) = -qa \\ \sum M_{Cx} &= 0, \quad M_x(z_1) + 0.5qz_1^2 = 0, \\ M_x(z_1) &= -0.5qz_1^2, \quad M_x(0) = 0, \quad M_x(z_1) = -0.5qa^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при рассмотрении левой отсеченной части балки поперечная сила  $Q_y$  равна алгебраической сумме вертикальных внешних сил, расположенных слева от поперечного сечения, при этом положительные слагаемые в сумме – силы направленные вверх, отрицательные слагаемые – силы направленные вниз. Изгибающий момент  $M_x$  равен сумме моментов относительно оси  $Cx$ , проходящей через центр тяжести  $C$  поперечного сечения. При этом положительные слагаемые в сумме – это моменты, направленные по ходу часовой стрелки, а отрицательные слагаемые – моменты, направленные против хода часовой стрелки.

При рассмотрении правой отсеченной части балки учитываются силы, расположенные справа от поперечного сечения, и применяется обратное правило знаков.

2 участок  $0 \leq z_2 < 1.9a$ .

Рассматриваем левую отсеченную часть балки (рис. 4.5, б) и записываем, как и для первого участка уравнения равновесия проекций сил и моментов сил. Из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} Q_y(z_2) &= R_A - qa - qz_2 = 1.931qa - qz_2, \\ Q_y(0) &= 1.931qa, \quad Q_y(2a) = -1.069qa, \quad M_x(z_2) = R_A z_2 - 0.5q(z_2 + a)^2 \\ M_x(0) &= -0.5qa^2, \quad M_x(2a) = -0.638qa^2. \end{aligned}$$

Экстремальное значение  $z_2^3$  найдем из условия

$$\frac{dM_x}{dz_2} = Q_y = R_A - qa - q \cdot z_2^3 = 0,$$

$$\text{отсюда } z_2^3 = \frac{R_A - qa}{q} = \frac{1.931qa - qa}{q} = 0.931a.$$

Поскольку  $d^2M_x/dz_1^2 = M_{xu}'' = q < 0$ , то кривая  $M_x$  имеет выпуклость вверх и в сечении с координатой  $z_2 = z_2^3 = 0.931a$   $M_x$  имеет максимальное значение

$$M_x = 1.931qa \cdot 0.931a - qa - 0.5 * (0.931a)^2 = -0.0665qa^2.$$

3 участок  $0 \leq z_3 < 2c$ .

Рассматриваем правую отсеченную часть балки (рис. 4.5, в) и записываем, как и выше, уравнения равновесия проекций сил и моментов сил. Из этих уравнений получаем

$$Q_y(z_3) = P - R_B = -1.069qa,$$

$$M_x(z_3) = -P(z_3 + 1.9a) + R_B z_3, \quad M_x(0) = -3.8qa^2, \quad M_x(3.8a) = 0.262qa^2.$$

4 участок  $0 \leq z_4 < c$ .

Рассматриваем правую отсеченную часть балки (рис. 4.5, г) и записываем, как и выше, уравнения равновесия проекций сил и моментов сил. Из этих уравнений получаем

$$Q_y(z_4) = P = 2qa, \quad M_x(z_4) = -3.8qa^2.$$

г) По полученным величинам  $Q_y$  и  $M_x$  строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 4.5 б, в). По эпюре  $M_x$  определяем максимальный по модулю изгибающий момент в поперечных сечениях балки

$$M_{x_{max}} = 3.8qa^2 = 3.8 * 2.5 = 9.500 \text{ кН*м.}$$

д) При построении прогиба продольной оси балки следует принять во внимание, что

- в опорных точках прогиб балки равен нулю;
- в точках, в которых изгибающий момент положителен изогнутая продольная ось балки имеет выпуклость вниз;
- в точках, в которых изгибающий момент отрицателен изогнутая продольная ось балки имеет выпуклость вверх;
- в точках, в которых изгибающий момент равен нулю имеется точка перегиба продольной оси балки.

Приблизительный вид изогнутой оси балки показан на рис. 4.4 г.

е) Подбор двутаврового сечения.

Расчетная величина момента сопротивления балки

$$W_x \geq M_{x_{max}} / R_u = 9.5 * 10^6 / 200 = 47500 \text{ мм}^3 = 47.5 \text{ см}^3.$$

По табл. 4.3 определяем двутавр № 12 с характеристиками  $W_x = 58.4 \text{ см}^3$ ,  $J_x = 350 \text{ см}^4$ .

