Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Строительно-политехнический колледж

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по проведению практических занятий и выполнению самостоятельных работ
по дисциплине
ЕН.03. Теория вероятностей и математическая статистика
для студентов специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Воронеж 2023

УДК 51(075.7)
ББК 22.1я7

Составители:
Л.В. Акчурина

Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания по проведению практических занятий и выполнению самостоятельных работ по дисциплине ЕН.03. Теория вероятностей и математическая статистика для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Л.В. Акчурина. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2023, 30 с.

Даны теоретические сведения по теории вероятностей и математической статистике, приведены примеры решения задач, предложены задания для самостоятельной работы. Могут использоваться для разработки индивидуальных проектов и для подготовки к сдаче ЕГЭ.
Предназначены для самостоятельной работы студентов по дисциплине ЕН.03. Теория вероятностей и математическая статистика для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

УДК 51(075.7)
ББК 22.1я7

1. Введение в теорию вероятностей

1.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, занимающийся изучением количественных состояний множества, подчиненных некоторым условиям.

Числом размещений A_n^k, читается “число размещений из n по k”, называется число различных способов упорядочивания k различных предметов из всего набора, содержащего n предметов ($k < n$, т. е. выбирается подмножество), комбинации отличаются набором предметов и порядком их следования:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В частном случае, когда $k = n$, т. е. работаем со всеми элементами множества, получается *число перестановок*

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!, \text{ (заметим, что } 0! = 1).$$

Числом сочетаний $\boldsymbol{C_n^k}$ называется число различных способов упорядочивания k различных предметов из всего набора, содержащего n предметов ($k < n$, т. е. выбирается подмножество), комбинации отличаются только набором предметов, порядок их следования не важен:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Отметим, что число сочетаний из n по k дает количество его подмножеств, содержащих k элементов.

Классическими примерами демонстрации работы формул комбинаторики являются следующие задачи.

Пример 1. Пусть на окружность нанесено десять точек. Вычислим, сколько возможно по этим точкам построить: а) хорд; б) векторов, длины отличной от нуля; в) треугольников.

Решение.

а) Хорда – это отрезок, соединяющий две точки окружности. Мы выбираем две точки из десяти. Порядок следования точек в выбранных двух неважен, тогда применяем формулу сочетаний (6) имеем $C_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!2!} = \frac{9 \cdot 10}{2!} = 45$ хорд.

б) Вектор – это направленный отрезок, на одной хорде есть два вектора, которые отличаются направлением, т. е. ответ уже очевиден – 90 векторов.

Но и здесь применим комбинаторику. Чтобы составить вектор нужно выбирать 2 точки из 10, а т. к. порядок следования элементов важен, то возьмем формулу размещений (4) и получим $A_{10}^{2}=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{10!}{8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!}=90$ векторов**.**

в) Чтобы вычислить число треугольников нужно выбирать 3 точки из 10 и применить формулу сочетаний, т. к. нумеровать вершины в этой геометрической фигуре не нужно, тогда получим $C_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!3!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!3!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ треугольников.

Ответ: а) 45 хорд; б) 90 векторов; в) 120 треугольников.

Задания

1. Сколькими способами можно поставить в ряд 6 человек для выполнения их группового портрета? Сколькими способами можно это сделать, если поставить трех человек в переднем ряду и трех во втором? *Ответ*: 720.
2. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «лодка»? *Ответ*: 120.
3. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «математика»? *Ответ*: 151200.
4. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «комбинаторика»? *Ответ*: 389188800.
5. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник? *Ответ*: 151200.
6. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов на студенческую конференцию из группы в 20 человек? *Ответ*: 1140.
7. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если материал пяти различных цветов? *Ответ*: 60.
8. В театре 10 актеров и 8 актрис. Сколькими способами можно распределить между ними роли в пьесе, в которой 5 мужских и 3 женские роли? *Ответ*: 10160640.
9. Из колоды в 52 карты выбирают 3. Сколькими способами может быть сделан выбор «тройка, семерка, туз»? *Ответ*: 64.
10. Сколькими способами можно расселить 8 студентов по трем комнатам: одноместной, трехместной и четырехместной? *Ответ*: 280.

1.2. Основные понятия. Классическая вероятность

Опытом (испытанием) будем называть комплекс наступающих одновременно условий, которые при повторении одного и того же опыта должны строго повторяться. Опыт – это игра в шахматы, условия – это наличие игральной доски со всеми фигурами и двух игроков.

Качественная характеристика опыта состоит в регистрации какого-нибудь факта, чаще его называют событием. При этом говорят, что «событие появилось (произошло)» или «событие не появилось (не произошло)» в результате опыта. Далее обозначать события будем прописными латинскими буквами A, B, C.

Событие называется *случайным*, если оно может произойти в результате определенного опыта.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно выпадает в результате проведенного опыта.

Событие называется *невозможным*, если его появление в результате проведения опыта невозможно.

Примером для понимания такого деления событий является опыт – бросание игральной кости (кубика с указанными очками на его гранях, их 6). Само бросание кубика – это опыт. Выпадение в результате опыта любого числа от “1” до “6” – это достоверное событие; выпадение “7” – событие невозможное; а выпадение “1” – это случайное событие, т.к. оно может не произойти.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* (*дополнительным*) событию А, если его осуществление означает не осуществление события А.

В том же самом опыте событием A будем считать выпадение четного числа, соответственно, $\overline{A}$ – это выпадение нечетного числа.
A,B,C,…

События называются *несовместными*, если появление одного из них в единичном испытании исключает появление другого. Появление герба и решки в одном испытании − события несовместные.

События называются *совместными*, если их совместное появление в одном испытании не исключено. Попадание в мишень и промах по мишени при одном выстреле являются событиями несовместными, а в серии выстрелов − события совместны.

Снова в опыте с игральным кубиком, обозначим A – выпадение четного числа, B – выпадение нечетного числа, C – выпадение “5”, тогда A и C события несовместные, а A и B – совместные.

Пример 1. Вычислим вероятность угадать в спортлото 5 из 36 все шары. Поскольку выигрышная комбинация одна и перемешивание шаров в ней не меняет сути, поэтому для вычисления всех исходов можно применять формулу сочетаний, считая m = 1, тогда

$$n = C_{36}^{5} = \frac{36!}{(36-5)!5!} = \frac{36!}{31!5!} = \frac{31!\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{31!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 376992.$$

Соответственно, вероятность выиграть равна $p(A) = \frac{1}{\frac{36!}{31!5!}} = \frac{1}{376992} = 0.0000027$.

Пример 2. Студент идет на экзамен, зная 16 вопросов из 25. Студент точно сдаст экзамен, если из трех вопросов в билете два будут ему известны? Какова вероятность студенту сдать экзамен?

Решение. Множество всех элементарных исходов равно количеству способов, сколькими можно выбрать 3 вопроса из 25, а так как порядок следования вопросов в билете не важен, то это будет число сочетаний $n = C_{25}^{3}$.

Определим число исходов, благоприятных событию A - среди трех вопросов два известны. Два известных вопроса можно выбрать C_{16}^{2} способами, а один неизвестный из оставшихся 9 невыученных (25–16=9) можно выбрать C_{9}^{1} способами. Общее число благоприятных событию A исходов равно произведению полученных вариантов: $m = C_{16}^{2}C_{9}^{1}$. Следовательно,

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{16}^{2}C_{9}^{1}}{C_{25}^{3}} = \left| \begin{array}{l} C_{16}^{2}C_{9}^{1} = \frac{16!\cdot 9}{(16-2)!2!} = \frac{15\cdot 16}{2!}\cdot 9 = 1080 \\ C_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!3!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{3!} = 2300 \end{array} \right| \approx 0,47.$$

Ответ: $p(A) = 0,47$.

