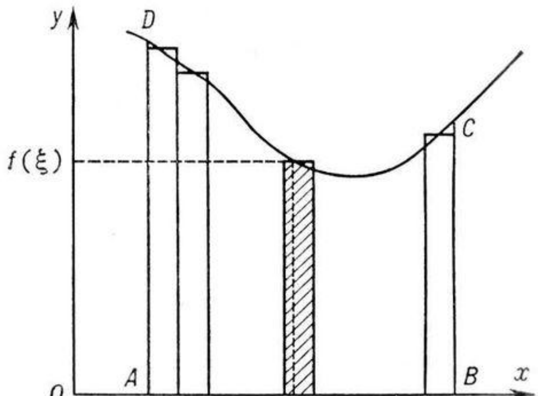
ФГБОУ ВО "Воронежский государственный технический университет"

Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования

ПРАКТИКУМ И ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для индивидуальной самостоятельной работы по разделу «Интегральное исчисление» курса «Математика» для студентов направления 11.03.01 «Радиотехника»



Воронеж 2021

1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке изменения переменной x, если существует производная $F'(x)$ при любых x из рассматриваемого промежутка и $F'(x) = f(x)$.

2. ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных для этой функции.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная, $\int$ означает неопределенный интеграл, $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

3. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Производная от неопределенного интеграла по переменной интегрирования равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x). \tag{1}$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{2}$$

3. Неопределенный интеграл от производной от некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C. \tag{3}$$

4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (4)$$

5. Неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \qquad (5)$$

6. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \text{ где } a \text{ – постоянная.} \qquad (6)$$

4. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$	**2.** $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$	**4.** $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$	**6.** $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}\ x + C.$	**8.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}\ x + C.$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\ x + C = -\operatorname{arcctg}\ x + C.$	
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$	

Пример 1. Найти интеграл $\int \left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{x^6} - \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} \right) dx$.

Преобразуем подынтегральное выражение, а затем воспользуемся свойством 5 и первым табличным интегралом.

$$\int\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{x^6}-\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx=\int\left(\frac{4}{5}x^2+x^{-6}-x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{5}{3}}\right)dx=$$

$$=\int\frac{4}{5}x^2dx+\int x^{-6}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx-\int 2x^{-\frac{5}{3}}dx=\frac{4}{5}\,\frac{x^{2+1}}{2+1}+\frac{x^{-6+1}}{-6+1}+\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-$$

$$-2\cdot\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1}+C=\frac{4}{15}x^3-\frac{1}{5x^5}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+C.$$

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Введение новой переменной помогает привести заданный интеграл к табличному или сводящемуся к табличному. Общих методов подбора новой переменной не существует. Однако в некоторых случаях могут быть даны следующие рекомендации.

5.1. Линейная замена

Интегралы вида $\int f(ax+b)dx$ упрощаются с помощью замены $t=ax+b$:

$$\int f(ax+b)dx=\left|\begin{array}{l} t=ax+b,\ dt=\left(ax+b\right)'dx=adx, \\ dx=\frac{1}{a}dt \end{array}\right|=\int f(t)\cdot\frac{1}{a}dt=$$

$$=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Итак,

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C, \qquad (7)$$

где F – первообразная функции f.

Пример 2. Найти интеграл

$$\int\left(\cos(8x-\ 2)+\mathrm{e}^{5x-1}-\sqrt[4]{\frac{x}{4}+1}+\frac{1}{1-6x}\right)dx.$$

Согласно свойству 5, этот интеграл может быть представлен в виде суммы интегралов:

$$\int\left(\cos(8x-\ 2)+\mathrm{e}^{5x-1}-\sqrt[4]{\frac{x}{4}+1}+\frac{1}{1-6x}\right)dx=$$

$$=\int\cos(8x-\ 2)dx+\int\mathrm{e}^{5x-1}dx+\int\sqrt[4]{\frac{x}{4}+1}dx+\int\frac{1}{1-6x}\,dx.$$

Найдем первый интеграл, упростив его с помощью линейной замены.

$$\int\cos(8x-\ 2)dx=\left|\begin{array}{l} t=8x-2,\ dt=d(8x-2)=8dx, \\ dx=\dfrac{1}{8}dt \end{array}\right|=$$

$$\int\cos t\,\frac{1}{8}\,dt=\frac{1}{8}\int\cos t dt=\frac{1}{8}\sin t+C=\frac{1}{8}\sin(8x-2)+C_1.$$

Очевидно, что проще было бы избежать введения новой переменной, а воспользоваться формулой (7) и сразу записать: $\int\cos(8x-\ 2)dx=\dfrac{1}{8}\sin(8x-2)+C_1.$

Пользуясь формулой (7), найдем остальные интегралы:

$$\int\mathrm{e}^{5x-1}dx=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x-1}+C_2,$$

$$\int\sqrt[4]{\frac{x}{4}+1}dx=\int\left(\frac{x}{4}+1\right)^{\frac{1}{4}}dx=4\frac{\left(\dfrac{x}{4}+1\right)^{\frac{1}{4}+1}}{\dfrac{1}{4}+1}=4\frac{\left(\dfrac{x}{4}+1\right)^{\frac{5}{4}}}{\dfrac{5}{4}}=$$

$$= \frac{16}{5}\sqrt[4]{\left(\frac{x}{4}+1\right)^5} + C_3,$$

$$\int \frac{1}{1-6x}\,dx = -\frac{1}{6}\ln|1-6x| + C_4.$$

Окончательно запишем:

$$\int\left(\cos(8x-\ 2) + \mathrm{e}^{5x-1} - \sqrt[4]{\frac{x}{4}+1} + \frac{1}{1-6x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\sin(8x-2) + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x-1} + \frac{16}{5}\sqrt[4]{\left(\frac{x}{4}+1\right)^5} + -\frac{1}{6}\ln|1-6x| + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{5x^2+9}$.

Преобразуем подынтегральное выражение и с помощью замены переменной сведем этот интеграл к табличному.

$$\int \frac{dx}{5x^2+9} = \int \frac{dx}{\left(\frac{5}{9}x^2+1\right)} = \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}x\right)^2+1\right)} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{замена переменной: } t = \frac{\sqrt{5}}{3}x, \\ \text{тогда } dt = \frac{\sqrt{5}}{3}dx,\ dx = \frac{3}{\sqrt{5}}dt \end{array}\right| = \int \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}dt}{t^2+1} = \frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}x + C.$$

Задания для аудиторной работы

5.1.1.. 5.1.2..

5.1.3.. 5.2.4..

5.2.5.. 5.2.6..

5.7.. 5.8..

5.9.. 5.10..

5.11.. 5.12..

5.13.. 5.14..

5.2. Подведение под дифференциал

Если в подынтегральном выражении уже есть дифференциал функции $\varphi(x)$, т.е. интеграл имеет вид $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$, то его можно упростить с помощью замены переменной $t=\varphi(x)$. Тогда $dt=\varphi'(x)dx$, и получаем: $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$.

Заметим, что в этом случае можно не вводить новую переменную t, а записать интеграл в виде:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d\left(\varphi(x)\right). \qquad (8)$$

Формулу (8) называют также *формулой подведения под дифференциал*.

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-7x^2}}$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-7x^2}}=\left|\begin{aligned}&d(1-7x^2)=\left(1-7x^2\right)'dx=-14xdx,\\&xdx=-\frac{1}{14}d(1-7x^2)\end{aligned}\right|=$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{14}d(1-7x^2)}{\sqrt{1-7x^2}}=-\frac{1}{14}\cdot2\sqrt{1-7x^2}+C=-\frac{\sqrt{1-7x^2}}{7}+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt[5]{\ln^4(7x+6)}dx}{7x+6}$.

$$\int \frac{\sqrt[5]{\ln^4(7x+6)}dx}{7x+6} = \left| \begin{array}{l} d(\ln(7x+6)) = (\ln(7x+6))' dx = \dfrac{7dx}{7x+6}, \\ \dfrac{dx}{7x+6} = \dfrac{1}{7} d(\ln(7x+6)) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{7} \int \sqrt[5]{\ln^4(7x+6)} d(\ln(7x+6)) = \frac{1}{7} \int \left(\ln(7x+6)\right)^{\frac{4}{5}} d(\ln(7x+6)) =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{\left(\ln(7x+6)\right)^{\frac{9}{5}}}{9/5} + C = \frac{5}{63} \sqrt[5]{\ln^9(7x+6)} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt[5]{\sin^3 2x}} dx.$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt[5]{\sin^3 2x}} dx = \left| \begin{array}{l} d(\sin 2x) = (\sin 2x)' dx = 2\cos 2x dx, \\ \cos 2x dx = \dfrac{1}{2} d(\sin 2x) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2} d(\sin 2x)}{\sqrt[5]{\sin^3 2x}} = \frac{1}{2} \int (\sin 2x)^{-\frac{3}{5}} d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \frac{\left(\sin 2x\right)^{\frac{2}{5}}}{2/5} + C =$$

$$= \frac{5}{4} \left(\sin 2x\right)^{\frac{2}{5}} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^3 3x \sin^2 3x}.$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^3 3x \sin^2 3x} = \left| \begin{array}{l} d(\operatorname{ctg} 3x) = (\operatorname{ctg} 3x)' dx = \dfrac{3dx}{\sin^2 3x}, \\ \dfrac{dx}{\sin^2 3x} = \dfrac{1}{3} d(\operatorname{ctg} 3x) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3} d(\operatorname{ctg} 3x)}{\operatorname{ctg}^3 3x} = \frac{1}{3} \int \operatorname{ctg}^{-3} 3x d(\operatorname{ctg} 3x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^{-2} 3x}{-2} + C =$$

$$=-\frac{1}{6\operatorname{ctg}^2 3x}+C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(1+16x^2)\sqrt{2+\operatorname{arctg} 4x}}$.

$$\int \frac{dx}{(1+16x^2)\sqrt{2+\operatorname{arctg} 4x}}=$$

$$\left| \begin{array}{l} d(2+\operatorname{arctg}\ 4x)=(2+\operatorname{arctg}\ 4x)'dx=\frac{4}{1+16x^2}dx, \\ \frac{dx}{1+16x^2}=\frac{1}{4}d(2+\operatorname{arctg}\ 4x) \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{\frac{1}{4}d(2+\operatorname{arctg}\ 4x)}{\sqrt{2+\operatorname{arctg} 4x}}=\frac{1}{4}\int \frac{d(2+\operatorname{arctg}\ 4x)}{\sqrt{2+\operatorname{arctg} 4x}}=\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2+\operatorname{arctg} 4x}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\operatorname{arctg} 4x}}{2}+C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 8x}dx}{\sin^2 8x}$.

$$\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 8x}dx}{\sin^2 8x}=\left| \begin{array}{l} d(\operatorname{ctg}8x)=(\operatorname{ctg}8x)'dx=\frac{8}{\sin^2 8x}dx, \\ \frac{dx}{\sin^2 8x}=\frac{1}{8}d\left(\operatorname{ctg}8x\right) \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{8}\int e^{\operatorname{ctg} 8x}d\left(\operatorname{ctg}8x\right)=\frac{1}{8}e^{\operatorname{ctg} 8x}+C.$$

Задания для аудиторной работы

5.2.1. $\int \frac{e^x\sqrt{arctg(e^x)}}{1+e^{2x}}dx$. 5.2.2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

5.2.3. $\int \frac{1}{x}\cos(\ln x-1)dx$.

5.2.4. $\int 2^{x^4} x^3 dx$.

5.2.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\left(\sqrt{x}+4\right)}$.

5.2.6. $\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$.

5.7. $\int \frac{x}{\cos^2(5x^2+1)}dx$.

5.8. $\int (4x-5)\sin(2x^2-5x+7)dx$.

5.9. $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x-9)}dx$.

5.10. $\int x\cdot 2^{x^2}\cdot tg\, 2^{x^2}dx$.

5.11. $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 2x}dx$.

5.12. $\int \frac{7^x dx}{3+7^{2x}}$.

5.13. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+25}}dx$.

5.14. $\int ctg(2x-3)dx$.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Метод интегрирования по частям основан на формуле

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{9}$$

Применение этой формулы целесообразно тогда, когда интеграл в правой части формулы проще, чем исходный интеграл. В некоторых случаях необходимо применять формулу несколько раз. В частности, этим методом пользуются для нахождения интегралов вида

$$\int P_k(x)e^x dx,\ \int P_k(x)\sin x dx,\ \int P_k(x)\cos x dx, \tag{10}$$

и

$$\begin{gathered}\int P_k(x)\arcsin x dx,\ \int P_k(x)\arccos x dx, \int P_k(x)\mathrm{arctg}\, x dx,\\ \int P_k(x)\mathrm{arcctg}\, x dx,\ \int P_k(x)\ln x dx,\end{gathered} \tag{11}$$

где $P_k(x)$-многочлен степени $k,\ k=1,2,3,\ldots$.

Также с помощью интегрирования по частям находятся интегралы вида

$$\int \arccos x dx,\ \int \arcsin x dx,\ \int \operatorname{arctg}\ x dx,\ \int \operatorname{arcctg}\ x dx,\ \int \ln x dx. \qquad (12)$$

В общем случае за u обозначается та функция, которая упрощается при дифференцировании, а за v – та, которая упрощается при интегрировании. Так, в интегралах вида (10) за u необходимо обозначать $P_k(x)$, поскольку при дифференцировании этой функции происходит понижении степени (функция «упрощается»).

В интегралах вида (11) и (12) за u необходимо обозначить $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg}\ x$, $\operatorname{arcctg}\ x$, $\ln x$, соответственно.