## Задача №5

### Совместное действие изгиба и кручения

5.1. Задание. Стальной вал постоянного сечения вращается с постоянной угловой скоростью, совершая  $n$  об/мин, и передает мощность  $N$  кВт (табл. 5.1). Две проекции схемы нагружения вала показаны в табл. 5.1.

Требуется для вала, при заданном коэффициенте прочности  $n_T = 1,5$ :

- Определить нагрузки, действующие на вал;
- Построить эпюры изгибающих моментов в двух плоскостях (вертикальной и горизонтальной), результирующего изгибающего момента  $M_u$ , крутящих моментов и расчетного (эквивалентного) момента  $M_p = \sqrt{M_u^2 + M_k^2}$ ;
- Определить допускаемое напряжение по формуле

$$\bullet \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где  $\sigma_T$  - предел текучести материала вала. Пределы текучести сталей приведены в табл. 5.3;

- Из условия прочности определить диаметр вала и его значение в мм округлить до числа из ряда предпочтительных размеров в машиностроении (числа, заканчивающиеся цифрой 0, 2, 4, 5, 6, 8).

При определении  $M_u$  и  $M_p$  в тех сечениях, в которых один из моментов  $M_x$ ,  $M_y$  или  $M_k$  имеет разрыв значений, моменты  $M_u$  и  $M_p$  нужно определять слева и справа от этого сечения.

Исходные данные взять из табл. 5.1 - 5.3.

Таблица 5.1

Номер строки	Номер схемы	Размеры, м					$N$ , кВт	$n$ , об/мин	Марка стали
		$a$	$b$	$c$	$D_1$	$D_2$			
1	1	0,5	0,3	0,3	0,4	0,6	20	300	10
2	2	0,4	0,5	0,5	0,2	0,6	15	400	20
3	3	0,3	0,7	0,3	0,3	0,5	10	350	25
4	4	0,4	0,3	0,5	0,2	0,4	16	200	3
5	5	0,6	0,8	0,4	0,4	0,6	18	250	30
6	6	0,4	0,5	0,3	0,3	0,6	12	700	35
7	7	0,5	0,3	0,3	0,2	0,5	14	500	4
8	8	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	20	600	10
9	9	0,4	0,6	0,3	0,4	0,5	15	400	3
0	10	0,8	0,4	0,7	0,3	0,6	17	200	30
		$M$	$L$	$L$	$M$	$M$	$K$	$M$	$L$