Пример 3. Сборная конструкция состоит из четырех объемных элементов, которые завозятся на стройку по одному случайным образом. Какова вероятность того, что конструкция будет смонтирована без простоев, связанных с завозом, если все элементы различны?

Решение. Общее число исходов равно числу перестановок $n = P_4 = 4! = 24$.

Благоприятным исходом m_1 будет один, т.к. задержек не будет только в том случае, если элементы конструкции завозятся в том же порядке, в котором они должны быть смонтированы. Следовательно, $p_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{24} \approx 0,04$.

Задания.

11. Сборная конструкция состоит из шести элементов, два из которых одинаковы. Элементы конструкции завозятся на стройку в произвольном порядке. Какова вероятность того, что элементы будут завезены в том порядке, в котором они должны быть смонтированы?

12. В аудитории 8 двухместных парт. Какова вероятность того, что при случайном рассаживании два данных студента из группы в 16 человек окажутся за одной партой?
13. Студент идет на экзамен, выучив 25 вопросов из 36. Какова вероятность ответить на три вопроса, задаваемых преподавателем поочерёдно?
14. На подмостках лежат три белых и два красных кирпича. Каменщик случайным образом выкладывает их в один ряд. Какова вероятность того, что цвет кирпичей будет чередоваться?
15. Куратор назначает трех наугад выбранных студентов из своей группы делегатами на профсоюзную конференцию. Какова вероятность того, что делегация будет состоять из одного студента и двух студенток, если в группе 15 студентов и 5 студенток?
16. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших на них очков будет равна трем?
17. Игроку сдают 6 карт из 36. Какова вероятность того, что среди них два туза?
18. Управляющий проверяет наугад 4 СМУ. Какова вероятность того, что номера этих СМУ будут идти в порядке возрастания?
19. На складе имеется 30 мешков цемента марки 300, 50 – марки 400 и 20 – марки 500. Наугад берется один мешок цемента и привозится на стройку. Какова вероятность того, что его придется обменивать на складе на другой мешок, если цемент марки 300 не подходит для планируемой работы?
20. Какова вероятность того, что из группы в 20 студентов при случайном выборе старостой станет студент Иванов, а профоргом – Петров, если в группе есть два студента по фамилии Иванов и один по фамилии Петров?

1.3. Вероятность произведения и суммы событий

Произведением (*пересечением*) событий АВ (или $A \cap B$) называется событие, состоящее в совместном наступлении обеих этих событий.

Случайные события *A* и *B* называются *независимыми*, если наступление одного из них не влияет на вероятность появление второго; в противном случае они будут *зависимыми.*

Пусть *P*(*A*) и *P*(*B*) — вероятности наступления случайных событий *A* и *B*, подсчитанные еще до испытаний. Если события *A* и *B* зависимы и, например, событие *A* уже произошло, то вероятность наступления события *B* уже изменилась, то обозначим ее через *P*(*B/A*) – эту вероятность называют *условной*, ее еще обозначают $P_A(B)$.

Теорема 1. (*Вероятность произведения независимых событий*).
Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$p(AB) = p(A)p(B) \quad .$$

Теорема 2. (*Вероятность произведения зависимых событий*).

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности первого из наступивших событий на условную вероятность наступления второго события:

$$p(AB) = p(A)p(B/A) \quad (\text{или } p(AB) = p(A)p_A(B))$$

Пример. Перегорела одна из трех лампочек, включенных в сеть последовательно. Наудачу выбранную лампочку заменяют годной, после чего проверяется исправность линии. Если повреждение не устранено, то заменяется другая лампочка. Найти вероятность того, что повреждение будет устранено после второй замены лампочки.

Решение. Пусть событие A – линия исправна после второй замены лампочки. Событие A является произведением события A_1 – линия неисправна после первой замены лампочки (т.е. заменена исправная лампочка) и события A_2 – линия исправна после второй замены лампочки (т.е. заменена неисправная лампочка): $A = A_1A_2$. Поскольку события A_1 и A_2 зависимы, то $p(A_1A_2) = p(A_1)p_{A_1}(A_2)$.

Вероятность заменить первый раз годную лампочку, которых две из трех,
$p(A_1) = 2/3$. Вероятность во второй раз заменить перегоревшую лампочку, которая одна из двух оставшихся непроверенных, $p_{A_1}(A_2) = 1/2$, тогда $p(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}33$.

Ответ: $p(A) \approx 0{,}33$.

В теории вероятностей над событиями, как над объектами изучения, можно производить различные операции, аналогичные действиям над множествами: сложение (объединение), умножение (пересечение), вычитание (дополнение).

Суммой (*объединением*) событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. Если события − совместные , то их сумма $A + B$ (или, что тоже самое $A \cup B$) означает наступление или события А или В, или их обоих одновременно. Если А и В несовместные, то их сумма означает появление события или А или В.

Теорема 3. (*Вероятность суммы несовместных событий*). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) \ .$$

Теорема 4. (*Вероятность суммы совместных событий*). Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$$

Пример. По мишени стреляют три стрелка. Вероятность попадания в мишень первым стрелком – 0,9, вторым – 0,8 и третьим – 0,5. Найти вероятность следующих событий:

B_1 - все три стрелка попали в мишень;

B_2 - только два стрелка попали в мишень;

Решение. Заметим, что каждое из событий B_k состоит из нескольких событий – попадания или не попадания в цель каждого из трех стрелков, обозначим их:

A_1 - первый стрелок попал в цель, $p(A_1) = 0{,}9$, $p(\overline{A}_1) = 1 - p(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$;

A_2 - второй стрелок попал в цель, $p(A_2) = 0{,}8$, $p(\overline{A}_2) = 1 - p(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$;

A_3 - третий стрелок попал в цель, $p(A_3) = 0{,}5$, $p(\overline{A}_3) = 1 - p(A_3) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Заметим, что все попали значит $B_1 = A_1A_2A_3$. Так как события A_1, A_2 и A_3 независимы, то по формуле (12)

$$p(B_1) = p(A_1A_2A_3) = p(A_1)p(A_2)p(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}36.$$

Событие B_2 – только два попадания складывается из следующих возможных вариантов: первый стрелок не попал, а второй и третий попали, или второй стрелок не попал, а первый и третий попали, или третий стрелок не попал, а первый и второй попали. Перебор трех вариантов, когда один из стрелков не попал в мишень, а остальные двое попали представим формулой $B_2 = \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3$, тогда

$$p(B_2) = p(\overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3).$$

А т. к. события в скобках $\overline{A}_1A_2A_3$, $A_1\overline{A}_2A_3$ и $A_1A_2\overline{A}_3$ попарно несовместны, то

$$p(B_2) = p(\overline{A}_1A_2A_3) + p(A_1\overline{A}_2A_3) + p(A_1A_2\overline{A}_3).$$

Далее из независимости событий A_1, A_2 и A_3 следует

$$p(B_2) = p(\overline{A}_1)p(A_2)p(A_3) + p(A_1)p(\overline{A}_2)p(A_3) + p(A_1)p(A_2)p(\overline{A}_3) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}49.$$

Задания

21. При заезде на стройку вероятность прокола шины самосвала равна 0,005. Какова вероятность, что прокола шины не будет при трехкратном заезде на стройку?
22. Стрелок набирает не менее 9 очков в 75% случаев, а вероятность попадания в десятку равна 0,4. Какова вероятность попадания в девятку?
23. Вероятность заболеть во время эпидемии гриппа равна 0,1. Какова вероятность того, что в бригаде из восьми человек никто не заболел?
24. Какова вероятность для студента быть отличником, если вероятность сдать на отлично первый экзамен – 80%, второй – 90% и третий – 95%?
25. Вероятность разрушения у двух конкретных домов при 6 бальном землетрясении равны соответственно 1/10 и 1/15. Найти вероятность того, что оба дома при землетрясении устоят.

