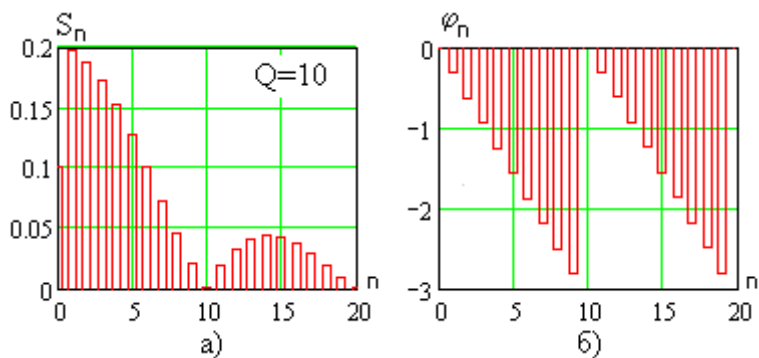


В.П. Литвиненко, Ю.В. Литвиненко

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Часть 2

Учебное пособие



Воронеж 2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

В.П. Литвиненко, Ю.В. Литвиненко

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Часть 2

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2018

УДК 621.3.013(075.8)
ББК 31.211Я7

***Рецензенты:** кафедра инфокоммуникационных систем
и технологий Воронежского института
МВД России (нач. кафедры д-р. техн. наук,
проф. О.И. Бокова);
д-р техн. наук, проф. А.Б. Токарев.*

Литвиненко В.П. Основы теории цепей. Часть 2: учеб.
пособие / В. П. Литвиненко, Ю.В. Литвиненко. Воронеж:
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет», 2018. 193 с.

Учебное пособие содержит материал курса лекций по
дисциплине «Основы теории цепей».

Во второй части пособия рассматриваются индуктивно-
связанные цепи, спектры сигналов и методы их расчета,
переходные процессы в линейных электрических цепях.

Издание соответствует требованиям Федерального
государственного образовательного стандарта высшего
образования по направлению 11.03.01 «Радиотехника»
(профиль «Радиотехнические средства передачи, приема и
обработки сигналов»), дисциплине «Основы теории цепей».

Табл. 5. Ил. 136. Библиогр.: 9 назв.

УДК 621.3.013(075.8)
ББК 31.211Я7

Научный редактор профессор Б.В. Матвеев.

© Литвиненко В.П., Литвиненко Ю.В., 2018
© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2018

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Основы теории цепей» является базовой для специальности «Радиотехника», на нее опираются другие профилирующие дисциплины. Вторая часть учебного пособия посвящена изучению магнитных цепей, методов спектрального анализа сигналов, расчета переходных процессов в электрических цепях классическим и операторным методами, теории цепей при произвольных воздействиях и трехфазных цепей [1].

При освоении материала необходимо приобрести навыки решения задач по соответствующим разделам [2,3], овладеть основами техники измерений [4]. Современная вычислительная техника предоставляет широкие возможности по расчету [5] и моделированию [6, 7] электрических цепей (пакеты программ WorkBench, MicroCAP и другие). Это направление подготовки специалистов имеет большое самостоятельное значение и является хорошим вспомогательным средством при изучении электрических цепей и сигналов в ходе аудиторных занятий и самостоятельной работы.

По курсу имеется дополнительная литература [8-9].

Изучение теории электрических цепей базируется на курсах высшей математики, раздела «Электричество и магнетизм» курса физики, дисциплине «Моделирование и вычисления на ЭВМ».

1. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

1.1. Магнитное поле и его характеристики

Электромагнитным полем называется форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие заряженных в общем случае движущихся частиц или тел.

Электрическое поле – это форма проявления электромагнитного поля. Оно создается электрическими зарядами (заряженными телами) и воздействует на них независимо от их подвижности.

Магнитным полем также называют форму проявления электромагнитного поля, которое создается движущимися заряженными частицами, намагниченными телами и переменным электрическим полем и **действует** только на движущиеся заряженные частицы, а также на намагниченные тела.

Силовой характеристикой магнитного поля служит вектор **магнитной индукции** \vec{B} . Его модуль $B = |\vec{B}|$ в системе СИ равен пределу отношения модуля силы $dF = |\vec{dF}|$, действующей со стороны поля на бесконечно малый элемент длиной dl проводника с током I , к произведению $I \cdot dl$, если элемент расположен так, что предел максимален,

$$B = \frac{1}{I} \left(\cdot \frac{dF}{dl} \right)_{MAX}. \quad (1.1)$$

Вектор \vec{B} перпендикулярен направлению элемента проводника (его тока) \vec{dl} и к направлению силы \vec{dF} , действующей на проводник, как показано на рис. 1.1. Магнитная индукция в системе СИ измеряется в **тесла (Тл)**.

Сила Ампера \vec{dF} , действующая со стороны магнитного поля с индукцией \vec{B} на бесконечно малый проводник \vec{dl} с током I , определяется **законом Ампера**

$$\vec{dF} = I [\vec{dl} \cdot \vec{B}]. \quad (1.2)$$

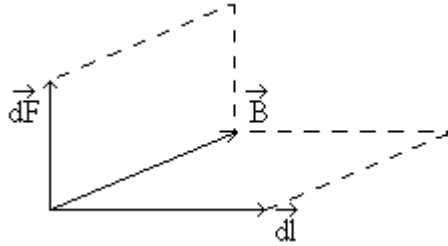


Рис. 1.1

Магнитная индукция в заданной среде зависит от **напряженности магнитного поля \vec{H}** и **намагниченности (магнитного момента единицы объема) среды \vec{J}** ,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}), \quad (1.3)$$

где в международной системе единиц (СИ) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ - **магнитная проницаемость вакуума** (в СГСМ $\mu_0 = 1$). В СИ напряженность поля и намагниченность измеряются в А/м , а в СГСМ – в эрстедах (Э).

Направления векторов \vec{H} и \vec{J} совпадают и

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (1.4)$$

Обозначим **безразмерную относительную магнитную проницаемость**

$$\mu = 1 + \chi, \quad (1.5)$$

тогда из (1.3) получим

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.6)$$

где μ_a – абсолютная магнитная проницаемость (Гн/м).

Закон Био – Саварра – Лапласа определяет вектор магнитной индукции \vec{dB} в точке A в вакууме, создаваемой элементом проводника \vec{dl} с током I

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^3} [\vec{dl} \cdot \vec{r}], \quad (1.7)$$

Циркуляцией вектора напряженности магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура L называют интеграл

$$\oint_L (\vec{H} \vec{dl}) = \oint_L H \cdot dl \cos(\angle(\vec{H}, \vec{dl})), \quad (1.8)$$

где $(\vec{H} \vec{dl})$ – скалярное произведение векторов, а $\cos(\angle(\vec{H}, \vec{dl}))$ – косинус угла между векторами.

В соответствии с **законом полного тока** (для токов проводимости I_n) циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равна (СИ) сумме этих токов,

$$\oint_L (\vec{H} \vec{dl}) = \oint_L H \cdot dl \cos(\angle(\vec{H}, \vec{dl})) = \sum_n I_n. \quad (1.9)$$

Магнитный поток вектора магнитной индукции Φ (скалярная величина, измеряется в **веберах Вб**) через поверхность S равен

$$\Phi = \int_S (\vec{B} \cdot \vec{dS}), \quad (1.10)$$

где \vec{dS} – вектор в направлении нормали к бесконечно малому элементу поверхности S . Если магнитное поле однородно, то для плоской поверхности, перпендикулярной вектору магнитной индукции \vec{B}

$$\Phi = BS. \quad (1.11)$$

Если поверхность S **замкнута**, то магнитный поток сквозь нее равен нулю (**теорема Остроградского – Гаусса**),

$$\int_S (\vec{B} \cdot \vec{dS}) = 0. \quad (1.12)$$

В дифференциальной форме эта теорема имеет вид

$$\text{div}(\vec{B}) = 0, \quad (1.13)$$

$\text{div}(\vec{B})$ – оператор **дивергенции** вектора магнитной индукции (приложение 1). Теорема (1.12) выражает **отсутствие в природе**

магнитных зарядов и замкнутость линий индукции магнитного поля.

За счет силы Ампера (1.2) незакрепленный проводник с током I перемещается в магнитном поле и соответствующая работа dA для бесконечно малого проводника dl в СИ равна

$$dA = I \cdot d\Phi, \quad (1.14)$$

$d\Phi$ – бесконечно малый магнитный поток сквозь поверхность, образуемую элементом длины dl движущегося проводника.

1.2. Магнитная цепь

Магнитной цепью называют совокупность тел и областей пространства, в которых сосредоточено рассматриваемое магнитное поле, процессы в которой описываются в терминах **магнитного потока и магнитодвижущей силы**. Магнитные цепи входят в состав различных электротехнических устройств и машин.

Магнитный поток Φ в магнитной цепи играет роль, аналогичную силе тока в электрической цепи. Во всех сечениях неразветвленной магнитной цепи магнитный поток одинаков. Для него имеет место **формула Гопкинсона**, которую можно назвать «**законом Ома**» для магнитной цепи,

$$\Phi = \frac{E_M}{R_M}, \quad (1.15)$$

где E_M – **магнитодвижущая или намагничивающая сила (измеряется в амперах)**, равная произведению силы тока I и числа N витков намагничивающего тока (катушки),

$$E_M = I \cdot N, \quad (1.16)$$

R_M – **магнитное сопротивление цепи**.

Магнитное сопротивление k -го участка цепи длиной l_k с постоянной площадью поперечного сечения S в СИ равно

$$R_{Mk} = \frac{l_k}{\mu_0 \mu S}. \quad (1.17)$$

Для изменяющей площади поперечного сечения участка

цепи

$$R_{Mk} = \int_0^{l_k} \frac{1}{\mu_0 \mu S(l)} dl, \quad (1.18)$$

магнитное сопротивление измеряется в А/Вб или 1/Гн.

Магнитное сопротивление последовательно соединенных участков магнитной цепи равно сумме их магнитных сопротивлений,

$$R_M = \sum_k R_{Mk}. \quad (1.19)$$

Для параллельных магнитных потоков (параллельно соединенных магнитных сопротивлений)

$$R_M = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{R_{Mk}}}. \quad (1.20)$$

Первый закон Кирхгофа для разветвленной магнитной цепи: алгебраическая сумма магнитных потоков в участках цепи, сходящихся в узле, равна нулю,

$$\sum_k \Phi_k = 0. \quad (1.21)$$

Магнитный поток полагают положительным, если линии магнитной индукции подходят к узлу, а в противном случае считают его отрицательным.

Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи: в произвольном замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений магнитных потоков Φ_k на соответствующие магнитные сопротивления R_{Mk} равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил в этом контуре,

$$\sum_k \Phi_k R_{Mk} = \sum_n E_{Mn}, \quad (1.22)$$

Φ_k и E_{Mn} считают положительными, если соответствующие линии магнитной индукции совпадают с выбранным направлением обхода контура.

1.3. Электромагнитная индукция

В проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле, возникает электродвижущая сила (ЭДС) индукции. Это явление называют **электромагнитной индукцией**. **Закон электромагнитной индукции Фарадея**: ЭДС электромагнитной индукции $e(t)$ в контуре равна с противоположным знаком скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром,

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.23)$$

В катушке из N витков **потокосцеплением** Ψ называют суммарный магнитный поток сквозь поверхности всех витков,

$$\Psi = \sum_{n=1}^N \Phi_n, \quad (1.24)$$

Φ_n – магнитный поток сквозь n -й виток катушки. В этом случае закон электромагнитной индукции записывается в виде

$$e(t) = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (1.25)$$

Магнитный поток может изменяться либо потому, что меняется во времени магнитное поле, либо при перемещении контура. Например, если плоский виток площадью S вращается в однородном магнитном поле с угловой частотой ω , а ось вращения лежит в плоскости витка и перпендикулярна вектору магнитной индукции B внешнего магнитного поля, то ЭДС индукции в витке равна

$$e(t) = BS\omega \cdot \sin(\omega t) - \frac{d\Phi_{СИ}}{dt}, \quad (1.26)$$

где $\Phi_{СИ}$ – магнитный поток **самоиндукции** витка.

В индуктивной электрической цепи (один плоский виток) при переменном токе возникает собственное магнитное поле, которое создает магнитный поток самоиндукции $\Phi_{СИ}$, за счет

которого возникает ЭДС самоиндукции

$$e_{СИ}(t) = -\frac{d\Phi_{СИ}}{dt}. \quad (1.27)$$

Магнитный поток самоиндукции в контуре (катушке), находящейся в неферромагнитной среде, пропорционален протекающему току и в СИ равен

$$\Phi_{СИ} = L \cdot I, \quad (1.28)$$

где коэффициент пропорциональности L называют **индуктивностью**. В линейной (неферромагнитной) среде для переменного тока $i(t)$ в контуре (катушке) по закону Фарадея

$$e_{СИ}(t) = -L \frac{di(t)}{dt}. \quad (1.29)$$

Для постоянного тока в неподвижном контуре ЭДС самоиндукции равна нулю.

Ток самоиндукции по правилу Ленца противодействует изменению тока в контуре, в этом проявляется инерционность индуктивной цепи.

При гармоническом токе через линейную индуктивность из (1.29) для амплитуд тока I_m и электродвижущей силой (ЭДС) E_m (напряжения U_m) получим

$$E_m = U_m = \omega L I_m. \quad (1.30)$$

Для катушки с числом витков w для потокосцепления Ψ и магнитного потока Φ получим

$$\Psi = w\Phi. \quad (1.31)$$

Из (1.28) для гармонических сигналов можно определить амплитуду магнитного потока

$$\Phi_b = \frac{U_m}{w\omega}. \quad (1.32)$$

При протекании через провод переменного высокочастотного тока возникающие в нем вихревые индукционные магнитные поля вытесняют электроны проводимости на поверхность проводника и ток протекает только в тонком поверхностном слое. Это явление называют скин-эффектом или поверхностным эффектом.

Явление **взаимной индукции** заключается в наведении ЭДС индукции во всех проводниках, находящихся вблизи проводника с переменным током. Например, если в одном контуре протекает ток $i_1(t)$, то во втором контуре возникает ток $i_2(t)$ за счет ЭДС взаимной индукции

$$e_2(t) = -\frac{d\Phi_2(t)}{dt}, \quad (1.33)$$

где $\Phi_2(t)$ – магнитный поток поля тока $i_1(t)$ сквозь витки второго контура. Магнитный поток $\Phi_2(t)$ пропорционален току первого контура,

$$\Phi_2(t) = M_{12} \cdot i_1(t), \quad (1.34)$$

где M_{12} – взаимная индуктивность первого и второго контуров.

Аналогично ток второго контура $i_2(t)$ создает магнитный поток $\Phi_1(t)$ сквозь витки первого контура и вызывает в нем ЭДС взаимной индукции

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1(t)}{dt}, \quad (1.35)$$

$$\Phi_1(t) = M_{21} \cdot i_2(t), \quad (1.36)$$

где M_{21} – взаимная индуктивность второго и первого контуров. В линейной магнитной среде

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (1.37)$$

Электромагнитная индукция в неподвижных массивных проводниках вызывает вихревые токи (токи Фуко). Они замыкаются в толще проводника и нагревают его. Мощность вихревых токов пропорциональна квадрату частоты изменения магнитного поля. Высокочастотные вихревые токи используются в металлургии для плавки металлов в индукционных печах. В электротехнических устройствах вихревые токи приводят к потерям электрической мощности и являются нежелательными. Для их уменьшения в электрических машинах и трансформаторах магнитопроводы (сердечники) изготавливаются из отдельных пластин, разделенных диэлектриком и расположенных параллельно линиям магнитной индукции.

1.4. Магнитные свойства среды

Магнетиками называют вещества (среды), способные намагничиваться (создавать собственное магнитное поле) при воздействии внешнего магнитного поля. Они делятся на три основные группы: **диамагнетики**, **парамагнетики** и **ферромагнетики**. Их свойства описываются намагниченностью (магнитным моментом единицы объема) среды \vec{J} , равным векторной сумме магнитных моментов атомов (молекул) в единице объема. Согласно (1.4)

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (1.38)$$

величину χ называют **магнитной восприимчивостью** вещества, связанной с магнитной проницаемостью (1.5)

$$\mu = 1 + \chi. \quad (1.39)$$

У **диамагнетиков** (инертные газы, цинк, фосфор, кремний) $\chi < 0$, а у **парамагнетиков** (платина, палладий, литий, натрий) $\chi > 0$. Для них модуль магнитной восприимчивости много меньше единицы и $\mu \approx 1$.

Ферромагнетиками (железо, кобальт, никель) называют вещества, в которых собственное магнитное поле может многократно превышать вызвавшее его внешнее магнитное поле, $\chi \gg 1$. Величины χ и μ зависят от интенсивности внешнего магнитного поля. Зависимость модуля намагниченности J от индукции магнитного поля B называют **технической кривой намагниченности**. Для диамагнетиков и парамагнетиков они прямолинейны и показаны на рис. 1.2а.

Для ферромагнетиков техническая кривая намагниченности **нелинейна** (рис. 1.2б). При больших B наблюдается явление **магнитного насыщения** намагниченности J до величины J_0 . Для них характерны большие значения относительной магнитной проницаемости μ . Для железа максимальное значение магнитной проницаемости $\mu_{MAX} = 500$, а для пермаллоя

(сплава 78% никеля и 22% железа) эта величина достигает 100000. Величина μ нелинейно зависит от индукции B и падает с ее увеличением.

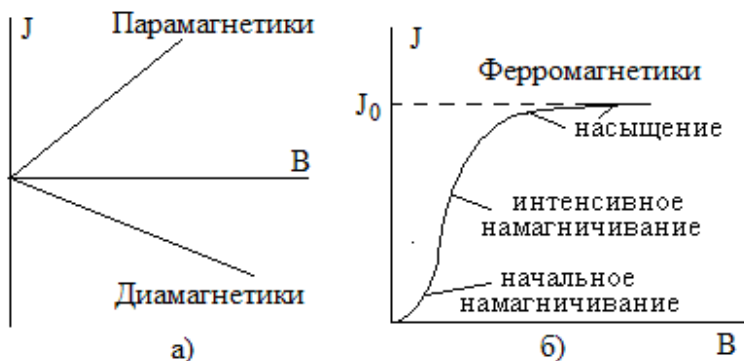


Рис. 1.2

Высокая магнитная проницаемость ферромагнетиков имеет место при рабочей температуре, **меньшей температуры точки Кюри** (для железа 770°C , для никеля 360°C , а для пермаллоя всего 70°C). В этом случае ферромагнитное тело состоит из **доменов** (областей размером $10^{-1} - 10^{-2}$ мм с высокой собственной намагниченностью, равной J_0). При отсутствии внешнего магнитного поля векторы самопроизвольной намагниченности доменов направлены хаотически и общая намагниченность тела равна нулю.

Под влиянием внешнего магнитного поля происходит поворот векторов намагниченности доменов по направлению поля. В слабом поле поворачиваются векторы намагниченности тех доменов, которые были близки к направлению поля. В достаточно сильном магнитном поле векторы намагниченности всех доменов «выстраиваются» по полю и величина намагниченности тела достигает максимума (насыщения).

При уменьшении индукции внешнего поля в намагниченном ферромагнетике происходит постепенная дезориентация

векторов намагниченности доменов. Однако даже при отсутствии внешнего поля часть доменов сохраняет ориентированность намагниченности доменов, что приводит к появлению **остаточной намагниченности**. С повышением температуры остаточная намагниченность уменьшается. Если температура становится выше точки Кюри, намагниченность исчезает и вещество теряет ферромагнитные свойства.

Магнитным гистерезисом ферромагнитного вещества называют отставание изменения величины намагниченности от изменения индукции внешнего магнитного поля, то есть текущая намагниченность зависит от ее предшествующих значений. Зависимость намагниченности ферромагнитного тела J от индукции B внешнего магнитного поля при изменении B сначала от 0 до B_{MAX} , а затем от B_{MAX} до $-B_{MAX}$ и далее от $-B_{MAX}$ до B_{MAX} имеет вид **петли гистерезиса**, показанной на рис. 1.3.

Кривая, выходящая из начала координат в области изменения индукции внешнего поля от 0 до B_{MAX} является **технической кривой намагничивания**. При уменьшении B от B_{MAX} до $-B_{MAX}$ намагниченность спадает по верхней кривой на рис. 1.3 (при $B = 0$ наблюдается остаточная намагниченность, для ее устранения необходимо магнитное поле с отрицательной индукцией $-B_K$).

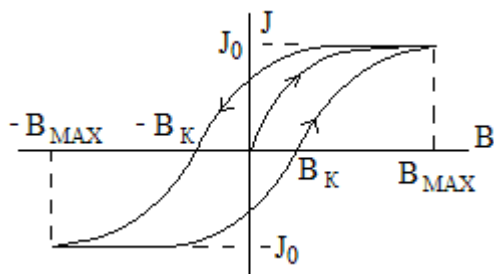


Рис. 1.3

При увеличении индукции от $-B_{MAX}$ до B_{MAX} намагниченность изменяется по нижней кривой на рис. 1.3 (при $B=0$ остаточная намагниченность имеет противоположный знак, для ее устранения необходимо магнитное поле с индукцией B_K). Величину B_K / μ_0 называют **коэрцитивной силой**.

Форма и параметры петли гистерезиса определяют свойства ферромагнетика и области его применения.

Ферромагнетики с широкой петлей гистерезиса (рис. 1.4 а) называют **жесткими** (углеродистые, вольфрамовые и другие стали), благодаря большой коэрцитивной силе (индукции размагничивания) они применяются при изготовлении постоянных магнитов.

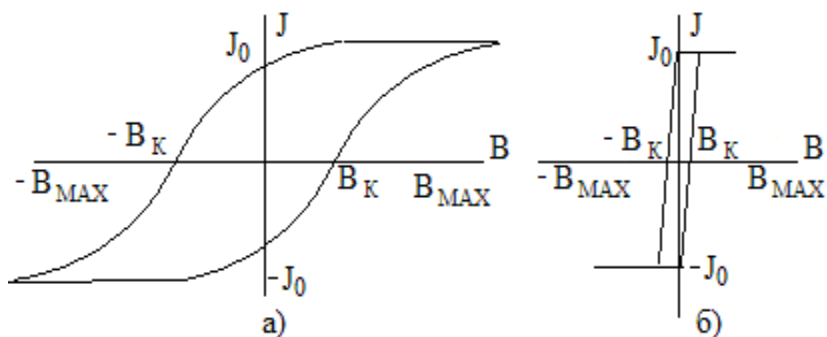


Рис. 1.4

Магнитные материалы с узкой петлей гистерезиса и малой коэрцитивной силой (рис. 1.4б) называют **мягкими** ферромагнетиками (железо и его сплавы с никелем). Они используются для изготовления сердечников трансформаторов, электрических двигателей и генераторов, которые работают в условиях перемагничивания в переменных магнитных полях.

Мощность, необходимая для перемагничивания сердечника, потребляется от источника переменного магнитного поля и у мягких ферромагнетиков она значительно меньше, чем у жестких.

На частотах выше десятков килогерц широко используются **магнитодиэлектрики** и **ферриты**. Это прессованные мелкоизмельченные ферромагнитные сплавы или их твердые растворы, которые обладают хорошими диэлектрическими и магнитными свойствами на высоких частотах.

1.5. Электромагнитное поле

Раздельный (упрощенный) анализ переменных электрических и магнитных полей соответственно в электрических и магнитных цепях может проводиться на сравнительно низких частотах, когда можно пренебречь **волновым** характером наблюдаемых процессов.