Таблица 5.2

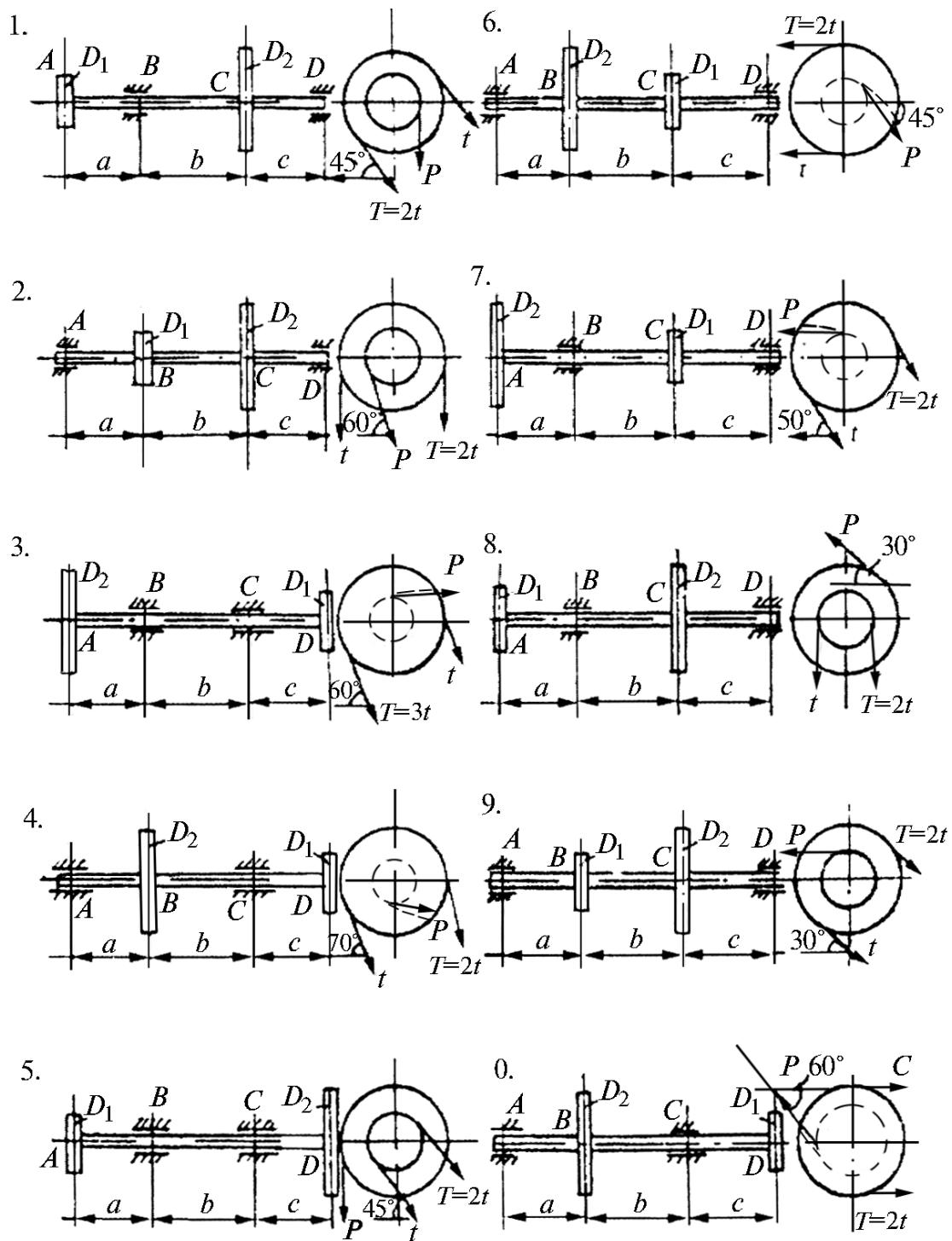


Таблица 5.3

Пределы текучести сталей

Марка стали	3	4	10	20	25	30	35
Предел текучести $\sigma_T$ , МПа	250	280	250	250	280	300	320

## 5.2. Теоретическая справка

Равномерно вращающийся вал можно условно рассматривать как находящийся в равновесии, поскольку уравнение равновесия вала относительно его продольной оси и другие уравнения равновесия вала удовлетворяются тождественно. При одновременном действии моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_k$  в точках вала возникают нормальные и касательные напряжения, вызванные изгибом и кручением. Материал вала находится в сложном напряженном состоянии. Такой вал можно рассчитывать на прочность по одной из теорий прочности. Условием данной задачи предписано использовать третью теорию прочности - теорию наибольших касательных напряжений.

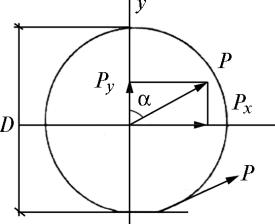
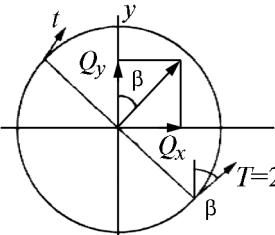
Для удобства расчетов, нагружение вала представляется как кручение и изгиб в двух взаимно ортогональных плоскостях (косой изгиб). Принцип независимости действия сил позволяет рассматривать сложное сопротивление как результат сложения трех простых, т.е. кручения и двух ортогональных плоских изгибов. При этом поперечные силы при проверке прочности не учитываются.

Расчет вала на статическую прочность начинается с определения действующих на него нагрузок.

По величине передаваемой мощности  $N$  и числу оборотов в минуту  $n$ , определяется величина крутящего момента, действующего на участке вала между шкивами,

$$M_k = \frac{30N}{\pi n}; \quad 1 \text{ кВт} = 1 \text{ кНм/с.} \quad (5.1)$$

Таблица 5.4

	<p>Усилия, передающиеся на вал через шестерню зубчатого зацепления</p> $M_k = P \frac{D}{2}; \quad P = \frac{2M_k}{D}; \quad (5.2)$ $P_y = P \cos \alpha; \quad P_x = P \sin \alpha$
	<p>Усилия, передающиеся на вал через шкив ременной передачи</p> $M_k = T \frac{D}{2} - t \frac{D}{2} = t \frac{D}{2}; \quad t = \frac{2M_k}{D}; \quad (5.3)$ $R = 3t; \quad R_y = R \cos \beta; \quad R_x = R \sin \beta$

Нагрузки на вал передаются через шкивы, шестерни или другие детали. По величине крутящего момента вычисляются окружные усилия. Затем они приводятся к оси вала (при этом получается крутящий момент  $M_k$ ). Реальные средства закрепления вала (подшипники) заменяются в запас прочности на шарнирные опоры. Наклонные силы раскладываются на вертикальные и горизонтальные составляющие.