Пример 10. Найти интеграл $\int \left(x+2\right)\cos\frac{x}{4}\,dx$.

$$\int \left(x+2\right)\cos\frac{x}{4}\,dx = \left| u{=}x{+}2,\ \cos\frac{x}{4}dx{=}dv,\ du{=}dx,\ 4\sin\frac{x}{4}{=}v \right| =$$

$$= (x+2)\cdot 4\sin\frac{x}{4} - \int 4\sin\frac{x}{4}dx = 4(x+2)\sin\frac{x}{4} + 16\cos\frac{x}{4} + C.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int \left(3-8x\right)e^{3x}dx$.

$$\int \left(3-8x\right)e^{3x}dx = \left| u{=}3{-}8x,\ e^{3x}dx{=}dv,\ du{=}{-}8dx,\ \frac{1}{3}e^{3x}{=}v \right| =$$

$$= \left(3-8x\right)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot\left(-8\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}(3-8x) + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3}e^{3x}(3-8x) + \frac{8}{9}e^{3x} + C.$$

Пример 12. Найти интеграл $\int \arcsin 8x dx$.

$$\int \arcsin 8x dx = \left| \arcsin 8x = u,\ dx = dv,\ \frac{dx}{\sqrt{1-64x^2}} = du,\ x = v \right| =$$

$$= x\arcsin 8x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-64x^2}} = \left| \begin{matrix} d(1-64x^2) = -128xdx, \\ xdx = -\dfrac{1}{128}d(1-64x^2) \end{matrix} \right| =$$

$$= x\arcsin 8x + \frac{1}{128}\int \frac{d(1-64x^2)}{\sqrt{1-64x^2}} = x\arcsin 8x + \frac{1}{128}\cdot 2\left(1-64x^2\right) + C =$$

$$= x\arcsin 8x + \frac{1}{64}\left(1-64x^2\right) + C.$$

Пример 13. Найти интеграл $\int \left(x^2+2\right)e^{2x}dx.$

Для нахождения этого интеграла метод интегрирования по частям необходимо применить дважды.

$$\int \left(x^2+2\right)e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+2,\ dv = e^{2x}dx, \\ du = 2xdx,\ v = \int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(x^2+2\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2xdx = \frac{1}{2}\left(x^2+2\right)e^{2x} - \int xe^{2x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x,\ dv = e^{2x}dx, \\ du = dx,\ v = \int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\left(x^2+2\right)e^{2x} -$$

$$-\left(x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx \right) = \frac{1}{2}\left(x^2+2\right)e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Пример 14. Найти интеграл $\int \frac{\ln(\cos x)dx}{\cos^2 x}.$

$$\int \frac{\ln(\cos x)dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{aligned} & u = \ln(\cos x),\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, \\ & du = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)dx = -\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\mathrm{tg}\ x dx, \\ & v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x \end{aligned} \right| =$$

$$= \ln(\cos x) \cdot \mathrm{tg}\ x - \int \mathrm{tg}\ x\left(-\mathrm{tg}\ x\right)dx = \ln(\cos x) \cdot \mathrm{tg}\ x + \int \mathrm{tg}^2 x dx =$$

$$= \left| \begin{aligned} & \int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \\ & = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \mathrm{tg}\ x - x + C \end{aligned} \right| =$$

$$= \ln(\cos x) \cdot \mathrm{tg}\ x + \mathrm{tg}\ x - x + C.$$

Задания для аудиторной работы

6.1. $\int x e^{7x} dx$.

6.2. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$.

6.3. $\int e^{3x} \cos x dx$.

6.4. $\int x \cdot arctg 2x dx$.

6.5. $\int x \ln\left(x^2 - 1\right)dx$.

6.6. $\int x^2 \ln x dx$.

6.7. $\int e^{2x} \sin x dx$.

6.8. $\int x^2 \cos 7x dx$.

6.9. $\int \ln x dx$.

6.10. $\int arctg 2x dx$.

6.11. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$.

6.12. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$.

6.13. $\int \ln(x^2 + 1)dx$.

6.14. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Дробно-рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x_m + b_1 x_{m-1} + \ldots + b_m}, \tag{13}$$

где m и n – целые положительные числа.

Если $n < m$, то дробь называется *правильной*, есди же $n \geq m$, то дробь называется *неправильной*.

7.1. Интегрирование простейших рациональных дробей

Правильные рациональные дроби вида

I) $\dfrac{A}{x-a}$;

II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k \geq 2,\ k \in N)$;

III) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, если знаменатель не имеет действительных корней;

IV) $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $(k \geq 2,\ k \in N)$, знаменатель не имеет действительных корней,

называются *простейшими* рациональными дробями I, II, III и IV типа, соответственно.

Интегралы от простейших дробей I и II типа находятся легко (см. пример 2).

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{1}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Чтобы проинтегрировать дробь III типа необходимо сначала выделить в числителе производную знаменателя:

$$\left(x^2+px+q\right)'=2x+p\,,\ Ax+B=\left(2x+p\right)\cdot\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B\,. \quad (14)$$

Тогда можно записать:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\left(2x+p\right)\cdot\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\int\left(\frac{\left(2x+p\right)\cdot\frac{A}{2}}{x^2+px+q}+\frac{-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}\right)dx=\int\frac{\left(2x+p\right)\cdot\frac{A}{2}}{x^2+px+q}dx+$$

$$+\int\frac{-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{\left(2x+p\right)}{x^2+px+q}dx+\left(-\frac{Ap}{2}+B\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Первый интеграл находится методом подведения под дифференциал, поскольку числитель является производной знаменателя:

$$\int\frac{\left(2x+p\right)}{x^2+px+q}dx=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}=\ln\left(x^2+px+q\right)+C\,.$$

Второй интеграл находим методом замены переменной. Для этого сначала в знаменателе выделяем полный квадрат:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=\left|x+\frac{p}{2}=t,dx=dt\right|=$$

$$=\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Окончательно можно записать:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(-\frac{Ap}{2}+B\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Пример 15. Найти интеграл $\int \frac{dx}{6x^2-3x+2}$.

Числитель подынтегральной дроби не имеет действительных корней, поэтому дробь является простейшей, а именно частным случаем простейшей дроби III рода.

Такой интеграл будем искать методом замены переменной. Для этого преобразуем знаменатель – выделим в нем полный квадрат:

$$6x^2-3x+2=6\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)=6\left(\left(x^2-2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=6\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{48}\right)=6\cdot\frac{13}{48}\left(\frac{48}{13}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+1\right)=$$

$$=\frac{13}{8}\left(\left(\sqrt{\frac{48}{13}}\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)^2+1\right)=\frac{13}{8}\left(\left(\sqrt{\frac{48}{13}}x-\sqrt{\frac{3}{13}}\right)^2+1\right).$$

Тогда можно записать:

$$\int\frac{dx}{6x^2-3x+2}=\int\frac{dx}{\frac{13}{8}\left(\left(\sqrt{\frac{48}{13}}x-\sqrt{\frac{3}{13}}\right)^2+1\right)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{48}{13}}x-\sqrt{\frac{3}{13}}=t,\ \sqrt{\frac{48}{13}}dx=dt,\\ dx=\sqrt{\frac{13}{48}}dt\end{array}\right|=\frac{8}{13}\int\frac{\sqrt{\frac{13}{48}}dt}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{48}{13}}x-\sqrt{\frac{3}{13}}\right)+C.$$

Пример 16. Найти интеграл $\int \frac{3x+2}{x^2+6x+14}dx$.

Подынтегральная дробь также является простейшей дробью III типа. Выделим в числителе производную знаменателя (см. формулу (14)):

$$3x+2=(2x+6)\cdot\frac{3}{2}+2-9=(2x+6)\cdot\frac{3}{2}-7.$$

Тогда можно записать:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+6x+14}dx=\int \frac{(2x+6)\cdot\frac{3}{2}-7}{x^2+6x+14}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+14}dx-7\int \frac{1}{x^2+6x+14}dx.$$

Первый интеграл найдем методом подведения под дифференциал, поскольку числитель подынтегральной дроби есть производная ее знаменателя:

$$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+14}dx=\int \frac{d\left(x^2+6x+14\right)}{x^2+6x+14}=\ln\left(x^2+6x+14\right)+C_1.$$

В знаменателе подынтегральной дроби второго интеграла выделим полный квадрат и с помощью замены переменной приведем его к табличному интегралу 9 (см. таблицу интегралов):

$$\int \frac{1}{x^2+6x+14}dx=\int \frac{1}{\left((x+3)^2+5\right)}dx=\int \frac{1}{5\left(\frac{(x+3)^2}{5}+1\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{25}+\frac{3}{25}\right)^2+1\right)}dx=\frac{1}{5}\cdot 25\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{25}+\frac{3}{25}\right)+C_2=$$

$$=5\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{25}+\frac{3}{25}\right)+C_2.$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+6x+14}dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+6x+14\right)\text{-}35\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{25}+\frac{3}{25}\right)+C .$$

7.2. Интегрирование правильных дробей

Всякую правильную дробь можно разложить на простейшие дроби. При этом:

1) если $x = x_0$ - простой действительный корень знаменателя $P_n(x)$, то в разложении ему соответствует дробь первого типа $\dfrac{A}{x-x_0}$;

2) если $x = x_0$ - действительный корень кратностью *k*, то в разложении ему соответствует сумма *k* дробей первого и второго типов:

$$\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{\left(x-x_0\right)^2}+\ldots+\frac{A_k}{\left(x-x_0\right)^k};$$

3) если в знаменателе $P_n(x)$ имеется трехчлен $x^2+p_1x+q_1$ без действительных корней, то в разложении дроби ему соответствует дробь третьего типа $\dfrac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1}$;

4) если, наконец, знаменатель $P_n(x)$ содержит множитель $(x^2+p_2x+q_2)^k$, то в разложении ему соответствует сумма *k* дробей третьего и четвертого типов:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_c}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^k}.$$

Пример 17. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}dx$

Подинтегральное выражение представляет собой правильную рациональную дробь, причем знаменатель имеет действительные корни ($x=1$ и $x=5$), поэтому дробь не относится к простейшим.

Итак, корни знаменателя действительные и некратные, поэтому данную дробь представим как сумму простейших дробей I типа:

$$\frac{x-3}{x^2-6x+5}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}=\frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}=$$
$$=\frac{(A+B)x-(5A+B)}{(x-1)(x-5)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для нахождения коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 5A+B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, получим: $\dfrac{x-3}{x^2-6x+5}=\dfrac{1/2}{x-1}+\dfrac{1/2}{x-5}$.

Теперь исходный интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов от простейших дробей:

$$\int\frac{x-3}{x^2-6x+5}dx=\int\left(\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x-5}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x-5}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x-5|)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-5}\right|+C.$$

Пример 18. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^2+x+9}{(x+2)(x-1)^2}dx.$

Знаменатель подынтегральной дроби имеет два действительных корня: $x_1=2$ с кратностью k = 1 и $x_2=1$ с кратностью k = 2. Значит подынтегральную дробь можно разложить на прстейшие следующим образом:

$$\frac{x^2+x+9}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{\left(x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B_1(x+2)(x-1)+B_2(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2(A+B_1)+x(-2A+B_1+B_2)+(A-2B_1+2B_2)}{(x+2)(x-1)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему для нахождения коэффициентов $A,\ B_1$ и B_2 :

$$\begin{cases} A+B_1=1, \\ -2A+B_1+B_2=1, \\ A-2B_1+2B_2=9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{11}{9}, \\ B_1=-\dfrac{2}{9}, \\ B_2=\dfrac{11}{3}. \end{cases}$$

$$\frac{x^2+x+9}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{11/9}{x+2}-\frac{2/9}{x-1}+\frac{11/3}{(x-1)^2}.$$

Теперь исходный интеграл можно представить в виде суммы интегралов от простейших дробей:

$$\int\frac{x^2+x+9}{(x+2)(x-1)^2}dx=\int\frac{11/9}{x+2}dx-\int\frac{2/9}{x-1}dx+\int\frac{11/3}{(x-1)^2}dx=$$

$$=\frac{11}{9}\ln|x+2|-\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{11}{3}\frac{1}{x-1}+C.$$

Пример 19. Найти интеграл $\int\frac{x^2+3x+2}{\left(x+2\right)\left(x^2+1\right)}dx.$

$$\frac{x^2+3x+3}{\left(x+2\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

$$\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\left(x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx+2Bx+2C}{\left(x+2\right)\left(x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{x^2(A+B)+x(C+2B)+(A+2C)}{\left(x+2\right)\left(x^2+1\right)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в полученной и исходной дроби, получим систему уравнений, из которой найдем неизвестные коэффициенты:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ C+2B=3, \\ A+2C=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{5}, \\ B=\frac{1}{5}, \\ C=\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Итак, подынтегральная дробь может быть представлена в виде:

$$\frac{x^2+3x+2}{\left(x+2\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{4/5}{x+2}+\frac{(1/5)x+3/5}{x^2+1}=\frac{4}{5}\frac{1}{x+2}+\frac{1}{5}\frac{x+3}{x^2+1}.$$

Тогда исходный интеграл запишем как сумму двух интегралов, каждый из которых легко найти:

$$\int\frac{x^2+3x+2}{\left(x+2\right)\left(x^2+1\right)}dx=\int\left(\frac{4}{5}\frac{1}{x+2}+\frac{1}{5}\frac{x+3}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{5}\int\frac{x+3}{x^2+1}dx=\frac{4}{5}\ln\left|x+2\right|+\frac{1}{5}\left(\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{3}{x^2+1}dx\right)=$$

$$=\frac{4}{5}\ln\left|x+2\right|+\frac{1}{5}\ln(x^2+1)+3\operatorname{arctg}\ x+C.$$

Заметим, что для нахождения двух последних инегралов был использован метод подведения под дифференциал (см.

пример 4) и непосредственное интегрирование (см. интеграл 9 в таблице интегралов).

7.3. Интегрирование неправильных дробей

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{m-n} + \frac{N_l(x)}{Q_m(x)}, \tag{15}$$

где M_{m-n} и $N_l(x)$ – многочлены, $\dfrac{N_l(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь, $l < m$.

Пример 20. Найти интеграл $\int \dfrac{1-x^2}{5x+1}dx.$

Подынтегральная дробь является неправильной, поскольку степень числителя больше степени знаменателя. Для того, чтобы ее проинтегрировать, необходимо сначала выделить целую часть, т.е. представить дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби:

$$\frac{-x^2+1}{5x+1} = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{25} + \frac{24/25}{5x+1}.$$

После этого интеграл может быть представлен в виде суммы простых интегралов:

$$\int \frac{1-x^2}{5x+1}dx = \int\left(-\frac{1}{5}x + \frac{1}{25} + \frac{24/25}{5x+1}\right)dx = -\int \frac{1}{5}x\;dx + \int \frac{1}{25}dx +$$

$$+\int \frac{24/25}{5x+1}dx = -\frac{x^2}{10} + \frac{x}{25} + \frac{24}{25}\ln\left|5x+1\right| + C.$$

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

8.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

(R – рациональная функция)

Неопределенный интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ (R – рациональная функция) с помощью подстановки $t = tg\,\frac{x}{2}$ $-\pi < x < \pi$, которая называется *универсальной тригонометрической подстановкой*, сводится к неопределенному интегралу от рациональной функции одной переменной t.