Длина волны λ электромагнитных колебаний равна

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad (1.40)$$

где c – их скорость распространения (в свободном пространстве $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с), а f – циклическая частота. Волновые процессы необходимо учитывать, если геометрические размеры устройства l соизмеримы (близки) с длиной волны, например,

$$l > 0,1 \cdot \lambda. \quad (1.41)$$

При $f = 1$ МГц длина волны равна

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} = 300 \text{ м},$$

и устройства со значительно меньшими размерами (например, 1 м и даже 5 м) можно анализировать без учета волновых процессов.

Если условие (1.41) не выполняется, то электрические и магнитные поля необходимо рассматривать совместно с помощью **теории электромагнитного поля Максвелла**.

Уравнения Максвелла связывают между собой изменяющиеся во времени (переменные) векторы напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей. Полная система уравнений в международной системе единиц (СИ) в изотропной среде

имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{I}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{cases} \quad (1.42)$$

и дополняется материальными уравнениями

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{I} = \gamma \vec{E}. \end{cases} \quad (1.43)$$

Помимо введенных ранее характеристик магнитного поля \vec{B} , μ и μ_0 в уравнениях используются характеристики электрического поля:

\vec{D} – электрическое смещение (первое уравнение (1.43));

$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – электрическая постоянная;

ε – относительная диэлектрическая проницаемость;

γ – удельная электропроводность;

\vec{I} – плотность тока проводимости.

В уравнениях (1.42) используются операторы **дивергенции** (div) и **ротора** (rot) (прил. 1).

Как видно, уравнения Максвелла – система дифференциальных уравнений в частных производных – приводит к значительным математическим трудностям даже в простейших задачах.

В инженерной практике при расчете электрических цепей используется их описание в терминах **тока и напряжения**, а для магнитных цепей – в терминах **магнитного потока и магнитодвижущей силы**.

1.6. Контрольные вопросы

1.1. Какова размерность напряженности магнитного поля H , магнитной индукции B , магнитного потока Φ , магнитодвижущей силы (МДС) E , магнитного сопротивления R_M ?

1.2. Как связаны между собой напряженность магнитного поля и его магнитная индукция?

1.3. Чему равна амплитуда Φ_m магнитного потока в катушке с ферромагнитным сердечником и числом витков w с приложенным к ней напряжением $u(t) = U_m \cos(\omega t)$, если пренебречь рассеиванием и сопротивлением потерь?

1.4. Какой коэрцитивной силой (большой или малой) обладает магнитотвердый ферромагнитный материал?

1.5. В чем состоит принцип непрерывности магнитных силовых линий в интегральной форме?

1.6. Чему равна амплитуда магнитного потока Φ_m при синусоидальном напряжении на катушке со стальным сердечником с амплитудой $U_m = 311$ В, угловой частотой $\omega = 314$ рад/с и числом витков катушки $w = 495$?

1.7. Как записывается закон электромагнитной индукции?

1.8. Какова связь магнитного потока с индукцией магнитного поля?

2. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

2.1. Методика расчета магнитных цепей

Магнитная цепь (подраздел 1.2) описывается в терминах магнитных потоков, магнитных напряжений, сопротивлений и магнитодвижущих сил. В этом случае удастся записать уравнения магнитной цепи в виде, аналогичном уравнениям **электрических** цепей (законам Ома и Кирхгофа) и можно использовать разработанные для них методы расчета.

В основе описания магнитных цепей лежит понятие магнитного потока, который в уравнениях аналогичен току в электрической цепи.

2.2. Магнитное напряжение

Магнитным напряжением на участке магнитной цепи между точками a и b называют скалярную величину

$$U_M = \int_a^b (\vec{H} d\vec{l}), \quad (2.1)$$

которая является частью контурного интеграла в законе полного тока (1.9), где участок a, b входит в состав контура L . **Магнитное напряжение измеряется в амперах.**

Если на участке a, b цепи длиной l_{ab} напряженность \vec{H} магнитного поля постоянна и направлена вдоль этого участка, то

$$U_M = H \cdot l_{ab}. \quad (2.2)$$

Закон полного тока (1.9) можно записать в виде

$$\sum_k U_{Mk} = \sum_n I_n, \quad (2.3)$$

где U_{Mk} – магнитные напряжения вдоль замкнутого контура.

Выражение (2.3) представляет собой вариант записи **второго закона Кирхгофа** для магнитной цепи (1.22) через магнитные напряжения,

$$U_k = \Phi_k R_{Mk}, \quad (2.4)$$

правая часть (2.3) является суммой магнитодвижущих сил вдоль рассматриваемого замкнутого контура.

2.3. Вебер-амперная характеристика

Вебер-амперная характеристика участка магнитной цепи – это зависимость $\Phi(U_M)$ магнитного потока Φ от падения магнитного напряжения U_M на этом участке. Она определяется с помощью **кривой намагничивания** – зависимостью $B(H)$ магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H . Для линейной магнитной цепи согласно (1.6) уравнение кривой намагничивания имеет вид

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} \quad (2.5)$$

и отображается прямой линией.

В ферромагнитной среде кривая намагничивания нелинейна, пример показан на рис. 2.1 а. На начальном участке она близка к прямой линии и по ней с помощью (2.5) в точке $H \approx 0$ можно определить начальную магнитную проницаемость $\mu_a = 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/м}$, тогда относительная магнитная проницаемость равна

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0} = \frac{2,51 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 2000.$$

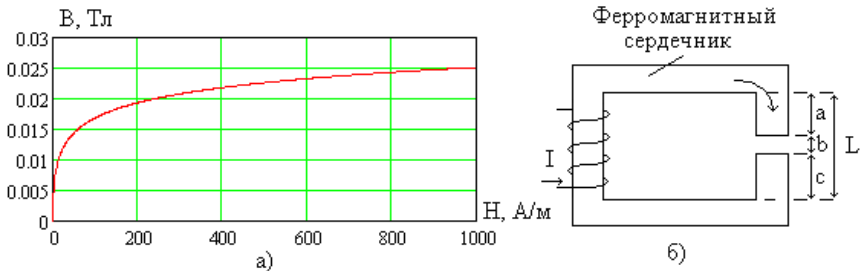


Рис. 2.1

Получим вебер-амперную характеристику магнитной

цепи на рис. 2.1 б на участке длиной L , на котором имеются два участка ферромагнитного материала с кривой намагничивания на рис. 2.1 а длиной a и c , а также воздушный зазор длиной b , $L = a + b + c$.

При расчете вебер-амперной характеристики задают последовательность значений индукции с равномерным шагом, например, $B = 0,0,001,0,002...Tл$ или иначе

$$B_m = m \cdot 0.001 Tл, m = \overline{0, (M-1)},$$

$M = 25$ – общее число точек.

На участках из ферромагнетика a и c значения напряженности магнитного поля H для различных величин индукции B определяются по кривой намагничивания (рис. 2.1 а). Зависимость $H_\phi(B)$ (обратная кривая намагничивания ферромагнитного материала) показана на рис. 2.2.

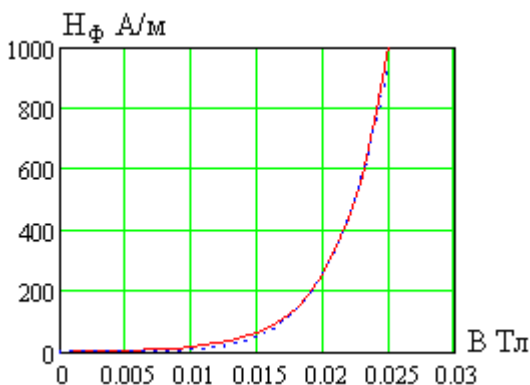


Рис. 2.2

Для воздушного зазора шириной b (как и в вакууме) напряженность магнитного поля равна

$$H = \frac{B}{\mu_0}. \quad (2.6)$$

В результате для заданной магнитной индукции B получим значения магнитного напряжения U_M ,

$$U_M = H_\phi(B) \cdot (a+c) + \frac{B}{\mu_0} b.$$

Для однородного магнитного поля и плоской поверхности площадью S , перпендикулярной вектору магнитной индукции \vec{B} , магнитный поток согласно (1.11) равен $\Phi = BS$. Определим значения магнитного потока для тех же значений индукции, при которых определялись магнитные напряжения. В результате получим вебер-амперные характеристики, показанные на рис. 2.3. при $S = 1 \text{ см}^2$, $a = c = 10 \text{ см}$ и величинах $b = 1 \text{ мм}$, 3 мм и 10 мм соответственно.

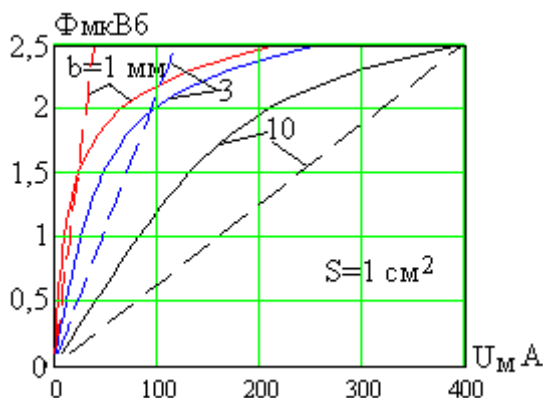


Рис. 2.3

Как видно, полученные вебер-амперные характеристики нелинейны, что объясняется наличием ферромагнитного материала. Если он отсутствует ($a = c = 0$), то рассматриваемые характеристики становятся прямолинейными (показаны на рис. 2.3 пунктиром).

2.4. Расчет неразветвленной магнитной цепи

На рис. 2.4 показана магнитная цепь, состоящая из ка-

тушки с числом витков w и током I на ферромагнитном сердечнике с кривой намагничивания на рис. 2.1а, площадью поперечного сечения S , длинами осевых линий L_1 и L_2 , а также с воздушным зазором шириной b .

Для индукции B напряженность поля в ферромагнитном сердечнике равна $H_\phi(B)$, а в воздушном зазоре – (2.5), тогда магнитное напряжение в полном контуре определяется выражением

$$U_M = H_\phi(B) \cdot (2L_1 + 2L_2 - b) + \frac{B}{\mu_0} b.$$

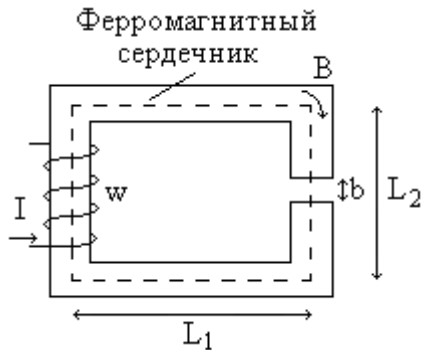


Рис. 2.4

По второму закону Кирхгофа для магнитной цепи (2.3) получим

$$U_M = I \cdot w$$

и в результате

$$H_\phi(B) \cdot (2L_1 + 2L_2 - b) + \frac{B}{\mu_0} b = I \cdot w.$$

Это выражение позволяет определять различные характеристики магнитной цепи. Например, для заданного значения магнитной индукции $B = 0,02 \text{ Тл}$ можно найти необходимое значение тока катушки. При $L_1 = L_2 = 5 \text{ см}$, $S = 1 \text{ см}^2$, $b = 1 \text{ мм}$ и числе витков катушки $w = 100$ получим

$$I = \frac{H_{\phi}(B) \cdot (2L_1 + 2L_2 - b) + \frac{B}{\mu_0} b}{w} = 0,639 A.$$

На рис. 2.5 показана зависимость тока катушки I от требуемого значения B магнитной индукции для различных величин воздушного зазора $b = 0, 1, 3, 10 \text{ мм}$. Как видно, уменьшение зазора значительно повышает значение магнитной индукции при неизменном токе катушки.

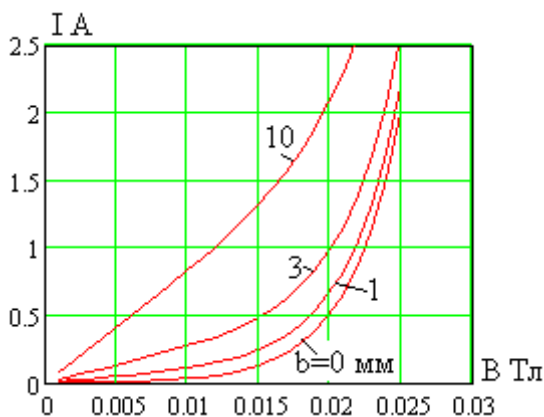


Рис. 2.5

2.5. Расчет разветвленной магнитной цепи

Рассмотрим магнитную цепь на рис. 2.6 с обозначенными геометрическими размерами, в которой имеется **три** ветви и **два** узла и, следовательно, **два** независимых контура (повторите соответствующий материал в теории электрической цепей). В цепи присутствуют две катушки с числами витков w_1, w_2 и токами I_1, I_2 . Жирными стрелками заданы положительные направления магнитных потоков Φ_1, Φ_2 и Φ_3 .

Уравнение первого закона Кирхгофа для магнитной цепи имеет вид

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3. \quad (2.7)$$

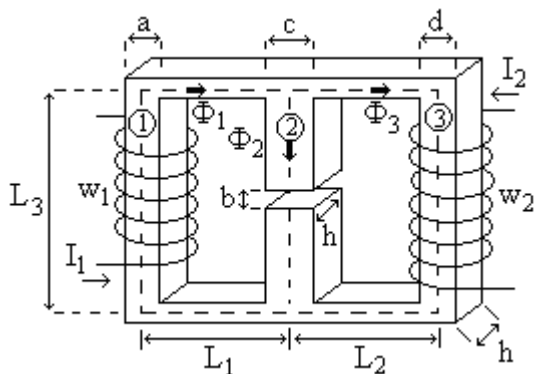


Рис. 2.6

Для однородного магнитного поля и плоской поверхности, перпендикулярной вектору магнитной индукции \vec{B} , согласно (1.11) получим

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= B_1 S_1, \\ \Phi_2 &= B_2 S_2, \\ \Phi_3 &= B_3 S_3,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где B_1, B_2, B_3 – индукции в ветвях 1, 2 и 3 соответственно (отмечены кружками на рис. 2.6), а S_1, S_2, S_3 – их площади поперечного сечения, равные

$$\begin{aligned}S_1 &= ah, \\ S_2 &= ch, \\ S_3 &= dh.\end{aligned}\tag{2.9}$$

В результате уравнение первого закона Кирхгофа (2.6) можно записать в виде

$$B_1 a = B_2 c + B_3 d.\tag{2.10}$$

В цепи на рис. 2.6 имеется два независимых контура, для которых составляются уравнения второго закона Кирхгофа для магнитных цепей в виде

$$\begin{aligned} H_1(2L_1 + L_3) + H_2'(L_3 - b) + H_2''b &= I_1w_1, \\ H_3(2L_2 + L_3) - H_2'(L_3 - b) - H_2''b &= I_2w_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где H_1, H_2', H_3 – напряженности магнитных полей в ферромагнитных ветвях с соответствующим номером, а H_2'' – в воздушном зазоре. Напряженности магнитных полей в ферромагнитной среде H_1, H_2', H_3 зависят от величин магнитной индукции B_1, B_2, B_3 в соответствующих ветвях и кривой намагничивания на рис. 2.1 а, а в воздушном зазоре из (2.5)

$$H_2'' = \frac{B_2}{\mu_0}.$$

В результате уравнения (2.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} H_1(B_1)(2L_1 + L_3) + H_2'(B_2)(L_3 - b) + \frac{B_2}{\mu_0}b &= I_1w_1, \\ H_3(B_3)(2L_2 + L_3) - H_2'(B_2)(L_3 - b) - \frac{B_2}{\mu_0}b &= I_2w_2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Уравнения (2.9) и (2.11) образуют полную систему уравнений магнитной цепи

$$\begin{cases} B_1a = B_2c + B_3d, \\ H_1(B_1)(2L_1 + L_3) + H_2'(B_2)(L_3 - b) + (B_2 / \mu_0)b = I_1w_1, \\ H_3(B_3)(2L_2 + L_3) - H_2'(B_2)(L_3 - b) - (B_2 / \mu_0)b = I_2w_2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Получена система нелинейных уравнений для неизвестных значений магнитной индукции в различных ветвях магнитной цепи. Их решение может быть получено численными методами и для этого необходимо записать аналитическое выражение для кривой намагничивания и зависимости напряженности H (А/м) магнитного поля от величины магнитной индукции B (Тл) в ферромагнетике (рис. 2.2).

В качестве примера можно использовать полиномиальную функцию вида

$$H(B) = \frac{B}{\mu_0\mu} + (125 \cdot B)^6, \quad (2.14)$$

график этой зависимости показан пунктиром на рис. 2.2.

На рис. 2.7 показана программа расчета магнитной индукции в рассматриваемом примере (рис. 2.6 и рис. 2.2) при $\mu = 2000$ и малых значениях токов $I_1 = I_2 = 1 \text{ мА}$.

```

a:= 0.01  b:= 0.001  c:= 0.01  d:= 0.01  h:= 0.01  L1:= 0.05  L2:= 0.05  L3:= 0.1
w1:= 100  w2:= 100  I1:= 0.001  I2:= 0.001  m0:= 1.256·10-6  hh(v):=  $\frac{1}{2000 \cdot m0} \cdot v + (125 \cdot v)^6$ 
B1:= 0    B2:= 0    B3:= 0
Given
a·B1 - c·B2 - d·B3 = 0
hh(B1)·(2·L1 + L3) + hh(B2)·(L3 - b) +  $\frac{B2}{m0} \cdot b - I1 \cdot w1 = 0$ 
hh(B3)·(2·L2 + L3) - hh(B2)·(L3 - b) -  $\frac{B2}{m0} \cdot b - I2 \cdot w2 = 0$ 
x := Find(B1,B2,B3)
x =  $\begin{pmatrix} 1.256 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 1.256 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$ 

```

Рис. 2.7

В результате получены значения индукций $B_1 = B_3 = 1,256 \text{ мТл}$ и $B_2 = 0$. При больших токах проявляется нелинейность ферромагнетика и при $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$ значения индукции соответственно равны всего $B_1 = B_3 = 22 \text{ мТл}$ и $B_2 \approx 0$.

При малых токах ферромагнитный сердечник оказывается линейным и тогда для напряженности магнитного поля H и магнитной индукции B можно записать

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu}, \quad (2.15)$$

где μ – относительная магнитная проницаемость ферромагнетика (в рассматриваемом примере $\mu = 2000$). С учетом (2.14) из (2.12) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 a = B_2 c + B_3 d, \\ \frac{B_1}{\mu_0 \mu} (2L_1 + L_3) + \frac{B_2}{\mu_0 \mu} (L_3 - b) + \frac{B_2}{\mu_0} b = I_1 w_1, \\ \frac{B_3}{\mu_0 \mu} (2L_2 + L_3) - \frac{B_2}{\mu_0 \mu} (L_3 - b) - \frac{B}{\mu_0} b = I_2 w_2. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Из (2.16) получим (проведите расчет самостоятельно)

$$B_2 = \frac{\mu_0 \left[I_1 w_1 - \frac{2L_1 + L_3}{2L_2 + L_3} I_2 w_2 \right]}{\frac{2L_1 + 2L_3 - b}{\mu} + b + \frac{2L_1 + L_3}{2L_2 + L_3} \left[\frac{L_3 - b}{\mu} + b \right]}, \quad (2.17)$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 \mu (I_1 w_1 + I_2 w_2) - B_2 (2L_1 + L_3)}{2(L_1 + L_2 + L_3)}, \quad (2.18)$$

$$B_1 = B_2 + B_3. \quad (2.19)$$

Вычисленные из (1.17) – (2.19) значения магнитной индукции при малых токах совпадают с результатами расчета по системе уравнений (2.12).

2.6. Линейные магнитные цепи переменного тока

Расчет нелинейных магнитных цепей переменного тока наталкивается на значительные математические трудности. Анализ **линейных** магнитных цепей значительно упрощается с использованием законов электромагнитной индукции.

Рассмотрим две магнитосвязанные катушки индуктивности, у которых магнитный поток одной из них частично пересекает витки другой и наоборот, как показано на рис. 2.8 а при **согласном** и рис. 2.8 в при **встречном** включении. Соответствующие эквивалентные схемы показаны на рис. 2.6 б и рис. 2.8 г соответственно, точками отмечены **одноименные** выводы кату-

шек (если в них **втекают** токи, то созданные ими магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 **складываются**, а в противном случае – вычитаются).

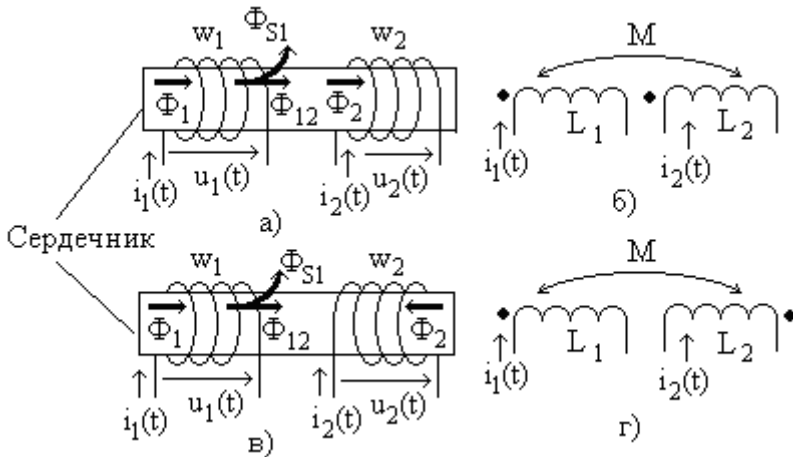


Рис. 2.8

Магнитный поток, создаваемый первой катушкой, разделяется на поток Φ_{12} , пересекающий витки второй катушки, и поток рассеивания Φ_{S1} первой катушки, не затрагивающий вторую катушку,

$$\Phi_1 = \Phi_{12} + \Phi_{S1}. \quad (2.20)$$

Аналогичное соотношение можно записать и для второй катушки,

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{S2}, \quad (2.21)$$

где Φ_2 – полный магнитный поток второй катушки, Φ_{21} – поток второй катушки, пересекающий витки первой катушки и Φ_{S2} – поток рассеивания второй катушки.

Сердечник обеспечивает концентрацию магнитного потока одной катушки в витках другой и уменьшает потоки рассеивания. Наиболее эффективны тороидальные сердечники (кольца). Если сердечник отсутствует, то поток рассеивания увеличивается. Наличие ферромагнитного сердечника значительно

увеличивает индуктивности катушек. При малых токах катушки индуктивности с ферромагнитным сердечником можно рассматривать как **линейные** элементы.

Рассмотрим последовательное соединение двух магнитосвязанных катушек при согласном включении, как показано на рис. 2.9 а.

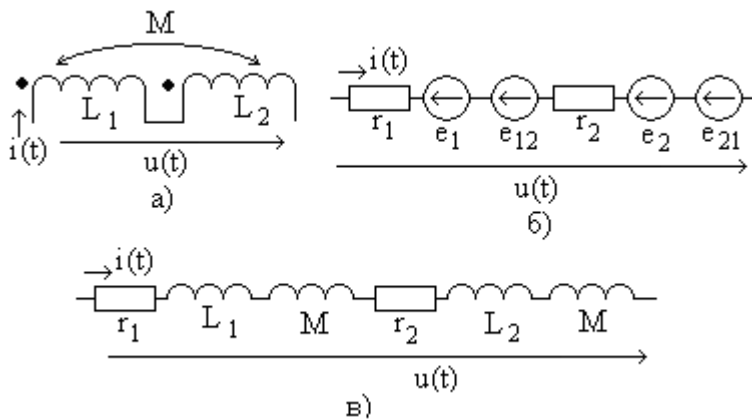


Рис. 2.9

Протекающий через катушки общий ток $i(t)$ вызывает в каждой из них ЭДС самоиндукции $e_1(t)$ и $e_2(t)$, равные (1.29)

$$e_1(t) = -\frac{d\Psi_1(t)}{dt} = -L_1 \frac{di(t)}{dt},$$

$$e_2(t) = -\frac{d\Psi_2(t)}{dt} = -L_2 \frac{di(t)}{dt},$$

и совпадающие с ними по направлению ЭДС взаимной индукции $e_{12}(t)$ и $e_{21}(t)$

$$e_{12}(t) = -\frac{d\Psi_{12}(t)}{dt} = -M \frac{di(t)}{dt},$$

$$e_{21}(t) = -\frac{d\Psi_{21}(t)}{dt} = -M \frac{di(t)}{dt},$$

где M – взаимная индуктивность. В результате получим эквивалентную схему на рис. 2.9 б, где r_1 и r_2 – сопротивления потерь

соответствующих катушек - сопротивления провода с учетом поверхностного эффекта (повторите необходимый материал). Тогда для напряжения $u(t)$ можно записать

$$\begin{aligned} u(t) &= r_1 i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} + M \frac{di(t)}{dt} + r_2 i(t) + L_2 \frac{di(t)}{dt} + M \frac{di(t)}{dt} = \\ &= (r_1 + r_2) i(t) + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Полученному выражению соответствует эквивалентная схема на рис. 2.9в.