В табл. 5.4 приведены способы описания воздействия на вал зубчатого колеса и шкива ременной передачи, а также формулы для определения проекций соответствующих сил на оси координат.

Силы, действующие на вал, вызывают изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Для расчета вала на прочность следует построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной  $M_x$  и горизонтальной  $M_y$  плоскостях и эпюру крутящих моментов  $M_k$ .

Для вала постоянного поперечного сечения опасными будут те сечения, где возникает самый большой эквивалентный момент

$$M_p = \sqrt{M_u^2 + M_k^2},$$

где  $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$  - результирующий изгибающий момент.

### 5.3. Пример решения задачи

Стальной вал постоянного сечения вращается с постоянной частотой  $n$  об/мин и передает мощность  $N$  кВт (рис. 5.1,а).

Требуется подобрать диаметр вала, если известны предел текучести материала  $\sigma_T$  и запас прочности  $n_T = 1.5$ :

- Определить нагрузки, действующие на вал;
- Построить эпюры изгибающих моментов в двух плоскостях (вертикальной и горизонтальной) и эпюру крутящих моментов;
- Определить по формуле

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

результирующий изгибающий момент в сечении вала.

- Определить по формуле

$$M_p = \sqrt{M_u^2 + M_k^2}$$

расчетный (эквивалентный) момент по третьей теории прочности.

- Подобрать диаметр вала, используя третью теорию прочности (теорию наибольших касательных напряжений) и его значение в мм округлить до числа из ряда предпочтительных размеров в машиностроении.

Исходные данные взять из табл. 5.1 – 5.3.

#### Исходные данные

$a = 0.3$  м;  $b = 0.7$  м;  $c = 0.5$  м;  $D_1 = 0.2$  м;  $D_2 = 0.4$  м;  $N = 17$  кВт;  $n = 200$  об/мин. Материал сталь 25.

#### Решение

- а) Определение нагрузок, действующих на вал

Условие равномерного вращения вала сводится к равенству моментов сил, приложенных к валу относительно оси вращения

$$M = P \frac{D_1}{2} = (T - t) \frac{D_2}{2} = (2t - t) \frac{D_2}{2} = t \frac{D_2}{2} = \frac{N}{\omega} =$$

$$= \frac{60N}{2\pi n} = \frac{60 * 15 * 1000}{2\pi 200} = 812 \text{ H*m.}$$

Силы натяжения ветвей ремня ременной передачи

$$t = \frac{2M}{D_2} = 2 * 812 / 0.4 = 4058 \text{ H} = 4.058 \text{ kN};$$

$$T = 2t = 2 * 4.058 = 8.116 \text{ kN.}$$

Сила натяжения каната

$$P = \frac{2M}{D_1} = 2 * 812 / 0.2 = 8117 \text{ H} = 8.117 \text{ kN.}$$

Суммарная сила натяжения ветвей ремня ременной передачи

$$R = T + t = 2t + t = 3t = 3 * 4.058 = 12.175 \text{ kN.}$$

Проекции суммарной силы натяжения ветвей ремня ременной передачи на оси координат x и y

$$R_x = R \cos(\pi - 70^\circ) = R \cos 110^\circ = -12.175 * 0.342 = -4.164 \text{ kN};$$

$$R_y = R \cos(1.5\pi - 70^\circ) = R \cos 200^\circ = -12.175 * 0.939 = -11.441 \text{ kN.}$$

б) Построение эпюры изгибающих моментов в двух плоскостях (вертикальной и горизонтальной) и эпюру крутящих моментов.

Схема нагружения вала в вертикальной плоскости приведена на рис. 5.1, б.

Уравнение равновесия моментов сил, приложенных к валу и действующих в вертикальной плоскости, имеют вид

$$\sum M_{Ax} = 0,$$

$$\sum M_{Bx} = 0,$$

$$R_{By}(a + b) + R_y a = 0,$$

$$-R_{Ay}(a + b) - R_y b = 0.$$

Отсюда следует

$$R_{By} = -R_y a / (a + b) = 11.441 * 0.3 / (0.3 + 0.7) = 3.432 \text{ kN};$$

$$R_{Ay} = -R_y b / (a + b) = 11.441 * 0.7 / (0.4 + 0.7) = 8.008 \text{ kN.}$$

Проверка

$$\sum P_y = R_y + R_{Ay} + R_{By} = -11.441 + 8.008 + 3.432 = 0.$$

В вертикальной плоскости вал имеет 2 участка.