Сделаем подстановку

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t,\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt. \qquad (16)$$

Выразим $\sin x, \cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция от t.

Пример 21. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой (16), которая позволит перейти к интегралу от дробно-рациональной функции.

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{matrix}\right|=$$

$$=\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{3+5\dfrac{2t}{1+t^2}+3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{3+3t^2+10t+3-3t^2}=$$

$$=\int \frac{2dt}{10t+6}=\int \frac{dt}{5t+3}=\frac{1}{5}\ln|5t+3|+C=\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C.$$

Несмотря на то, что универсальная подстановка дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(\sin x,\cos x)$, однако на практике она часто приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому наряду с универсальной подстановкой полезно знать и другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1. Если подынтегральная функция четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x=t$, так как $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2}, \ \sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}, \ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

После подстановки получается интеграл от рациональной функции.

Пример 22. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

Подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, поэтому ее можно преобразовать в дробно-рациональную функцию с помощью подстановки $\operatorname{tg} x=t$.

Итак,

$$\operatorname{tg} x = t,\ \ \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тогда получаем:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2+2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \int \frac{dt}{2\left(\frac{t^2}{2}+1\right)} = \int \frac{dt}{2\left(\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

2. Если подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$, то есть $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой: $\cos x = t,\ \ -\sin x dx = dt,\ \sin x dx = -dt.$

3. Если подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$, то есть $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой $\sin x = t,\ \ \cos x dx = dt.$

Пример 23. а) Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x\ dx}{1+\cos x}.$

Подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$, поэтому сделаем подстановку $\cos x = t$.

$$\int \frac{\sin^3 x\ dx}{1+\cos x} = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x\ dx}{1+\cos x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\ dx}{1+\cos x} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x = t, -\sin x dx = dt, \\ \sin x dx = -dt \end{vmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{1+t} dt = -\int \frac{(1-t)(1+t)}{1+t} dt =$$

$$= -\int (1-t)\, dt = -\int dt + \int t dt = \frac{t^2}{2} - t + C = \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C.$$

б) Найти интеграл $\int \frac{\cos^3 x\ dx}{1+5\sin x}$.

Подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$, поэтому сделаем подстановку $\sin x = t$.

$$\int \frac{\cos^3 x\ dx}{1+5\sin x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x\ dx}{1+5\sin x} = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\ dx}{1+5\sin x} =$$

$$= \left|\sin x = t,\ \ \cos x dx = dt\right| = \int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{1+5t} = \left|\text{см. пример ...}\right| =$$

$$= -\frac{t^2}{10} + \frac{t}{25} + \frac{24}{125}\ln\left|5t+1\right| + C = -\frac{\sin^2 x}{10} + \frac{\sin x}{25} + \frac{24}{125}\ln\left|5\sin x + 1\right| + C.$$

8.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\ dx$

1. По крайней мере один из показателей степени, *m* или *n* – нечетное положительное число.

Если *n* – нечетное положительное число, то применяют подстановку $\sin x = t$, если *m* – нечетное положительное число, то подстановку $\cos x = t$.

2. Если оба показателя степени, *m* и *n* – четные положительные числа, то для преобразования подынтегральной функции используют *формулы понижения степени*:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad (17)$$
$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 24. а) Найти интеграл $\int \frac{\cos^3 3x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 3x}}$.

$$\int \frac{\cos^3 3x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 3x}} = \int \cos^3 3x \left(\sin 3x\right)^{-\frac{2}{5}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{поскольку показатель степени у} \cos 3x - \\ \text{нечетное положительное число, то сделаем подстановку} \\ \sin 3x = t, \text{ тогда } dt = 3\cos 3x dx, \ \cos 3x dx = dt/3. \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos^2 3x \cdot \cos 3x \left(\sin 3x\right)^{-\frac{2}{5}} dx = \frac{1}{3}\int \left(1-t^2\right) t^{-\frac{2}{5}} dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(t^{-\frac{2}{5}} - t^{\frac{8}{5}} \right) dt = \frac{1}{3}\left(\int t^{-\frac{2}{5}} dt - \int t^{\frac{8}{5}} dt \right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5t^{\frac{3}{5}}}{3} - \frac{5t^{\frac{13}{5}}}{13} \right) + C =$$

$$= \frac{5t^{\frac{3}{5}}}{9} - \frac{5t^{\frac{13}{5}}}{39} + C = \frac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^3 3x} - \frac{5}{39}\sqrt[5]{\sin^{13} 3x} + C.$$

б) Найти интеграл $\int \sin^4 3x \cos^2 3x \ dx$.

Показатели степени у $\sin 3x$ и $\cos 3x$ - целые положительные числа, поэтому преобразуем подынтегральную функцию с помощью формул (17):

$$\cos^2 3x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 6x\right),$$

$$\sin^4 3x = \left(\sin^2 3x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1-\cos 6x\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 6x+\cos^2 6x\right),$$

$$\int \sin^4 3x\cos^2 3x\ dx = \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 6x\right)\left(1-2\cos 6x+\cos^2 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 6x-2\cos 6x-2\cos^2 6x+\cos^2 6x+\cos^3 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 6x-\cos^2 6x+\cos^3 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx-\int \cos 6xdx-\int \cos^2 6xdx+\int \cos^3 6xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{8}x-\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{8}\int \cos^2 6xdx+\frac{1}{8}\int \cos^3 6xdx.$$

Найдем два последних интеграла.

$$\int \cos^2 6xdx = \int \frac{1}{2}\left(1+\cos 6x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx+\int \cos 6xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C_1 = \frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C_1,$$

$$\int \cos^3 6x\ dx = \int \cos^2 6x\cos 6x\ dx = \int \left(1-\sin^2 6x\right)\cos 6x\ dx =$$

$$= \int \left(1-\sin^2 6x\right)\cos 6x\ dx = \int \cos 6x\ dx-\int \sin^2 6x\cos 6x\ dx =$$

$$= \frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{6}\frac{\sin^3 6x}{3}+C_2 = \frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{18}\sin^3 6x+C_2.$$

Окончательно получаем:

$$\int \sin^4 3x\cos^2 3x\ dx == \frac{1}{8}x-\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{8}\int \cos^2 6xdx+$$

$$+\frac{1}{8}\int \cos^3 6xdx = \frac{1}{8}x-\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C_1\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{18}\sin^3 6x+C_2\right)=$$

$$=\frac{1}{8}x-\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{16}x+\frac{1}{96}\sin 6x+\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{144}\sin^3 6x+C=$$

$$=\frac{1}{16}x+\frac{1}{96}\sin 6x-\frac{1}{144}\sin^3 6x+C.$$

8.3. Интегралы вида

$$\int\cos mx\cos nxdx,\quad \int\sin mx\cos nxdx,\quad \int\sin mx\sin nxdx$$

С помощью тригонометрических формул:

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos\left(m+n\right)x+\cos\left(m-n\right)x\right), \tag{18}$$

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin\left(m+n\right)x+\sin\left(m-n\right)x\right), \tag{19}$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(m+n\right)x+\cos\left(m-n\right)x\right) \tag{20}$$

интегралы такого вида можно представить в виде суммы (разности) простых интегралов.

Пример 25. Найти интеграл $\int\sin 5x\sin 6x\ dx.$

Преобразуем подынтегральное выражение, пользуясь формулой (20):

$$\sin 5x\sin 6x=\frac{1}{2}\left(-\cos 11x+\cos\left(-x\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-\cos 11x+\cos x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos x-\cos 11x\right).$$

Тогда можно представить исходный интеграл как разность двух интегралов:

$$\int\sin 5x\sin 6x\ dx=\frac{1}{2}\left(\int\cos xdx+\int\cos 11xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin x-11\sin 11x\right)+C=\frac{\sin x}{2}-\frac{11}{2}\sin 11x+C.$$

9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

9.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$, $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$, $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$

Интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ может быть приведен к интегралу от рациональной функции с помощью замены $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$. Для интеграла вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ с этой целью используют замены $x=a\ \mathrm{tg}\ t$ или $x=a\ \mathrm{ctg}\ t$, а для интеграла вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ - замены $x=\dfrac{a}{\sin^2 t}$ или $x=\dfrac{a}{\cos^2 t}$.

Пример 26. Найти интеграл $\int\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx.$

Это интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, a^2 = 16, a = 4, поэтому для интегрирования воспользуемся подстановкой $x=4\sin t$ (точно также можно воспользоваться и подстановкой $x=4\cos t$).

$$\int\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx=\begin{vmatrix}x=4\sin t,\\ dx=4\cos t dt\end{vmatrix}=\int\frac{\sqrt{16-16\sin^2 t}}{16\sin^2 t}\cdot 4\cos t dt=$$

$$=\int\frac{\sqrt{16(1-\sin^2 t)}}{4\sin^2 t}\cos t dt=\int\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cos t dt=$$

$$=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\begin{vmatrix}\text{воспользуемся основным}\\ \text{тригонометрическим тождеством}\end{vmatrix}=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\begin{vmatrix}\text{поделим почленно}\\ \text{числитель на знаменатель}\end{vmatrix}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t}\right)dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=-\mathrm{ctg}\ t-t+C.$$

9.2. Интегралы от выражений вида $R\left(x, x^{r_1/s_1}, x^{r_2/s_2}, ..., x^{r_v/s_v}\right)$

Интеграл вида $\int R\left(x, x^{r_1/s_1}, x^{r_2/s_2}, ..., x^{r_v/s_v}\right)dx$ приводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены $x = u^m$, где m = НОК ($(s_1, s_2, s_3, ...s_v)$.

Пример 27. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+4}\,dx$ **.**

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+4}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+4}\,dx = \begin{vmatrix} x = t^4,\ dx = 4t^3dt, \\ \sqrt{x} = t^2,\ \sqrt[4]{x^3} = t^3 \end{vmatrix} = \int \frac{t^2}{t^3+4}\ 4t^3dt =$$

$$= 4\int \frac{t^5}{t^3+4}\,dt = 4\int\left(t^2 - \frac{4t^2}{t^3+4}\right)dt = 4\left(\int t^2dt - \int \frac{4t^2}{t^3+4}dt\right) =$$

$$= 4\left(\frac{t^3}{3} - 4\int \frac{t^2}{t^3+4}dt\right) = \begin{vmatrix} d(t^3+4) = 3t^2dt,\ t^2dt = \frac{1}{3}d(t^3+4), \\ \int \frac{t^2}{t^3+4}dt = \frac{1}{3}\int \frac{d(t^3+4)}{t^3+4} = \frac{1}{3}\ln\left|t^3+4\right| + C \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{16}{3}\ln\left|t^3+4\right| + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right| + C.$$

Пример 28. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{2-\sqrt{x-2}}\,dx$.

С помощью замены переменной перейдем к интегралу от дробно-рациональной функции.

$$\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}\,dx = \begin{vmatrix} \sqrt{x-2} = t,\ x-2 = t^2, \\ x = t^2+2,\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{t^2+2+1}{3-t}\ 2tdt =$$

$$= 2\int \frac{\left(t^2+3\right)t}{3-t}\,dt = -2\int \frac{t^3+3t}{t-3}dt = -2\int\left(t^2+3t+12+\frac{36}{t-3}\right)dt =$$

$$= -2\left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + 36\ln\left|t-3\right|\right) + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} - 3(x-2) - 24\sqrt{x-2} - 72\ln\left|\sqrt{x-2} - 3\right| + C.$$

10. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть на промежутке $[a,b]$ определена функция $f(x)$. Разобьем промежуток $[a,b]$ произвольно на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b,$ вычислим длину каждого промежутка:

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

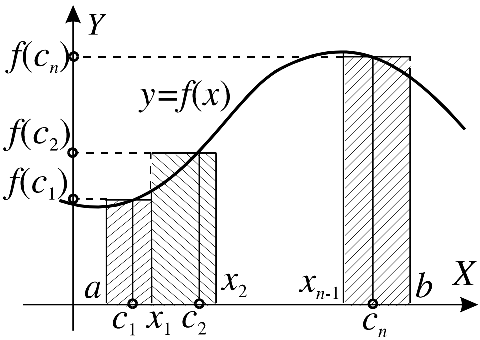


Рис. 1

В каждом из промежутков произвольно выбираем по точке c_i, $i = 1, 2, \ldots, n.$ Эти точки называются точками пунктуации при данном способе разбиения промежутка $[a,b]$ на части. Вычислим значение функции в точках пунктуации: $f(c_i), i = 1, 2, \ldots, n.$

Составим сумму вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta_i x. \tag{21}$$

Сумма (21) называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$. Очевидно, что она зависит от способа разбиения промежутка $[a,b]$ на части и от выбора точек пунктуации.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta_i x\}$. λ называется мелкостью разбиения промежутка $[a,b]$ на части или рангом дробления.

Если существует $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_i x,$ независящий от способа разбиения промежутка $[a,b]$ и от выбора точек пунктуации, то он называется *определенным интегралом* от $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx,$ где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $x=a$ – нижний предел интегрирования, $x=b$ – верхний предел интегрирования.

Теорема (о существовании определенного интеграла): если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

Отметим, однако, что определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности, для всякой ограниченной на отрезке функции, имеющей конечное число точек разрыва первого рода.

11. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема Ньютона-Лейбница.

Если:

1) a и b конечны;

2) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет первообразную $F(x)$,

то определенный интеграл выражается конечным числом и может быть вычислен по *формуле Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (22)$$

12. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Определенный интеграл с одинаковым верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \quad (23)$$

2. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \quad (24)$$

3. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$, а k_1, k_2 – постоянные, то

$$\int_a^b k_1 f(x) + k_2 g(x)dx = k_1\int_a^b f(x)dx + k_2\int_a^b g(x)dx. \quad (25)$$

4. При любом расположении точек a,b,c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (26)$$

5. Если для любых $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq 0$, то и $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

6. Если для любых $x\in[a,b]$ выполняется неравенство $f(x)\ge g(x)$, то и $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx.$

7. Оценка интеграла по модулю:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx.$$

Во всех свойствах предполагается, что $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Пример 29. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{1}(x^2-5x)dx$.

$$\int_{-1}^{1}(x^2-5x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}-\left(\frac{-1}{3}-\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{3}.$$

13. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $x=\phi(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$, функция $\phi(t)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha,\beta]$, причем $\phi(\alpha)=a, \phi(\beta)=b,$ то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)dt. \qquad (27)$$

Пример 30. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Интеграл от такого иррационального выражения вычисляется с помощью тригонометрической замены (см. пункт 9.1): $x=2\sin t,\ dx=2\cos t dt$.