Как видно, при последовательном и согласном соединении магнитосвязанных катушек их общая (эквивалентная) индуктивность L_{Σ} равна

$$L_{\Sigma} = L_1 + L_2 + 2M. \quad (2.22)$$

Величина магнитной связи между катушками характеризуется **коэффициентом связи** k_{CB} , равным

$$k_{CB} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (2.23)$$

и меняющимся в пределах от 0 (связь отсутствует) до 1 (максимальная связь). Таким образом, взаимная индуктивность M меняется в интервале от 0 до $\sqrt{L_1 L_2}$.

Аналогично проводится расчет последовательного соединения катушек при их встречном включении, соответствующие схемы показаны на рис. 2.10. Отличие от предыдущего расчета заключается в противоположных знаках ЭДС взаимной индукции. Для эквивалентных схем, показанных на рис. 2.10, можно записать

$$\begin{aligned} u(t) &= r_1 i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} - M \frac{di(t)}{dt} + r_2 i(t) + L_2 \frac{di(t)}{dt} - M \frac{di(t)}{dt} = \\ &= (r_1 + r_2) i(t) + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di(t)}{dt}, \end{aligned}$$

а для эквивалентной индуктивности получим

$$L_{\Sigma} = L_1 + L_2 - 2M. \quad (2.24)$$

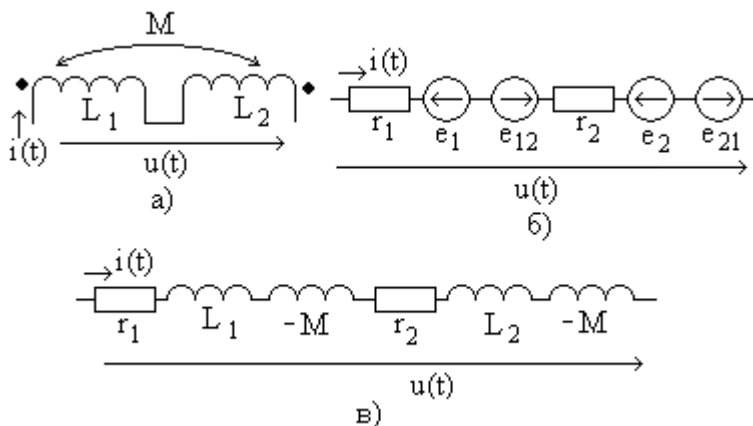


Рис. 2.10

Как видно, при встречном включении катушек общая индуктивность уменьшается. При одинаковых индуктивностях $L_1 = L_2 = L$ и изменении M от 0 до $\sqrt{L_1 L_2} = L$ эквивалентная индуктивность уменьшается от $2L$ до нуля.

2.7. Вариометр

На основе двух магнитосвязанных катушек в радиотехнике реализуются различные устройства, например, вариометр, пример которого показан на рис. 2.11. Он представляет собой неподвижную катушку (статор), внутри которой может поворачиваться вторая катушка (ротор). Они могут находиться в одной плоскости (при этом обеспечивается максимальная связь) или перпендикулярно друг к другу (связь минимальна).

На этой основе реализуется высокочастотный трансформатор с регулируемой связью между обмотками.

Если катушки соединены последовательно (согласно или встречно), то при повороте ротора будет меняться эквивалентная индуктивность вариометра, при этом вариометр является регулируемой индуктивностью.

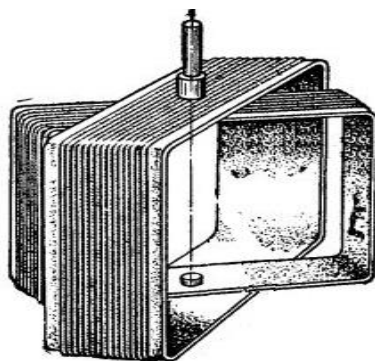


Рис. 2.11

2.8. Измерение взаимной индуктивности

Для измерения взаимной индуктивности можно использовать схему, показанную на рис. 2.12. Две катушки включены как трансформатор и выводы второй катушки разомкнуты (ее ток равен нулю). К первой катушке подключен источник гармонического напряжения с частотой ω и амперметр переменного тока, показывающий действующее значение тока I_1 первой катушки. Ко второй катушке подключен вольтметр, измеряющий действующее значение ее напряжения U_2 .

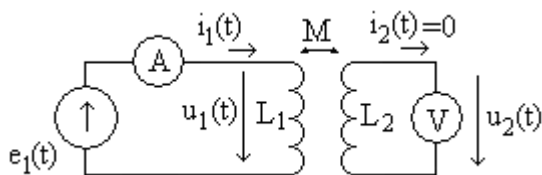


Рис. 2.12

По закону электромагнитной индукции ток $i_1(t)$ вызывает во второй катушке ЭДС взаимной индукции $e_2(t)$, равную

$$e_2(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt}. \quad (2.25)$$

Так как ток $i_1(t)$ гармонический $i_1(t) = \sqrt{2} \cdot I_1 \cos(\omega t)$, то из (2.23) напряжение U_2 равно

$$U_2 = \omega M \cdot I_1$$

(проведите расчет самостоятельно) и для взаимной индуктивности получим

$$M = \frac{U_2}{\omega \cdot I_1}. \quad (2.26)$$

2.9. Контрольные вопросы

2.1. Какова размерность магнитодвижущей силы (МДС), магнитного напряжения и сопротивления?

2.2. Дайте определения вебер-амперной характеристики участка магнитной цепи и кривой намагничивания.

2.3. Сформулируйте законы Ома и Кирхгофа для магнитной цепи.

2.4. Как определяется индуктивность двух последовательно соединенных магнитосвязанных катушек при согласном и встречном включении?

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТРАНСФОРМАТОРЫ

3.1. Конструкция электрического трансформатора

Трансформатор – это электротехническое устройство преобразования переменного электрического напряжения (тока) от одного значения к другому. Устройство простейшего двухобмоточного трансформатора показано на рис. 3.1. Он состоит из магнитопровода (ферромагнитного сердечника), на котором размещены первичная и вторичная обмотки (катушки из медного провода) с числом витков w_1 и w_2 соответственно. На первичную обмотку подаются входное напряжение $u_1(t)$ и входной ток $i_1(t)$, а выходное напряжение $u_2(t)$ и выходной ток $i_2(t)$ формируются в его вторичной обмотке.

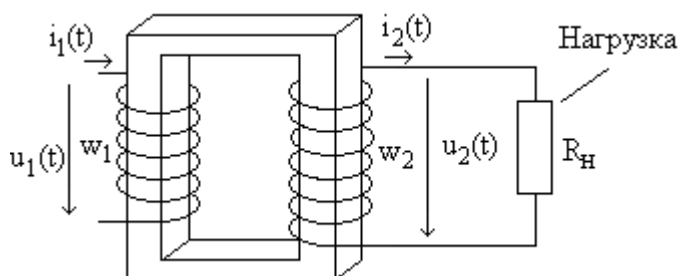


Рис. 3.1

Переменный входной ток создает в первичной обмотке переменное магнитное поле (магнитный поток Φ_2 , в многовитковой катушке – потокоцепление $\Psi_2 = w_2 \Phi_2$), которое пересекает витки вторичной обмотки и вызывает в ней ЭДС взаимной индукции $e_2(t)$ (1.25), за счет которой появляются напряжение и ток вторичной обмотки, которые поступают в нагрузку (потребитель преобразованной электрической энергии) с сопротивлением R_H

Если в первичной обмотке протекает только **постоянный ток**, то согласно (1.30) ЭДС взаимной индукции равна нулю

и трансформации электрической энергии **не происходит (электрический трансформатор не работает на постоянном токе)**.

Магнитопровод (сердечник трансформатора) обеспечивает замыкание почти всего потока Φ_1 первичной обмотки через витки вторичной обмотки (его называют потоком взаимоиנדукции Φ_{12}). Малая часть Φ_1 (единицы – доли процента), которая не попадает во вторичную обмотку, называют потоком рассеивания Φ_{s1} . Очевидно, что

$$\Phi_1 = \Phi_{12} + \Phi_{s1}. \quad (3.1)$$

Наличие магнитопровода позволяет **минимизировать** нежелательный поток рассеивания.

Аналогично переменный ток $i_2(t)$ вторичной обмотки также вызывает магнитное поле (поток Φ_2), которое пересекает витки первичной обмотки и формирует в ней ЭДС взаимоиנדукции $e_1(t)$. Небольшая часть потока Φ_2 также является потоком рассеивания Φ_{s2} и выполняется условие

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{s2}. \quad (3.2)$$

На практике применяются различные варианты размещения обмоток на магнитопроводе, один из которых показан на рис. 3.1, а другие – на рис. 3.2. В современных силовых трансформаторах каждая обмотка разделяется на две одинаковых части (рис. 3.2 а), которые соединяются последовательно и **согласно**, образуя полные рабочие обмотки.

Магнитопровод трансформатора изготавливается из ферромагнитного материала (трансформаторного железа в низкочастотных силовых трансформаторах, феррита или карбонильного железа в высокочастотных). Наиболее эффективны кольцевые (тороидальные) магнитопроводы.

При больших токах обмоток сердечник оказывается нелинейным и трансформатор в целом оказывается **нелинейным** электротехническим устройством.

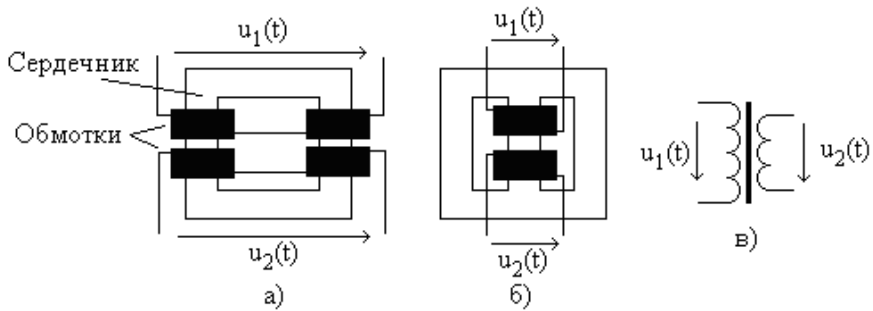


Рис. 3.2

Условно-графическое обозначение трансформатора на принципиальных схемах показано на рис. 3.2в (катушки индуктивности отображают обмотки, а жирная линия между обмотками – сердечник).

Приложенное к первичной обмотке с числом витков w_1 гармоническое напряжение с амплитудой U_{m1} вызывает в ней гармонический ток, который создает магнитный поток $\Phi(t) = \Phi_m \cos(\omega t + \psi)$, амплитуда которого согласно (1.32) равна

$$\Phi_m = \frac{U_{m1}}{\omega \cdot w_1}. \quad (3.3)$$

Если **пренебречь** рассеиванием, то этот магнитный поток пересекает витки вторичной обмотки (w_2 – их число) и создает в ней ЭДС взаимной индукции с амплитудой E_{m2} (напряжение вторичной обмотки с амплитудой U_{m2}), равной

$$E_{m2} = U_{m2} = \omega \cdot w_2 \Phi_m. \quad (3.4)$$

Для действующих значений напряжений первичной и вторичной обмоток получим

$$U_1 = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} \cdot w_1 \Phi_m = 4,44 f \cdot w_1 \Phi_m, \quad (3.5)$$

$$U_2 = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} \cdot w_2 \Phi_m = 4,44 f \cdot w_2 \Phi_m, \quad (3.6)$$

а их отношение, называемое **коэффициентом трансформации**,

равно

$$n_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{w_2}{w_1} \quad (3.7)$$

и определяется только числами витков первичной и вторичной обмоток.

3.2. Линейный трансформатор

При малых токах (магнитных индукциях) трансформатор оказывается **линейным** устройством и его можно анализировать методами, рассмотренными в подразделе 2.4. Схема трансформатора показана на рис. 3.3а.

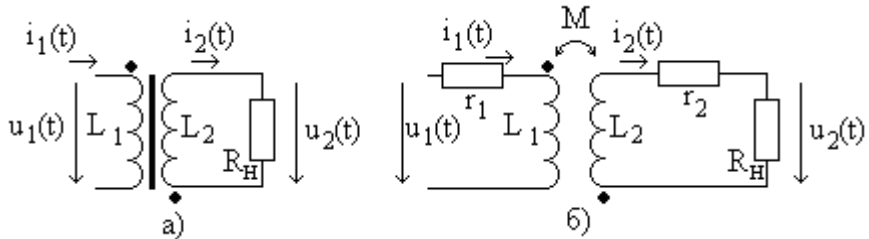


Рис. 3.3

Рассматриваемый трансформатор можно представить эквивалентной магнитосвязанной цепью, показанной на рис. 3.3 б. Ток $i_1(t)$ в первичной обмотке вызывает ЭДС самоиндукции в первичной обмотке

$$e_1(t) = -\frac{d\Psi_1(t)}{dt} = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

и ЭДС взаимной индукции во вторичной обмотке

$$e_{12}(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt}.$$

Ток $i_2(t)$ во вторичной обмотке вызывает ЭДС самоиндукции

$$e_2(t) = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

и ЭДС взаимоиндукции в первичной обмотке

$$e_{21}(t) = -M \frac{di_2(t)}{dt}.$$

Эквивалентные схемы первичной и вторичной обмоток показаны на рис. 3.4 а и 3.4 б соответственно. В результате получим

$$u_1(t) = r_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}, \quad (3.8)$$

$$(r_2 + R_H) i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} = 0. \quad (3.9)$$

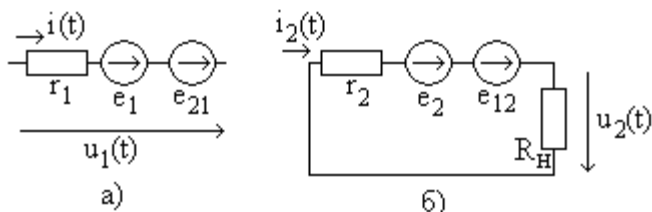


Рис. 3.4

Для гармонических сигналов методом комплексных амплитуд из (3.7) и (3.8), используя представление гармонических функций

$$s(t) = \operatorname{Re}\{\dot{S} \cdot \exp(j\omega t)\} \quad (3.10)$$

(\dot{S} – комплексная амплитуда гармонического сигнала), получим

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2, \quad (3.11)$$

$$(r_2 + R_H) \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0$$

(проведите расчет самостоятельно). Полагая входное напряжение \dot{U}_1 известным, из (3.10) получим

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \frac{r_2 + R_H + j\omega L_2}{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + R_H + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}, \quad (3.12)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \frac{j\omega M}{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + R_H + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}. \quad (3.13)$$

Выходное напряжение равно

$$\dot{U}_2 = R_H \dot{I}_2 = -\dot{U}_1 \frac{j\omega MR_H}{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + R_H + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}. \quad (3.14)$$

Свойства трансформатора описываются **коэффициентом трансформации напряжения** n_u (3.6) в виде отношения амплитуд (действующих значений) выходного и входного напряжений

$$n_u = \frac{U_2}{U_1}. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.13) и вычисляя модуль результата, получим

$$n_u = \frac{\omega MR_H}{\sqrt{[r_1(r_2 + R_H) + \omega^2 M^2 - \omega^2 L_1 L_2]^2 + \omega^2 [(r_2 + R_H)L_1 + r_1 L_2]^2}}. \quad (3.16)$$

На практике чаще всего используют замкнутый магнитопровод, для которого практически $k_{CB} = 1$, тогда из (2.23)

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

и из (3.12) получим

$$n_u = \frac{\omega MR_H}{\sqrt{[r_1(r_2 + R_H)]^2 + \omega^2 [(r_2 + R_H)L_1 + r_1 L_2]^2}}. \quad (3.17)$$

Индуктивности обмоток должны быть достаточно высоки, а сопротивления потерь – малы (в **идеальном трансформаторе** индуктивности обмоток стремятся к бесконечности, а их сопротивления потерь – к нулю), тогда из (3.17)

$$n_u = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \quad (3.18)$$

Коэффициент трансформации тока n_i определим в виде

$$n_i = \frac{I_2}{I_1} \quad (3.19)$$

(в литературе часто используется обратная величина). Из (3.12) и (3.13) получим

$$n_i = \frac{\omega M}{\sqrt{(r_2 + R_H)^2 + \omega^2 L_2^2}}, \quad (3.20)$$

для идеального трансформатора при $M = \sqrt{L_1 L_2}$

$$n_i = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{n_u}. \quad (3.21)$$

Приближенно индуктивность катушки трансформатора пропорциональна квадрату числа витков ($L \approx Kw^2$), тогда

$$n_u \approx \frac{w_2}{w_1}, \quad (3.22)$$

$$n_i \approx \frac{w_1}{w_2}. \quad (3.23)$$

Коэффициенты трансформации позволяют просто пересчитывать напряжения и токи из первичной обмотки во вторичную.

Входное сопротивление нагруженного трансформатора из (3.12) определяется выражением

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + R_H + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{r_2 + R_H + j\omega L_2}, \quad (3.24)$$

а для идеального трансформатора ($L_1 \rightarrow \infty$, $L_2 \rightarrow \infty$, $r_1 = r_2 = 0$) входное сопротивление равно

$$Z_{BX} = \frac{L_1}{L_2} R_H = \frac{1}{(n_u)^2} R_H = (n_i)^2 R_H. \quad (3.25)$$

Как видно, сопротивление нагрузки во вторичной обмотке трансформируется в первичную **обратно пропорционально квадрату коэффициента трансформации напряжения**.

Для расчетов трансформаторов широко используются их эквивалентные схемы (схемы замещения). Системе уравнений (3.8), (3.9) или (3.11) при **согласном** включении катушек (рис. 3.3) соответствует электрическая цепь на рис. 3.5 (проверьте это самостоятельно). Если катушки включены **встречно**, то меняется **знак** у взаимной индуктивности M .

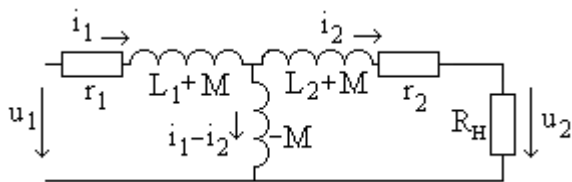


Рис. 3.5

Для учета потерь на рассеивание с помощью «сопротивления рассеивания» r_p используется эквивалентная схема, показанная на рис. 3.6 (запишите соответствующие ей уравнения, сравните с предыдущими).

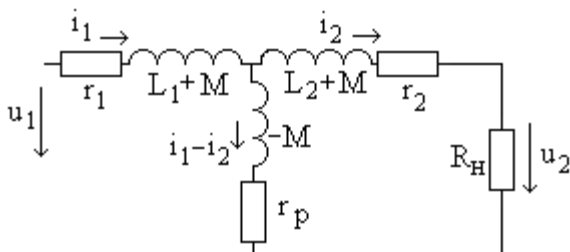


Рис. 3.6

Рассмотренные модели позволяют исследовать характеристики трансформаторов и проводить расчеты электрических цепей, в состав которых входят трансформаторы.

3.3. Режимы работы трансформатора

Выделяют три режима работы трансформатора:

- рабочий (номинальный, нагруженный) режим;
- режим холостого хода (ХХ);
- режим короткого замыкания (КЗ).

В **режиме холостого хода** нагрузка отсутствует (на рис. 3.3 $R_H \rightarrow \infty$), ток холостого хода вторичной обмотки $I_{2XX} = 0$ а

напряжение U_{2XX} равно ЭДС E_2 . В этом случае из (3.12) ток холостого хода первичной обмотки равен

$$\dot{I}_{1XX} = \frac{\dot{U}_1}{r_1 + j\omega L_1}. \quad (3.26)$$

Для идеального трансформатора ($L_1 \rightarrow \infty$ и $r_1 = 0$) получим, что действующее значение тока холостого хода первичной обмотки $I_{1XX} = 0$. У реального трансформатора ток I_{1XX} составляет несколько процентов от рабочего (номинального, максимально допустимого) тока первичной обмотки I_{1H} .

Так как в режиме холостого хода токи обмоток малы, то пренебрежимо малы и мощности потерь в проводах обмоток. Потери мощности имеют место **в сердечнике** (магнитопроводе) трансформатора и связаны с **вихревыми токами и перемагничиванием**.

Режим короткого замыкания трансформатора ($R_H = 0$) недопустим при рабочем входном напряжении. При условии $M = \sqrt{L_1 L_2}$ из (3.12) и (3.13) получим

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \frac{j\omega L_2}{r_1 r_2 + j\omega(r_2 L_1 + r_1 L_2)}, \quad (3.27)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \frac{j\omega M}{r_1 r_2 + j\omega(r_2 L_1 + r_1 L_2)}. \quad (3.28)$$

Как видно, токи обмоток резко повышаются (в реальных трансформаторах они возрастают в 15-20 раз относительно максимальных рабочих значений), а в идеальном трансформаторе (при $r_1 = r_2 = 0$) они становятся бесконечными. При этом **в проводах обмоток выделяется недопустимо большая мощность**, они перегреваются и трансформатор выходит из строя («сгорает»).

Режим короткого замыкания используется **только для измерения** параметров трансформатора, при этом входное напряжения составляет несколько процентов от рабочего значения. В этом случае магнитный поток невелик и потери мощности в сердечнике практически отсутствуют.

Рабочий режим описывается **нагрузочной** или **внешней характеристикой** – зависимостью действующего значения напряжения вторичной обмотки U_2 от тока обмотки I_2 , пример которой для различных видов нагрузки (емкостной, активной и индуктивной) показаны на рис. 3.7.

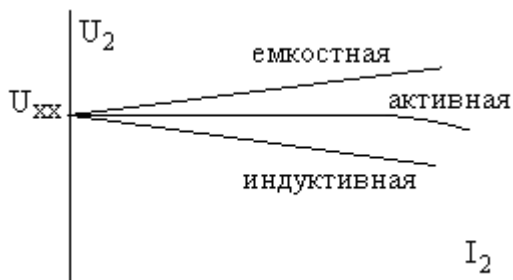


Рис. 3.7

Рабочая характеристика трансформатора – это зависимость коэффициента полезного действия (КПД) η ,

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}, \quad (3.29)$$

от коэффициента загрузки β трансформатора, равного

$$\beta = \frac{I_2}{I_{2H}}, \quad (3.30)$$

где P_2 – передаваемая в нагрузку мощность, P_1 – входная мощность, I_{2H} – номинальный (максимальный рабочий) ток вторичной обмотки.

Пример рабочей характеристики показан на рис. 3.8 а. На рис. 3.8 б показаны зависимости мощностей потерь в стали сердечника $P_{СТ}$ (не зависит от тока нагрузки) и меди проводов обмоток P_M от коэффициента нагрузки. Как видно, при их равенстве имеет место максимум КПД.