26. Баскетболист выполняет два штрафных броска, при этом вероятность попасть в первый раз равна 0,8, а во второй – 0,9. Найти вероятность получить только одно очко из двух.
27. Прибор состоит из трех жизненно важных узлов, отказ каждого из них выводит из строя весь прибор. Какова вероятность безотказной работы всего прибора, если вероятности отказа узлов равны 0,3; 0,2 и 0,1?
28. На стройке работают два крана. Один из них занят 70% всего рабочего времени, а другой – 80%. Какова вероятность того, что в данный момент работает только один кран?
29. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первым стрелком равна 0,8 и вторым – 0,7. Какова вероятность того, что в цель попадет только один стрелок?
30. 90% продукции завода составляют стандартные изделия, из них 70% – высшего сорта. Какова вероятность, что взятое наугад изделие высшего сорта?

1.4. Формула полной вероятности

Пусть событие B может наступить при условии появления одного из попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ (их называют *гипотезами*), т.е.

$$p(A_k \cap A_p) = 0,$$

где $k \neq p$, $k = 1..n$, $p = 1..n$.

События (гипотезы) $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} p(A_k) = 1.$$

Теорема 5. (*Формула полной вероятности*).

Вероятность наступления события B, которое может наступить при условии появления одного из попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, вычисляется по формуле

$$p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + ... + p(A_n)p_{A_n}(B).$$

Пример. В магазине имеются электрические лампочки, изготовленные на трех заводах: 3 ящика с первого завода, 5 – со второго завода и 2 – с третьего. Процент бракованных лампочек (то есть тех, что перегорают раньше положенного срока) составляет на первом заводе – 10%, на втором – 20%, на третьем – 25%. Найти вероятность купить бракованную лампочку при условии, что ящики заносятся в торговый зал случайным образом.

Решение. Поскольку ящик с лампочками может быть ящиком с любого из трех заводов, то гипотезы всего три, а именно, ящик, а значит и лампочка сделана на первом заводе – A_1, A_2 – лампочка сделана на втором заводе, A_3 – на третьем заводе.

Так как в магазине всего $3+5+2=10$ ящиков с лампочками, то вероятность что лампочка изготовлена первым заводом $p(A_1)=3/10$, соответственно, $p(A_2)=0{,}5$, $p(A_3)=0{,}2$.

Если лампочка произведена на первом заводе, то вероятность события $B-$ деталь бракованная – $p_{A_1}(B)=0{,}1$, так как на первом заводе брак составляет 10%. Аналогично, $p_{A_2}(B)=0{,}2$, $p_{A_3}(B)=0{,}25$.

По формуле полной вероятности (20) при $n=3$:

$$p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+p(A_3)p_{A_3}(B)=$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \qquad \Downarrow \quad \Downarrow \qquad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$= \quad 0{,}3\cdot 0{,}1 \quad + \quad 0{,}5\cdot 0{,}2 \quad + \quad 0{,}2\cdot 0{,}25 \quad = 0{,}18.$$

Ответ: $p(B)=0{,}18$.

Задания

31. Вероятности сдать или не сдать экзамен без дополнительных вопросов равны соответственно 0,3 и 0,2. В остальных случаях студенту задаются дополнительные вопросы, вероятность ответить на которые равна 0,6. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?
32. Пассажир электрички вышел на платформу в пункте А и знает, в каком направлении находится пункт В. Какова вероятность того, что он прибудет в пункт В, если в каждой развилке путник выбирает дорогу в нужном направлении случайным образом? (Схема дорог указана ниже)

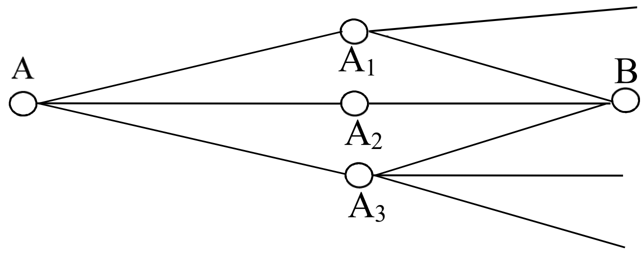


Рис.

33. Вероятность обнаружить брак в цехе равна 0,3. Вероятность того, что в дальнейшем брак будет обнаружен в ОТК завода, равна 0,6. Какова вероятность того, что брак будет обнаружен?
34. На стройку поступают плиты с трех железобетонных заводов: 200 плит с первого завода, 400 плит со второго и 900 с третьего. Процент брака изделий этих железобетонных заводов равен соответственно 1,5%, 2% и 2,5%. Найти вероятность того, что плита, поднимаемая краном, стандартная.
35. При оценке остаточных знаний процент справившихся с заданиями составляет 80% у отличников, 60% у хорошистов и 20% у остальных. В потоке из 96 человек 12 отличников и 24 хорошиста по тестируемому предмету. Какова вероятность для наугад выбранного студента справиться с заданием?

36. Нормальный режим работы прибора наблюдается в 90% случаев. Вероятность выхода прибора из строя за время Т в нормальном режиме составляет 0,1, а в противном случае – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время Т.
37. У передвижной бетономешалки остановилось вращение барабана. Есть возможность довести бетон, прежде чем он успеет схватиться, до любой из двух ближайших строек с вероятностями 0,9 и 0,8 соответственно. Кроме того, к первой стройке ведет одна дорога, а ко второй – две. Какова вероятность успешно довезти бетон, если дорога выбрана случайно?
38. На сборку попадают детали с трех станков. Известно, что брак с первого станка составляет 0,3%, со второго – 0,2% с третьего – 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого и третьего станков поступило по 2000 деталей, а со второго – 1000 деталей.
39. Нормальный режим работы прибора наблюдается в 80% случаев. Вероятность выхода прибора из строя за время Т в нормальном режиме составляет 0,2, а в противном случае – 0,7. Найти вероятность безотказной работы прибора за время Т.
40. В группе из 20 человек 3 отличника и 7 хорошистов. Отличник наверняка сдаст экзамен на отлично или хорошо; хорошист в 10% случаев сдаст на отлично и в 60% случаев сдаст хорошо; а остальные только в 20% случаев получат хорошую оценку. Какова вероятность наугад выбранному студенту этой группы сдать экзамен на “хорошо” или “отлично”?

1.5. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНАЙ
Формула Бернулли

Пусть в неизменном комплексе условий проводится серия из n независимых испытаний и в результате каждого испытания фиксируется появление некоторого случайного события A. При этом положим, что вероятность появления события A при каждом отдельном испытании остается неизменной равной $p(A)=p$, соответственно событие не наступит с вероятностью $q=p(\overline{A})=1-p(A)=1-p$.

Определить нужно вероятность того, что из n независимых испытаний событие A происходит ровно m раз. Например, определить вероятность для равносильных игроков выиграть 3 партии в шахматы из 5. Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах

$$p(AAA\overline{A}\overline{A}+AA\overline{A}A\overline{A}+A\overline{A}AA\overline{A}+\overline{A}AAA\overline{A}+AA\overline{A}\overline{A}A+A\overline{A}A\overline{A}A+\overline{A}AA\overline{A}A+$$
$$+A\overline{A}\overline{A}AA+\overline{A}A\overline{A}AA+\overline{A}\overline{A}AAA)=\ldots=10\big(p(A)\big)^3\big(p(\overline{A})\big)^2=10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}.$$

Вычисления трудоемки, а тем более при достаточно большом количестве испытаний это будет намного сложнее. Если в результате n

опытов событие А наступает первые m раз, то остальные (n-m) раз это событие не наступает, то вероятность этого события равна $p^m(1-p)^{n-m}$.