Поскольку вводится новая переменная интегрирования, необходимо изменить и пределы интегрирования:

$$x_1 = 2\sin t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \arcsin 0 = 0,$$

$$x_2 = 2\sin t_2 = 1 \Rightarrow t_1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2t\right)dt == 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right) = \pi.$$

14. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a,b]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x). \qquad (28)$$

Пример 31. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+5)\sin 4x\,dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+5)\sin 4x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x+5, \\ dv = \sin 4x dx, \\ du = 2dx, \\ v = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array} \right| =$$

$$= -(2x+5)\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{4}\cos 4x \cdot 2dx =$$

$$= -\frac{1}{4}(2x+5)\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}+5\right)\cos\pi + \frac{5}{4}\cos 0 + \frac{1}{8}\sin\pi - \frac{1}{8}\sin 0 =$$

$$= +\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+5\right) + \frac{5}{4} + 0 - 0 = \frac{\pi}{8} + \frac{5}{2} \approx 2.89.$$

15. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

15.2. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

Часть плоскости, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a,\ x = b$ называется *криволинейной трапецией* (см. рис. 2).

Если на отрезке $[a,b]$ $f(x) \ge 0$, то площадь криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx, \qquad (29)$$

если на отрезке $[a,b]$ $f(x) \le 0$, то

$$S = -\int_a^b f(x)dx\,. \tag{30}$$

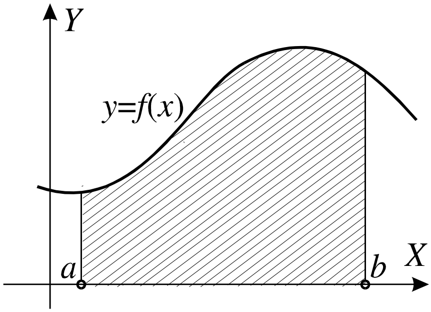


Рис. 2

Формулы (29) и (30) можно объединить в одну формулу:

$$S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx\,. \tag{31}$$

Если область ограничена графиками функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \le f_2(x) \right)$, прямыми $x = a, x = b$, то ее площадь может быть вычислена по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx\,. \tag{32}$$

Пример 32. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2, y = x.$

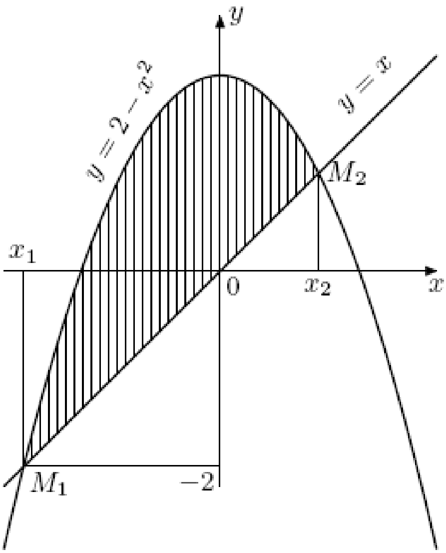


Рис. 3

На рис. 3 показаны графики функций $y = 2 - x^2$ и $y = x$. Вычисляемая площадь заштрихована. Определим координаты точек пересечения кривых – точек M_1 и M_2. В точке пересечения ординаты равны, поэтому получим уравнение:

$$2 - x^2 = x.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$x_1 = -2 \text{ и } x_2 = 1.$$

Тогда точками пересечения данных линий будут точки M_1 (-2; -2) и M_2 (1; 1).

В соответствии с формулой (32) запишем:

$$S=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\left(-4-\frac{-8}{3}-\frac{4}{2}\right)=\frac{27}{6}.$$

15.2. Вычисление длины дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если гладкая кривая задана уравнением $y=f(x)$, то длина её дуги от точки $A\left(a, f(a)\right)$ до точки $B\left(b, f(b)\right)$ вычисляется по формуле:

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (33)$$

Пример 33. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2},\quad 1\le x\le 2.$

Для того, чтобы воспользоваться формулой (33) сначала найдем производную функции $y(x)$:

$$y'=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)'=\frac{2x}{4}-\frac{1}{2x}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}.$$

Подставим в (33):

$$l=\int_{1}^{2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_{1}^{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4}-2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}}\,dx=$$

$$=\int_{1}^{2}\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)\Bigg|_{1}^{2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 1=\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}\approx 1.1$$

16. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

16.1. Несобственные интегралы I рода

Если положить промежуток интегрирования бесконечным, то приведенное выше определение определенного интеграла теряет смысл, например, потому что невозможно осуществить условия $n\to\infty; \lambda\to 0$ для бесконечного промежутка. Для такого интеграла требуется специальное определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на полубесконечном промежутке $[a;\infty)$, тогда *несобственным интегралом с бесконечным пределом* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, если предел существует. Если этот предел не существует, то не существует и несобственный интеграл. В этом случае принято говорить, что несобственный интеграл *расходится*. При существовании предела говорят, что несобственный интеграл *сходится*.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\right).$$

Интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ относятся к *несобственным интегралам I рода*, т. к. для них не выполнено первое условие теоремы Ньютона-Лейбница, а именно один из пределов интегрирования или оба не являются конечными, а второе условие выполнено. Вычисление таких интегралов можно проводить по формуле (22), при этом $F(\infty)$ считается как предельное значение, которое может быть конечным, бесконечным или не иметь смысла. То есть:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a) = \left(\lim_{b\to\infty} F(b)\right) - F(a), \qquad (34)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a), \qquad (35)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a). \qquad (36)$$

Пример 34. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Данный интеграл является несобственным интегралом I рода, поскольку его верхний предел бесконечен. Воспользовавшись формулой (ююю), получим:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} (\text{arctg } b) - \text{arctg } 1 = \text{arctg } \infty - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, данный интеграл имеет конечное значение, а следовательно сходится.

16.2. Несобственные интегралы II рода

Если в точке $x = a$ или в точке $x = b$ функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв, то есть нарушается второе условие теоремы Ньютона-Лейбница, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом II рода*.

Для вычисления несобственных интегралов II рода пользуются формулой Ньютона-Лейбница, полагая при этом, что значение первообразной $F(x)$ в точке разрыва $x=a$ $(x=b)$ равно предельному значению $\lim\limits_{c\to a+0} F(c)$ $\left(\lim\limits_{c\to b-0} F(c)\right)$.

Таким образом формулы для вычисления несобственных интегралов II рода имеют вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(b) - \lim_{c\to a+0} F(c),$$

если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x=a$;

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \lim_{c\to b-0} F(c) - F(a),$$

если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x=b$.

Если предел в правой части равенств существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Пример 35.

а) Вычислить несобственный инетграл или доказать его расходимость: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ имеет бесконечный разрыв на отрезке $[0,\ 1]$ в точке $x=0$, т. к. $f(0)=\infty$. Следовательно, данный интеграл является несобственным инетгралом II рода. Для его вычисления воспользуемся формулой (///) и получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 1-0}\left(2\sqrt{x}\Big|_0^c\right) = \lim_{c\to 1-0} 2\sqrt{x} - 0 = 2 - 0 = 2,$$

т.е. данный интеграл сходится.

б) Вычислить несобственный инетграл или доказать его расходимость: $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечный разрыв на $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$, т. к. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = \lim_{c \to \frac{\pi}{2}-0} \left(-\ln|\cos x| \Big|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$= \lim_{c \to \frac{\pi}{2}-0} \left(-\ln\left|\cos\frac{\pi}{2}\right| \right) + \ln|\cos 0| = -\ln 0 + \ln 1 = -(\infty) + 0 = \infty,$$

интеграл расходится.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

1. Найти неопределенный интеграл.

1.1. $\int\left(x^5+\frac{2}{x^2}-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)dx$.

1.2. $\int\left(7x^4-4\sqrt[3]{x^2}+\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^8}\right)dx$.

1.3. $\int\left(x^2-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}+2\sqrt{x}+\frac{4}{x^3}\right)dx$.

1.4. $\int\left(x^3+\frac{6}{x}+2\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx$.

1.5. $\int\left(4x^7+\frac{6}{x^2}+8\sqrt[5]{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x^7}}\right)dx$.

1.6. $\int\left(11x^4+\frac{2}{\sqrt{x}}+4\sqrt[7]{x^2}-\frac{1}{2x^2}\right)dx$.

1.7. $\int\left(\frac{2}{5}x^6+\frac{5}{x^8}+4\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)dx$.

1.8. $\int\left(7x^2+\frac{2}{x^3}+4\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$.

1.9. $\int\left(x^5+\frac{1}{x^4}+7\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

1.10. $\int\left(3x^2+\frac{2}{x^3}+\sqrt{x^7}-\frac{4}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$.

1.11. $\int\left(x^9+\frac{5}{x}+2\sqrt[3]{x^8}-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

1.12. $\int\left(9x^4+\frac{1}{x^4}+3\sqrt[3]{x^5}-\frac{6}{\sqrt[8]{x^5}}\right)dx$.

1.13. $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^3}+2\sqrt[4]{x^5}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}\right)dx$.

1.14. $\int\left(3x^5+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{x}-\frac{8}{\sqrt[7]{x}}\right)dx$.

1.15. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^5}}-x^4\right)dx$.

1.16. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{3x^3}-2\sqrt{x}-\frac{7}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$.

1.17. $\int\left(\frac{x^5}{3}+\frac{2}{x^7}-\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right)dx$.

1.18. $\int\left(8x^3+\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\sqrt[4]{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$.

1.19. $\int\left(\frac{x^5}{5}+\frac{7}{x^3}-\sqrt{x^7}-\frac{4}{\sqrt[7]{x^5}}\right)dx$.

1.20. $\int\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{x^4}-3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x^4}}\right)dx$.

1.21. $\int\left(3x^3+\frac{6}{x^4}-\sqrt{x^7}-\frac{3}{\sqrt[3]{2x}}\right)dx$.

1.22. $\int\left(8x^3+\frac{4}{x}-\frac{\sqrt{x^5}}{5}-\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}\right)dx$.

1.23. $\int\left(10x^{12}+\frac{9}{x^6}-\sqrt[6]{x^5}-\frac{11}{\sqrt{x}}\right)dx$.

1.24. $\int\left(5x^5+\frac{1}{4x^3}-\sqrt[8]{x^7}-\frac{7}{\sqrt[3]{x^{11}}}\right)dx$.

1.25. $\int\left(12x^4+\frac{3}{x^9}-\sqrt[9]{x^7}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

1.26. $\int\left(3x^3+\frac{1}{4x^4}-2\sqrt[9]{x^7}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^{13}}}\right)dx$.

1.27. $\int\left(6x^6+\frac{1}{7x^7}-\sqrt[5]{x^2}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^{14}}}\right)dx$.

1.28. $\int\left(x^5+\frac{2}{x^4}-\sqrt[3]{3x^7}-\frac{4}{\sqrt[5]{x^4}}\right)dx$.

1.29. $\int\left(\frac{x^5}{2}+\frac{3}{x^3}-\sqrt[8]{x^9}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$.

1.30. $\int\left(8x^4+\frac{3}{x^6}-\sqrt[6]{3x^3}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

2. Найти неопределенный интеграл.

2.1. $\int\left(\sin(3x-2)+e^{5x-1}-\sqrt[3]{3x+1}+\frac{1}{1-4x}\right)dx.$

2.2. $\int\left(\sqrt[4]{\frac{x}{3}-2}-\cos\left(\frac{x}{12}-1\right)+\mathrm{e}^{3x-2}+\frac{1}{2x-2}\right)dx.$

2.3. $\int\left(\sqrt{3x+4}-\sin(4x+3)\ +\mathrm{e}^{9x+1}+\frac{1}{5x+11}\right)dx.$

2.4. $\int\left(\frac{1}{2x-1}-\cos\left(\frac{x}{8}+\ 3\right)\ +\mathrm{e}^{-3x+6}-\sqrt[4]{\frac{x}{7}+2}\right)dx.$

2.5. $\int\left(\sqrt[3]{\frac{x}{8}+\ 3}\ +\mathrm{e}^{-x+6}-\ 3\sin(4x+1)-\frac{1}{2-x}\right)dx.$

2.6. $\int\left(\cos(4x+3)+\mathrm{e}^{-3x+6}+\frac{1}{\sqrt{3x+2}}+\frac{1}{7x-1}\right)dx.$

2.7. $\int\left(\ \frac{1}{5-6x}+\ \mathrm{e}^{-2x+1}+\sqrt[3]{x+1}-\sin(7-x)\right)dx.$

2.8. $\int\left(\ \sin\left(\frac{x}{3}-2\right)+\ e^{4-x}+\frac{1}{1-x}-\sqrt[4]{8x-1}\right)dx.$

2.9. $\int\left(\cos(2-3x)-\sqrt[4]{4x+\ 3}\ +\ e^{3\text{-}4x}+\frac{1}{1-12x}\right)dx.$

2.10. $\int\left(\sin\left(\frac{x}{5}-5\right)+\mathrm{e}^{-x-1}-\sqrt[3]{x+9}+\frac{1}{1-9x}\right)dx.$

2.11. $\int\left(\sin\left(\frac{x}{6}+1\right)+\mathrm{e}^{-2x-9}-\sqrt[5]{6x+2}+\frac{1}{2-x}\right)dx.$

2.12. $\int\left(\sin(3-8x)-\sqrt[5]{7x+1}+e^{-4x+2}+\frac{2}{1+3x}\right)dx.$

2.13. $\int\left(\frac{1}{x+13}+\cos\left(1-6x\right)+e^{-\frac{2x}{3}-3}-\sqrt[3]{\frac{x}{7}+2}\right)dx.$

2.14. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{3x+4}}-\cos(4x+3)\ +e^{12x+1}+\frac{3}{5x+1}\right)dx.$

2.15. $\int\left(\sin\left(6x+2\right)+e^{-5x-3}-\sqrt[5]{2x+1}+\frac{1}{2-12x}\right)dx.$