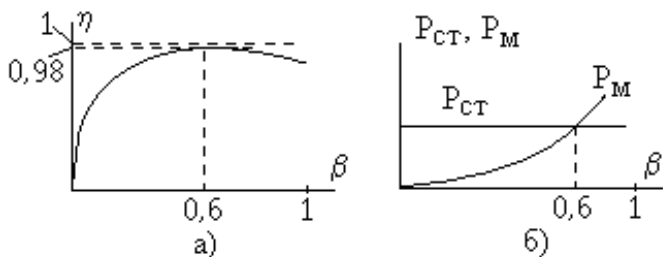


Рис. 3.8

3.4. Измерение параметров модели трансформатора

Для измерения параметров модели трансформатора, показанной на рис. 3.9 используются результаты экспериментов короткого замыкания и холостого хода, схемы которых показаны на рис. 3.10 а и рис. 3.10 б соответственно.

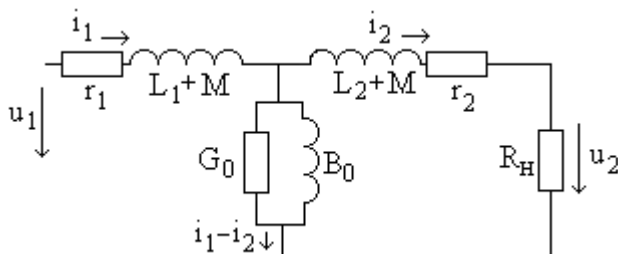


Рис. 3.9

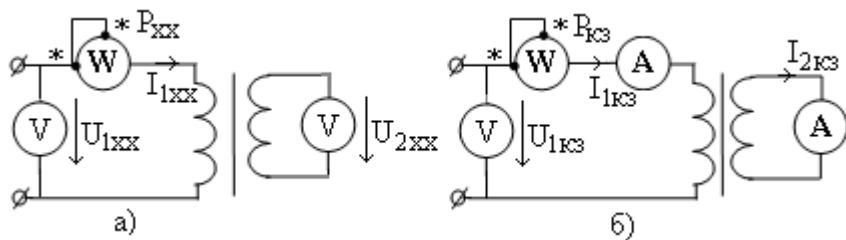


Рис. 3.10

Эквивалентные схемы на рис. 3.5 и рис. 3.6 нетрудно преобразовать к рассматриваемой цепи на рис. 3.9.

В экспериментальной схеме холостого хода (XX) на рис. 3.10 а мощность P_{XX} , потребляемая цепью, равна

$$P_{XX} = U_{1XX} I_{1XX} \cos(\varphi_{XX}), \quad (3.31)$$

где U_{1XX} и I_{1XX} – действующие значения входных напряжения и тока, φ_{XX} – сдвиг фаз между входными напряжением и током, а $\cos(\varphi_{XX})$ – коэффициент мощности входной цепи трансформатора, который из (3.31) можно определить по результатам измерений мощности P_{XX} и величин U_{1XX} и I_{1XX} ,

$$\cos(\varphi_{XX}) = \frac{P_{XX}}{U_{1XX} I_{1XX}}. \quad (3.32)$$

Мощность потерь в стали магнитопровода равна P_{XX} , а угол магнитных потерь

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi_{XX}. \quad (3.33)$$

Коэффициент трансформации напряжения n_u определяется измеренными входным и выходным напряжениями,

$$n_u = \frac{U_{2XX}}{U_{1XX}}. \quad (3.34)$$

Приближенно параметры G_0 и $B_0 = 1/\omega M$ модели на рис. 3.9 равны

$$G_0 = \frac{P_{XX}}{U_{1XX}^2}, \quad (3.35)$$

$$B_0 = \sqrt{\left(\frac{I_{1XX}}{U_{1XX}}\right)^2 - G_0^2}. \quad (3.36)$$

Опыт короткого замыкания (рис. 3.10 б) проводят при **пониженном** входном напряжении U_{1K3} (равном нескольким процентам от номинального значения). При этом можно определить коэффициент трансформации тока

$$n_i = \frac{I_{1K3}}{I_{2K3}} \quad (3.37)$$

(он должен равняться n_u из (3.33)), и мощность P_{K3} , потребляемая цепью

$$P_{K3} = U_{1K3} I_{1K3} \cos(\varphi_{K3}), \quad (3.38)$$

где U_{1K3} и I_{1K3} – действующие значения входных напряжения и тока, φ_{K3} – сдвиг фаз между ними.

Мощность P_{K3} равна **мощности потерь в проводах обмоток** трансформатора, если входной ток I_{1K3} обеспечить равным номинальному (рабочему) току трансформатора.

3.5. Автотрансформатор

Автотрансформатор представляет собой катушку индуктивности с отводами, части которой используются в качестве первичной и вторичных обмоток, схемы понижающего и повышающего автотрансформаторов показаны на рис. 3.11 а и рис. 3.11 б соответственно (все обмотки включены **согласно**). Две части катушки имеют индуктивности L_1 и L_2 , находятся на общем сердечнике и имеют взаимную индуктивность M .

Для понижающего автотрансформатора на рис. 3.11 а эквивалентная схема показана на рис. 3.12.

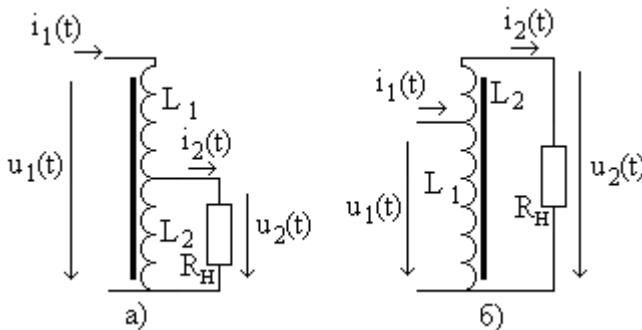


Рис. 3.11

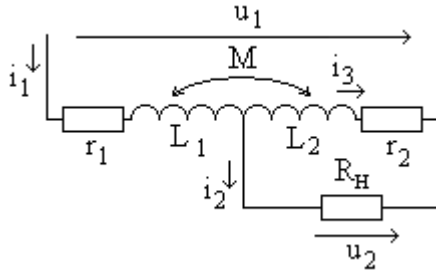


Рис. 3.12

Уравнение первого закона Кирхгофа имеет вид

$$i_1 = i_2 + i_3. \quad (3.39)$$

По второму закону Кирхгофа получим

$$\begin{cases} u_1(t) = r_1 i_1(t) + r_2 i_3(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_3(t)}{dt} + M \left[\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_3(t)}{dt} \right], \\ r_2 i_3(t) + L_2 \frac{di_3(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} - R_H i_2(t) = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Для гармонических сигналов можно записать

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3, \\ \dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1 + j\omega M) \dot{I}_1 + (r_2 + j\omega L_2 + j\omega M) \dot{I}_3, \\ (r_2 + j\omega L_2) \dot{I}_3 + j\omega M \dot{I}_1 = R_H \dot{I}_2. \end{cases} \quad (3.41)$$

Решая систему уравнений, получим

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{U}_1 \frac{r_2 + j\omega L_2 + R_H}{A}, \\ \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \frac{r_2 + j\omega L_2 + j\omega M}{A}, \\ \dot{I}_3 = \dot{U}_1 \frac{R_H - j\omega M}{A}, \end{cases} \quad (3.42)$$

где

$$\begin{aligned} A = (R_H - j\omega M)(r_2 + j\omega L_2 + j\omega M) + \\ + (r_2 + j\omega L_2 + R_H)(r_1 + j\omega L_1 + j\omega M). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Напряжение на вторичной обмотке автотрансформатора равно

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_H = \dot{U}_1 R_H \frac{r_2 + j\omega L_2 + j\omega M}{A}, \quad (3.44)$$

а для коэффициента трансформации напряжения для идеального автотрансформатора получим

$$n_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \approx \frac{L_2 + M}{L_2 + L_2 + 2M} \quad (3.45)$$

(проведите расчеты самостоятельно). Полагая, что индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков,

$$L = K \cdot w^2, \quad (3.46)$$

и $M = \sqrt{L_1 L_2}$, из (3.45) получим

$$n_u \approx \frac{w_2^2 + w_1 w_2}{w_1^2 + w_2^2 + 2w_1 w_2} = \frac{w_2}{w_1 + w_2}. \quad (3.47)$$

Для коэффициента трансформации тока аналогично получим

$$n_i = \frac{I_2}{I_1} \approx \frac{w_1 + w_2}{w_2} = \frac{1}{n_u}. \quad (3.48)$$

Получите выражение для входного сопротивления автотрансформатора, сравните его с (3.24) и (3.25).

Недостатком автотрансформатора является наличие **гальванической связи** между входной и выходной цепью.

3.6. Силовой трансформатор

Силовой трансформатор предназначен для преобразования напряжения (и тока) однофазной силовой сети с гармоническим напряжением 220 В (**действующее** значение, возможны варианты сети 110 В и 127 В) и частотой 50 Гц (в бортовых сетях морских и воздушных судов возможно 400 Гц). В полупроводниковой электронике в основном применяются понижающие трансформаторы напряжения.

Силовой трансформатор представляет собой сердечник

из пластин (полос) трансформаторного железа, на котором расположены обмотки из медного провода (рис. 3.2 а и рис. 3.2 б). Используются Ш-образные, стержневые, броневые и тороидальные конструкции сердечника. Обмотки часто разделяются на две одинаковые части и располагаются на магнитопроводе симметрично.

Напряжение силовой сети U_1 подается на первичную обмотку с числом витков w_1 и в ней возникает переменный ток, который создает в первичной обмотке переменное магнитное поле. Сердечник замыкает силовые линии этого магнитного поля внутри вторичной обмотки с числом витков w_2 (таких обмоток может быть несколько) и за счет этого создается ЭДС взаимной индукции, вызывающая переменное напряжение вторичной обмотки $U_2 = n_u \cdot U_1$.

Силовые трансформаторы могут изготавливаться производителем аппаратуры самостоятельно, однако целесообразно использовать серийно выпускаемые трансформаторы типов ТПП (трансформаторы для питания полупроводниковых приборов) или ТН (трансформаторы накальные для питания подогревателей электровакуумных приборов и полупроводниковых устройств).

В типовых трансформаторах первичная обмотка разделяется на две части и располагается на двух вертикальных частях сердечника (рис. 3.2 а). Они должны соединяться последовательно и **согласно. При встречном включении этих обмоток трансформатор выйдет из строя**, так как их общая индуктивность будет значительно меньше индуктивностей отдельных обмоток (2.23). Так же симметрично располагаются вторичные обмотки.

Общий вид трансформаторов ТПП и ТН броневой конструкции показан на рис. 3.13. Примером может служить силовой трансформатор ТПП48 127/220 50, его условно-графическое обозначение показано на рис. 3.14. Он может работать в сетях 127 В и 220 В с частотой 50 Гц, что и отражается в его маркировке, максимальная мощность 14 ВА.

На рис. 3.14 показаны две первичных обмотки с выводами 1-5 и 6-10, их номера указаны на корпусе трансформатора. Для питания от силовой сети 220 В необходимо соединить выводы 2 и 6, а напряжение сети подавать на выводы 1 и 8 первичной обмотки.

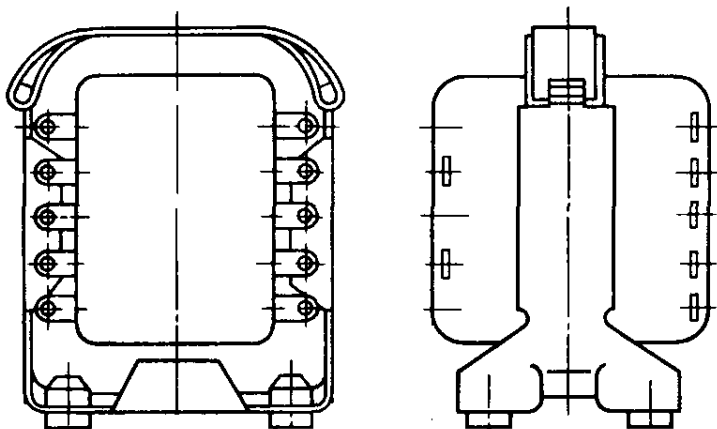


Рис. 3.13

Шесть вторичных обмоток с номерами выводов 11-12, 13-14, 15-16, 17-18, 19-20 и 21-22 в режиме холостого хода обеспечивают напряжения 13,8 В, 13,8 В, 13,8 В, 13,8 В, 1,5 В и 1,5 В при максимальных токах 0,61 А.

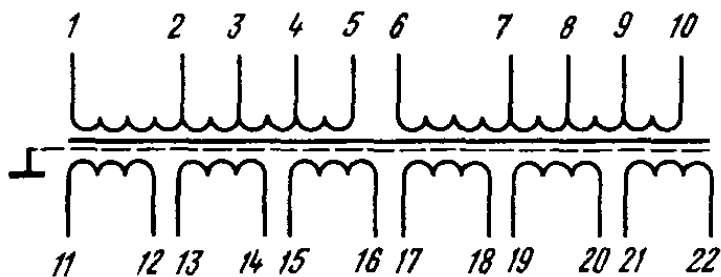


Рис. 3.14

Проведем приближенный расчет трансформатора напря-

жения силовой сети. Исходными данными являются напряжение сети $U_1 = 220B$, напряжения и токи вторичных обмоток, например, $U_{21} = 20B$, $I_{21} = 0,5A$ и $U_{22} = 10B$, $I_{22} = 1A$ при активных нагрузках. Определим мощность P_2 на нагрузках во вторичных обмотках

$$P_2 = U_{21}I_{21} + U_{22}I_{22} = 20Bm .$$

Рассчитаем потребляемую от сети мощность

$$P_1 = \frac{P_2}{K_{\text{пд}}} = \frac{20}{0,85} = 23,5Bm ,$$

– где $K_{\text{пд}} = 0,85$ - коэффициент полезного действия, типовые значения от 0,8 до 0,9.

Найдем необходимую площадь S поперечного сечения сердечника (см^2) при соответствующей мощности P_1 (Вт)

$$S = 1,15 \cdot \sqrt{P_1} = 5,58\text{см}^2 .$$

Число витков первичной обмотки равно (площадь в см^2)

$$w_1 = 50 \frac{U_1}{S} = 1971 .$$

Определим количество витков вторичных обмоток

$$w_{21} = 50 \frac{U_{21}}{S} = 180 ,$$

$$w_{22} = 50 \frac{U_{22}}{S} = 90 .$$

Найдем диаметр провода в первичной обмотке (мм) при заданном напряжении (В) первичной обмотки

$$D_1 = 0,8 \sqrt{\frac{P_1}{U_1}} \approx 0,1\text{мм} .$$

Диаметр провода вторичных обмоток равен (ток обмотки в амперах)

$$D_{21} = 0,8 \sqrt{I_{21}} \approx 0,57\text{мм} ,$$

$$D_{22} = 0,8 \sqrt{I_{22}} \approx 0,8\text{мм} .$$

3.7. Трехфазный трансформатор

Для трансформации трехфазного тока можно воспользоваться однофазными трансформаторами, однако это приводит к большим затратам трансформаторной стали на сердечники трех трансформаторов. Если поместить обмотки трехфазного трансформатора на общем сердечнике, это значительно уменьшит его массу. На рис. 3.15 показана конструкция силового трехфазного трансформатора с тремя первичными (с выводами AX, BY, CZ) и тремя вторичными (ax, by, cz) обмотками, размещенными на трех параллельных стержнях общего магнитопровода.

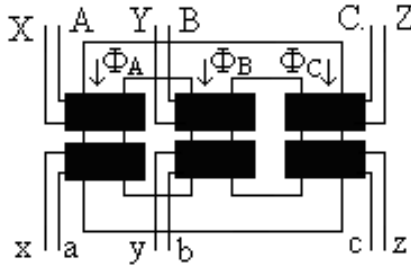


Рис. 3.15

Для гармонических магнитных потоков фаз Φ_A , Φ_B , Φ_C имеет место равенство

$$\Phi_A(t) + \Phi_B(t) + \Phi_C(t) = 0. \quad (3.49)$$

Коэффициент трансформации определяется отношением чисел витков вторичной w_2 и первичной w_1 обмоток в каждой фазе,

$$n_u = \frac{w_2}{w_1}. \quad (3.50)$$

3.8. Высокочастотный трансформатор

Высокочастотный трансформатор предназначен для преобразования напряжений и токов высокой частоты. Его сердеч-

ник изготавливается из феррита различных марок или карбонильного железа. Для минимизации потоков рассеивания используются тороидальные сердечники (ферритовые кольца диаметром от 3 мм до десятков сантиметров).

В ряде случаев необходимы небольшие значения коэффициента связи (несколько процентов), при этом сердечник в трансформаторе отсутствует, а катушки располагаются рядом на пластмассовом каркасе.

3.9. Согласующий трансформатор

В различных электронных устройствах возникает необходимость в согласовании источника сигнала с внутренним сопротивлением Z_C и нагрузки Z_H (рис. 3.16 а).

Известно [5], что максимум мощности в нагрузке обеспечивается при условии равенства ее сопротивления внутреннему сопротивлению источника,

$$R_H = R_C, \quad (3.51)$$

(повторите необходимый материал).

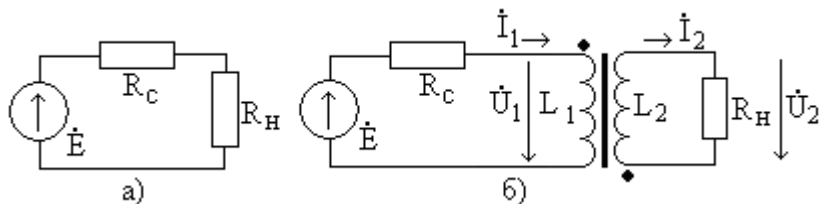


Рис. 3.16

Например, источником может быть выходной каскад радиопередатчика с внутренним сопротивлением $R_C = 10 \text{ Ом}$, а нагрузкой – передающая антенна с сопротивлением R_H .

Пусть действующее значение ЭДС источника равно $E = 50 \text{ В}$ и нагрузка согласована с источником, $R_H = 10 \text{ Ом}$, тогда максимальная мощность в нагрузке (антенне) равна

$$P_H = \left(\frac{E}{R_C + R_H} \right)^2 R_H = \frac{E^2 R_H}{(R_C + R_H)^2} = \frac{E^2}{4R_H} = \frac{2500}{40} = 62,5 \text{ Вт}.$$

При несогласованной нагрузке, например, $R_H = 75 \text{ Ом}$, передаваемая в нее мощность будет **значительно меньше** и равна

$$P_H = \frac{E^2 R_H}{(R_C + R_H)^2} = \frac{2500 \cdot 75}{85^2} = 26 \text{ Вт}.$$

Для обеспечения согласования между источником и нагрузкой включается согласующий трансформатор (его конструкция зависит от частотного диапазона и ряда других факторов). Эквивалентная схема цепи показана на рис. 3.16 б. Входное сопротивление трансформатора определяется из (3.25),

$$Z_{BX} = \frac{1}{(n_u)^2} R_H,$$

и в согласованном режиме должно быть равно R_C . В результате из условия

$$\frac{1}{(n_u)^2} R_H = R_C$$

получим выражение для требуемого коэффициента трансформации напряжения

$$n_u = \sqrt{\frac{R_H}{R_C}}. \quad (3.52)$$

Для рассматриваемого примера

$$n_u = \sqrt{\frac{75}{10}} = 2,73,$$

то есть необходимо использовать повышающий трансформатор. При единичном КПД трансформатора в нагрузку будет передана максимальная мощность (проведите расчет самостоятельно).

3.10. Гальваническая развязка

В трансформаторе между первичной и вторичными обмотками **ток не протекает** (отсутствует гальваническая связь), а мощность передается с помощью переменного магнитного поля благодаря электромагнитной индукции. Например, силовой трансформатор обеспечивает гальваническую развязку нагрузки и сети переменного тока, при этом один из полюсов нагрузки может быть безопасно заземлен или соединен с корпусом устройства (рис. 3.17). **Автотрансформатор не обеспечивает гальваническую развязку.**

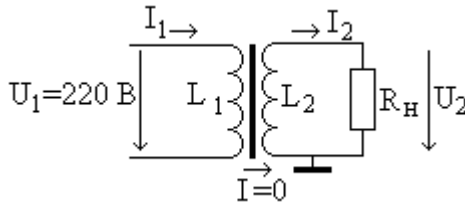


Рис. 3.17

3.11. Контрольные вопросы

3.1. Что характеризуют показания ваттметра W в опыте короткого замыкания трансформатора (рис. 3.18а) – номинальную мощность, мощность потерь в обмотках, мощность потерь в магнитопроводе? Что характеризуют показания ваттметра W в опыте холостого хода трансформатора на рис. 3.18 б?

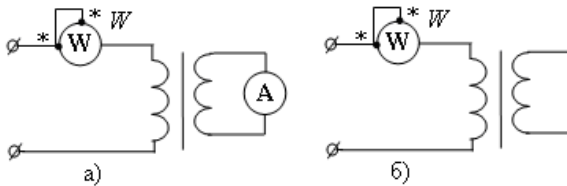


Рис. 3.18

3.2. Каким методом измеряются параметры X_0 и R_0 ветви намагничивания схемы замещения трансформатора на рис. 3.19 (прямым измерением, при номинальной нагрузке, из опыта короткого замыкания, из опыта холостого хода), сравните цепь со схемами на рис. 3.5, рис. 3.6 и рис. 3.9.

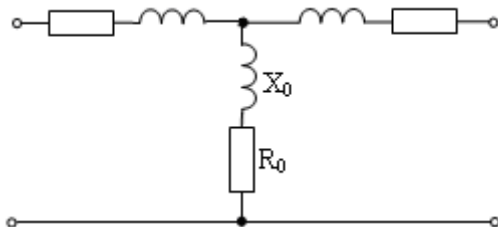


Рис. 3.19

3.3. Что такое коэффициент трансформации напряжения (тока), от чего он зависит, как измеряется?

3.4. От чего зависит коэффициент трансформации согласующего трансформатора, как он определяется?

3.5. Как выглядит рабочая характеристика трансформатора?

4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

4.1. Разложение периодических сигналов по ортогональным функциям

Электрический сигнал $s(t)$ (ток $i(t)$, напряжение $u(t)$) называют **периодическим**, если он существует на интервале времени от $-\infty$ до $+\infty$ и удовлетворяет условию $s(t) = s(t \pm kT)$, где T – период сигнала, а k – целое число. Примеры таких функций времени показаны на рис. 4.1.

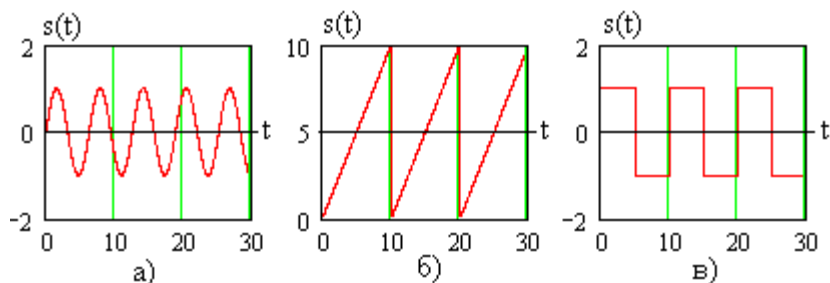


Рис. 4.1

При расчете разнообразных сигналов удобно представить их взвешенной суммой заданных функций времени вида

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(t), \quad (4.1)$$

где $\varphi_n(t)$ – заданный набор (**базис**) функций времени, a_n – весовые коэффициенты, не зависящие от времени. В этом случае функция времени $s(t)$ может описываться набором коэффициентов $a_n, n = \overline{0, \infty}$, **от времени не зависящих**.