1 участок  $0 \leq z_1 < a$ .

Для левой отсеченной части вала имеем

$$M_x(z_1) = R_{Ay} z_1,$$

$$M_x(0) = 0,$$

$$M_x(a) = R_{Ay} a = 8.008 * 0.3 = 2.403 \text{ kN*m.}$$

2 участок  $0 \leq z_2 < b$ .

Для правой отсеченной части вала имеем

$$M_x(z_2) = R_{By} z_2,$$

$$M_x(0) = 0,$$

$$M_x(c) = R_{By}b = 3.432 \cdot 0.7 = 2.402 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

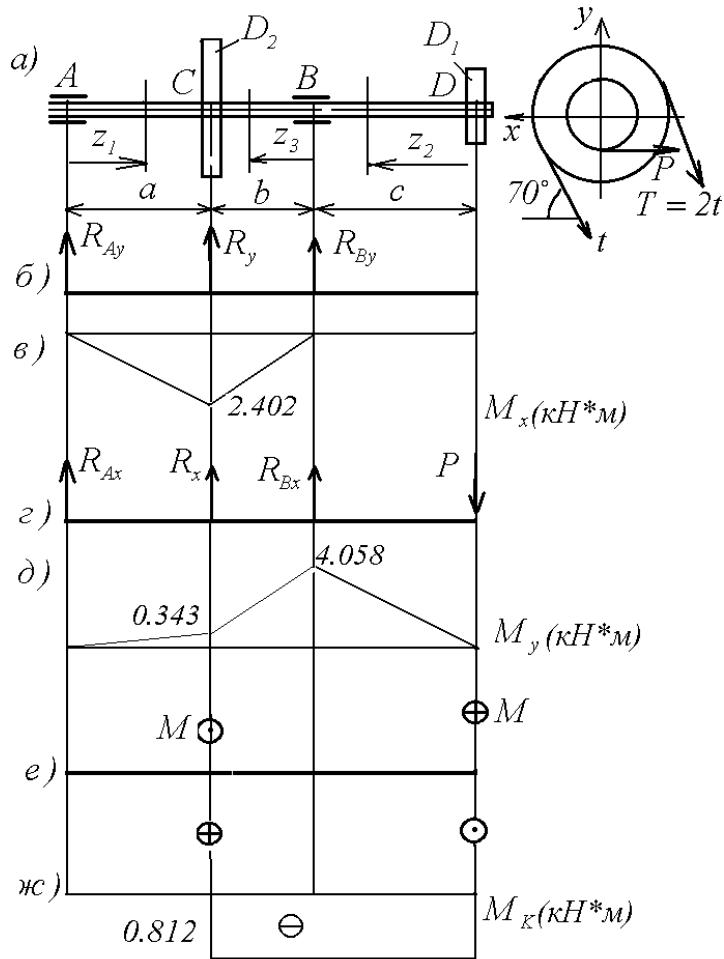


Рис. 5.1

По полученным данным строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$  (рис. 5.1, в).

Схема нагружения вала в горизонтальной плоскости приведена на рис. 5.1, г.

Уравнения равновесия моментов сил, приложенных к валу и действующих в горизонтальной плоскости, имеют вид

$$\sum M_{Ay} = 0, \sum M_{By} = 0,$$

$$R_{Bx}(a+b) + R_xa - P(a+b+c) = 0,$$

$$-R_{Ax}(a+b) - R_xb - Pc = 0.$$

Отсюда следует

$$R_{Bx} = -(R_xa - P(a+b+c))/(a+b) = -(-4.164 \cdot 0.3 - 8.117 \cdot (0.3+0.7+0.5))/(0.3+0.7) = 13.425 \text{ кН};$$

$$R_{Ax} = -(-R_xb - Pc)/(a+b) = (4.164 \cdot 0.7 - 8.117 \cdot 0.5)/(0.3+0.7) = -1.143 \text{ кН}.$$

Проверка

$$\sum P_x = R_x + R_{Ax} + R_{Bx} - P = -4.164 - 1.143 + 13.425 - 8.117 = 0.$$

В горизонтальной плоскости вал имеет 3 участка.

1 участок  $0 \leq z_1 < a$ .

Для левой отсеченной части вала имеем

$$M_y(z_1) = R_{Ax}z_1, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(a) = R_{Ax}a = -1.143 \cdot 0.3 = -0.343 \text{ кН*м.}$$

2 участок  $0 \leq z_3 < b$ .