Событие А может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем *формулу*

$$p_n(k) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m(1-p)^{n-m},$$

итак, классическая форма записи *формулы Бернулли* – вероятности того, что при n испытаниях событие A наступит ровно k раз – имеет вид

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Пример. Прибор состоит из пяти узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени t для каждого узла равна 0,9. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время t откажут два узла.

Решение. Пусть событие A есть выход узла из строя за время t. Число узлов $n=5$, а число отказавших узлов $k=2$.

Вероятность безотказной работы узла $p(A)=p=0{,}9$, тогда $q=1-p=1-0{,}9=0{,}1$. Вычислим искомую вероятность по формуле Бернулли:

$p_5(2) = C_5^2\, 0{,}9^2 0{,}1^{5-2} = \dfrac{5!}{3!2!} 0{,}81 \cdot 0{,}001 = 0{,}0081$.

Ответ: $p_5(2) = 0{,}0081$.

Задания

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p. Найти вероятность того, что:

а) событие A произойдет ровно k раз;

б) событие A произойдет не менее k_1 и не более k_2 раз.

№	n	p	k	k_1	k_2
41.	6	0,4	2	3	5
42.	7	0,7	5	4	6
43.	9	0,4	3	2	4
44.	8	0,7	5	4	6
45.	6	0,7	4	3	6
46.	7	0,3	3	2	4
47.	6	0,9	4	5	6
48.	8	0,6	5	4	7

49.	9	0,8	7	5	7
50.	7	0,4	3	4	6

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Дискретные случайные величины. Способы их задания

Одним из основных понятий теории вероятностей является *случайная величина*. Случайная величина (в отличии от случайного события, которое может произойти либо не произойти) – это переменная величина, которая в результате испытания принимает только одно из своих возможных значений, а какое именно, зависит от случайных причин.

Например, при бросании игральной кости, случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число выпавших очков, может произвольно принимать одно из шести значений.

Например, при ответе студента на экзамене, случайная величина $\boldsymbol{X}$ – это полученная оценка, которая может принимать одно из четырех значений от "2" до "5", что зависит от степени подготовленности к экзамену.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Здесь $p_i = p(X = x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Графически закон распределения задается многоугольником распределения, представляющим собой ломаную, соединяющую на плоскости соседние точки $A_i(x_i; p_i)$, где $i = 1, 2, ..., n$.

Ниже укажем формулы основных числовых характеристик дискретной случайных величин.

Таблица 1

Числовые характеристики	Дискретные случайные величины
Математическое ожидание – характеризует среднее	$M(x) = \sum_{k=1}^{n} x_i p_i$

значение случайной величины	
Дисперсия – характеризует средний квадрат отклонений значений случайной величины от среднего значения	$D(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x_i))^2 p_i = M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$, где $M(X^2)=\sum_{k=1}^{n}x_i^{\ 2}p_i$.
Среднее квадратическое отклонение указывает разброс значений случайной величины относительно среднего.	$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$

Пример. По мишени стреляют три стрелка. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,9; вторым – 0,8; третьим – 0,5. Для случайной величины X, равной числу промахов, требуется:

1) составить закон распределения;
2) построить многоугольник распределения;
3) вычислить числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Случайная величина X – число промахов, может принимать четыре значения: $X=0$, если все попали в цель; $X=1$, если кто-то один из трех промахнулся и т.д.

1) Вычисление вероятности для каждого значения случайной величины было проведено в примере 5: $p(X=0)=p(B_1)=0{,}36$; $p(X=1)=p(B_5)=0{,}49$; $p(X=2)=p(B_4)=0{,}14$; $p(X=3)=p(B_2)=0{,}01$.

Составим таблицу.

X	0	1	2	3
p	0,36	0,49	0,14	0,01

Проверка: 0,36+0,49+0,14+0,01=1.

Следовательно, мы нашли закон распределения данной случайной величины.

2) Чтобы построить многоугольник распределения, укажем на плоскости XOP 4 точки: $A_1(0;0{,}36)$, $A_2(1;0{,}49)$, $A_3(2;0{,}14)$, $A_4(3;0{,}01)$ и соединим их ломаной.

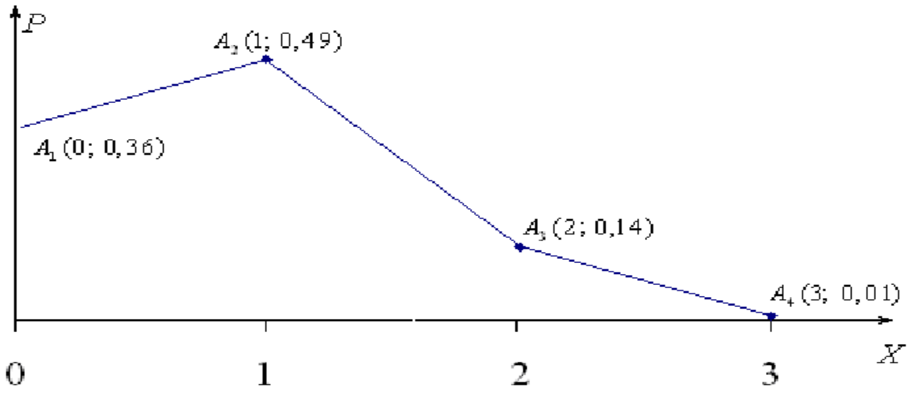


Рис.1

3) Вычислим числовые характеристики:

- математическое ожидание дискретной случайной величины $M(x)=\sum_{k=1}^{n}x_i p_i=0\cdot 0{,}36+1\cdot 0{,}49+2\cdot 0{,}14+3\cdot 0{,}01=0{,}8$.
- дисперсия дискретной случайной величины $D(x)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$,

где $M(X^2)=\sum_{k=1}^{n}x_i{}^2 p_i=0^2\cdot 0{,}36+1^2\cdot 0{,}49+2^2\cdot 0{,}14+3^2\cdot 0{,}01=1{,}14$, тогда $D(x)=1{,}14-\left(0{,}8\right)^2=0{,}5$.

- среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}71$.

Задания

Три плотника сделали по одному экземпляру одного и того же изделия. Вероятность предоставить готовое изделие без брака для них соответственно равны p_1, p_2, p_3. Составить закон распределения случайной величины X - числа готовых изделий без брака, найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

№	p_1	p_2	p_3
51.	0,9	0,6	0,4
52.	0,6	0,7	0,5
53.	0,7	0,4	0,6
54.	0,4	0,7	0,8
55.	0,9	0,7	0,5
56.	0,6	0,3	0,8
57.	0,9	0,7	0,1
58.	0,8	0,6	0,5
59.	0,5	0,4	0,8
60.	0,9	0,2	0,8

2.2.1. Биномиальный закон распределения

Биномиальным законом распределения дискретной случайной величины называют случайную величину $\boldsymbol{X}$, принимающую значения числа появлений события $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях. Вероятность появления события $\boldsymbol{A}$ в одном испытании постоянна и равна $\boldsymbol{p}$. Вероятность возможного значения $\boldsymbol{X=k}$ (событие $\boldsymbol{A}$ выпадет $\boldsymbol{k}$ раз в $\boldsymbol{n}$ испытаниях) вычисляется по формуле Бернулли:

$$\boldsymbol{p(X=k)=p_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}},\ k=0,1,\dots,n.$$

Закон распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ имеет вид

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	…	$\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q^n}$	$\boldsymbol{npq^{n-1}}$	$\dfrac{\boldsymbol{n(n-1)p^2q^{n-2}}}{2!}$	…	$\boldsymbol{p^n}$

Основные числовые характеристики **биномиального** закона распределения равны

$$M(X)=np,\ D(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}.$$

Задания

Для заданий 41-50 вычислить числовые характеристики.