2.16. $\int\left(\sin(7-7x)-e^{7x-4}+\sqrt[3]{\frac{x}{2}+2}+\frac{1}{5x+3}\right)dx.$

2.17. $\int\left(\sin\left(1-\frac{x}{3}\right)+e^{3-\frac{x}{3}}-\sqrt[5]{2x+1}+\frac{8}{1-2x}\right)dx.$

2.18. $\int\left(\frac{1}{4x+3}+\sin\left(1-2x\right)+e^{-\frac{x}{4}-4}-\sqrt[3]{\frac{3}{4}x+1}\right)dx.$

2.19. $\int\left(\cos(3x+2)+e^{12x+2}-\frac{2}{\sqrt[5]{8x+1}}+\frac{1}{4+3x}\right)dx.$

2.20. $\int\left(\cos(x+4)+e^{2-8x}-\frac{8}{\sqrt[8]{x+1}}+\frac{1}{3x+11}\right)dx.$

2.21. $\int\left(\frac{1}{3-13x}+\sin\left(1-6x\right)+e^{-\frac{5}{3}x-3}-\sqrt[5]{\frac{x}{5}+2}\right)dx.$

2.22. $\int\left(\cos(7-7x)-e^{\frac{x}{4}-4}+\sqrt[4]{\frac{x}{12}+4}+\frac{1}{3-7x}\right)dx.$

2.23. $\int\left(\sin\left(1-7x\right)+e^{-x-3}-\sqrt[8]{2x-2}+\frac{1}{3-4x}\right)dx.$

2.24. $\int\left(\cos(4-5x)+e^{\frac{3x}{2}+1}-\frac{1}{\sqrt[4]{x+4}}+\frac{1}{1-2x}\right)dx.$

2.25. $\int\left(\sin\left(\frac{x}{2}+2\right)+e^{-x-3}-\sqrt[5]{x+1}+\frac{3}{2-3x}\right)dx.$

2.26. $\int\left(\cos(3-3x)+e^{-2-3x}-\sqrt[5]{\frac{x}{5}+1}+\frac{3}{1+3x}\right)dx.$

2.27. $\int\left(\cos(6-x)+e^{\frac{x}{8}}-\sqrt[8]{8x+1}+\frac{1}{1-9x}\right)dx.$

2.28. $\int\left(\cos(x+2)-e^{x-4}+\sqrt[3]{\frac{x}{3}+1}+\frac{2}{x+13}\right)dx.$

2.29. $\int\left(\sin(3x-\ 2)+e^{\frac{x}{2}+2}-\frac{2}{\sqrt[3]{3x+1}}+\frac{1}{4+2x}\right)dx.$

2.30. $\int\left(\sin(3x-\ 2)+e^{-\frac{x}{2}}-\sqrt[3]{3-3x}+\frac{2}{1-2x}\right)dx.$

3. Найти неопределенный интеграл.

3.1. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}.$

3.2. $\int\frac{dx}{5x^2+2}.$

3.3. $\int\frac{dx}{9x^2+3}.$

3.4. $\int\frac{dx}{2x^2+3}.$

3.5. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}.$

3.6. $\int\frac{dx}{2x^2+9}.$

3.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$.

3.8. $\int \frac{dx}{5x^2+3}$.

3.9. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$.

3.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

3.11. $\int \frac{dx}{7x^2+6}$.

3.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$.

3.13. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

3.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

3.15. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$.

3.16. $\int \frac{dx}{6x^2+1}$.

3.17. $\int \frac{dx}{3x^2+2}$.

3.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

3.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

3.20. $\int \frac{dx}{8x^2+9}$.

3.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

3.22. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$.

3.23. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.

3.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

3.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$.

3.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

3.27. $\int \frac{dx}{9x^2+8}$.

3.28. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$.

3.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-9x^2}}$.

3.30. $\int \frac{dx}{3x^2+8}$.

4. Найти неопределенный интеграл.

4.1. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3-2x^2}}$.

4.2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

4.3. $\int \frac{3xdx}{4x^2+1}$.

4.4. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

4.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}$.

4.6. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$.

4.7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$.

5.8. $\int \frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

4.9. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2-3}}$.

4.10. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

4.11. $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$.

4.12. $\int \frac{xdx}{3x^2+8}$.

4.13. $\int \frac{2xdx}{3x^2-7}$.

4.14. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}}$.

4.15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

4.16. $\int \frac{xdx}{2x^2+9}$.

4.17. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

4.18. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

4.19. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{5x^2+3}}$.

4.20. $\int \frac{xdx}{3x^2-6}$.

4.21. $\int \frac{xdx}{5x^2+1}$.

4.22. $\int \frac{5xdx}{5x^2-3}$.

4.23. $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$.

4.24. $\int \frac{9xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

4.25. $\int \frac{3xdx}{9x^2+2}$.

4.26. $\int \frac{9xdx}{2x^2+1}$.

4.27. $\int \frac{7xdx}{\sqrt{4x^2-5}}$.

4.28. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+5}}$.

4.29. $\int \frac{xdx}{x^2-6}$.

4.30. $\int \frac{xdx}{9x^2+5}$.

5. Найти неопределенный интеграл.

5.1. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{\ln(2+x)}}$.

5.2. $\int \frac{\ln^2(3x+1)}{3x+1}dx$.

5.3. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln(1-x)}}$.

5.4. $\int \frac{dx}{(2+5x)\sqrt{\ln^3(2+5x)}}$.

5.5. $\int \frac{\ln^3(x+1)}{x+1}dx$.

5.6. $\int \frac{dx}{(1+3x)\sqrt{\ln^5(1+3x)}}$.

5.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(3x+2)}dx}{3x+2}$.

5.8. $\int \frac{\ln^4(1+7x)}{(1+7x)}dx$.

5.9. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

5.10. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^4(x+2)}}{x+2}dx$.

5.11. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1}dx$.

5.12. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5(2x+1)}}{2x+1}dx$.

5.13. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3}\,dx.$

5.14. $\int \frac{dx}{(1+4x)\sqrt{\ln(1+4x)}}.$

5.15. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^7(8x+1)}}{8x+1}dx.$

5.16. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt[4]{\ln(x+3)}}.$

5.17. $\int \frac{dx}{(8x+9)\sqrt[9]{\ln(8x+9)}}.$

5.18. $\int \frac{\ln^4(1-4x)}{(1-4x)}\,dx.$

5.19. $\int \frac{dx}{(3-4x)\sqrt{\ln^5(3-4x)}}.$

5.20. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^5(x+3)}}{x+3}dx.$

5.21. $\int \frac{dx}{(4x+2)\ln^4(4x+2)}.$

5.22. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^7(3x+1)}}{3x+1}dx.$

5.23. $\int \frac{dx}{(9x+7)\sqrt{\ln(9x+7)}}.$

5.24. $\int \frac{dx}{(8+9x)\sqrt{\ln^9(8+9x)}}.$

5.25. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^4(1+5x)}}{(1+5x)}\,dx.$

5.26. $\int \frac{dx}{(2-2x)\ln^5(2-2x)}.$

5.27. $\int \frac{\ln^7(11+2x)}{(11+2x)}\,dx.$

5.28. $\int \frac{dx}{(x+8)\sqrt{\ln^3(x+8)}}.$

5.29. $\int \frac{dx}{(x+7)\ln(x+7)}.$

5.30. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3(3x+5)}}{3x+5}dx.$

6. Найти неопределенный интеграл.

6.1. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx.$

6.2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}\,dx.$

6.3. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx.$

6.4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx.$

6.5. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx.$

6.6. $\int \cos^7 2x \sin 2x dx.$

6.7. $\int \frac{\cos x}{\sin x + 2} dx.$

6.8. $\int \frac{\cos x}{3 - \sin x} dx.$

6.9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 3}} dx.$

6.10. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}} dx.$

6.11. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - 4}} dx.$

6.12. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx.$

6.13. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}} dx.$

6.14. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx.$

6.15. $\int \sin^3 4x \cos 4x dx.$

6.16. $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \sin 2x dx.$

6.17. $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx.$

6.18. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx.$

6.19. $\int \sin^3 5x \cos 5x dx.$

6.20. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx.$

6.21. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx.$

6.22. $\int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx.$

6.23. $\int \sin^6 3x \cos 3x dx.$

6.24. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx.$

6.25. $\int \sin^4 8x \cos 8x dx.$

6.26. $\int \sqrt[7]{\sin^5 3x} \cos 3x dx.$

6.27. $\int \sqrt[5]{\sin 9x+2}\cos 9x dx.$

6.28. $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x+7}}dx.$

6.29. $\int \frac{\cos 4x}{\sqrt{\sin 4x+4}}dx.$

6.30. $\int \sqrt[3]{\cos^2 7x}\sin 7x dx.$

7. Найти неопределенный интеграл.

7.1. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}}{\cos^2 x}dx.$

7.2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}}.$

7.3. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^4 x \sin^2 x}.$

7.4. $\int \frac{\mathrm{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x}dx.$

7.5. $\int \frac{\mathrm{tg}^3 4x}{\cos^2 4x}dx.$

7.6. $\int \frac{\sqrt[3]{3-\mathrm{tg}5x}}{\cos^2 5x}dx.$

7.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}dx.$

7.8. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^3 3x \sin^2 3x}.$

7.9. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^4 5x \cos^2 5x}.$

7.10. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}7x}}{\sin^2 7x}dx.$

7.11. $\int \frac{\sqrt[5]{\mathrm{ctg}3x}}{\sin^2 3x}dx.$

7.12. $\int \frac{\mathrm{tg}^4 7x}{\cos^2 7x}dx.$

7.13. $\int \frac{\mathrm{tg}^5 6x}{\cos^2 6x}dx.$

7.14. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x}dx.$

7.15. $\int \frac{\mathrm{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x}dx.$

7.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg}4x}\cos^2 4x}.$

7.17. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{\operatorname{ctg}^3 6x}\sin^2 8x}$.

7.18. $\int \frac{\sqrt[7]{\operatorname{tg}^5 3x}}{\cos^2 3x}\,dx.$

7.19. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x+2}}{\sin^2 x}\,dx.$

7.20. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}4x}}{\sin^2 4x}\,dx.$

7.21. $\int \frac{\sqrt[5]{1+\operatorname{ctg}4x}}{\sin^2 4x}\,dx.$

7.22. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}7x}}{\cos^2 7x}\,dx.$

7.23. $\int \frac{\sqrt[4]{2+\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x}\,dx.$

7.24. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{\cos^2 3x}\,dx.$

7.25. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^7 7x}}{\cos^2 7x}\,dx.$

7.26. $\int \frac{\sqrt[7]{5+\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}\,dx.$

7.27. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 6x\cos^2 6x}$.

7.28. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x\sqrt{\operatorname{tg}^9 2x}}$.

7.29. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^2 9x\sin^2 9x}$.

7.30. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{\operatorname{tg}^5 8x}\cos^2 8x}$.

8. Найти неопределенный интеграл.

8.1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}3x}}{1+9x^2}\,dx.$

8.2. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

8.3. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$

8.4. $\int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

8.5. $\int \frac{dx}{(1+9x^2)\sqrt{3+\operatorname{arctg} 3x}}$.

8.6. $\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}}{1+9x^2}\,dx.$

8.7. $\int \frac{\arccos^3 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

8.8. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}$

8.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}.$

8.10. $\int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

8.11. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^7 3x}{1+9x^2}dx.$

8.12. $\int \frac{\arccos^3 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx.$

8.13. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

8.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}\arcsin^3 3x}.$

8.15. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arcctg}^7 x}.$

8.16. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx.$

8.17. $\int \frac{\arccos^6 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

8.18. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 3x}}{1+9x^2}dx.$

8.19. $\int \frac{dx}{\left(1+4x^2\right)\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^2 4x}}.$

8.20. $\int \frac{dx}{\left(1+25x^2\right)\operatorname{arctg}^3 5x}.$

8.21. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

8.22. $\int \frac{\sqrt[5]{\arccos^3 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

8.23. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{2+\operatorname{arcctg} x}}.$

8.24. $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{1+25x^2}dx.$

8.25. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 4x}}{1+16x^2}dx.$

8.26. $\int \frac{\sqrt[7]{\arccos^6 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

8.27. $\int \frac{dx}{\left(1+64x^2\right)\sqrt{\operatorname{arctg} 8x}}.$

8.28. $\int \frac{\sqrt[7]{3+\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

8.29. $\int \frac{dx}{(1+9x^2)\sqrt{4+\operatorname{arctg} 3x}}$ 8.30. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$

9. Найти неопределенный интеграл.

9.1. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$.

9.2. $\int e^{3-\sin 3x} \cdot \cos 3xdx$

9.3. $\int e^{\cos 2x} \sin 2xdx$.

9.4. $\int \frac{x^2dx}{e^{x^3+1}}$.

9.5. $\int e^{2x^3-1}x^2dx$.

9.6. $\int \frac{\sin 3xdx}{e^{\cos 3x}}$.

9.7. $\int \frac{e^{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

9.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}e^{\arccos x}}$.

9.9. $\int e^{4x^4+5}x^3dx$.

9.10. $\int e^{3-x^2}xdx$.

9.11. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \cdot e^{\operatorname{tg} 3x}}$.

9.12. $\int e^{4+\sin 3x} \cos 3xdx$.

9.13. $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$.

9.14. $\int \frac{e^{\arcsin 2x}dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

9.15. $\int \frac{x^3dx}{e^{x^4-4}}$.

9.16. $\int e^{7x^2+2}xdx$.

9.17. $\int \frac{\sin 5x}{e^{\cos 5x}}dx$

9.18. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} 5x}dx}{\cos^2 5x}$.

9.19. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 3x}dx}{9x^2+1}$.

9.20. $\int \frac{e^{5x}}{7+e^{5x}}dx$.

9.21. $\int \frac{\sin 4x}{e^{\cos 4x}}dx.$

9.22. $\int \frac{xdx}{e^{x^2+3}}.$

9.23. $\int \frac{dx}{\sin^2 8x \cdot e^{\mathrm{tg} 8x}}.$

9.24. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2-4}}.$

9.25. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \cdot e^{\mathrm{ctg} 2x-2}}.$

9.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}e^{\mathrm{arctg} 3x}}.$

9.27. $\int \frac{x^7 dx}{e^{3x^8-4}}.$

9.28. $\int \frac{e^{\mathrm{ctg} 2x}dx}{\sin^2 2x}.$

9.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}.$

9.30. $\int \frac{e^{\ln 3x}}{x}dx$.