Чтобы разложение в ряд (4.1) было взаимно однозначным, функции $\varphi_n(t)$ должны быть взаимно **ортогональными** на периоде сигнала, то есть должны удовлетворять условию

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi_n(t) \varphi_k(t) dt = \begin{cases} A & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k, \end{cases} \quad (4.2)$$

где момент начала интегрирования t_0 выбирается произвольно исходя из удобства расчетов. При $A = 1$ набор функций $\varphi_n(t)$ называют **ортонормальным**.

Для ортогонального базиса коэффициенты разложения a_n определяются выражением

$$a_n = \frac{1}{A} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cdot \varphi_n(t) dt. \quad (4.3)$$

В математике и технике широко используются различные ортогональные наборы функций (базисы) и прежде всего гармонический базис

$$\varphi_n(t) = \cos(n\omega_1 t) \text{ или } \sin(n\omega_1 t), \text{ где } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.4)$$

а также полиномы Чебышева, Лагранжа, Эрмита и др. В цифровой технике применяют ортогональные дискретные функции Уолша, Радамахера.

4.2. Ряд Фурье

Ряд Фурье для действительной периодической функции времени $s(t)$ является ее разложением по ортогональному базису (4.4) и имеет вид

$$\begin{aligned} s(t) &= S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega_1 t + \psi_n) = \\ &= S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Компоненту ряда Фурье вида

$$S_n \cos(n\omega_1 t + \psi_n) \quad (4.6)$$

называют **n -й гармоникой** сигнала,

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.7)$$

– частота первой гармоники, $\omega_n = n\omega_1$ – частота n -й гармоники, S_0 – постоянная составляющая сигнала,

$$S_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt, \quad (4.8)$$

S_n – амплитуда n -й гармоники сигнала,

$$S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (4.9)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt, \quad (4.10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt, \quad (4.11)$$

ψ_n – начальная фаза n -й гармоники сигнала,

$$\psi_n = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & \text{при } a_n \geq 0, \\ \pi + \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & \text{при } a_n < 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Величины a_n и b_n называют амплитудами синфазной и квадратурной составляющих n -й гармоники сигнала соответственно.

4.3. Спектры амплитуд и фаз периодического сигнала

Периодический сигнал $s(t)$ взаимно однозначно описывается суммой гармоник

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega_1 t + \psi_n), \quad (4.13)$$

то есть двумя в общем случае бесконечными наборами чисел.

Первый из них называют спектром амплитуд сигнала,

$$\{S_n\}, n = \overline{0, \infty}, \quad (4.14)$$

а второй – спектром фаз,

$$\{\psi_n\}, n = \overline{1, \infty}. \quad (4.15)$$

Спектры амплитуд и фаз не зависят от времени, а определяются формой сигнала $s(t)$ на периоде колебаний. Частоты гармоник $\omega_n = n\omega_1$ **кратны частоте первой гармоники** ω_1 ,

$$\omega_n = n\omega_1 = n \frac{2\pi}{T}, \quad (4.16)$$

не зависят от формы сигнала и определяются только периодом его повторения T .

Спектры сигнала можно представить в виде формулы, таблицы или графика. В качестве примера рассмотрим спектры амплитуд и фаз последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой S , длительностью τ и периодом T , показанных на рис. 4.2.

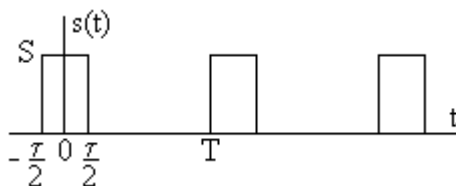


Рис. 4.2

При расчетах этого сигнала целесообразно выбрать момент начала интегрирования $t_0 = -T/2$ (или $t_0 = -\tau/2$). Постоянная составляющая равна

$$S_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S dt = S \frac{\tau}{T}, \quad (4.17)$$

а амплитуды синфазной и квадратурной составляющих -

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4S}{n\omega_1 T} \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) = \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right), \quad (4.18)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S \sin(n\omega_1 t) dt = 0. \quad (4.19)$$

Для амплитуды и начальной фазы n -й гармоники получим

$$S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2S}{n\pi} \left| \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \right|, \quad (4.20)$$

$$\psi_n = \begin{cases} 0 & \text{при } \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \geq 0, \\ \pi & \text{при } \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) < 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Графики спектров амплитуд и фаз при условии $S = 10$, $\tau = 0,1$ мс, $T = 1$ мс показаны на рис. 4.3а и рис. 4.3б соответственно. Каждая гармоника отображается вертикальной линией, длина которой равна величине амплитуды или фазы.

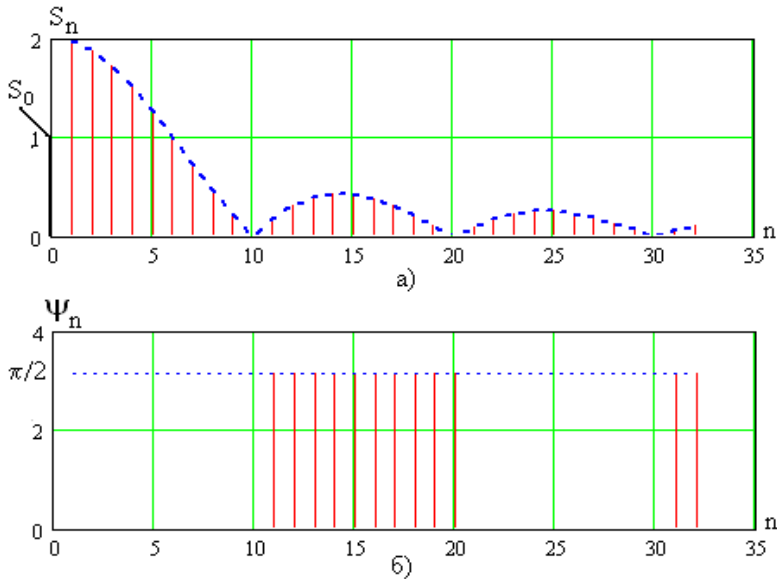


Рис. 4.3

Переменная n является номером гармоники. Ее можно рассматривать как нормированную частоту гармоники,

$$n = \frac{\omega_n}{\omega_1},$$

и спектральные диаграммы можно строить в координатах частоты гармоники, как показано на рис. 4.4 для спектра амплитуд.

Спектры имеют дискретный (линейчатый) характер, интервал частот между соседними гармониками одинаков и равен $\omega_1 = 2\pi/T$.

Спектр амплитуд сверху всегда ограничен линией, которая имеет тенденцию к уменьшению с ростом частоты (номера) гармоники. Вводится понятие огибающей спектра амплитуд, определяемой как непрерывная функция частоты ω , которая в точках $\omega = \omega_n$ точно совпадает со значениями амплитуд гармоник.

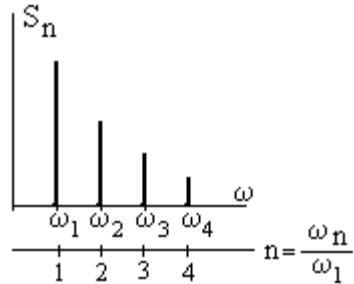


Рис. 4.4

Формулу огибающей можно получить из выражения для спектра амплитуд, подобного (4.20), при замене номера гармоники n величиной

$$n = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad (4.22)$$

– где ω - непрерывная переменная.

В примере (4.20) получим

$$S_n = \frac{2S\omega_1}{\pi\omega} \left| \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|, \quad (4.23)$$

график показан на рис. 4.3 а пунктирной линией. Характерной особенностью огибающей спектра амплитуд сигнала рис. 4.2 является наличие точек с нулевым значением (**нулей огибающей**), определяемых из уравнения

$$\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0, \quad (4.24)$$

решение которого имеет вид

$$\omega = \frac{2\pi k}{\tau}, \quad (4.25)$$

– где $k = 1, 2, \dots$ - целое число. Как видно, положение нулей огибающей определяется только длительностью импульса τ .

4.4. Синтез сигнала по его спектру

Если известны спектры амплитуд и фаз, то с помощью ряда Фурье (4.13) можно получить сигнал как функцию времени. Бесконечная сумма на практике не реализуема и сигнал описывается конечной суммой гармоник,

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^M S_n \cos(n\omega_1 t + \psi_n). \quad (4.26)$$

Соответствующие кривые при $M = 60$, $M = 20$ и $M = 10$ показаны на рис. 4.5 а, рис. 4.5 б, и рис. 4.5 в соответственно. Как видно, с увеличением M форма синтезированного сигнала приближается к исходной (рис. 4.2).

4.5. Ряд Фурье в комплексной форме

Гармоники сигнала могут быть представлены своими **комплексными амплитудами** в виде

$$\dot{S}_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = a_n - jb_n, \quad (4.27)$$

тогда исходный сигнал можно записать в виде **ряда Фурье в комплексной форме**,

$$s(t) = S_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{S}_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (4.28)$$

Амплитуда n -й гармоники S_n равна модулю комплексной амплитуды,

$$S_n = |\dot{S}_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (4.29)$$

а ее начальная фаза ψ_n – аргументу \dot{S}_n с противоположным знаком,

$$\psi_n = -\arg(\dot{S}_n) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & \text{при } a_n \geq 0, \\ \pm \pi + \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & \text{при } a_n < 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

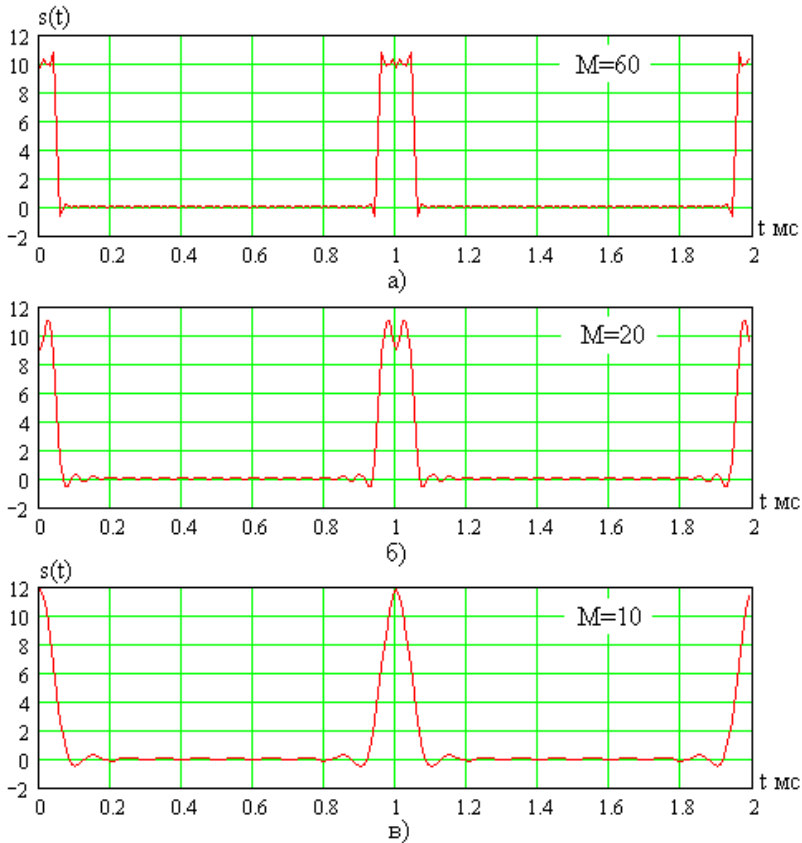


Рис. 4.5

Комплексная амплитуда гармоники позволяет суще-

ственно упростить расчеты спектров амплитуд и фаз за счет сокращения числа интегралов и с учетом того, что подынтегральное выражение с экспонентой часто интегрируется проще, чем с тригонометрической функцией.

Рассмотрим сигнал, показанный на рис. 4.2, тогда

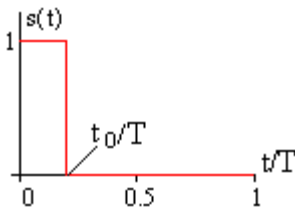
$$\begin{aligned} \dot{S}_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S e^{-jn\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{4S}{n\omega_1 T} \frac{e^{j\frac{n\omega_1 \tau}{2}} - e^{-j\frac{n\omega_1 \tau}{2}}}{2j} = \frac{4S}{n\omega_1 T} \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) = \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Как видно, в данном примере комплексная амплитуда является **действительной** величиной, что обусловлено формой сигнала на рис. 4.2. Спектры амплитуд и фаз совпадают с ранее полученными значениями.

4.6. Влияние формы сигнала на спектры амплитуд и фаз

Спектры амплитуд и фаз сигнала взаимно однозначно связаны с его формой, которая определяется формой импульсов и их длительностью на периоде повторения.

На рис. 4.6 показана последовательность прямоугольных импульсов $s(t)$ длительностью t_0 и с



амплитудой 1 на интервале периода T в нормированных координатах времени t/T . Для этого сигнала характерны крутые (с нулевой продолжительностью) фронт и срез импульса. Величину

Рис. 4.6

$$Q = \frac{T}{t_0} \quad (4.32)$$

называют **скважностью** импульсов. На рис. 4.7 приведены спектры амплитуд (рис. 4.7 а) и фаз (рис. 4.7 б) при $Q = 5$.

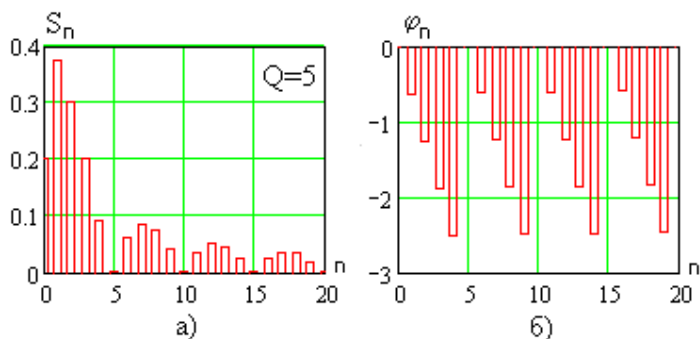


Рис. 4.7

На рис. 4.8 приведены зависимости при $Q = 10$.

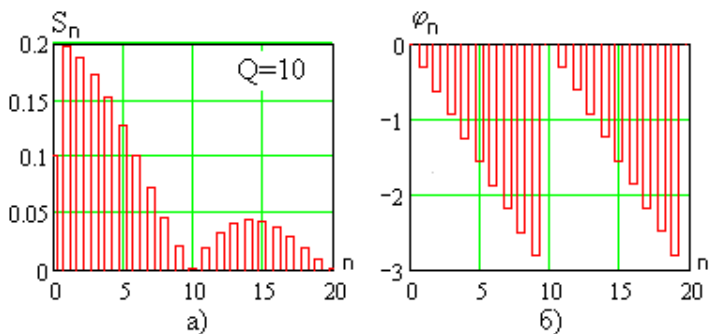


Рис. 4.8.

При фиксированном периоде повторения импульсов T увеличение скажности означает уменьшение длительности импульса t_0 , при этом согласно рис. 4.7 а и рис. 4.8 а, а также (4.20) амплитуды гармоник падают, спектр амплитуд становится более **равномерным**, положение нулей огибающей спектра амплитуд смещается в область более высоких частот (номеров гармоник).

С уменьшением длительности импульсов доля высших гармоник в спектре амплитуд повышается, короткие импульсы и крутые перепады их уровней создаются **высшими гармониками**.

Рассмотрим трапецеидальный импульс, программа исследование которого в среде MathCAD показана на рис. 4.9.

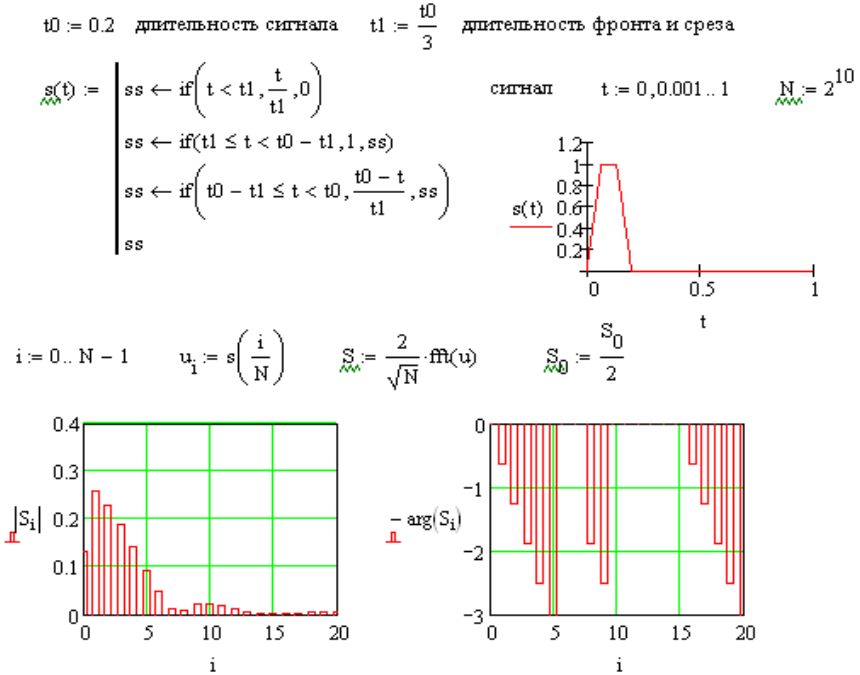


Рис. 4.9.

Спектральный анализ проводится с помощью стандартной процедуры спектрального анализа $\text{fft}(s)$. Она построена на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье (**БПФ**) и позволяет получить комплексные коэффициенты \dot{C}_n , с помощью которых комплексная амплитуда n -й гармоники определяется выражением

$$\dot{S}_n = \frac{2}{\sqrt{N}} \dot{C}_n. \quad (4.33)$$

Период T сигнала выбран равным 1, N – число отсчетов сигнала на периоде. Результаты расчета спектров амплитуд и фаз приведены в листинге программы на рис. 4.9 (повторите расчеты самостоятельно для различных параметров сигнала).

Как видно при сравнении графиков спектров амплитуд на рис. 4.7 и рис. 4.9, увеличение длительности фронта и среза импульса приводит к значительному ослаблению высших гармоник сигнала.

На рис. 4.10 показан пример программы расчета спектра амплитуд колоколообразного сигнала вида

$$s(t) = 1 \cdot \exp(-at^2), \quad (4.34)$$

для которого характерно наиболее плавное изменение значений во всем интервале времени.

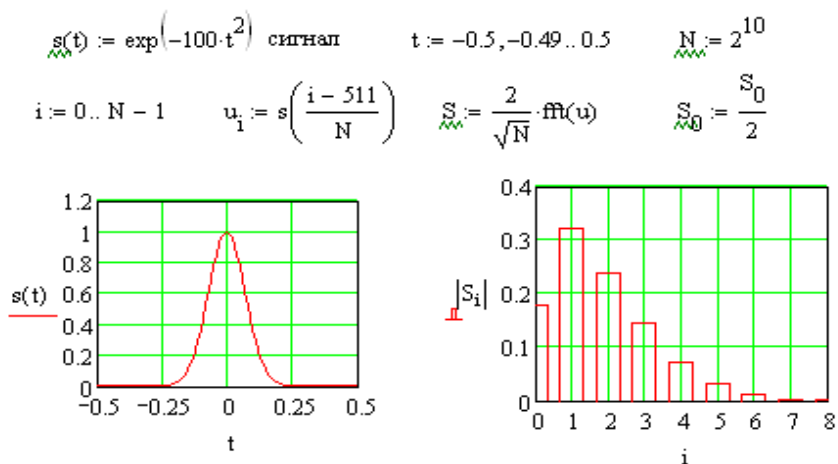


Рис. 4.10.

График сигнала и его спектр амплитуд показаны в листинге программы на рис. 4.10. Как видно, спектр «гладкого» сигнала сосредоточен в области нижних частот, высшие гармоники практически отсутствуют.

Полученные выводы подтверждают результаты синтеза прямоугольных импульсов по ограниченному числу M гармоник, например, показанные на рис. 4.5.

4.7. Свойства спектров сигналов

Свойства спектров сигналов часто формулируются в

виде теорем.

Спектральное преобразование сигнала **линейно**, то есть комплексная амплитуда суммы сигналов равна сумме комплексных амплитуд гармоник каждого из них. На практике особый интерес представляет **свойство (теорема) смещения** сигнала во времени. Ее можно сформулировать следующим образом.

Пусть заданный сигнал $s_1(t)$ имеет комплексные амплитуды гармоник \dot{S}_{1n} , тогда комплексные амплитуды гармоник \dot{S}_{2n} задержанного на интервал времени Δt сигнала $s_2(t) = s_1(t - \Delta t)$ равны

$$\dot{S}_{2n} = \dot{S}_{1n} e^{-jn\omega_1 \Delta t} . \quad (4.35)$$

Взяв модули левой и правой частей (4.35), получим

$$S_{2n} = S_{1n} , \quad (4.36)$$

то есть **спектр амплитуд не изменяется при задержке сигнала во времени**.

Вычислим аргументы обеих частей выражения (4.30),

$$\psi_{2n} = \psi_{1n} - n\omega_1 \Delta t , \quad (4.37)$$

то есть начальные фазы гармоник сигнала при временной задержке уменьшаются на величину $n\omega_1 \Delta t$, которая зависит от номера гармоники, периода сигнала (частоты его первой гармоники) и величины задержки Δt .

Для доказательства теоремы смещения запишем

$$\dot{S}_{2n} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s_2(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s_1(t - \Delta t) e^{-jn\omega_1 t} dt . \quad (4.38)$$

Проведем замену переменных $x = t - \Delta t$, тогда получим

$$\dot{S}_{2n} = \frac{2}{T} e^{-jn\omega_1 \Delta t} \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + T - \Delta t} s_1(x) e^{-jn\omega_1 x} dt = \dot{S}_{1n} e^{-jn\omega_1 \Delta t} . \quad (4.39)$$

На спектральные характеристики влияют **свойства симметрии** сигнала.

Рассмотрим **четные** функции времени, удовлетворяющие условию $s(t) = s(-t)$. В этом случае амплитуда квадратурной составляющей n -й гармоники равна нулю

$$b_n = 0, \quad (4.40)$$

комплексная амплитуда n -й гармоники \dot{S}_n является действительным числом,

$$\text{Im}(\dot{S}_n) = 0, \quad (4.41)$$

а начальная фаза равна 0 или π в зависимости от знака $\text{Re}(\dot{S}_n)$.

Для **нечетной** функции, удовлетворяющей условию $s(t) = -s(-t)$, амплитуда синфазной составляющей n -й гармоники равна нулю

$$a_n = 0, \quad (4.42)$$

комплексная амплитуда n -й гармоники \dot{S}_n является мнимым числом,

$$\text{Re}(\dot{S}_n) = 0, \quad (4.43)$$

а начальная фаза равна 0 или π в зависимости от знака $\text{Re}(\dot{S}_n)$.

Эти свойства иллюстрирует пример четного сигнала на рис. 4.2, для которого имеет место равенство (4.19). Его фазовый спектр со значениями 0 или π показан на рис. 4.3б.

Рассмотрим комплексные спектры двух сигналов $s_1(t)$ (рис. 4.11 а) и $s_2(t)$ (рис. 4.11 б), и их сумму $s_3(t)$ (рис. 4.11 в).

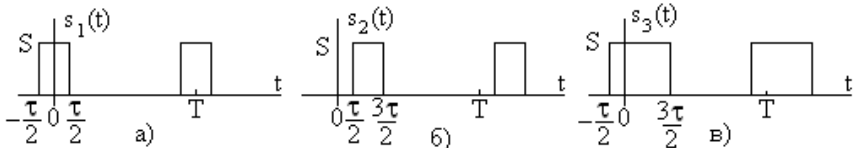


Рис. 4.11.