2.3. Непрерывная случайная величина

Для непрерывной случайной величины имеет смысл ставить вопрос о вероятности попадания ее значений в некоторый интервал (a,b), которая в силу определения функции распределения равна

$$p(a<x<b)=F(b)-F(a).$$

Задать непрерывную случайную величину удобно **функцией плотности распределения** вероятностей, являющуюся производной от функции распределения $F(x)$:

$$f(x)=F'(x).$$

В силу формулы Ньютона-Лейбница

$$p(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Отсюда и из определения функции распределения следует, что

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

В частности, при $x=\infty$ получается вероятность достоверного события

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=1.$$

Ниже укажем формулы основных числовых характеристик дискретной и непрерывной случайных величин.

Таблица 1

Числовые характеристики	Дискретные случайные величины	Непрерывные случайные величины
Математическое ожидание – характеризует среднее значение случайной величины	$M(x)=\sum_{k=1}^{n} x_i p_i$	$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

Дисперсия – характеризует средний квадрат отклонений значений случайной величины от среднего значения	$D(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x_i))^2 p_i=$ $=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2,$ где $M(X^2)=\sum_{k=1}^{n}x_i^{\,2}p_i$.	$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=$ $=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2,$ где $M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx$.
Среднее квадратическое отклонение указывает разброс значений случайной величины относительно среднего.	$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$	$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$

Пример. Задана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^4, & 0<x\le 2,\\ 1, & 2<x.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти параметр A;
2) построить функцию распределения $F(x)$;
3) найти функцию плотности $f(x)$ и построить ее график;
4) вычислить числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;
5) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $(0;1)$.

Решение.

1) В силу непрерывности функции распределения $F(x)$ (слева она, очевидно, непрерывна) она должна быть непрерывна и справа при $x=2$: $Ax^4\big|_{x=2}=1$, тогда $16A=1$ и $A=1/16$.

2) Поскольку $A=1/16$, то функция распределения имеет вид

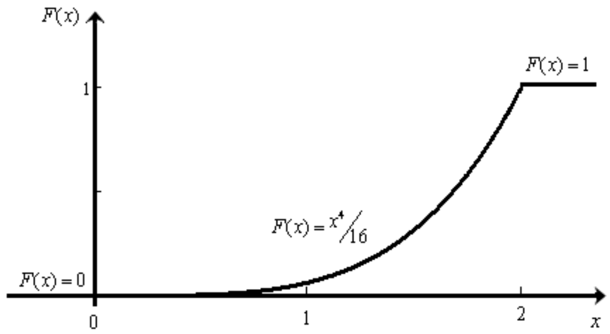
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^4/16, & 0<x\le 2,\\ 1, & 2<x.\end{cases}$$

График этой функции укажем ниже.

3) Дифференцируя $F(x)$, получим функцию плотности распределения $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3/4, & 0<x\le 2,\\ 0, & 2<x.\end{cases}$$

Укажем графики функций $F(x)$ и $f(x)$:



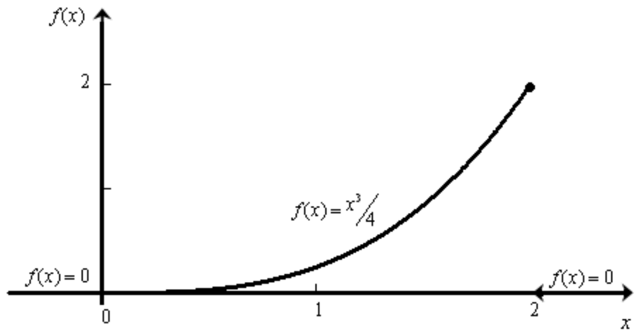


Рис. 3

4) Вычислим числовые характеристики по формулам, указанным в табл. 1: математическое ожидание

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int_{0}^{2}x\frac{x^3}{4}dx+\int_{2}^{\infty}x\cdot 0dx=\int_{0}^{2}\frac{x^4}{4}dx=\left.\frac{x^5}{20}\right|_0^2=\frac{8}{5};$$

дисперсия $D(x)=M(X^2)-(M(X))^2$, где

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{2}x^2\frac{x^3}{4}dx+\int_{2}^{\infty}x^2\cdot 0dx=\int_{0}^{2}\frac{x^5}{4}dx=\left.\frac{x^6}{24}\right|_0^2=\frac{64}{24}=\frac{8}{3},$$

тогда $D(x)=\frac{8}{3}-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{8}{75}$,

среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{8}{75}}\approx 0{,}33$.

5) Вероятность попадания случайной величины в интервал $(0;1)$ определяется формулой $p(0<X<1)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^3}{4}dx=\left.\frac{x^4}{16}\right|_0^1=\frac{1}{16}$.

Ответ: $A=1/16$, $M(x)=8/5$, $D(x)=8/75$, $\sigma(x)\approx 0{,}33$, $p(0<X<1)=1/16$.

Пример. Дана функция плотности распределения $f(x)$ случайной величины

$$X:\ f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ (x-1)/2, & 1<x\le 3,\\ 0, & 3<x.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти функцию распределения $F(x)$;

2) построить графики функций плотности $f(x)$ и распределения $F(x)$.

Решение.

1) Найдем функцию распределения $F(x)$:

если $x\le 1$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(z)dz=\int_{-\infty}^{x}0dz=0$;

если $1<x\le 3$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(z)dz=\int_{-\infty}^{1}0dz+\int_{1}^{x}\frac{z-1}{2}dz=0+\int_{1}^{x}\left(\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\right)dz=\left.\left(\frac{z^2}{4}-\frac{z}{2}\right)\right|_1^x=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4};$$

если $3 < x$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dz + \int\limits_{1}^{3} \frac{z-1}{2}dz + \int\limits_{3}^{+\infty} 0dz = 0 + \int\limits_{1}^{3}\left(\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\right)dz = \left.\left(\frac{z^2}{4}-\frac{z}{2}\right)\right|_1^3 = 1$.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & 1 < x \le 3, \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

2) Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 4.

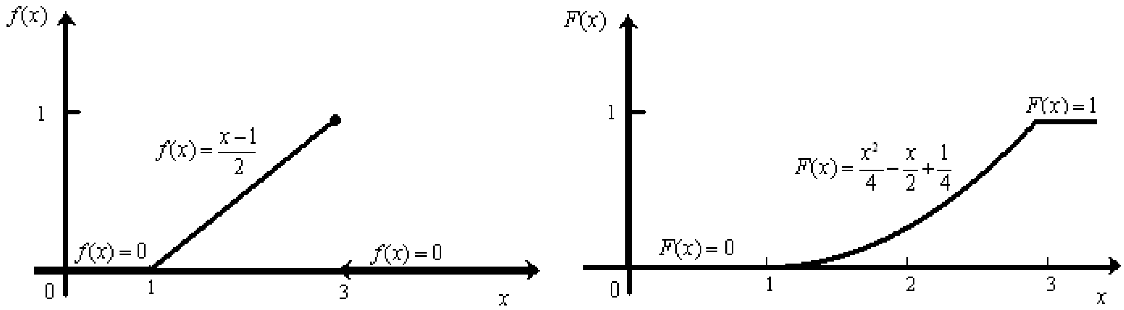


Рис. 4

3) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(2; 4)$, по формуле (23):

$$p(2 < X < 4) = \int\limits_{2}^{4} f(x)dx = \int\limits_{2}^{3} \frac{x-1}{2}dx + \int\limits_{3}^{4} 0dx = \left.\frac{(x-1)^2}{4}\right|_2^3 = \frac{(3-1)^2}{4} - \frac{(2-1)^2}{4} = \frac{3}{4}$$

или по формуле (21):

$$p(2 < X < 4) = F(4) - F(2) = 1\big|_{x=4} - \left.\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)\right|_{x=2} = 1 - \left(\frac{4}{4} - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

<u>Ответ:</u> $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & 1 < x \le 3, \\ 1, & 3 < x \end{cases}$ $\quad p(2 < X < 4) = \frac{3}{4}$.