10. Найти неопределенный интеграл.

10.1. $\int (2x+1)\cos 2xdx.$

10.2. $\int (x-2)\cos 5xdx.$

10.3. $\int (x+2)\cos 3xdx.$

10.4. $\int (x-1)\cos 4xdx.$

10.5. $\int \left(7x-10\right)\sin 4xdx.$

10.6. $\int \left(4x+3\right)\sin 5xdx.$

10.7. $\int \left(2-3x\right)\sin 2xdx.$

10.8. $\int \left(x+5\right)\sin 3xdx.$

10.9. $\int \left(8-3x\right)\cos 5xdx.$

10.10. $\int \left(2x-5\right)\cos 4xdx.$

10.11. $\int \left(4x+7\right)\cos 3xdx.$

10.12. $\int \left(x-3\right)\cos 2xdx.$

10.13. $\int \left(3x-2\right)\cos 5xdx.$

10.14. $\int \left(5x+6\right)\cos 2xdx.$

10.15. $\int \left(2-4x\right)\sin 2xdx.$

10.16. $\int \left(4-16x\right)\sin 4xdx.$

10.17. $\int\left(4x-2\right)\cos 2xdx.$

10.18. $\int\left(1-8x\right)\cos 4xdx.$

10.19. $\int\left(3-7x\right)\cos 2xdx.$

10.20. $\int\left(2x-15\right)\cos 3xdx.$

10.21. $\int\left(1-5x\right)\sin xdx.$

10.22. $\int\left(3x-2\right)\sin 2xdx.$

10.23. $\int\left(5x+6\right)\sin 3xdx.$

10.24. $\int\left(6x+9\right)\sin 2xdx.$

10.25. $\int\left(3-7x\right)\cos 2xdx.$

10.26. $\int\left(2x-9\right)\sin 2xdx.$

10.27. $\int\left(x+12\right)\cos\frac{x}{3}dx.$

10.28. $\int\left(2-7x\right)\cos\frac{x}{2}dx.$

10.29. $\int\left(5-2x\right)\sin 4xdx.$

10.30. $\int\left(4x-4\right)\cos 4xdx.$

11. Найти неопределенный интеграл.

11.1. $\int\left(x+1\right)e^{2x}dx.$

11.2. $\int\left(7+3x\right)e^{5x}dx.$

11.3. $\int\left(2+3x\right)e^{3x}dx.$

11.4. $\int\left(2-x\right)e^{4x}dx.$

11.5. $\int\left(x-7\right)e^{2x}dx.$

11.6. $\int\left(4x+3\right)e^{5x}dx.$

11.7. $\int\left(2-3x\right)e^{2x}dx.$

11.8. $\int\left(x+5\right)e^{3x}dx.$

11.9. $\int\left(4x+1\right)e^{\frac{x}{4}}dx.$

11.10. $\int\left(1-x\right)e^{\frac{x}{6}}dx.$

11.11. $\int\left(4x+7\right)e^{3x}dx.$

11.12. $\int\left(x-3\right)e^{2x}dx.$

11.13. $\int\left(3x-2\right)e^{5x}dx.$

11.14. $\int\left(5x+6\right)e^{2x}dx.$

11.15. $\int\left(2-4x\right)e^{2x}dx.$ 11.16. $\int\left(4-16x\right)e^{4x}dx.$

11.17. $\int\left(4x-2\right)e^{2x}dx.$ 11.18. $\int\left(1-8x\right)e^{4x}dx.$

11.19. $\int\left(3-7x\right)e^{2x}dx.$ 11.20. $\int\left(2x-15\right)e^{3x}dx.$

11.21. $\int\left(1-5x\right)e^{7x}dx.$ 11.22. $\int\left(3x-2\right)e^{2x}dx.$

11.23. $\int\left(5x+6\right)e^{3x}dx.$ 11.24. $\int\left(6x+9\right)e^{2x}dx.$

11.25. $\int\left(7-5x\right)e^{8x}dx.$ 11.26. $\int\left(8-3x\right)e^{5x}dx.$

11.27. $\int\left(9x+2\right)e^{\frac{x}{2}}dx.$ 11.28. $\int\left(1-4x\right)e^{\frac{x}{3}}dx.$

11.29. $\int\left(2-3x\right)e^{9x}dx.$ 11.30. $\int\left(2x-5\right)e^{4x}dx.$

12. Найти неопределенный интеграл.

12.1. $\int \mathrm{arctg}4x dx.$ 12.2. $\int \ln\left(\frac{x}{2}-1\right)dx.$

12.3. $\int \arccos 2x dx.$ 12.4. $\int \ln(4x-1)dx.$

12.5. $\int \arcsin 3x dx.$ 12.6. $\int \arccos 7x dx.$

12.7. $\int \mathrm{arcctg}\, 4x dx.$ 12.8. $\int \ln(x-7)dx.$

12.9. $\int \mathrm{arctg}\frac{x}{2}dx.$ 12.10. $\int \arccos\frac{x}{4}dx.$

12.11. $\int \ln(7x+3)dx.$ 12.12. $\int \ln(x+12)dx.$

12.13. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{3}dx.$

12.14. $\int \ln(2x-2)dx.$

12.15. $\int \arccos\left(\frac{x}{5}-5\right)dx.$

12.16. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{7}dx.$

12.17. $\int \ln(1-2x)dx.$

12.18. $\int \arcsin\,(2-3x)dx.$

12.19. $\int \operatorname{arcctg}\,\frac{4x}{3}dx.$

12.20. $\int \ln\left(7-\frac{x}{7}\right)dx.$

12.21. $\int \operatorname{arcctg}\,(3x-5)dx.$

12.22. $\int \arcsin\,\left(\frac{x}{4}-4\right)dx.$

12.23. $\int \ln(2-2x)dx.$

12.24. $\int \ln(3x-7)dx.$

12.25. $\int \ln(5x-1)dx.$

12.26. $\int \arccos(5-3x)dx.$

12.27. $\int \ln(2-3x)dx.$

12.28. $\int \arcsin(2x+7)dx.$

12.29. $\int \ln\,\frac{7}{6}x\;dx.$

12.30. $\int \arccos\,\frac{x}{11}dx.$

13. Найти неопределенный интеграл.

13.1. $\int x^2\cos 2x dx.$

13.2. $\int x\sin^2 x dx.$

13.3. $\int x^2(\sin 2x-3)\,dx.$

13.4. $\int x^2(\sin x+1)\,dx.$

13.5. $\int (x^2+x)e^{-x}dx.$

13.6. $\int (x^2+x)e^{x}dx.$

13.7. $\int (x^2-x+1)e^{-x}dx.$

13.8. $\int (x^2-x+1)e^{x}dx.$

13.9. $\int x\text{ctg}^2 x dx.$

13.10. $\int x^2 e^{-x} dx.$

13.11. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

13.12. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

13.13. $\int x^2 \sin(2-x) dx.$

13.14. $\int \left(x^2+2\right) e^{-x} dx.$

13.15. $\int x^2 \sin^2 x dx.$

13.16. $\int x^2 \left(\cos 2x + 3\right) dx.$

13.17. $\int \left(x^3+3\right) \sin x dx.$

13.18. $\int \left(x^2-3\right) \cos x dx.$

13.19. $\int \left(x^2+1\right) e^{-x} dx.$

13.20. $\int \left(x^2-1\right) e^{x} dx.$

13.21. $\int x^2 \cos^2 x dx.$

13.22. $\int \left(x^2+x\right) \sin x dx.$

13.23. $\int \left(x^2+x\right) \cos x dx.$

13.24. $\int \left(x^2+1\right) e^{x} dx.$

13.25. $\int \left(x^2-1\right) e^{-x} dx.$

13.26. $\int x^2 \left(\cos 2x + 2\right) dx.$

13.27. $\int \left(3-x^2\right) e^{3x} dx.$

13.28. $\int \left(5-x^2\right) \cos 5x dx.$

13.29. $\int \left(2x^2-3\right) e^{-x} dx.$

13.30. $\int \left(4+x^2\right) e^{-4x} dx.$

14. Найти неопределенный интеграл.

14.1. $\int \frac{\ln(\cos x) dx}{\cos^2 x}.$

14.2. $\int \cos(\ln x) dx.$

14.3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

14.4. $\int \frac{\ln(\cos x) dx}{\sin^2 x}.$

14.5. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$

14.6. $\int \ln^2 x dx.$

14.7. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

14.8. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

14.9. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx.$

14.10. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

14.11. $\int \frac{\ln(\sin x)dx}{\sin^2 x}.$

14.12. $\int x^2 \ln(x+1)dx.$

14.13. $\int \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x} dx.$

14.14. $\int \ln(x^2+1)dx.$

14.15. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$

14.16. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$

14.17. $\int \ln^2(x+2)dx.$

14.18. $\int \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

14.19. $\int (x^2-x+1)\ln x dx.$

14.20. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

14.21. $\int \frac{\ln(\sin x)dx}{\cos^2 x}.$

14.22. $\int x\ln(x^2+1)dx.$

14.23. $\int x\ln^2 x dx.$

14.24. $\int x^2 \ln x dx.$

14.25. $\int \sin(\ln x)dx.$

14.26. $\int x^2 \ln(x+1)dx.$

14.27. $\int \ln \frac{2-x}{2+x} dx.$

14.28. $\int (x^2-4)\sin 5x dx.$

14.29. $\int \ln(x^2+5)dx.$

14.30. $\int \ln^2(2x+1)dx.$

15. Найти неопределенный интеграл.

15.1. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$.

15.2. $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$.

15.3. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

15.4. $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$.

15.5. $\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$.

15.6. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$.

15.7. $\int \frac{dx}{2x^2-x+2}$.

15.8. $\int \frac{dx}{2x^2+2x+2}$.

15.9. $\int \frac{dx}{4x^2-2x-3}$.

15.10. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$.

15.11. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$.

15.12. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$.

15.13. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$.

15.14. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$.

15.15. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+6}$.

15.16. $\int \frac{dx}{x^2-x+4}$.

15.17. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+2}$.

15.18. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$.

15.19. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

15.20. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$.

15.21. $\int \frac{dx}{8x^2-4x+1}$.

15.22. $\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$.

15.23. $\int \frac{dx}{x^2-2x+7}$.

15.24. $\int \frac{dx}{4x^2-4x+1}$.

15.25. $\int \frac{dx}{3x^2-4x+2}$.

15.26. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

15.27. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

15.28. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

15.29. $\int \frac{dx}{3x^2+4x+5}$.

15.30. $\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$.

16. Найти неопределенный интеграл.

16.1. $\int \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx.$

16.2. $\int \frac{3x+2}{x^2-x+1}dx.$

16.3. $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx.$

16.4. $\int \frac{9x+6}{x^2-2x+2}dx.$

16.5. $\int \frac{16x+10}{x^2+2x+3}dx.$

16.6. $\int \frac{5x-1}{x^2-2x+3}dx.$

16.7. $\int \frac{x+2}{x^2+3x+3}dx.$

16.8. $\int \frac{x+8}{x^2-3x+3}dx.$

16.9. $\int \frac{12x+4}{x^2+x+4}dx.$

16.10. $\int \frac{x-12}{x^2+4x+5}dx.$

16.11. $\int \frac{-3x+1}{x^2-x+2}dx.$

16.12. $\int \frac{2x+1}{x^2-x+5}dx.$

16.13. $\int \frac{3x+6}{x^2+x+9}dx.$

16.14. $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+9}dx.$

16.15. $\int \frac{3x-8}{x^2+2x+5}dx.$

16.16. $\int \frac{3x+2}{x^2+x+2}dx.$

16.17. $\int \frac{5x+1}{x^2+3x+5}dx.$

16.18. $\int \frac{-7x+2}{x^2+x+10}dx.$

16.19. $\int \frac{-x+4}{x^2-x+7}dx.$

16.20. $\int \frac{3x-5}{x^2+3x+6}dx.$

16.21. $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}dx.$

16.22. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx.$

16.23. $\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx.$

16.24. $\int \frac{2x+2}{x^2+4x+5}dx.$

16.25. $\int \frac{3x-3}{x^2+3x+6}dx.$

16.26. $\int \frac{3x+6}{x^2+3x+2}dx.$

16.27. $\int \frac{x+7}{x^2-x+4}dx.$

16.28. $\int \frac{7x-1}{x^2-x+2}dx.$

16.29. $\int \frac{4x+5}{x^2-3x+2}dx.$

16.30. $\int \frac{6x-1}{x^2-x+4}dx.$

17. Найти неопределенный интеграл.

17.1. $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+3}dx.$

17.2. $\int \frac{x+1}{x^2-2x+3}dx.$

17.3. $\int \frac{x-7}{x^2-x-12}dx.$

17.4. $\int \frac{2-x}{x^2+x-2}dx.$

17.5. $\int \frac{x}{x^2+6x+5}dx.$

17.6. $\int \frac{3}{x^2-5x+6}dx.$

17.7. $\int \frac{1-4x}{x^2+5x+6}dx.$

17.8. $\int \frac{1+x}{x^2+4x+3}dx.$

17.9. $\int \frac{-4x}{x^2+7x+10}dx.$ 17.10. $\int \frac{7x-1}{x^2+2x-3}dx.$

17.11. $\int \frac{6-2x}{x^2-x-2}dx.$ 17.12. $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}.$

17.13. $\int \frac{3-x}{x^2+5x+6}dx.$ 17.14. $\int \frac{3-4x}{x^2+8x+15}dx.$

17.15. $\int \frac{3x}{x^2+4x+3}dx.$ 17.16. $\int \frac{x}{x^2-6x+8}dx.$

17.17. $\int \frac{6x+7}{x^2-9x+20}dx.$ 17.18. $\int \frac{1-4x}{x^2-5x+4}dx.$

17.19. $\int \frac{x-7}{x^2-7x+10}dx.$ 17.20. $\int \frac{2+x}{x^2-8x+12}dx.$

17.21. $\int \frac{2}{x^2-8x+7}dx.$ 17.22. $\int \frac{9x-3}{x^2-9x+14}dx.$

17.23. $\int \frac{dx}{x^2+10x+21}.$ 17.24. $\int \frac{7}{x^2-7x+6}dx.$

17.25. $\int \frac{3}{x^2-9x+18}dx.$ 17.26. $\int \frac{4x+11}{x^2-x-2}dx.$

17.27. $\int \frac{7x+1}{x^2-5x+6}dx.$ 17.28. $\int \frac{1-12x}{x^2-x-12}dx.$

17.29. $\int \frac{9-x}{x^2-5x+4}dx.$ 17.30. $\int \frac{4-x}{x^2+2x-3}dx.$

18. Найти неопределенный интеграл.