Для правой отсеченной части вала имеем

$$M_y(z_3) = R_{Bx}z_3 - P(z_3 + c),$$

$$M_y(0) = Pc = 8.117 \cdot 0.5 = 4.058 \text{ кН*м,}$$

$$M_y(b) = R_{Bx}b - P(b + c) = 13.425 \cdot 0.7 - 8.117 \cdot (0.7 + 0.5) = -4.058 \text{ кН*м.}$$

3 участок  $0 \leq z_2 < c$ .

Для правой отсеченной части вала имеем

$$M_y(z_2) = Pz_2, \quad M_y(0) = 0,$$

$$M_y(c) = Pc = -8.117 \cdot 0.5 = -4.058 \text{ кН*м.}$$

По полученным данным строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  (рис. 5.1,д).

Крутящий момент  $M_K = M = 0.812 \text{ кН*м}$  действует в сечениях вала на первом и втором участках, расположенных между шкивом ременной передачи и барабаном канатной передачи. Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 5.1,е.

в) Подбор диаметра вала по третьей теории прочности (теории максимальных касательных напряжений).

г) Из анализа эпюр моментов, действующих в сечениях вала, следует, максимального значения эквивалентный момент может достигнуть только в сечениях С или В

Расчетный момент определяется по формуле  $M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_K^2}$ .

Для сечения В  $M_{pC} = \sqrt{0^2 + 4.058^2 + 0.812^2} = 4.139 \text{ кН*м.}$

Для сечения С  $M_{pB} = \sqrt{2.402^2 + 0.343^2 + 0.812^2} = 2.2559 \text{ кН*м.}$

Расчет сечения вала следует вести для сечения С, как наиболее нагруженного.

Условие прочности вала

$$\sigma = \frac{M_p}{W_u} \leq [\sigma],$$

где  $W_u = \pi d^3 / 32$  - момент сопротивления сечения вала при совместном изгибе и кручении;  $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 250 / 1.5 = 166.67 \text{ МПа}$  – допускаемое напряжение.

$$\text{Отсюда } d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_p}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4.139 \cdot 10^6}{\pi \cdot 166.67}} = 60.898 \text{ мм.}$$

Принимаем диаметр равным 62 мм.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ковалев Н.Ф. Прикладная механика. Учебник для втузов. М.: Высшая школа. 1982. 400 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – 9 –е изд., перераб.-М.: наука, 1986. 512 с.
3. В.А. Рябцев, А.А. Воропаев, Ф.Х. Томилов Руководство по самостоятельной работе по дисциплине «Прикладная механика»: учеб. пособие. [Электронный ресурс]. - / Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2016.

Приложение  
Образец титульного листа расчетно-проектировочной работы

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра «Прикладная математика и механика»

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1  
по дисциплине «Прикладная механика»

Раздел «Сопротивление материалов»

Вариант 367

Выполнил студент гр. бЛП-201 Иванов Ю.И.

Принял доцент Петров В.А.

Воронеж 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Задача № 1. Расчет на прочность и жесткость стержня при растяжении - сжатии.....	5
1.1. Задание.....	5
1.2. Теоретическая справка.....	6
1.3. Пример решения задачи.....	8
2. Задача № 2. Расчеты на прочность и жесткость статически неопределенной стержневой системы при растяжении – сжатии.....	10
2.1. Задание.....	10
2.2. Теоретическая справка.....	14
2.3. Пример решения задачи.....	15
Задача № 3. Расчеты на прочность и жесткость при кручении вала круглого сечения.....	18
3.1. Задание.....	18
3.2. Теоретическая справка.....	19
3.3. Пример решения задачи.....	20
4. Задача № 4. Расчет балки на прочность при плоском изгибе.....	24
4.1. Задание.....	24
4.2. Теоретическая справка.....	24
4.3. Пример решения задачи для двухпорной балки.....	27
Задача №5. Совместное действие изгиба и кручения.....	31
5.1. Задание.....	31
5.2. Теоретическая справка.....	33
5.3. Пример решения задачи.....	34
Библиографический список.....	38
Приложение.....	39

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**  
**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к самостоятельной работе для студентов  
направления 22.03.02 «Металлургия»,  
профиль «Технология литьевых процессов»  
очной формы обучения

**Составитель**

Рябцев Владимир Андреевич

Компьютерный набор В.А. Рябцева

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 30.06.2022.  
Уч.-изд. л. 2,2.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»  
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84