Задания

<u>Задачи №№ 61-70.</u> Задана функция $f(x)$ на указанных промежутках. Найти константу A, при которой функция $f(x)$ может быть плотностью распределения некоторой случайной величины X. Найти соответствующую функцию распределения $F(x)$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

61. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ A(x+1), & -1 < x \le 1; \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$

62. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ Ax^2, & 0 < x \le 2; \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$

63. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ A(2-x), & -2<x\le 0; \\ 0, & 0<x. \end{cases}$

64. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^3, & 0<x\le 3; \\ 0, & 3<x. \end{cases}$

65. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ A(3x+1), & 0<x\le 1/3; \\ 0, & 1/3<x. \end{cases}$

66. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^4, & 0<x\le 1; \\ 0, & 1<x. \end{cases}$

67. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3; \\ A(2-3x), & -3<x\le -1; \\ 0, & -1<x. \end{cases}$

68. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^5, & 0<x\le 2; \\ 0, & 2<x. \end{cases}$

69. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ A(2x+3), & 1<x\le 2; \\ 0, & 2<x. \end{cases}$

70. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^7, & 0<x\le 1; \\ 0, & 1<x. \end{cases}$

2.3.1. Равномерный закон распределения

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на промежутке $(a;b]$, которому принадлежат все возможные значения X, плотность распределения случайной величины сохраняет постоянное значение равное

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b] \\ 0, & x\notin(a;b] \end{cases}.$$

Основные числовые характеристики **равномерног**о закона распределения равны

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

<u>**Замечание**</u> (геометрическое определение вероятности). Вероятность попадания в произвольный интервал $(\alpha;\beta)$, где $(\alpha;\beta)\subset(a;b]$ определяется формулой

$$p(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Так как длина отрезка является его мерой, то обобщение последней формулы приводит к геометрическому определению вероятности, т.е. к вероятности попадания точки в некоторую область $A\subset D$

$$p(A)=\frac{\textit{мера } A}{\textit{мера } D}.$$

<u>Пример.</u> Случайная величина X распределена равномерно на интервале $(3;12)$. Требуется:

1) найти функцию плотности $f(x)$, функцию распределения $F(x)$ и построить их графики;

2) вычислить числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение.

1) Функция плотности распределения случайной величины X на промежутке $(3;12]$ равна $f(x)=1/(12-3)=1/9$, вне данного промежутка $f(x)=0$: $f(x)=\begin{cases}1/9, & x\in(3;12]\\ 0, & x\notin(3;12]\end{cases}$.

Найдем функцию распределения $F(x)$: если $x\le 3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dz=0$;

если $3<x\le 12$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{3} 0dz+\int\limits_{3}^{x}\frac{1}{9}dz=0+\left(\frac{z}{9}\right)\Big|_3^x=\frac{x}{9}-\frac{1}{3}$;

если $12<x$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{3} 0dz+\int\limits_{3}^{12}\frac{1}{9}dz+\int\limits_{12}^{+\infty} 0dz=1$.

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ \frac{x}{9}-\frac{1}{3}, & 3<x\le 12,\\ 1, & 12<x.\end{cases}$

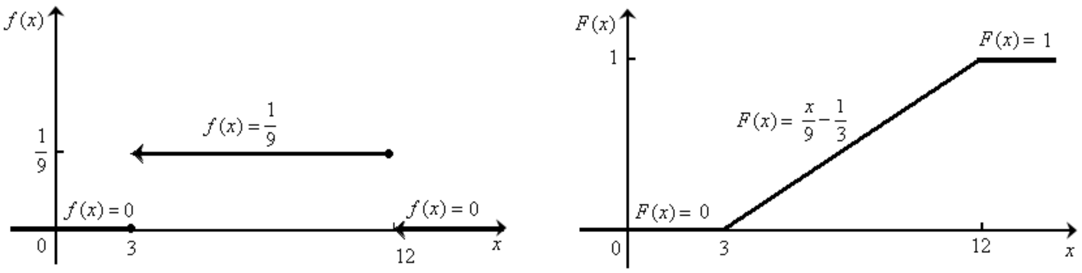


Рис. 6

2) Найдем числовые характеристики: математическое ожидание

$$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{3} x\cdot 0dx+\int\limits_{3}^{12} x\frac{1}{9}dx+\int\limits_{12}^{\infty} x\cdot 0dx=\int\limits_{3}^{12} x\frac{1}{9}dx=\frac{x^2}{18}\Big|_3^{12}=\frac{135}{18}=7{,}5;$$

дисперсия $D(x)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$, где $M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{3} x^2\cdot 0dx+ +$

$\int\limits_{3}^{12} x^2\frac{1}{9}dx+\int\limits_{12}^{\infty} x^2\cdot 0dx=\int\limits_{3}^{12}\frac{x^2}{9}dx=\frac{x^3}{27}\Big|_3^{12}=63$, тогда $D(x)=63-(7{,}5)^2\approx 6{,}75$;

среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{6{,}75}\approx 2{,}6$.

Вычислить числовые характеристики в данном случае можно было по формулам (29): $M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{3+12}{2}=7{,}5$, $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(12-3)^2}{12}=\frac{81}{12}=6{,}75$, $\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{12-3}{2\sqrt{3}}\approx 2{,}6$.

2.3.2. Нормальный закон распределения

Наиболее часто в окружающем мире (в том числе в производстве и технике) встречается **нормальный закон распределения**, который задается функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Основные числовые характеристики **нормального** закона распределения равны

$$M(X) = a,\ D(X) = \sigma^2,\ \sigma(X) = \sigma.$$

Графиком функции плотности нормального закона распределения является кривая Гаусса.

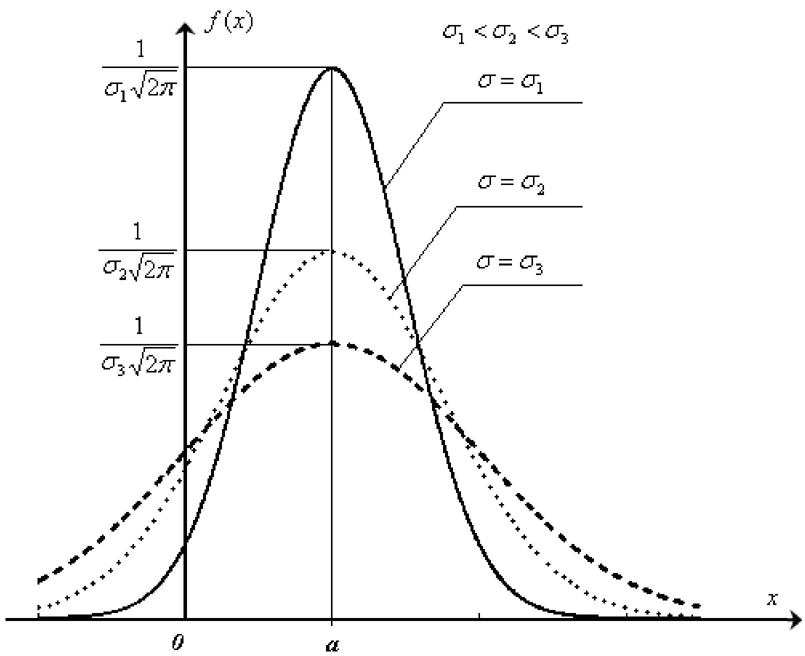


Рис.