18.1. $\int \frac{6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^2}dx.$ 18.2. $\int \frac{2x^2+13x+8}{x(x+1)^2}dx.$

18.3. $\int \frac{-6x^2+13x-6}{(x+4)(x-2)^2}dx.$

18.4. $\int \frac{x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^2}dx.$

18.5. $\int \frac{-x^2+11x-1}{(x+2)(x-2)^2}dx.$

18.6. $\int \frac{x^2+x+7}{(x+1)(x+3)^2}dx.$

18.7. $\int \frac{2x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^2}dx.$

18.8. $\int \frac{3x^2+x+2}{(x-4)(x+5)^2}dx.$

18.9. $\int \frac{-2x^2+3x-8}{x(x-3)^2}dx.$

18.10. $\int \frac{x^2+3x-7}{(x+7)(x-6)^2}dx.$

18.11. $\int \frac{4x^2+x-6}{(x+1)(x-3)^2}dx.$

18.12. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x+2)(x-4)^2}dx.$

18.13. $\int \frac{x^2+x+2}{\left(x+3\right)x^2}dx.$

18.14. $\int \frac{9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^2}dx.$

18.15. $\int \frac{2x^2+x+1}{\left(x+1\right)x^2}dx.$

18.16. $\int \frac{2x^2+7x+4}{(x+2)(x-1)^2}dx.$

18.17. $\int \frac{2x^2+6x+5x}{(x-2)(x+3)^2}dx.$

18.18. $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)(x+2)^2}dx.$

18.19. $\int \frac{x^2+2x-6}{(x+3)(x-2)^2}dx.$

18.20. $\int \frac{x^2+x+10}{(x+3)(x-4)^2}dx.$

18.21. $\int \frac{7x^2+7x-1}{\left(x+2\right)\left(x+1\right)^2}dx.$

18.22. $\int \frac{x^2+4x+1}{\left(x+5\right)x^2}dx.$

18.23. $\int \frac{-x^2+2x-3}{x(x-5)^2}dx.$

18.24. $\int \frac{-x^2+x-1}{(x+10)(x-12)^2}dx.$

18.25. $\int \frac{8x^2+x+1}{(x+7)x^2}dx.$

18.26. $\int \frac{6x^2+9}{(x+4)(x-2)^2}dx.$

18.27. $\int \frac{x^2-6}{(x+6)(x-7)^2}dx.$

18.28. $\int \frac{-6x^2+13x}{(x+2)(x-3)^2}dx.$

18.29. $\int \frac{x^2+5x-1}{(x+7)(x-1)^2}dx.$

18.30. $\int \frac{4x^2+3x+2}{(x-3)(x+3)^2}dx.$

19. Найти неопределенный интеграл.

19.1. $\int \frac{4x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx.$

19.2. $\int \frac{4x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

19.3. $\int \frac{7x^2+7x-1}{(x+2)(x^2-x+1)}dx.$

19.4. $\int \frac{4x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx.$

19.5. $\int \frac{x^2+9x+6}{(x+1)(x^2+2x+3)}dx.$

19.6. $\int \frac{2x^2+6x+3}{(x+4)(x^2-2x+3)}dx.$

19.7. $\int \frac{6x^2+5x-1}{(x+1)(x^2+2)}dx.$

19.8. $\int \frac{9x^2+x+2}{(x+3)(x^2+3)}dx.$

19.9. $\int \frac{x^2+8x+8}{(x+2)(x^2+4)}dx.$

19.10. $\int \frac{5x^2+12x+4}{(x+5)(x^2+4)}dx.$

19.11. $\int \frac{4x^2-x-2}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx.$

19.12. $\int \frac{-3x^2-3x+1}{(x-2)(x^2-x+6)}dx.$

19.13. $\int \frac{x^2+2x+10x}{(x+1)(x^2-x+1)}dx.$

19.14. $\int \frac{3x^2+x+46}{(x-1)(x^2+9)}dx.$

19.15. $\int \frac{24x^2+20x-28}{(x+3)(x^2+2x+2)}dx.$

19.16. $\int \frac{3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}dx.$

19.17. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x+1)}dx.$

19.18. $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x+1)}dx.$

19.19. $\int \frac{4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x+2)}dx.$

19.20. $\int \frac{7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x+2)}dx.$

19.21. $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+x+1)}dx.$

19.22. $\int \frac{4x^2+6}{(x+2)(x^2+2x+2)}dx.$

19.23. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx.$

19.24. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x+1)}dx.$

19.25. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-x+3)(x+2)}dx.$

19.26. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-x+1)(x+1)}dx.$

19.27. $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x+2)}dx.$

19.28. $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x+1)}dx.$

19.29. $\int \frac{7x^2+12x+6}{(x+3)(x^2+2x+3)}dx.$

19.30. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x+3)}dx.$

20. Найти неопределенный интеграл.

20.1. $\int \frac{1-4x^2}{x+6}dx.$

20.2. $\int \frac{1+x^2}{4x+3}dx.$

20.3. $\int \frac{1-4x^2}{7x+10}dx.$

20.4. $\int \frac{7x^2-1}{x-3}dx.$

20.5. $\int \frac{2x^2+1}{4x+3}dx.$

20.6. $\int \frac{x^2+1}{2x+3}dx.$

20.7. $\int \frac{x^2-7}{x-12}dx.$

20.8. $\int \frac{2-x^2}{6x+5}dx.$

20.9. $\int \frac{2-x^2}{x-2}dx.$

20.10. $\int \frac{x^2+3}{5x+6}dx.$

20.11. $\int \frac{6-2x^2}{x-2}dx.$

20.12. $\int \frac{9x^2+1}{x-3}.$

20.13. $\int \frac{3-x^2}{5x+6}dx.$

20.14. $\int \frac{3-4x^2}{8x+15}dx.$

20.15. $\int \frac{3x^2}{4x+3}dx.$

20.16. $\int \frac{x^2}{6x+8}dx.$

20.17. $\int \frac{6x^2+7}{9x+20}dx.$

20.18. $\int \frac{1-4x^2}{5x+4}dx.$

20.19. $\int \frac{x^2-7}{7x+10}dx.$

20.20. $\int \frac{2+x^2}{8x+12}dx.$

20.21. $\int \frac{3x^2+2}{9x+7}dx.$

20.22. $\int \frac{9x^2-3}{9x+14}dx.$

20.23. $\int \frac{4x^2+3}{16x+21}dx.$

20.24. $\int \frac{x^2+7}{7x+6}dx.$

20.25. $\int \frac{3x^2}{9x+8}dx.$

20.26. $\int \frac{4x^2+11}{x-2}dx.$

20.27. $\int \frac{7x^2+1}{5x+6}dx.$

20.28. $\int \frac{1-12x^2}{x-12}dx.$

20.29. $\int \frac{9-x^2}{5x+4}dx.$ 20.30. $\int \frac{4-x^2}{2x-3}dx.$

21. Найти неопределенный интеграл.

21.1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$ 21.2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}.$

21.3. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx.$ 21.4. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}.$

21.5. $\int \frac{dx}{10\sin x+5\cos x}.$ 21.6. $\int \frac{dx}{3-\sin x+2\cos x}.$

21.7. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ 21.8. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

21.9. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$ 21.10. $\int \frac{dx}{3+2\sin x+3\cos x}.$

21.11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$ 21.12. $\int \frac{dx}{8+4\cos x}.$

21.13. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}.$ 21.14. $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}.$

21.15. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}.$ 21.16. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}.$

21.17. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx.$ 21.18. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}.$

21.19. $\int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}.$ 21.20. $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx.$

21.21. $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

21.22. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$.

21.23. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$.

21.24. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

21.25. $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$.

21.26. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x}$.

21.27. $\int \frac{dx}{3+\sin x}$.

21.28. $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x}$.

21.29. $\int \frac{dx}{2+3\sin x}$.

21.30. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

22. Найти неопределенный интеграл.

22.1. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x-16\sin x\cos x}$.

22.2. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x-8\sin x\cos x}$.

22.3. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

22.4. $\int \frac{2\operatorname{tg} x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$.

22.5. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

22.6. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg}^2 x}dx$.

22.7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$.

22.8. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}$.

22.9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

22.10. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$.

22.11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

22.12. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x+1}$.

22.13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

22.14. $\int \frac{dx}{2 + \cos^2 x}$.

22.15. $\int \frac{dx}{1 - 3\sin^2 x}$.

22.16. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}$.

22.17. $\int \frac{dx}{1 + 2\cos^2 x}$.

22.18. $\int \frac{dx}{2 + 2\sin^2 x}$.

22.19. $\int \frac{dx}{9\cos^2 x + \sin^2 x}$.

22.20. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2}$.

22.21. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 1}$.

22.22. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

22.23. $\int \frac{dx}{1 - 3\cos^2 x}$.

22.24. $\int \frac{dx}{3 + \sin^2 x}$.

22.25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$.

22.26. $\int \frac{dx}{2 + 4\cos^2 x}$.

22.27. $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$.

22.28. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 7\cos^2 x}$.

22.29. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$.

22.30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2}$.

23. Найти неопределенный интеграл.

23.1. $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx.$

23.2. $\int \frac{\sin^3 x}{2 + 3\cos x} dx.$

23.3. $\int \frac{\cos^3 x}{2 + 3\sin x} dx.$

23.4. $\int \frac{\sin^3 x}{1 + 2\cos x} dx.$

23.5. $\int \frac{\sin^5 x}{2-\cos x}\,dx.$

23.6. $\int \frac{\cos^3 x}{1+4\sin x}\,dx.$

23.7. $\int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x}\,dx.$

23.8. $\int \frac{\sin^3 x}{1+3\cos x}\,dx.$

23.9. $\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx.$

23.10. $\int \frac{\sin^5 x}{1+\cos x}\,dx.$

23.11. $\int \frac{\sin^3 x}{2-\cos x}\,dx.$

23.12. $\int \frac{\cos^5 x}{2+3\sin x}\,dx.$

23.13. $\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos x}\,dx.$

23.14. $\int \frac{\sin^5 x}{1+2\cos x}\,dx.$

23.15. $\int \frac{\cos^5 x}{1-2\sin x}\,dx.$

23.16. $\int \frac{\cos^3 x}{1+3\sin x}\,dx.$

23.17. $\int \frac{\sin^5 x}{1-2\cos x}\,dx.$

23.18. $\int \frac{\cos^5 x}{1+\sin x}\,dx.$

23.19. $\int \frac{\cos^3 x}{3+\sin x}\,dx.$

23.20. $\int \frac{\sin^3 x}{1+7\cos x}\,dx.$

23.21. $\int \frac{\cos^5 x}{1+2\sin x}\,dx.$

23.22. $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}\,dx.$

23.23. $\int \frac{\sin^5 x}{2+\cos x}\,dx.$

23.24. $\int \frac{\cos^5 x}{2-\sin x}\,dx.$

23.25. $\int \frac{\cos^3 x}{1+2\sin x}\,dx.$

23.26. $\int \frac{\sin^5 x}{2+3\cos x}\,dx.$

23.27. $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx.$

23.28. $\int \frac{\cos^5 x}{2+\sin x}\,dx.$

23.29. $\int \frac{dx}{1+2\sin x}.$ 23.30. $\int \frac{\cos^5 x}{3-\sin x}dx.$

24. Найти неопределенный интеграл.

24.1. $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx.$

24.2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 x dx.$

24.3. $\int \cos^3 x \sin^8 x dx.$

24.4. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx.$

24.5. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}.$

24.6. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

24.7. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2x dx.$

24.8. $\int \cos^4 x \sin^5 x dx.$

24.9. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}.$

24.10. $\int \frac{3\sin^3 x dx}{\cos^4 x}.$

24.11. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}.$

24.12. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx.$

24.13. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx.$

24.14. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\sin^3 2x dx.$

24.15. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$

24.16. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}.$

24.17. $\int \sin^3 x \sqrt[5]{\cos^4 x} dx.$

24.18. $\int \sin^3 2x \sqrt[3]{\cos^2 2x} dx.$

24.19. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx.$

24.20. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx.$

24.21. $\int \sin^4 7x \cos^3 7x dx.$

24.22. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x}\sin^3 x dx.$

24.23. $\int \sin^2 4x \cos^4 4x dx.$

24.24. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx.$

24.25. $\int \sin^3 \frac{x}{3} \cos^8 \frac{x}{3} dx.$

24.26. $\int \sqrt[5]{\cos^3 x} \sin^5 x dx.$

24.27. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}.$

24.28. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}.$

24.29. $\int \frac{\cos^3 2x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}.$

24.30. $\int \frac{\sin^3 2x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}.$

25. Найти неопределенный интеграл.

25.1. $\int \cos x \sin 3x dx.$

25.2. $\int \sin 3x \cos 5x\ dx.$

25.3. $\int \sin 4x \sin 3x dx.$

25.4. $\int \sin 2x \sin 5x\ dx.$

25.5. $\int \sin 4x \cos 3x\ dx.$

25.6. $\int \cos 2x \cos 6x\ dx.$

25.7. $\int \sin 2x \cos 6x\ dx.$

25.8. $\int \sin 2x \sin 3x\ dx.$

25.9. $\int \cos 2x \cos 4x\ dx.$

25.10. $\int \sin 2x \sin 3x\ dx.$

25.11. $\int \sin 2x \sin 6x\ dx.$

25.12. $\int \cos 2x \cos 5x\ dx.$

25.13. $\int \sin 2x \cos 5x\ dx.$

25.14. $\int \sin 2x \sin 4x\ dx.$

25.15. $\int \cos 2x \cos 5x\ dx.$

25.16. $\int \sin 3x \cos 7x\ dx.$

25.17. $\int \sin 3x \sin 4x\ dx.$

25.18. $\int \cos 2x \cos 7x\ dx.$

25.19. $\int \sin 3x \cos 4x\ dx.$

25.20. $\int \sin 3x \sin 5x\ dx.$

25.21. $\int \cos 3x \cos 2x \; dx.$

25.22. $\int \sin 3x \sin 6x \; dx.$

25.23. $\int \cos 5x \cos 3x \; dx.$

25.24. $\int \sin 2x \cos 3x \; dx.$

25.25. $\int \sin 4x \sin 6x \; dx.$

25.26. $\int \cos 3x \cos 4x \; dx.$

25.27. $\int \sin 3x \cos 2x \; dx.$

25.28. $\int \cos 3x \cos 6x \; dx.$

25.29. $\int \sin 4x \sin 5x \; dx.$

25.30. $\int \sin 4x \cos 2x \; dx.$

26. Найти неопределенный интеграл.