Сигнал $s_2(t)$ получен из $s_1(t)$ сдвигом во времени на

величину $\Delta t = \tau$, оба являются последовательностями прямоугольных импульсов длительностью импульса τ . Сигнал $s_3(t)$ оказывается последовательностью прямоугольных импульсов длительностью 2τ .

Комплексная амплитуда n -й гармоники $s_1(t)$ определена ранее (4.31) и равна

$$\dot{S}_{1n} = \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right). \quad (4.44)$$

По **теореме смещения** можно найти комплексную амплитуду n -й гармоники сигнала $s_2(t)$ в виде

$$\dot{S}_{2n} = \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \exp(-jn\omega_1\tau). \quad (4.45)$$

Тогда согласно **свойству линейности** комплексная амплитуда n -й гармоники сигнала $s_3(t)$ равна

$$\begin{aligned} \dot{S}_{3n} &= \dot{S}_{1n} + \dot{S}_{2n} = \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) + \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \exp(-jn\omega_1\tau) = \\ &= \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) [1 + \cos(n\omega_1\tau) - j\sin(n\omega_1\tau)] = \\ &= \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \left[2\cos^2\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) - j2\sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{2S}{n\pi} \sin(n\omega_1\tau) \cdot \exp\left(-j\frac{n\omega_1\tau}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

С другой стороны, при прямом вычислении (проведите расчеты самостоятельно) комплексная амплитуда n -й гармоники сигнала $s_3(t)$ равна

$$\dot{S}_{1n} = \frac{2S}{n\pi} \sin(n\omega_1\tau) \cdot \exp(-j\frac{n\omega_1\tau}{2}), \quad (4.47)$$

что полностью совпадает с (4.46).

4.8. Мощность периодического сигнала

Пусть имеется сигнал $s(t)$ (ток или напряжение) в сопротивлении $R = 1$ Ом, тогда средняя мощность сигнала равна

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt. \quad (4.48)$$

Эту же величину можно выразить через гармоники сигнала с помощью **равенства (теоремы) Парсеваля** в виде

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt = S_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^2}{2}, \quad (4.49)$$

то есть мощность переменного сигнала равна сумме мощностей его постоянной составляющей и всех гармоник.

С помощью спектральных характеристик можно определить действующее значение S_δ сигнала в виде

$$S_\delta = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} = \sqrt{S_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^2}{2}}. \quad (4.50)$$

4.9. Ширина спектра

Как видно по графикам спектров амплитуд рассмотренных немодулированных сигналов, в целом наблюдается тенденция уменьшения амплитуд гармоник с ростом их номера (частоты). Графики на рис. 4.5 показывают, что форма сигнала определяется сравнительно небольшим числом гармоник. Все это свидетельствует о том, что для представления (даже достаточно точного) сигнала **необходимо учитывать ограниченное число гармоник, которые занимают конечный интервал частот.**

Ширина спектра сигнала – это интервал частот, в котором сосредоточена заданная доля $\alpha = 0,9 \div 0,99$ полной мощности сигнала.

Мощность сигнала определяется выражением (4.39). Для рассматриваемых видеосигналов наиболее интенсивные гармоники имеют номера от 1 до некоторой величины N , при этом их суммарная мощность равна

$$P(N) = S_0^2 + \sum_{n=1}^N \frac{S_n^2}{2}. \quad (4.51)$$

Как видно, с ростом N мощность $P(N)$ увеличивается, и при $N \rightarrow \infty$ стремится к полной мощности P .

Тогда можно определить минимальное число гармоник N , при котором мощность $P(N)$ будет не меньше величины αP , с помощью выражения

$$S_0^2 + \sum_{n=1}^N \frac{S_n^2}{2} \geq \alpha P. \quad (4.52)$$

В результате можно найти ширину спектра $\Delta\omega$ в виде

$$\Delta\omega = N\omega_1 = N \frac{2\pi}{T}. \quad (4.53)$$

Рассмотрим последовательность прямоугольных импульсов, показанную на рис. 4.2 со спектром амплитуд, показанном на рис. 4.3 а. (скважность импульсов $Q = T/\tau = 10$). Зависимость нормированной мощности $P(N)/P$ от числа учитываемых гармоник показана на рис. 4.12. Как видно, функция $P(N)$ является **неубывающей** и достигает уровня $\alpha = 0,9$ при $N = 7$ ($P(6)/P = 0,878$, $P(7)/P = 0,902$), тогда ширина спектра сигнала определяется выражением (4.44).

Этот же график в области значений от 0,9 до 1 показан на рис. 4.13. С ростом N кривая очень медленно приближается к 1 и достигает значения 0,99 уже при $N = 75$.

Ширина спектра сильно зависит от выбранной величины α .

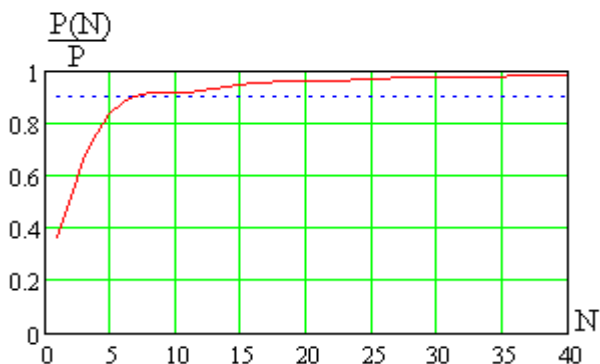


Рис. 4.12

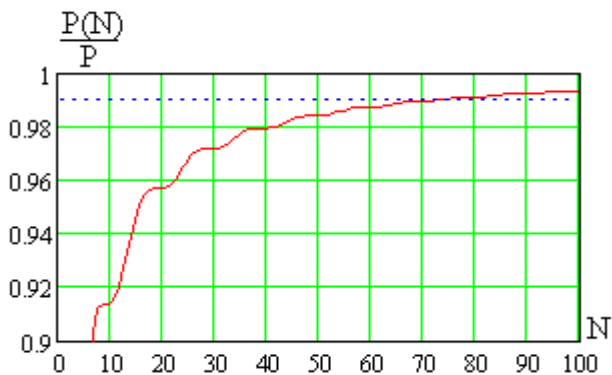


Рис. 4.13

В инженерной практике рассмотренный расчет ширины спектра проводится редко, а используется ее **инженерная оценка**. Для импульсных сигналов с длительностью τ (например, рис. 4.2) ширина спектра \mathcal{H} определяется выражением

$$\mathcal{H} = (1 \div 3) \frac{2\pi}{\tau} \text{ (рад/с)} \quad \text{или} \quad \mathcal{H} = (1 \div 3) \frac{1}{\tau} \text{ (Гц)} \quad (4.54)$$

(сравните эти величины со значениями нулей огибающей спектра амплитуд).

Множитель от 1 до 3 косвенно характеризует долю мощности сигнала, заключенную в полосе пропускания (единица

примерно соответствует $\alpha = 0,8 \div 0,9$, а тройка – величине $\alpha = 0,96 \div 0,98$, эти значения зависят от формы импульса).

Оценки ширины спектра можно выразить через число гармоник,

$$Ш = (1 \div 3)\omega_1 \frac{T}{\tau} = \omega_1 N, \quad (4.55)$$

где N – требуемое число гармоник, равное

$$N = (1 \div 3) \frac{T}{\tau} = (1 \div 3) Q. \quad (4.56)$$

На практике чаще всего используются соотношения с единичным множителем вида

$$Ш = \frac{2\pi}{\tau} \text{ (рад/с) или } Ш = \frac{1}{\tau} \text{ (Гц)}, \quad (4.57)$$

$$N = \frac{T}{\tau} = Q. \quad (4.58)$$

В рассмотренном примере сигнала на рис. 4.2 скважность $Q = 10$ и для обеспечения 90% мощности необходимо учитывать $N = 7$ гармоник (рис. 4.12), по оценке (4.58) требуется учитывать 10 гармоник.

4.10. Задания для самостоятельного решения

Задание 4.1. Определите и постройте графики спектров амплитуд и фаз сигналов вида:

$$u(t) = 2 \cos(1000t - 30^\circ),$$

$$u(t) = 2 \sin(1000t - 30^\circ),$$

$$u(t) = 5 \cos(1000t - 30^\circ) + 10 \cos(2000t + 20^\circ),$$

$$u(t) = 5 \cos(1000t - 30^\circ) + 10 \cos(500t + 20^\circ),$$

$$u(t) = 5 \cos(1000t - 30^\circ) + 10 \cos(3000t + 20^\circ).$$

Задание 4.2. Определите спектры амплитуд и фаз сигналов, показанных на рис. 4.14, постройте их графики. Проведите расчет ширины спектра при $\alpha = 0,95$, $T/\tau = 5$ и $T/\tau = 20$, сравните полученные результаты.

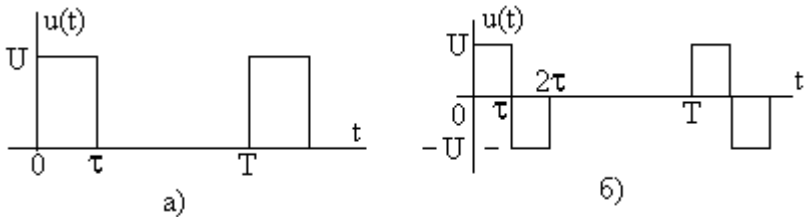


Рис. 4.14

Задание 4.3. С помощью **теоремы смещения** проведите расчет спектров амплитуд и фаз сигнала, показанного на рис. 4.14 а, воспользовавшись результатами, полученными для сигнала на рис.4.2.

Задание 4.4. Определите спектры амплитуд и фаз сигнала, показанного на рис.4.15, постройте их графики. Сравните спектр амплитуд со спектром гармонического сигнала, проанализируйте результаты.

Задание 4.5. Вычислите ширину спектра сигнала при $\alpha = 0,95$. Чем обусловлены наблюдаемые различия в ширине спектра для сигналов, показанных на рис. 4.14 а и рис. 4.15? Как в полученных результатах проявляются свойства симметрии сигнала?

Задание 4.6. Определите спектры амплитуд и фаз сигналов, показанного на рис. 4.16, постройте их графики.

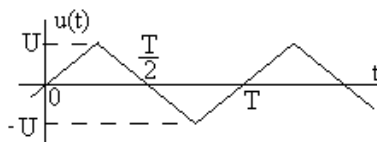


Рис. 4.15

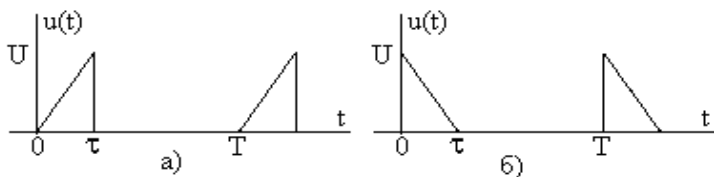


Рис. 4.16

Задание 4.7. Определите спектры амплитуд и фаз сигнала, показанного на рис. 4.17, постройте их графики.

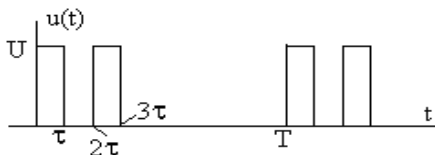


Рис. 4.17

Проведите тот же расчет, представив сигнал на рис. 4.17 в виде суммы двух импульсных последовательностей, показанных на рис. 4.18, и используя свойство линейности.

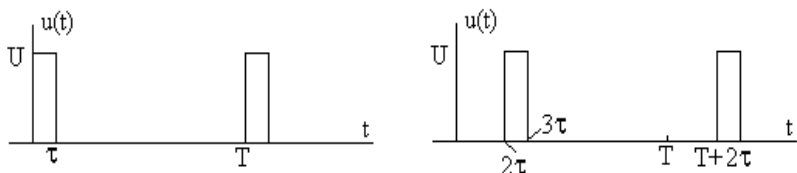


Рис. 4.18

5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

5.1. Спектры непериодических сигналов

Непериодические сигналы можно разделить на два класса:

- одиночные импульсные сигналы (например, рис. 5.1 а);
- непрерывные случайные (шумовые) сигналы (например, рис. 5.1 б).

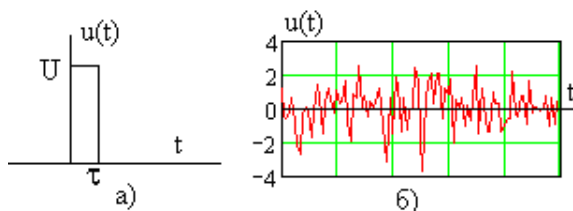


Рис. 5.1

Спектральный анализ случайных процессов проводится специфическими методами и не рассматривается в настоящем пособии. В дальнейшем будут рассматриваться только **одиночные сигналы**.

Одиночный импульсный сигнал или пачку импульсов можно рассматривать как периодический процесс, но с бесконечным периодом $T \rightarrow \infty$. В этом случае для комплексной амплитуды n -й гармоники получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \dot{S}_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

то есть она является **бесконечно малой величиной**. Из выражения для частоты первой гармоники ω_1 , которая равна интервалу частот между соседними гармониками в спектре сигнала, получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \omega_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0, \quad (5.2)$$

то есть спектр непериодического сигнала является **сплошным** с нулевым интервалом частот между соседними гармониками.

Спектры амплитуд и фаз непериодического сигнала являются сплошными, с нулевым интервалом между соседними гармониками с бесконечно малыми амплитудами.

Таким образом, ряд Фурье **не пригоден** для спектрального анализа непериодических сигналов. В этом случае используют **преобразование (интеграл) Фурье**. Прямое преобразование Фурье имеет вид

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (5.3)$$

а обратное преобразование соответственно

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.4)$$

Функцию $F(j\omega)$ называют **полной комплексной спектральной плотностью** непериодического сигнала $s(t)$. Можно показать, что

$$F(j\omega) = 2\pi \frac{d\dot{S}(\omega)}{d\omega}, \quad (5.5)$$

где $d\dot{S}(\omega)$ – бесконечно малая амплитуда гармоники на частоте ω (при сплошном спектре использовать номер гармоники нельзя, так как он равен бесконечности), а $d\omega$ – бесконечно малый интервал частот между соседними гармониками. Это выражение типично для физического определения плотности.

Согласно (5.3) или (5.5) спектральная плотность измеряется в единицах сигнала, умноженных на секунду (или деленных на единицу частоты). Она является комплексной функцией частоты и может быть представлена в виде

$$F(j\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega) = F(\omega) \exp[j\psi(\omega)]. \quad (5.6)$$

Модуль комплексной спектральной плотности $F(j\omega)$,

равный

$$F(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{F_1^2(\omega) + F_2^2(\omega)} \quad (5.7)$$

называют **спектральной плотностью амплитуд сигнала**. Она измеряется в единицах сигнала, умноженных на секунду (или деленных на единицу частоты). Можно использовать термин «спектр амплитуд», не забывая, что речь идет о спектральной плотности.

Спектр фаз непериодического сигнала $\psi(\omega)$ определяется выражением

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{F_2(\omega)}{F_1(\omega)}\right) & \text{при } F_1(\omega) \geq 0, \\ \pm \pi + \arctg\left(\frac{F_2(\omega)}{F_1(\omega)}\right) & \text{при } F_1(\omega) < 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Он не является «плотностью», так как начальные фазы гармоник с бесконечно малыми амплитудами имеют **конечные** значения и измеряются в радианах или градусах.

Спектры амплитуд и фаз полностью определяют комплексную спектральную плотность сигнала, а значит в соответствии с обратным преобразованием Фурье и сам исходный сигнал $s(t)$.

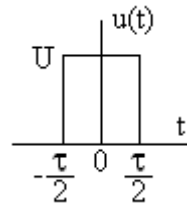


Рис. 5.2

В качестве примера рассмотрим одиночный прямоугольный импульс длительностью τ , показанный на рис. 5.2. Полная комплексная спектральная плотность $F(j\omega)$ равна

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U e^{-j\omega t} dt = \frac{2U}{\omega} \frac{e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{2j} = \frac{2U}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \quad (5.9)$$

Ее модуль представляет собой спектральную плотность амплитуд $F(\omega)$, равную

$$F(\omega) = \frac{2U}{\omega} \left| \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|, \quad (5.10)$$

а спектр фаз $\psi(\omega)$ имеет вид

$$\psi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \geq 0, \\ \pi & \text{при } \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) < 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Графики спектров амплитуд и фаз одиночного прямоугольного импульса с амплитудой $U = 1 \text{ В}$ и длительностью $\tau = 10 \text{ мс}$ показаны на рис. 5.3.

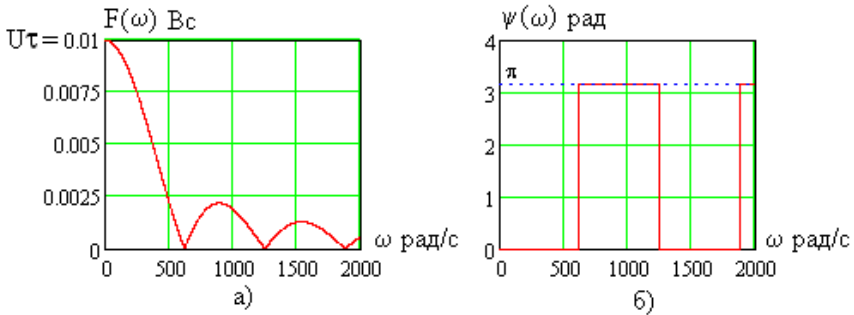


Рис. 5.3

Максимум спектральной плотности амплитуд имеет место при $\omega = 0$ и равен $U\tau$ (получите этот результат самостоятельно, используя известный их курса математического анализа первый замечательный предел). Сравнивая (7.23) и (5.10), нетрудно убедиться, что форма спектральной плотности амплитуд одиночного прямоугольного импульса совпадает с формой огибающей спектра амплитуд периодической последовательности тех же импульсов.

Спектральные функции обладают следующими свойствами:

- спектральная плотность амплитуд **четная** функция частоты $F(\omega) = F(-\omega)$;

- действительная часть комплексной спектральной плотности **четная** функция частоты;

– мнимая часть комплексной спектральной плотности **нечетная** функция частоты;

– спектр фаз **нечетная** функция частоты $\psi(\omega) = -\psi(\omega)$.

Так как отрицательные частоты не имеют физического смысла, то спектральные характеристики необходимо рассматривать только в положительной области частот. В теории сигналов в качестве удобной математической абстракции используются и отрицательные частоты.

5.2. Энергетические характеристики

Непериодические сигналы характеризуются полной энергией, равной

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt, \quad (5.12)$$

их средняя мощность при бесконечном периоде равна нулю.

В частотной области энергия сигнала определяется выражением

$$W = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F^2(\omega) d\omega, \quad (5.13)$$

которое называют теоремой Релея или равенством Парсеваля. Как видно, энергия сигнала определяется его спектральной плотностью амплитуд и не зависит от фазового спектра.

Функцию $G(\omega)$ называют спектральной плотностью энергии сигнала или его **энергетическим спектром**,

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot F^2(\omega), \quad (5.14)$$

при этом энергия сигнала будет равна

$$W = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (5.15)$$

Постройте и проанализируйте график энергетического спектра сигнала на рис. 5.2 самостоятельно.

5.3. Ширина спектра непериодического сигнала

Определим ширину спектра Π как **частотный диапазон, в котором сосредоточена заданная доля $\alpha = 0,9 \div 0,99$ энергии сигнала.**

Рассмотрим энергию $w(\Pi)$ сигнала в полосе частот от 0 до Π , равную

$$w(\Pi) = \int_0^{\Pi} G(\omega) d\omega. \quad (5.16)$$

Зависимость нормированной энергии $w(\Pi)/W$ от Π для сигнала на рис. 5.2 при $\tau = 10$ мс показана на рис. 5.4, а его энергетический спектр – на рис. 5.5.

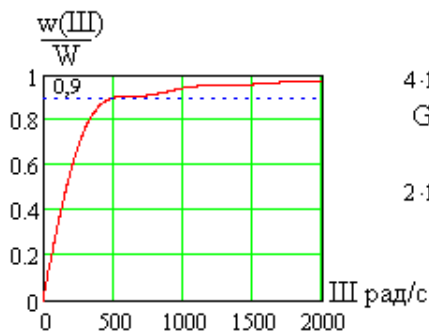


Рис. 5.4

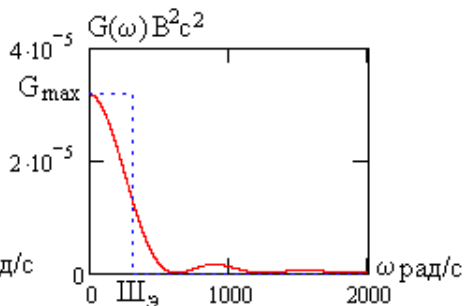


Рис. 5.5

Из графика на рис. 5.4 следует, что при заданной доле энергии $\alpha = 0,9$ ширина спектра равна 512 рад/с. С ростом величины α ширина спектра значительно возрастает, как и в случае периодических сигналов.

Можно использовать независимое от α определение **эффективной ширины спектра $\Pi_{\text{э}}$** в виде

$$\Pi_{\text{э}} = \frac{W}{G_{\text{max}}}, \quad (5.17)$$

где G_{\max} – максимальное значение энергетического спектра (рис. 5.5).

Величина $Ш_{\ominus}$ равна ширине прямоугольника, показанного пунктиром на рис. 5.5, высота которого равна G_{\max} . Для одиночного прямоугольного импульса вида рис. 5.2 энергия сигнала согласно (5.12) равна

$$W = U^2 \tau, \quad (5.18)$$

энергетический спектр имеет вид

$$G(\omega) = \frac{4U^2}{\pi\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \quad (5.19)$$

а его максимум равен

$$G_{\max} = \frac{U^2 \tau^2}{\pi}, \quad (5.20)$$

тогда для эффективной ширины спектра получим

$$Ш_{\ominus} = \frac{W}{G_{\max}} = \frac{\pi}{\tau}. \quad (5.21)$$

В рассматриваемом случае при $\tau = 10\text{мс}$ эффективная ширина спектра равна $Ш_{\ominus} = 314\text{рад/с}$. Ранее была определена полоса частот $Ш$, в которой сосредоточено 90% энергии сигнала, существенно большая $Ш_{\ominus}$ и равная 512 рад/с.

На практике используется **инженерная оценка ширины спектра** одиночных импульсных сигналов с длительностью τ (например, рис. 5.2) вида

$$Ш = (1 \div 3) \frac{2\pi}{\tau} (\text{рад/с}) \quad \text{или} \quad Ш = (1 \div 3) \frac{1}{\tau} (\text{Гц}) \quad (5.22)$$

Те же оценки использовались и для периодических сигналов. Чаще всего используются соотношения с единичным множителем вида

$$Ш = \frac{2\pi}{\tau} (\text{рад/с}) \quad \text{или} \quad Ш = \frac{1}{\tau} (\text{Гц}), \quad (5.23)$$

Эта оценка при $\tau = 10\text{мс}$ дает значение $\text{Ш} = 628\text{рад/с}$.

5.4. Спектральные характеристики экспоненциального импульса

Рассмотрим экспоненциальный одиночный импульс $s(t)$

$$s(t) = \begin{cases} Se^{-\beta t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (5.24)$$



Рис. 5.6

график этой функции при $S = 10$ и $\beta = 1000 \text{ 1/с}$ показан на рис. 5.6. Определим полную комплексную спектральную плотность

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} Se^{-(\beta+j\omega)t} dt = \frac{S}{\beta + j\omega}. \quad (5.25)$$

При этом спектральная плотность амплитуд равна

$$F(\omega) = \frac{S}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}, \quad (5.26)$$

а энергетический спектр определяется выражением

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{S^2}{\beta^2 + \omega^2}. \quad (5.26)$$

Согласно (5.16), функция $w(\text{Ш})$ имеет вид

$$w(\text{Ш}) = \int_0^{\text{Ш}} G(\omega) d\omega = \frac{S^2}{\pi} \int_0^{\text{Ш}} \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{S^2}{\pi\beta} \text{arctg}\left(\frac{\text{Ш}}{\beta}\right). \quad (5.27)$$

На рис. 5.7 а показана зависимость $w(\text{Ш})$ при $S = 10\text{В}$ и $\beta = 1000\text{1/с}$.