Ее точкой максимума является $x = a$. Чем меньше будет σ, тем больше будет максимальное значение функции плотности, график будет более вытянут вверх и ближе будет прижиматься к прямой $x = a$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha;\beta)$ равна

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что отклонение значения нормально распределенной случайной величины X от ее среднего значения (математического ожидания) по абсолютной величине меньше положительного числа δ, равна

$$p(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Пример. Диаметр деталей, вытачиваемых на станке, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 20$ *мм* и $\sigma = 2$ *мм*. Деталь считается стандартной, если ее диаметр d лежит в диапазоне $19 < d < 22$. Написать функцию плотности распределения и нарисовать ее график.

Решение.

Функция плотности распределения имеет вид $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-20)^2}{8}}$, график которой указан ниже.

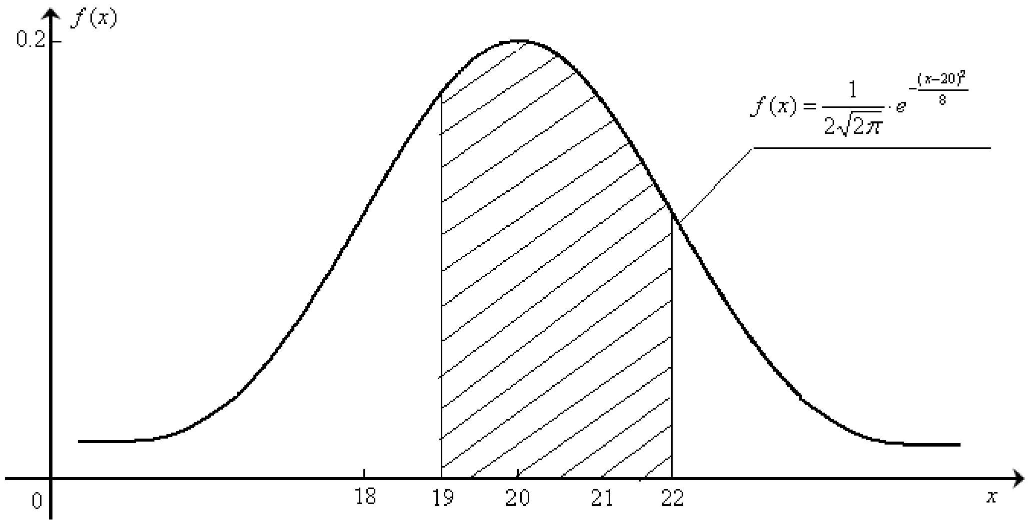


Рис.

Замечание. Вероятности стандартности детали соответствует заштрихованная площадь на рис. под кривой Гаусса.

Задания

Задачи №№71-90.

Дан интервал $(a;b)$ равномерно распределенной случайной величины X.

Даны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X.

1. Выписать функцию плотности распределения и построить ее график и функцию распределения (для равномерно заданной СВ).
2. Найти числовые характеристики случайной величины – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

№	Закон распределения	a	b	a	σ
71.	Равномерный	6	15		
72.	Равномерный	7	18		
73.	Равномерный	7	16		
74.	Равномерный	9	17		
75.	Равномерный	3	10		
76.	Равномерный	4	13		

77.	Равномерный	10	17		
78.	Равномерный	1	10		
79.	Равномерный	2	11		
80.	Равномерный	3	15		
81.	Нормальный			3	15
82.	Нормальный			6	15
83.	Нормальный			7	18
84.	Нормальный			7	16
85.	Нормальный			9	17
86.	Нормальный			3	10
87.	Нормальный			4	13
88.	Нормальный			10	17
89.	Нормальный			1	10
90.	Нормальный			2	11

2.3.3. Центральная предельная теорема

Порой статистика подобна магии. Она позволяет делать далекоидущие важные выводы на основе относительно небольшого объема данных. Каким-то образом нам удается предсказать исход президентских выборов, опросив лишь тысячу избирателей.

Что же является источником столь необычайной силы обобщения? Это центральная предельная теорема, значение которой для статистики соизмеримо со значением цифр для описания чисел.

Базовый принцип, лежащий в основе центральной предельной теоремы, заключается в том, что большая, надлежащим образом сформированная выборка будет похожа на совокупность, из которой она извлечена. Разумеется, от выборки к выборке будут наблюдаться определенные вариации.

Итак, центральная предельная теорема:

Распределение выборки средний значений выборки будет иметь нормальное распределение со средним значением, равным среднему значению генеральной совокупности, и дисперсией, равной дисперсии распределения совокупности, деленной на размер выборки, который, для достижения точности увеличивается. Важным является то, что влияние каждого значения случайной величины на всю совокупность бесконечно мало.

3. Элементы математической статистики

Рассмотрим некоторое социальное явление, мнение о котором можно составить по опросу населения. Пусть дано большое множество объектов (листов опроса населения) – данное множество объектов называется **генеральной совокупностью**. Нет возможности изначально перечислить все ответы в листах-опросах, т.е. составить полную группу исходов, но возможно одинаковым ответам присвоить одинаковые номера, таким образом, перевести все ответы на язык цифр. Далее необходимо работать с генеральной совокупностью как со случайной величиной, принимающей различные числовые значения. Поскольку листов опроса много, то берется сравнительно небольшая часть генеральной совокупности. Часть генеральной совокупности называется **выборкой**, элементы выборки называются **вариантами**, а количество элементов в выборке называется **объемом выборки** $\boldsymbol{n}$. Элементы выборки сгруппированные в порядке возрастания называются **вариационным рядом**. По выборке составляется вывод об всей генеральной совокупности: по какому закону она распределена, каковы числовые характеристики распределения.

Важным является то, чтобы полученные результаты обладали достаточной достоверностью, что в свою очередь опирается на понятия репрезентативности как самой выборки, так и генеральной совокупности.

Обычно статистическое распределение задается с помощью таблицы:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_k
n	n_1	n_2	$\ldots$	n_i	$\ldots$	n_k

Частоты n_i показывают, сколько раз встретилось значение варианты x_i:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Графически распределению соответствует **полигон частот** – ломаная, отрезки которой последовательно соединяют две соседние точки $A_1(x_1;n_1)$, $A_2(x_2;n_2)$, $A_3(x_3;n_3),\ldots,$ $A_k(x_k;n_k)$ на плоскости.

Если в законе распределения перейти к относительным частотам

$$w_i = \frac{n_i}{n} \quad \left(\sum_{i=1}^{k} w_i = 1\right),$$

которые являются аналогами вероятностей, то получим статистическое распределение выборки через относительные частоты:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_k
w	w_1	w_2	$\ldots$	w_i	$\ldots$	w_k

Статистическому распределению графически соответствует **полигон относительных частот** – ломаная, отрезки которой последовательно соединяют две соседние точки $B_1(x_1;w_1)$, $B_2(x_2;w_2)$, $B_3(x_3;w_3),\ldots$, $B_k(x_k;w_k)$ на плоскости.

Поскольку в (43) указаны аналоги вероятности каждой из вариант, то можно ввести аналоги числовых характеристик $M(x)$, $D(x)$ и $\sigma(x)$:
выборочное среднее

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n},$$

выборочная дисперсия

$$D_в = \overline{\left(x_в^2\right)} - \left(\overline{x}_в\right)^2, \text{ где } \overline{\left(x_в^2\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2} n_i}{n},$$

выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}\ .$$

Для <u>непрерывной</u> случайной величины статистическое распределение задается в виде последовательности интервалов и соответствующих частот:

$(x_1;x_2]$	$(x_2;x_3]$	$(x_3;x_4]$	$\ldots$	$(x_i;x_{i+1}]$	$\ldots$	$(x_k;x_{k+1}]$
n_1	n_2	n_3	$\ldots$	n_i	$\ldots$	n_k

Частоты n_i показывают, сколько раз встретилось значение варианты x_i в полуинтервале $(x_i;x_{i+1}]$, формула (41) справедлива и в этом случае.