26.1. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$

26.2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx.$

26.3. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx.$

26.4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx.$

26.5. $\int \sqrt{4-x^2} dx.$

26.6. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} dx.$

26.7. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx.$

26.8. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx.$

26.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$

26.10. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4} dx.$

26.11. $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6} dx.$

26.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}.$

26.13. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$

26.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}.$

26.15. $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx.$

26.16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

26.17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}.$

26.18. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx.$

26.19. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}.$

26.20. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx.$

26.21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}.$

26.22. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

26.23. $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx.$

26.24. $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^4}dx.$

26.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}.$

26.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(25+x^2\right)^3}}\ .$

26.27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx\ .$

26.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(49+x^2\right)^3}}\ .$

26.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(81+x^2\right)^3}}$

26.30. $\int x^3\sqrt{49-x^2}dx.$

27. Найти неопределенный интеграл.

27.1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$

27.2. $\int \frac{\sqrt{x}-9}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}dx.$

27.3. $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx.$

27.4. $\int \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}.$

27.6. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx.$

27.7. $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$

27.8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx.$

27.9. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx.$

27.10. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx.$

27.11. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx.$

27.12. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx.$

27.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

27.14. $\int \frac{2dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$

27.15. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

27.16. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.17. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}.$

27.19. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.20. $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}.$

27.22. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}\,dx$

27.23. $\int \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}.$

27.25. $\int \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}.$

27.27. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.28. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx.$

27.29. $\int \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}\,dx.$

27.30. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}\,dx.$

28. Найти неопределенный интеграл.

28.1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}.$

28.2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}.$

28.3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}.$

28.4. $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}.$

28.5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}.$

28.6. $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x+2}}.$

28.7. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}.$

28.8. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}\,dx.$

28.9. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}.$

28.10. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}.$

28.11. $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}}\,dx.$

28.12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

28.13. $\int \frac{\sqrt{x}\;dx}{x-1}.$

28.14. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}.$

28.15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$.

28.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$.

28.17. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

28.18. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}$.

28.19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}$.

28.20. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

28.21. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$.

28.22. $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{x+10}$.

28.23. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$.

28.24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$.

28.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$.

28.26. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$.

28.27. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x\sqrt{x-2}}$.

28.28. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+6}}$.

28.29. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$.

28.30. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$.

29. Вычислить определенный интеграл.

29.1. $\int\limits_0^1 (3x^2-2x+1)dx$.

29.2. $\int\limits_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$.

29.3. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2}$.

29.4. $\int\limits_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx$.

29.5. $\int\limits_{4}^{1} \frac{dx}{x^3}$.

29.6. $\int\limits_{0}^{3} (1+e^x)dx$.

29.7. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1)dx$.

29.8. $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

29.9. $\int\limits_{1}^{9} 3(\sqrt{x} - x)dx$.

29.10. $\int\limits_{1}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$.

29.11. $\int\limits_{1}^{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx$.

29.12. $\int\limits_{0}^{2} (x^2 - 2x)dx$.

29.13. $\int\limits_{1}^{8} \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$.

29.14. $\int\limits_{0}^{3} e^{\frac{x}{3}} dx$.

29.15. $\int\limits_{0}^{4} (1+\sqrt{x})^2 dx$.

29.16. $\int\limits_{0}^{\pi} (\sin x + 3)dx$.

29.17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$.

29.18. $\int\limits_{a}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x}}$.

29.19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$.

29.20. $\int\limits_{0}^{4} \left(e^{-\frac{x}{4}} - 2e^{2x} \right) dx$.

29.21. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{x-2}$.

29.22. $\int\limits_{1}^{2} \left(x^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

29.23. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$.

29.24. $\int_0^3 (e^{4x}+2x)dx$.

29.25. $\int_0^\pi (x^2-\sin 2x)dx$.

29.26. $\int_0^1 (\sqrt{3x}-\frac{\sqrt[4]{x}}{2})dx$.

29.27. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx$.

29.28. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 6x dx$.

29.29. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)dx$.

29.30. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{\sin^2 x}+2\right)dx$.

30. Вычислить определенный интеграл.

30.1. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx.$

30.2. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$

30.3. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

30.4. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}.$

30.5. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

30.6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin xdx}{5+3\sin x}.$

30.7. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

30.8. $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx.$

30.9. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x\left(1+\cos x\right)}.$

30.10. $\int_0^2 \frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}}.$

30.11. $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

30.12. $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx\,.$

30.13. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\sin x}dx.$

30.14. $\int_{0}^{5} \frac{dx}{\left(25+x^2\right)\cdot\sqrt{25+x^2}}.$

30.15. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x+1}}.$

30.16. $\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx.$

30.17. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\,arctg\,2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}.$

30.18. $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

30.19. $\int_{0}^{4} x^2\,\sqrt{16-x^2}\;dx.$

30.20. $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}\,.$

30.21. $\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$

30.22. $\int_{1}^{2} \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}\,dx.$

30.23. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{5\cos^2 x-1}.$

30.24. $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

30.25. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx.$

30.26. $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}.$

30.27. $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}.$

30.28. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+\sqrt{x+1}}.$

30.29. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

30.30. $\int_{0}^{5/2} \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\,dx.$

31. Вычислить определенный интеграл.

31.1. $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos x\,dx.$

31.2. $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)\,dx.$

31.3. $\int\limits_{1}^{2} \ln(x+3)\,dx.$

31.4. $\int\limits_{0}^{1/2} \arcsin x\,dx.$

31.5. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$

31.6. $\int\limits_{0}^{1} x e^{-x}\,dx.$

30.7. $\int\limits_{1}^{2} \ln(x+2)\,dx.$

31.8. $\int\limits_{1}^{2} e^{x}\,x\,dx.$

31.9. $\int\limits_{0}^{\pi/3} x\sin 3x\,dx.$

31.10. $\int\limits_{1}^{2} x\ln x\,dx.$

31.11. $\int\limits_{-\pi}^{0} (5x+6)\cos 2x\,dx.$

31.12. $\int\limits_{-1}^{1} (2x+1)\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\,dx.$

31.13. $\int\limits_{0}^{\pi} (x+2)\sin x\,dx.$

31.14. $\int\limits_{0}^{\pi} (x-4)\cos 3x\,dx.$

31.15. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\sin 3x\,dx.$

31.16. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/3} (4x+3)\cos x\,dx.$

31.17. $\int\limits_{0}^{1} x\mathrm{e}^{3x}\,dx.$

31.18. $\int\limits_{0}^{1/2} \arccos x\,dx.$

31.19. $\int\limits_{-2}^{0} (x+2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,dx.$

31.20. $\int\limits_{0}^{2} (x+1)\ln(x+1)\,dx.$

31.21. $\int_{0}^{1}(x+5)e^{3x}\,dx.$

31.22. $\int_{0}^{\pi/4}(x+2)\cos 3x dx.$

31.23. $\int_{0}^{1}(x+2)\ln(x+2)dx.$

31.24. $\int_{0}^{1}\operatorname{arctg}\ 3x\,dx.$

31.25. $\int_{0}^{1}\arccos 3x\,dx.$

31.26. $\int_{-\pi}^{0}(x+2)\sin 2x dx.$

31.27. $\int_{0}^{2\pi}(1-8x)\cos 4x dx.$

31.28. $\int_{-1}^{3}(x+6)e^{3x}\,dx.$

31.29. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-5x)\sin x dx.$

31.30. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(3-x)\sin 2x dx.$

32. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций.

32.1. $y=4-x^2,\quad y=x+2.$

32.2. $y=x^2,\quad y=3-x.$

32.3. $y=4-x^2, y=x^2-2x.$

32.4. $y=\sqrt{x},\quad y=x^3.$

32.5. $xy=4,\quad y=5-x.$

32.6. $x=y^2-4,\quad y=-x-2.$

32.7. $y=x^2,\quad y-2-x^2.$

32.8. $y^2=2x+4,\quad x=0.$

32.9. $x=(y-2)^3,$
$x=4y-8.$

32.10. $x=4-y^2,$
$x=y^2-2y.$

32.11. $x=\sqrt{4-y^2},\quad x=0,$
$y=0,\quad y=1.$

32.12. $y=(x-1)^2,$
$y^2=x-1.$

32.13. $x=4-(y-1)^2$, $x=y^2-4y+3$.

32.14. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=6e^x$, $y=1$, $y=6$.

32.15. $y=\dfrac{3}{x}$, $y=4e^x$, $y=3$, $y=4$.

32.16. $y=6x-x^2$, $y=0$.

32.17. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, $y=\dfrac{3}{2x}$, $x=4$.

32.18. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $(x\le 0)$.

32.19. $x=8-y^2$, $x=-2y$.

32.20. $x=5-y^2$, $x=-4y$.

32.21. $y=32-x^2$, $y=-4x$.

32.22. $x=27-y^2$, $x=-6y$.

32.23. $y=3\sqrt{x}$, $y=\dfrac{3}{x}$, $x=9$.

32.24. $y=\dfrac{3}{x}$, $y=8e^x$, $y=3$, $y=8$.

32.25. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$, $y=\dfrac{1}{2x}$, $x=16$.

32.26. $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$, $x=4$.

32.27. $y=\dfrac{25}{4}-x^2$, $y=x-\dfrac{5}{2}$.

32.28. $y=11-x^2$, $y=-10x$.

32.29. $y=\sqrt{24-x^2}$, $2\sqrt{3}y=x^2$, $x=0$ $(x\ge 0)$.

32.30. $y=\dfrac{2}{x}$, $y=7e^x$, $y=2$, $y=7$.

33. Вычислить длину дуги кривой, заданной данным уравнением.

33.1. $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$

33.2. $y = \ln \sin x + 2, \quad 0 \le x \le \pi/3.$

33.3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le 7/9.$

33.4. $y = \ln \dfrac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

33.5. $y = -\ln \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/6.$

33.6. $y = \mathrm{e}^x + 6, \quad \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

33.7. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad 1/4 \le x \le 1.$

33.8. $y = \ln\left(x^2 - 1\right), \quad 2 \le x \le 3.$

33.9. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, \quad 0 \le x \le 8/9.$

33.10. $y = \ln\left(1 - x^2\right), \quad 0 \le x \le 1/4.$

33.11. $y = 1 - \ln \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/6.$

33.12. $y = \mathrm{e}^x + 13, \quad \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

33.13. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad 0 \le x \le 1/4.$

33.14. $y = 2 - \mathrm{e}^x, \quad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$

33.15. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le 15/16.$

33.16. $y = 1 - \ln \sin x, \quad \pi/3 \le x \le \pi/2.$

33.17. $y = 1 - \ln\left(x^2 - 1\right), \quad 3 \le x \le 4.$

33.18. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5, \quad 1/9\le x\le 1.$

33.19. $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^2}+1, \quad 0\le x\le 9/16.$

33.20. $y=\ln\sin x, \quad \pi/3\le x\le \pi/2.$

33.21. $y=\ln 7-\ln x, \quad \sqrt{3}\le x\le \sqrt{8}.$

33.22. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}, \quad 0\le x\le 3/4.$

33.23. $y=\ln\cos x+2, \quad 0\le x\le \pi/6.$

33.24. $y=\mathrm{e}^x+26, \quad \ln\sqrt{8}\le x\le \ln\sqrt{24}.$

33.25. $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}+3, \quad 0\le x\le 2.$

33.26. $y=\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+4, \quad 0\le x\le 1/2.$

33.27. $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+3}{4}, \quad 0\le x\le 2.$

33.28. $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}, \quad \ln\sqrt{3}\le x\le \ln\sqrt{15}.$

33.29. $y=\dfrac{1-\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad 0\le x\le 3.$

33.30. $y=\ln 2-\ln x, \quad \sqrt{3}\le x\le \sqrt{8}.$

34. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

34.1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}.$

34.2. $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[4]{x}}.$

34.3. $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx.$

34.4. $\displaystyle\int_{2}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx.$

34.5. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$

34.6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4x+9}.$

34.7. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

34.8. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}.$

34.9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

34.10. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

34.11. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx.$

34.12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$

34.13. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}.$

34.14. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x+3}{x+2}\,dx.$

34.15. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5}.$

34.16. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx.$

34.17. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+4}.$

34.18. $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx.$

34.19. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x^2}.$

34.20. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[4]{x}}.$

34.21. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x}{x-1}\,dx.$

34.22. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$

34.23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}.$

34.24. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx.$

34.25. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

34.26. $\int\limits_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

34.27. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

34.28. $\int\limits_{0}^{\infty} x\sin x\, dx$.

34.29. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$.

34.30. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

35. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

35.1. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

35.2. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

35.3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x}$.

35.4. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x}{(x-3)(5-x)}\, dx$.

35.5. $\int\limits_{1}^{3} \frac{x^2}{(x-1)(x+4)}\, dx$.

35.6. $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

35.7. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^2}{(x-3)(5-x)}\, dx$.

35.8. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x^2}{x^2-1}\, dx$.

35.9. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

35.10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4}$.

35.11. $\int\limits_{-4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

35.12. $\int\limits_{1}^{3} \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}\, dx$.

35.13. $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

35.14. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

35.15. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[7]{1-2x}}$.

35.16. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

35.17. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-9}$.

35.18. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

35.19. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}}$.

35.20. $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

35.21. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x}$.

35.22. $\int_1^2 \frac{x}{x-1}dx$.

35.23. $\int_3^5 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

35.24. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

35.25. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x}$.

35.26. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3+1}$.

35.27. $\int_1^3 \frac{x\ dx}{(x-3)(x+2)}$.

35.28. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x}$.

35.29. $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

35.30. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3}}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецов. М., 2007.
2. Рябушко А.П. / Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / А.П. Рябушко. Минск, 1991. Т.2.
3. Данко А.Е. / Высшая математика в упражнениях и задачах / А.Е. Данко. М., 2007.

Составитель
Борщ Надежда Алексеевна