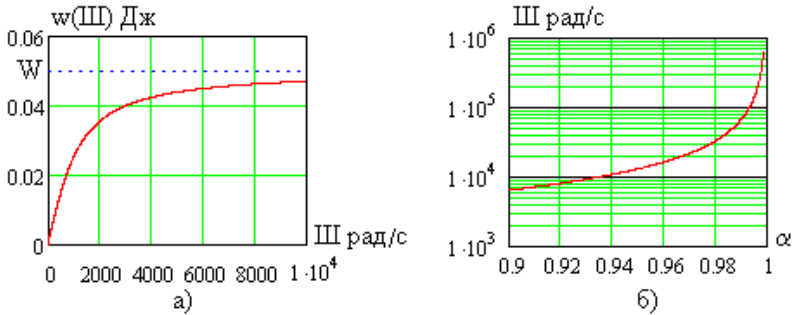


Рис.5.7

Полная энергия сигнала W равна $w(\infty)$,

$$W = \frac{S^2}{2\beta}, \quad (5.28)$$

тогда для ширины спектра получим

$$\mathcal{Ш} = \beta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right). \quad (5.29)$$

Зависимость ширины спектра от параметра α при $\beta = 10001/\text{с}$ показана на рис. 5.7 б. Ширина спектра будет равна β при $\alpha = 0,5$, то есть в полосе частот $\mathcal{Ш} = \beta$ сосредоточено 50% энергии сигнала. При $\alpha \geq 0,9$ ширина спектра существенно больше β и стремится к бесконечности при $\alpha \rightarrow 1$. С ростом параметра сигнала β сигнал затухает быстрее (импульс становится короче) и ширина спектра возрастает.

5.5. Свойства спектров непериодических сигналов

Спектральное преобразование непериодического сигнала **линейно**, то есть комплексная спектральная плотность суммы сигналов равна сумме спектральных плотностей каждого из суммируемых сигналов.

Теорему смещения можно сформулировать следующим

образом. Пусть заданный сигнал $s_1(t)$ имеет комплексную спектральную плотность $F_1(j\omega)$, тогда комплексная спектральная плотность $F_2(j\omega)$ задержанного на интервал времени Δt сигнала $s_2(t) = s_1(t - \Delta t)$ равна

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega)e^{-j\omega\Delta t}. \quad (5.30)$$

Взяв модули левой и правой частей (5.30), получим

$$F_2(\omega) = F_1(\omega), \quad (5.31)$$

то есть **спектральная плотность амплитуд не изменяется при временной задержке сигнала.**

Вычислив аргументы обеих частей выражения (5.30), получим соотношения для спектров фаз в виде

$$\psi_2(\omega) = \psi_1(\omega) - \omega\Delta t. \quad (5.32)$$

Аналогичные результаты имели место для периодических сигналов.

Рассмотрим влияние симметрии сигнала на свойства спектральных характеристик. Для **четного** сигнала $s(t) = s(-t)$ комплексная спектральная плотность $F(j\omega)$ является **действительной функцией** частоты, при этом в (5.6) $F_2(\omega) = 0$, а фазовый спектр $\psi(\omega)$ принимает значения 0 или π .

Для **нечетного** сигнала $s(t) = -s(-t)$ комплексная спектральная плотность $F(j\omega)$ является **мнимой функцией** частоты, $F_1(\omega) = 0$, а фазовый спектр принимает значения $\pm \pi/2$.

5.6. Задания для самостоятельного решения

Задание 5.1. Определите и постройте графики спектров амплитуд и фаз сигналов, показанных на рис. 5.8.

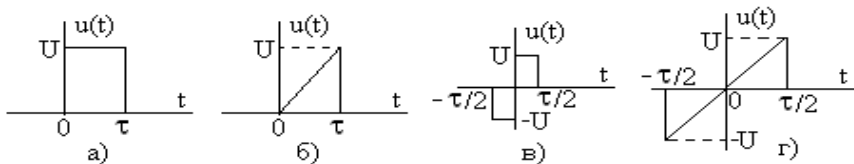


Рис. 5.8

Задание 5.2. Найдите спектры амплитуд и фаз сигналов, показанных на рис. 5.9, постройте их графики. Сравните результаты расчета спектров амплитуд сигналов на рис. 5.8 и рис. 5.9.

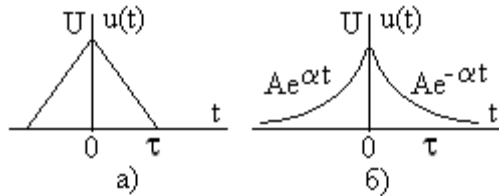


Рис. 5.9.

Задание 5.3. Вычислите полную комплексную спектральную плотность сигнала на рис. 5.8 а, используя результаты, полученные для сигнала на рис. 5.2 и теорему смещения.

Задание 5.4. Определите комплексную спектральную плотность пачки из двух импульсов, показанных на рис. 5.10, используя результаты, полученные для одиночного импульса на рис. 5.2 и теорему смещения.

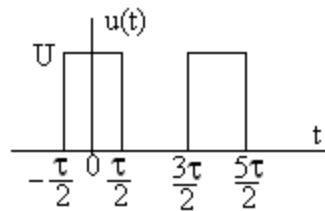


Рис. 5.10

Постройте графики спектров амплитуд и фаз.

Задание 5.5. Определите комплексную спектральную плотность пачки из двух импульсов, показанных на рис. 5.11, используя результаты, полученные для одиночного импульса на рис. 5.2 и теорему смещения. Проанализируйте графики спектра амплитуд для различных значений временной задержки t_0 второго импульса.

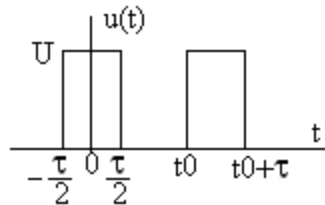


Рис. 5.11

6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ

6.1. Анализ цепей и устройств

Частотные характеристики электрических цепей и электронных устройств наглядно характеризуют их свойства в выбранном диапазоне частот.

Применительно к частотным фильтрам, усилителям и преобразователям сигналов чаще всего используется их АЧХ, примеры рассмотрены в главе 6. На рис. 6.1 приведена АЧХ $K(\Delta f)$ полосового фильтра, $\Delta f = f - f_0$ – абсолютная рас-

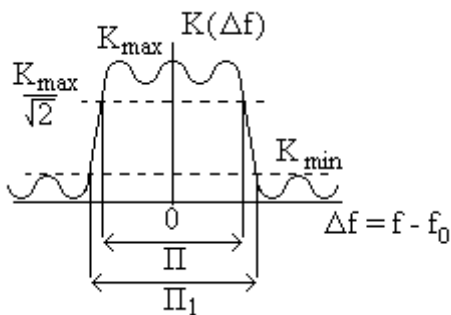


Рис. 6.1

стройка, f_0 – центральная частота (частота настройки фильтра), Π – полоса пропускания, Π_1 – полоса на уровне минимального коэффициента передачи K_{\min} , а K_{\max} – максимальное значение коэффициента передачи.

Как видно, АЧХ может иметь неравномерность в полосах пропускания и удержания. Приведенное описание наглядно показывает, как фильтр пропускает или задерживает сигнал на соответствующих частотах, позволяет определить дополнительные числовые параметры фильтра, например, коэффициент прямоугольности.

На рис. 6.2 показана частотная характеристика усилителя звуковых сигналов. Она должна быть достаточно равномерна в рабочей полосе частот от f_{\min} до f_{\max} (кривая а на рис. 6.2). При усилении речевых сигналов $f_{\min} = 300$ Гц и $f_{\max} = 3400$ Гц, а для высококачественных музыкальных фонограмм соответственно $f_{\min} = 20$ Гц и $f_{\max} = 20$ кГц. Органами регулировки

тембра усилителя пользователь может искажать АЧХ усилителя, повышая усиление на нижних и верхних частотах (кривая б на рис. 6.2). В современных системах возможно изменение формы АЧХ на нескольких частотах с помощью устройства, называемого «эквалайзером», при этом форма АЧХ может отображаться на встроенном дисплее стереосистемы.

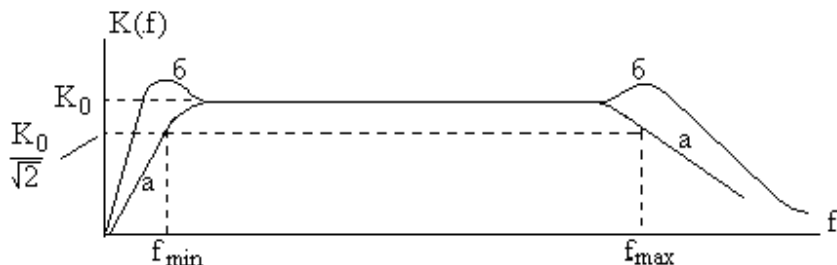


Рис. 6.2

При усилении звуковых сигналов форма ФЧХ существенного значения не имеет, так как человеческое ухо реагирует на звук энергетически, не учитывая тонкой структуры сигнала. Если же необходимо усиливать или фильтровать сигналы сложной структуры (например, телевизионные), то к ФЧХ предъявляются жесткие требования по прямолинейности, что обеспечивается специальными достаточно сложными устройствами – фазовыми корректорами.

6.2. Синтез цепей

При проектировании устройств обработки сигналов, прежде всего частотных фильтров, часто возникает задача их реализации с заданными АЧХ и, при необходимости, ФЧХ. Задание на синтез может определяться областью, в которую должна вписаться АЧХ, как показано на рис. 6.3.

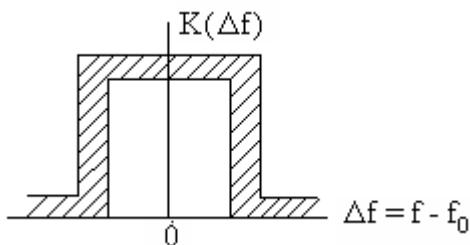


Рис. 6.3

Синтез цепей с заданными частотными свойствами является достаточно сложной и трудоемкой задачей, требующей применения вычислительной техники или приведенных в литературе специальных таблиц.

Сравнительно простые частотные фильтры можно синтезировать, например, с помощью программы MicroCAP.

6.3. Спектральный анализ сигналов

Анализ спектра сигнала позволяет формулировать требования к частотным характеристикам устройств его обработки или выбрать для данного сигнала подходящее типовое устройство.

Например, пусть необходимо подобрать электронный осциллограф для исследования импульсных сигналов длительностью $\tau = 1 \text{ мкс}$. Ширина спектра сигнала равна $\Delta f = 1/\tau = 1 \text{ МГц}$, следовательно полоса пропускания входного усилителя осциллографа должна быть не менее нескольких мегагерц.

Для передачи по каналу связи телевизионного видеосигнала с шириной спектра 6,5 МГц необходимо использовать коаксиальный кабель со значительно большей полосой пропускания, а двухпроводная телефонная линия связи для этих целей не подойдет, так как ее полоса пропускания значительно меньше 6,5 МГц.

При проектировании радиоприемных устройств знание формы спектра принимаемого сигнала позволяет реализовать «согласованный фильтр», который должен пропускать сигнал в области его наиболее интенсивных спектральных компонент.

Измерение спектра наблюдаемого сигнала или отдель-

ных его составляющих может быть необходимо при диагностике устройства, порождающего сигнал (например, двигателя автомобиля или самолета). По спектру речевого сигнала может проводиться идентификацию говорящего. Можно предложить и множество других вариантов применения спектрального анализа сигналов в технике, биомедицине и других областях.

В настоящее время широко применяется **цифровая обработка** различных сигналов. Она осуществляется на основе аналого-цифровых преобразователей сигналов (АЦП), цифровых вычислительных систем и цифро-аналогового преобразования (ЦАП) результата обработки. Структурная схема устройства цифровой обработки сигнала показана на рис. 6.4.

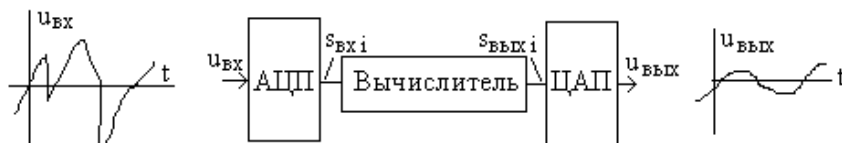


Рис. 6.4.

Входной обрабатываемый сигнал u_{BX} поступает на АЦП, который производит **квантование** (дискретизацию) сигнала по времени и уровню в моменты появления внутренних (или внешних) тактовых импульсов с частотой f_{KB} . В результате входной аналоговый (непрерывный во времени и по уровню) сигнал представляется дискретной последовательностью цифровых отсчетов $s_{BX i}$, i – номер текущего отсчета, поступающих на вычислитель с частотой f_{KB} .

Частота квантования f_{KB} выбирается в два раза больше **ширины спектра сигнала** в соответствии с известной в радиотехнике теоремой Котельникова (как видно, и в этом случае необходимы спектральные представления).

Вычислитель производит необходимую обработку (например, фильтрацию) поступающих отсчетов $s_{BX i}$ и формирует выходные отсчеты $s_{ВЫХ i}$, которые поступают в ЦАП, на

выходе которого появляется выходной аналоговый сигнал $u_{\text{ВЫХ}}$. При проектировании алгоритма обработки необходимо определять реализуемые им частотные характеристики. Рассмотренные преобразования сигнала проводятся, например, в звуковой карте (плате) персональной ЭВМ.

Результаты цифровой обработки могут использоваться и в цифровой форме (при этом в ЦАП необходимость отсутствует). Примером может служить спектральный анализ сигнала по поступившей последовательности (выборке) N отсчетов. Он проводится с помощью цифрового алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) и результатом вычисления являются значения амплитуд (а при необходимости и начальных фаз) гармоник принятой реализации сигнала.

В современных музыкальных центрах и ПЭВМ при проигрывании фонограммы на экран выдается спектр амплитуд воспроизводимой реализации сигнала, после поступления следующей реализации из N отсчетов процесс повторяется и выводится новая спектрограмма. Результаты спектрального анализа используются для создания цветомузыкальных эффектов.

Для реализации цифровой обработки сигналов в реальном времени необходимы быстродействующие вычислители. Для этих целей электронная промышленность выпускает специальные **сигнальные процессоры**.

Спектральный анализ как **встроенные функции** заложен в целом ряде универсальных математических (MathCAD) и моделирующих (MicroCAP) программ, что свидетельствует о его **высокой практической значимости в инженерной практике**. Они будут рассмотрены в параграфе 6.5.

6.4. Прохождение сложного сигнала через линейную цепь

В теории электрических цепей разработаны мощные методы анализа воздействия гармонического сигнала на линейную цепь (метод комплексных амплитуд).

Сложный сигнал можно представить в виде суммы гармоник и тогда имеется возможность на основе принципа наложения рассматривать воздействие на цепь каждой гармоники в отдельности с последующим сложением результатов (комплексных амплитуд).

Прохождение через цепь гармонического сигнала описывается комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(j\omega)$.

Для комплексной амплитуды n -й гармоники \dot{U}_{2n} **периодического** сигнала $u_2(t)$ на выходе цепи получим

$$\dot{U}_{2n} = \dot{K}(j\omega)\dot{U}_{1n}, \quad (6.1)$$

где \dot{U}_{1n} – комплексная амплитуда n -й гармоники входного сигнала $u_1(t)$.

Для непериодического сигнала комплексная спектральная плотность $F_2(j\omega)$ выходного сигнала $u_2(t)$ равна

$$F_2(j\omega) = \dot{K}(j\omega)F_1(j\omega), \quad (6.2)$$

– где $F_1(j\omega)$ – сигнала комплексная спектральная плотность входного сигнала $u_1(t)$.

Рассмотрим четырехполюсник на рис. 6.5 а при воздействии периодического сигнала, показанного на рис. 6.5 б.

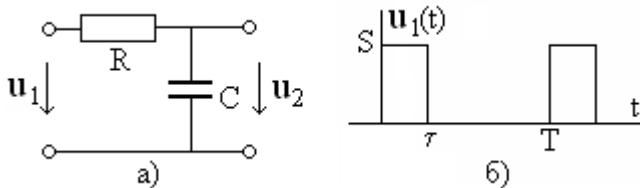


Рис. 6.5

Комплексный коэффициент передачи цепи рис. 6.5а равен

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (6.3)$$

Комплексная амплитуда n -й гармоники сигнала на рис.

6.5 б определяется выражением (получите эти формулы самостоятельно)

$$U_{1n} = \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \exp\left(j\frac{n\omega_1\tau}{2}\right), \quad (6.4)$$

тогда для комплексной амплитуды n -й гармоники выходного сигнала получим

$$U_{2n} = \frac{2S}{n\pi} \cdot \frac{\exp\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)}{1 + jn\omega_1RC} \cdot \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right). \quad (6.5)$$

Рассмотрим пример расчета при $S = 10\text{В}$, $T = 10^{-3}\text{с}$, $\tau = T/5$ и $RC = 10^{-4}\text{с}$. На рис. 6.6 показана программа расчета на языке MathCAD (повторите расчеты самостоятельно) при $RC = 10^{-4}$.

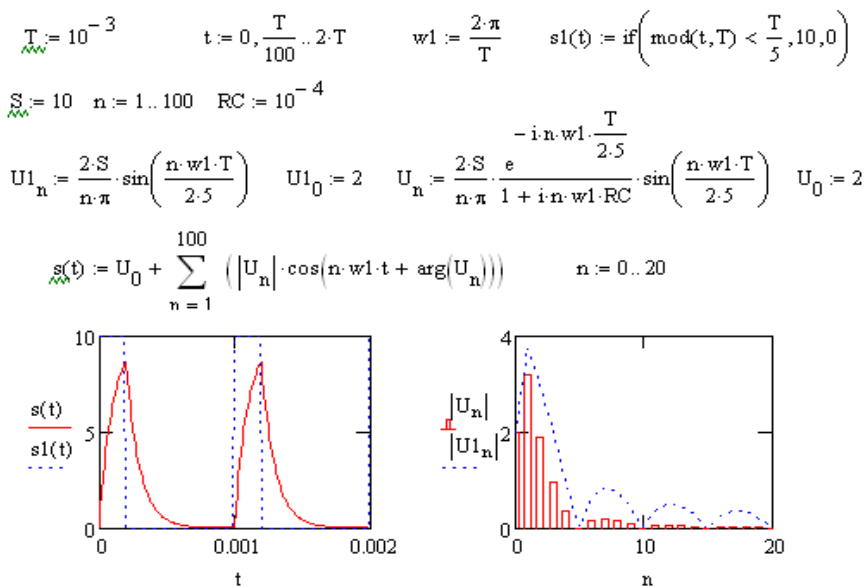


Рис. 6.6

На рис. 6.7 представлены результаты расчета выходного

сигнала при малом $RC = 10^{-5}$ с, на рис. 6.7 а приведены временные диаграммы, а на рис. 6.7 б - спектры сигналов. Пунктирные линии соответствуют входному сигналу, а сплошные – выходному.

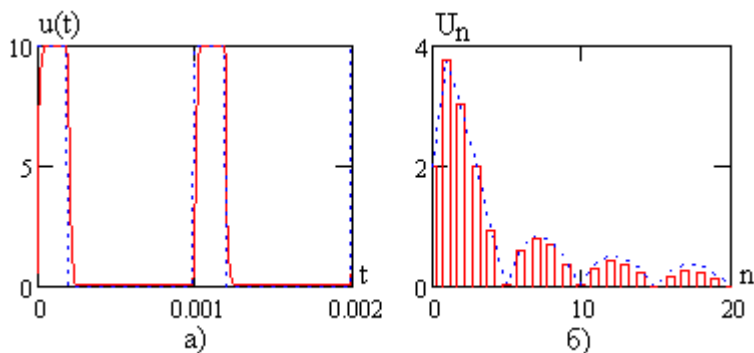


Рис. 6.7

Цепь на рис. 6.5 а является фильтром нижних частот, его полоса пропускания Π равна

$$\Pi = \frac{1}{RC}. \quad (6.6)$$

Как видно, с ростом произведения RC полоса пропускания фильтра уменьшается, подавляются высшие гармоники спектра сигнала, что приводит к «затягиванию» его фронта и среза и сглаживанию импульсов (проведите анализ самостоятельно).

6.5. Моделирование сигналов и цепей

Как уже отмечалось, в современных математических пакетах программ имеются встроенные функции спектрального анализа выборок отсчетов $s_i, i = \overline{1, N}$, N - объем выборки.

В программе MathCAD используются следующие спектральные функции.

Функция $fft(s)$ возвращает массив коэффициентов быстрого преобразования Фурье (БПФ) от заданной выборки объемом N отсчетов анализируемой функции $s_i, i = \overline{0, N-1}$ при условии, что

$$N = 2^n, \quad (6.7)$$

n – целое число. Результатом является массив комплексных чисел $V_n, n = \overline{0, N/2}$ (всего $N/2 + 1$ элементов), равных

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} s_i \cdot \exp\left(j \frac{2\pi \cdot n \cdot i}{N}\right), \quad (6.8)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Программа, использующая функцию $fft(s)$, приведена на рис. 6.8. В ней формируется прямоугольный импульс (показан на графике) и выборка из $N = 1024$ отсчетов, по которой и вычисляется функция $fft(s)$.

По полученным с помощью функции $fft(s)$ величинам V_n амплитуды S_n и начальные фазы ψ_n гармоник определяются выражениями

$$S_n = \frac{2}{\sqrt{N}} V_n, \quad n = \overline{1, N/2}, \quad (6.9)$$

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} V_0, \quad (6.10)$$

$$\psi_n = -\arg(V_n). \quad (6.11)$$

Обратное преобразование Фурье (суммирование ряда Фурье) выполняется функцией $ifft(V)$ в соответствии с выражением

$$s_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N/2} V_n \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi \cdot n \cdot i}{N}\right). \quad (6.12)$$

Эту функцию необходимо использовать только с результатами, даваемыми функцией $fft(s)$, а не с правильными комплексными амплитудами гармоник сигнала,

$$s = ifft(fft(s)), \quad (6.13)$$

s – выборка отсчетов сигнала.

$$T := 10^{-3} \quad N := 2^{10} \quad N = 1.024 \times 10^3$$

$$s1(t) := \text{if}(\text{mod}(t, T) < \frac{T}{5}, 10, 0)$$

$$i := 0..2^{10} - 1 \quad ss_i := s1\left(i \cdot \frac{T}{N}\right) \quad n := 0.. \frac{N}{2} \quad V_n := \text{fft}(ss)$$

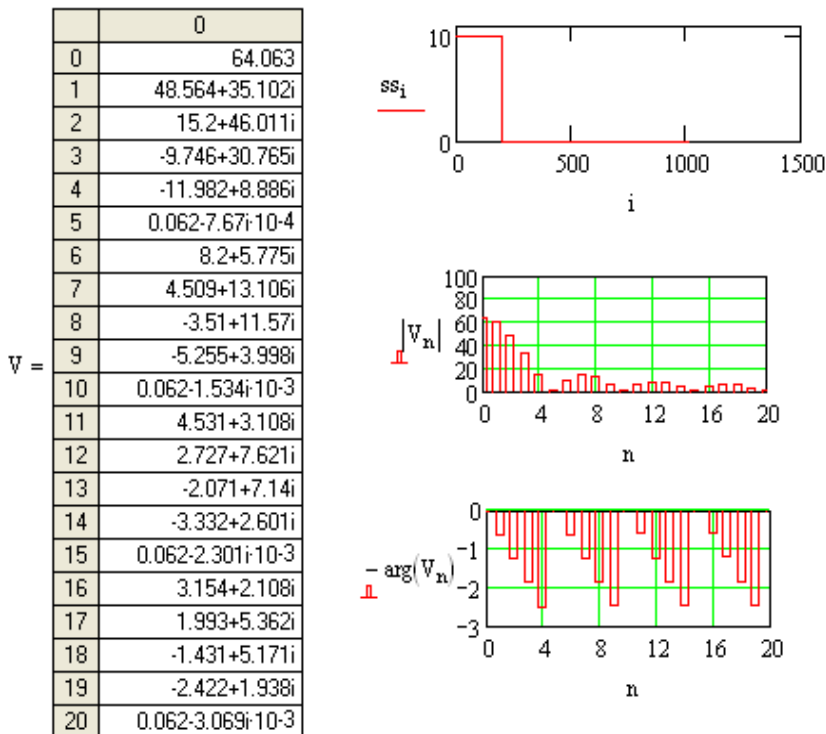


Рис. 6.8

Функция $FFT(s)$ (в MathCADe строчные и прописные символы различны) реализует вычисления БПФ в соответствии с выражением

$$VV_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s_i \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi \cdot n \cdot i}{N}\right), \quad (6.14)$$

а функция $IFFT(VV)$ – соответственно

$$s_i = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2} VV_n \cdot \exp\left(j \frac{2\pi \cdot n \cdot i}{N}\right). \quad (6.15)$$

При этом амплитуды и начальные фазы гармоник сигнала будут равны:

$$S_n = 2 \cdot VV_n, \quad n = \overline{1, N/2}, \quad (6.16)$$

$$S_0 = VV_0, \quad (6.17)$$

$$\psi_n = \arg(VV_n). \quad (6.18)$$

Таким образом, программа MathCAD позволяет проводить расчеты спектров сигналов, частотных характеристик цепей и получать временные реализации процессов на выходе электрических цепей.