Количество интервалов k и длины интервалов h определяются формулами

$$k \approx 1 + 3{,}2 \cdot \lg n,$$

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

где n – объем выборки, $x_{\max}$ и $x_{\min}$, соответственно, максимальное и минимальное значения случайной величины для данной выборки.

Интервальное распределение выборки легко сводится к дискретному распределению, если в качестве вариант выбрать середины полуинтервалов $(x_i;x_{i+1}]$:

$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$y_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}$	$\ldots$	$y_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$\ldots$	$y_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$
n_1	n_2	$\ldots$	n_i	$\ldots$	n_k

Графически интервальное распределение задается **гистограммой** – ступенчатой фигурой, основанием каждой ступеньки которой служат отрезки длины h: $[x_1;x_2]$, $[x_2;x_3],\ldots$, $[x_k;x_{k+1}]$, а соответствующие высоты равны

$h_i = w_i / h$. Гистограмма относительных частот является аналогом функции плотности, так как площадь под ней всегда равна единице.

Аналогично функции распределения случайной величины вводится эмпирическая функция распределения

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант меньших x, n – объем выборки.

Полученные по формулам числовые оценки $x_в$, $D_в$ и $\sigma_в$ сами являются случайными величинами. При разных выборках одного и того же объема их значения будут различными.

Пример. Задано интервальное распределение выборки:

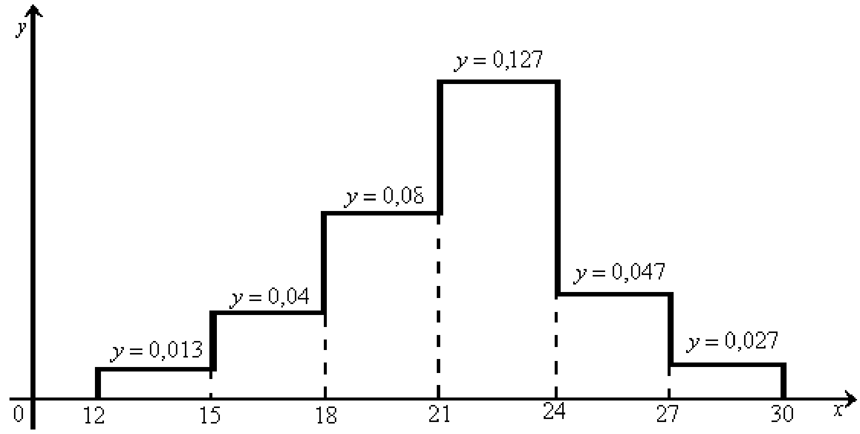
$(y_i; y_{i+1}]$	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30
n_i	2	6	12	19	7	4

Требуется:
1) построить гистограмму относительных частот;
2) перейти к вариантам, записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
3) найти точечные оценки $\bar{x}_в$ и $\sigma_в$.

Решение. 1) Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 2 + 6 + 12 + 19 + 7 + 4 = 50$. По формуле найдем относительные частоты и выпишем таблицу с относительными частотами:

$(y_i; y_{i+1}]$	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс отложим частичные интервалы длины $h = 3$, высота ступенчатой функции на каждом из интервалов равна $h_i = w_i / h$. Для лучшей наглядности выберем разный масштаб на осях координат.



2) Перейдем к вариантам, тогда данному в условии интервальному распределению выборки, будет соответствовать вариационный ряд

x_i	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
n_i	2	6	12	19	7	4
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Аналогично тому, как находилась функция распределения $F(x)$ в примере 11, легко написать эмпирическую функцию $F^*(x)$, прибавляя к предыдущему ее значению следующее значение относительной частоты w_i (аналог вероятности p_i):

$F^*(x) = 0$, если $X \le 13{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}04$, если $13{,}5 < X \le 16{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}04 + 0{,}12 = 0{,}16$, если $16{,}5 < X \le 19{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}16 + 0{,}24 = 0{,}4$, если $19{,}5 < X \le 22{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}4 + 0{,}38 = 0{,}78$, если $22{,}5 < X \le 25{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}78 + 0{,}14 = 0{,}92$, если $25{,}5 < X \le 28{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}92 + 0{,}08 = 1$, если $28{,}5 < X$.

Наконец, построим график функции $F^*(x)$.

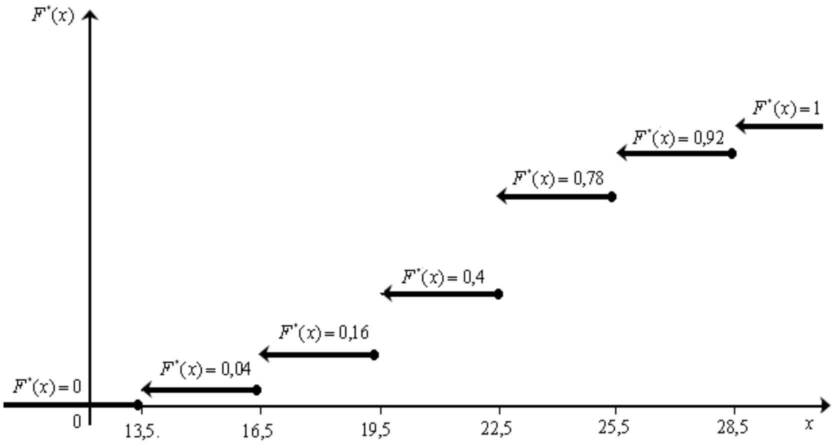


Рис. 10

3) Найдем точечные оценки $\bar{x}_в$ и $\sigma_в$ по формулам (44)-(46):

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{(3{,}5 \cdot 2 + 16{,}5 \cdot 6 + 19{,}5 \cdot 12 + 22{,}5 \cdot 19 + 25{,}5 \cdot 7 + 28{,}5 \cdot 4)}{50} = 21{,}6;$$

$$\sigma_в(x) = \sqrt{\left(\overline{x_в^2}\right) - \left(\bar{x}_в\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3{,}5)^2 \cdot 2 + (16{,}5)^2 \cdot 6 + (19{,}5)^2 \cdot 12 + (22{,}5)^2 \cdot 19 + (25{,}5)^2 \cdot 7 + (28{,}5)^2 \cdot 4}{50} - (21{,}6)^2} = 3{,}6.$$

Задания

<u>Задачи №№91-100.</u> Задано интервальное распределение выборки. Требуется:

а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам, выписать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
в) найти точечные оценки $\bar{x}_в$ и $\sigma_в$;

№ 91	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)	(12, 14)	(14, 16)
	1	3	19	21	4	2

№ 92	(–3, –1)	(–1, 1)	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)
	2	8	19	15	5	1

№ 93	(–12, –10)	(–10, –8)	(–8, –6)	(–6, –4)	(–4, –2)	(–2, 0)
	2	9	14	15	8	2

№ 94	(–7, –5)	(–5, –3)	(–3, –1)	(–1, 1)	(1, 3)	(3, 5)
	3	4	18	20	4	1

№ 95	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)
	1	4	16	18	8	3

№ 96	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)	(13, 15)	(15, 17)
	3	5	18	17	6	1

№ 97	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)
	3	5	16	17	6	3

№ 98	(–8, –6)	(–6, –4)	(–4, –2)	(–2, 0)	(0, 2)	(2, 4)
	1	4	21	19	3	2

№ 99	(–5, –3)	(–3; –1)	(–1, 1)	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)
	1	4	18	20	5	2

№ 100	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)	(13, 15)	(15, 17)	(17, 19)
	2	6	17	19	5	1