Спектральный анализ сигналов можно проводить с использованием программ схемотехнического моделирования, например, MicroCAP. В пакете предусмотрены следующие функции спектрального анализа.

Функция **HARM(v(1))** определяет амплитуды гармоник напряжения v(1) (или другого напряжения или тока), отображая в режиме Transient Analysis соответствующий спектр амплитуд.

Функция **FFT(v(1))** реализует БПФ напряжения v(1) и отличается от HARM(v(1)) тем, что амплитуды гармоник умножаются на N/2, а постоянной составляющей – на N.

Функция **PHASE(V)** определяет фазы гармоник V, вычисленных с помощью функции FFT.

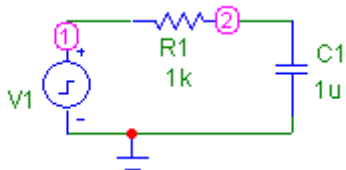


Рис. 6.9

На рис. 6.9 показана модель простейшей RC цепи, на которую воздействует импульсный источник напряжения вида рис.6.4 б с периодом повторения $T = 1$ мс и длительностью импульса $\tau = 0,2$ мс.

На рис. 6.10 приведены результаты моделирования входного сигнала и его спектров с использованием функций HARM(v(1)) и FFT(v(1)). Для спектрального анализа могут быть

использованы обе функции, однако физические результаты дает функция HARM(v(1)).

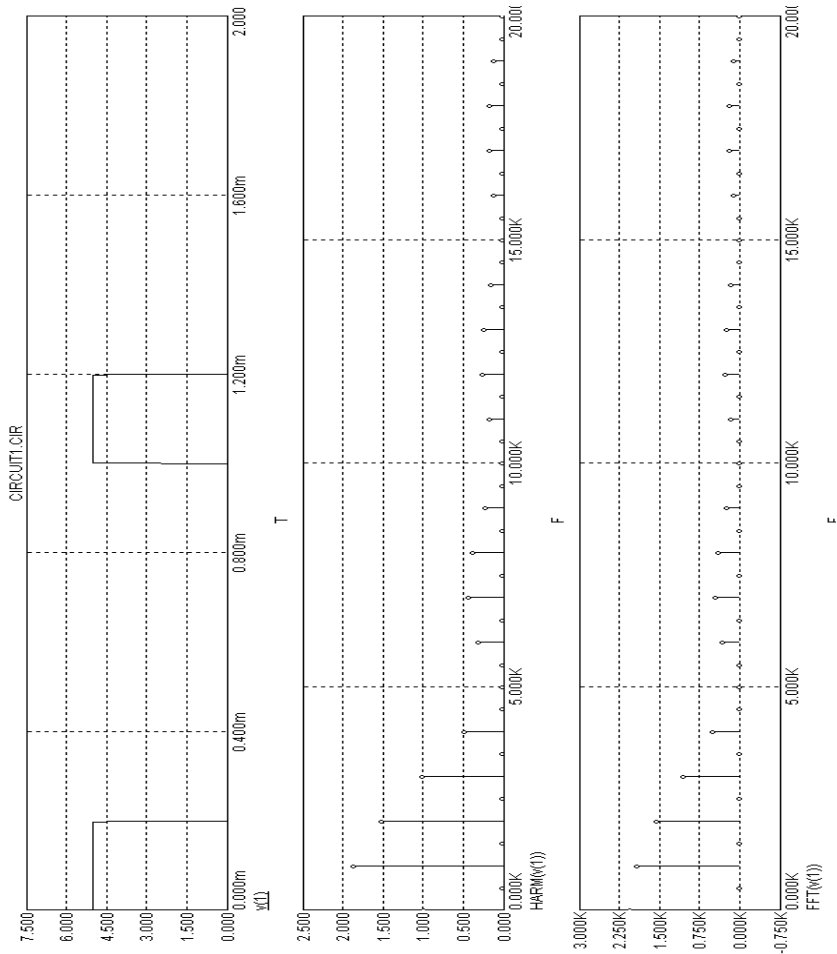


Рис. 6.10

На рис. 6.11 приведены входной и выходной сигналы цепи рис. 6.9 (верхний график), а затем их спектры амплитуд. Как видно, рассматриваемый фильтр нижних частот подавляет высшие гармоники в спектре выходного сигнала, что приводит

к его сглаживанию во временной области.

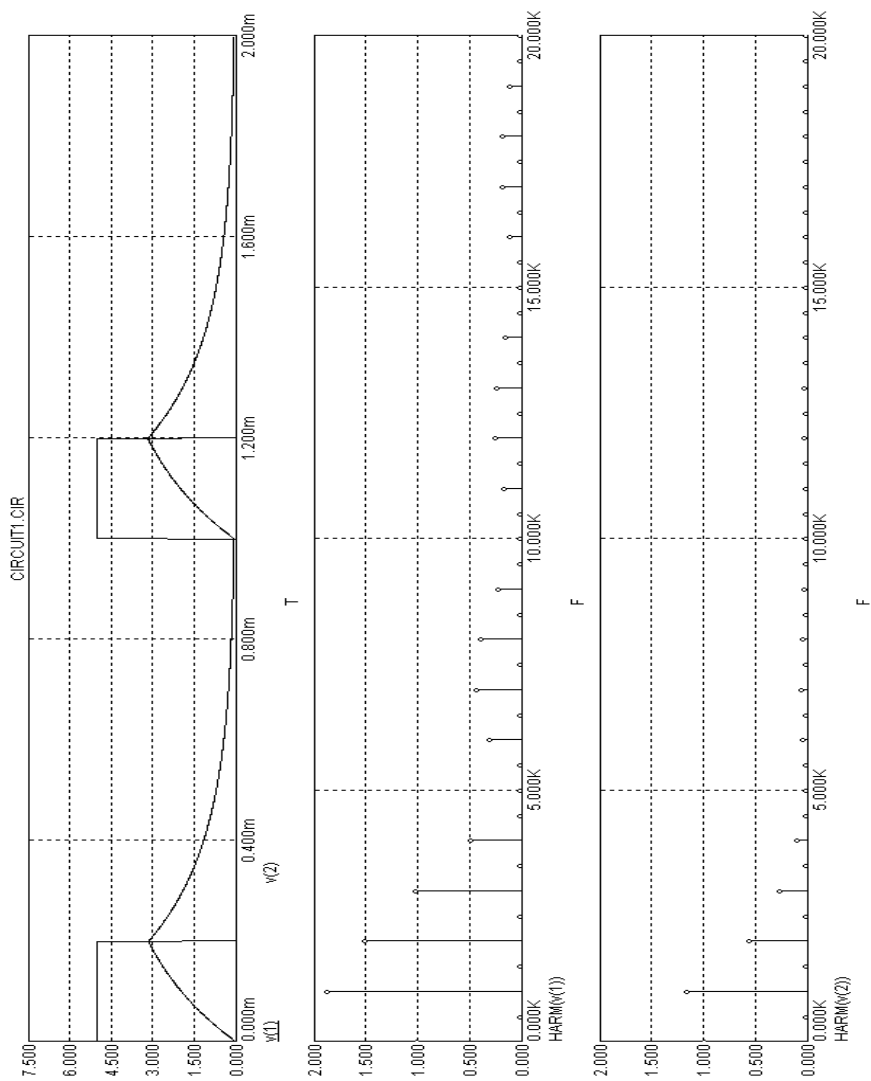


Рис. 6.11

7. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

7.1. Физика переходных процессов

В любой электрической цепи в какой-то момент времени происходит включение, выключение или переключение источников сигнала или пассивных элементов. Эти события называют **коммутацией**.

Начало отсчета времени $t = 0$ чаще всего совмещают с **моментом коммутации**. После коммутации в электрической цепи возникают **переходные** процессы (изменяющиеся во времени токи и напряжения), обусловленные действием **источников** напряжения или тока, включенных в цепи после коммутации, и **энергией**, запасенной в реактивных элементах (индуктивностях и емкостях) до коммутации. Если после коммутации в цепи отсутствуют источники сигналов, то в ней возникают процессы, которые называют **свободными**.

Примером свободного процесса в механике являются колебания маятника, груз которого был отведен в сторону и затем отпущен.

С течением времени после коммутации переходные процессы завершаются, и сигналы в цепи становятся **стационарными**. Переходные процессы могут быть кратковременными (вплоть до долей наносекунды) и весьма продолжительными (часы).

Переходные процессы оказывают существенное влияние на работу электронных устройств. Они ограничивают производительность цифровых вычислительных устройств, приводят к появлению ложных импульсных сигналов. В ряде случаев переходные процессы выполняют полезные функции.

Классический метод расчета переходных процессов базируется на составлении и решении **дифференциальных уравнений**, связывающих токи и напряжения в цепи.

7.2 Законы Ома и Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений

Мгновенные значения токов и напряжений в электрической цепи связаны между собой уравнениями законов Ома и Кирхгофа. В отдельных элементах цепи уравнения связи **мгновенных значений** тока и напряжения (закон Ома) имеют вид, приведенный в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Элемент	Уравнение	
	для напряжения	для тока
Сопротивление R	$u(t) = R \cdot i(t)$	$i(t) = G \cdot u(t)$
Емкость C	$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$
Индуктивность L	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$

Для каждого из $q-1$ узлов уравнение **первого закона Кирхгофа** для сходящихся к нему токов $i_k(t)$ имеет вид

$$\sum_k i_k(t) = 0,$$

где q – общее число узлов в электрической цепи.

По **второму закону Кирхгофа** для каждого из $p'-q+1$ независимых контуров (p' – число ветвей, не содержащих идеальные источники тока) записываются уравнения вида

$$\sum_k u_k(t) = \sum_n e_n(t),$$

где $u_k(t)$ – напряжение на k -м элементе соответствующего контура, а $e_n(t)$ – ЭДС включенных в него источников.

7.3. Уравнения электрического равновесия

Система уравнений электрического равновесия цепи строится на основе законов Ома и Кирхгофа.

Рассмотрим пример цепи, показанной на рис. 7.1, где заданы положительные направления и условные обозначения всех токов и напряжений. Их мгновенные значения обозначаются строчными латинскими буквами без указания аргумента (времени), например, $u_1 = u_1(t)$.

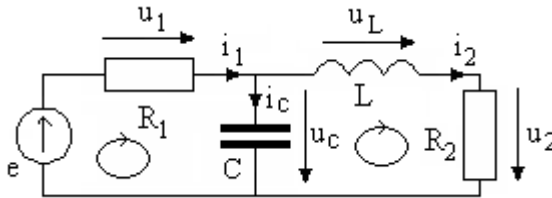


Рис. 7.1

Подсистема **компонентных уравнений** закона Ома для каждого элемента цепи имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1, \\ u_2 = R_2 i_2, \\ u_L = L \frac{di_2}{dt}, \\ i_C = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (7.1)$$

В цепи два узла ($q = 2$), следовательно по первому закону Кирхгофа необходимо записать одно уравнение вида

$$i_1 = i_2 + i_C. \quad (7.2)$$

Всего в цепи три ветви, не содержащие идеальные источники тока ($p' = 3$), тогда по второму закону Кирхгофа для указанных на схеме положительных направлений обхода контуров необходимо записать два ($p' - q + 1 = 2$) уравнения вида

$$\begin{cases} u_1 + u_C = e, \\ u_L + u_2 - u_C = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Объединяя полученные по законам Кирхгофа уравнения, получим подсистему **топологических уравнений** цепи

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_C, \\ u_1 + u_C = e, \\ u_L + u_2 - u_C = 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Полная система уравнений электрического равновесия цепи включает в себя подсистемы компонентных (7.1) и топологических (7.4) уравнений.

Выбрав искомую переменную, можно выразить через нее остальные токи и напряжения. В результате получим одно дифференциальное уравнение, порядок которого равен порядку цепи, который равен числу независимых реактивных элементов.

В качестве независимой переменной выберем ток i_2 , тогда с учетом второго и третьего уравнений системы (7.1) из третьего уравнения (7.4) получим

$$u_C = L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2. \quad (7.5)$$

Из второго уравнения (7.4) с учетом первого уравнения (7.1) и (7.5) получим

$$i_1 = \frac{e}{R_1} - \frac{u_C}{R_1} = \frac{e}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{R_1} i_2. \quad (7.6)$$

Тогда из первого уравнения (7.4) с учетом (7.6) и четвертого уравнения (7.1) можно записать

$$\frac{e}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{R_1} i_2 = i_2 + C \left[L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} \right]. \quad (7.7)$$

Преобразуя (7.6), получим дифференциальное уравнение

$$CL \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left[CR_2 + \frac{L}{R_1} \right] \frac{di_2}{dt} + \left[\frac{R_2}{R_1} + 1 \right] i_2 = \frac{e}{R_1}. \quad (7.8)$$

7.4. Законы коммутации

Законы коммутации относятся к реактивным элементам цепи и основаны на том, что накопленная в них энергия не может изменяться скачкообразно, так как в момент мгновенного изменения энергии развивается **бесконечная** мощность, что практически не возможно.

Напряжение на емкости в момент коммутации не может изменяться скачком: $u_C(-0) = u_C(0)$

Ток индуктивности в момент коммутации не может изменяться скачком: $i_L(-0) = i_L(0)$

В приведенных условиях через $t = -0$ обозначен момент времени непосредственно **перед** коммутацией, а через $t = 0$ – мгновенно **после** коммутации.

7.5. Начальные условия

Начальные условия переходного процесса – это **напряжения емкостей $u_C(0)$ и токи индуктивностей $i_L(0)$ непосредственно после коммутации.**

Они определяются из значений напряжений емкостей и токов индуктивностей **перед коммутацией** на основе законов коммутации:

$$\begin{cases} u_C(-0) = u_C(0); \\ i_L(-0) = i_L(0). \end{cases} \quad (7.9)$$

До коммутации в цепи имеет место **стационарный** режим работы, в котором параметры токов и напряжений не изменяются во времени. При этом определение токов и напряжений ведется рассмотренными ранее методами расчета стационарных процессов.

Например, если до коммутации в цепи действовали источники постоянных токов и напряжений, то значения $u_C(-0)$ и $i_L(-0)$ определяются методами расчета цепей постоянного тока. Если действуют источники гармонических сигналов, то напряжения емкостей $u_C(t)$ и токи индуктивностей $i_L(t)$ определяются методом комплексных амплитуд с последующей подстановкой значения момента коммутации (обычно $t = 0$).

Рассмотрим пример цепи, показанной на рис. 7.1, при выключении источника постоянного напряжения с ЭДС E в момент времени $t = 0$ (рис. 7.2 а).

Схема цепи показана на рис. 7.2 б. До коммутации в цепи действовал источник постоянной ЭДС E , при этом все токи и напряжения в цепи постоянны.

Схема цепи на постоянном токе (до коммутации) показана на рис. 7.2 в. Она следует из схемы рис. 7.2 б при замене емкости разрывом цепи (холостым ходом) в точках ее подключения, а индуктивности - коротким замыканием.

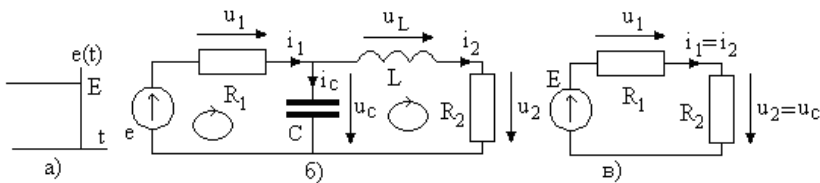


Рис. 7.2

В цепи на рис. 7.2 в ток i_2 , совпадающий с током индуктивности, равен

$$i_L(-0) = i_2(-0) = \frac{E}{R_1 + R_2}, \quad (7.10)$$

а напряжение на емкости $u_C = u_2$ определяется выражением

$$u_C(-0) = u_2(-0) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (7.11)$$

На основании законов коммутации определим начальные условия

$$\begin{cases} u_C(0) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \\ i_L(0) = \frac{E}{R_1 + R_2}. \end{cases} \quad (7.12)$$

7.6. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейное **неоднородное** дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами можно записать в виде

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = F(t). \quad (7.13)$$

Правая часть $F(t)$ определяется источниками сигнала в цепи после коммутации. Если функция $F(t)$ равна **нулю** (в цепи после коммутации отсутствуют источники сигнала), то получим **однородное** уравнение

$$a_n \frac{d^n s_{CB}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s_{CB}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds_{CB}(t)}{dt} + a_0 s_{CB}(t) = 0. \quad (7.14)$$

для свободного процесса $s_{CB}(t)$.

Общее решение $s(t)$ неоднородного дифференциального уравнения (7.13) равно

$$s(t) = s_{CB}(t) + s_{\text{пр}}(t). \quad (7.15)$$

Функция $s_{CB}(t)$ - общее решение однородного уравнения вида (7.14), полученного приравниванием нулю правой части $F(t)$ в (7.13), называется **свободной составляющей** переходного процесса. Она определяется энергией, накопленной реактивными элементами цепи до коммутации. Вторую часть решения (7.15) $s_{\text{пр}}(t)$ называют **принужденной составляющей** переходного процесса. Она является **частным решением** неоднородного уравнения (7.13), появление которой обусловлено действием источников тока и напряжения **после** коммутации.

Свободная составляющая $s_{CB}(t)$ является решением однородного дифференциального уравнения (7.14). Для ее определения необходимо решить характеристическое уравнение, которое получается из (7.14) формальной заменой k -й производной на k -ю степень переменной p , является **алгебраическим** и имеет вид

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (7.16)$$

Это уравнение решается известными методами для уравнений степени от 1 до 4. Корни уравнения высокой степени $n > 4$ определяются численными методами.

Характеристическое уравнение имеет n корней, в том числе и комплексных, которые всегда возникают комплексно-сопряженными парами. Кроме того, корни характеристического уравнения могут быть кратными.

Пусть характеристическое уравнение имеет m корней p_i , $i = \overline{1, m}$, каждый из них с кратностью r_i . Общее число корней равно порядку дифференциального уравнения,

$$\sum_{i=1}^m r_i = n.$$

Тогда общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$s_{CB}(t) = \sum_{i=1}^m \left[e^{p_i t} \sum_{k=1}^{r_i} A_{ik} t^{k-1} \right]. \quad (7.17)$$

Если все корни характеристического уравнения не кратны, то свободная составляющая записывается в более простой форме

$$s_{CB}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}. \quad (7.18)$$

Величины A_{ik} или A_i называют **постоянными интегрирования**. В общем случае это комплексные величины.

Корни характеристического уравнения обладают следующими свойствами:

- общее число корней равно порядку уравнения;
- действительные части корней удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}\{p\} = \alpha \leq 0;$$

– комплексные корни возникают комплексно сопряженными парами,

$$p_i = \alpha \pm j\omega.$$

Для двух комплексно-сопряженных корней соответствующая им составляющая свободного процесса является действительной функцией времени,

$$\left\{ e^{(-\alpha + j\omega)t} + e^{(-\alpha - j\omega)t} \right\} = e^{-\alpha t} 2 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = e^{-\alpha t} 2 \cos(\omega t).$$

7.7. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений

Для дифференциального уравнения **первого порядка** вида

$$a_1 \frac{ds_{CB}(t)}{dt} + a_0 s_{CB}(t) = 0 \quad (7.19)$$

с характеристическим уравнением

$$a_1 p + a_0 = 0, \quad (7.20)$$

единственный корень которого равен

$$p = -\frac{a_0}{a_1}, \quad (7.21)$$

общее решение можно записать в виде

$$s_{CB}(t) = A e^{pt}. \quad (7.22)$$

Дифференциальное уравнение **второго порядка**

$$a_2 \frac{d^2 s_{CB}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds_{CB}(t)}{dt} + a_0 s_{CB}(t) = 0 \quad (7.23)$$

с квадратным характеристическим уравнением

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (7.24)$$

имеет корни вида

$$\begin{cases} p_1 = -\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}, \\ p_2 = -\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}. \end{cases} \quad (7.25)$$

Вид корней зависит от коэффициентов уравнения. При

$$\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 > \frac{a_0}{a_2} \quad (7.26)$$

оба корня действительны, отрицательны и различны, тогда общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид суммы двух экспонент с действительными отрицательными показателями.

$$s_{CB}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (7.27)$$

Если выполняется условие

$$\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_0}{a_2}, \quad (7.28)$$

то оба корня характеристического уравнения одинаковы (кратны) и равны

$$p_1 = p_2 = \delta = -\frac{a_1}{2a_2}. \quad (7.29)$$

Тогда из (7.17) при $m=1$ и $r_1=2$ получим

$$s_{CB}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{\delta t}, \quad (7.30)$$

где величина δ отрицательна и определяется из (7.29).

Наконец, при

$$\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 < \frac{a_0}{a_2}, \quad (7.31)$$

подкоренное выражение в (7.25) отрицательно, а оба корня характеристического уравнения комплексны и равны

$$p_{1,2} = \delta \pm j\omega_{CB}, \quad (7.32)$$

где

$$\delta = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad (7.33)$$

$$\omega_{CB} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2}. \quad (7.34)$$

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид (7.27) и с учетом (7.32) равно

$$s_{CB}(t) = e^{\delta t} (A_1 e^{j\omega_{CB}t} + A_2 e^{-j\omega_{CB}t}). \quad (7.35)$$

Далее будет показано, что выражение в скобках после определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 приводится к действительной функции времени в виде затухающего ($\delta < 0$) гармонического колебания с частотой ω_{CB} , называемой частотой свободных колебаний.

7.8. Расчет принужденной составляющей переходного процесса

Принужденная составляющая $s_{IP}(t)$ переходного процесса обусловлена действием источников тока или напряжения в цепи **после коммутации**. Если они отсутствуют, то процесс является **свободным** и для него принужденная составляющая равна **нулю**. Можно предложить два метода расчета принужденной компоненты переходного процесса.

Первый метод основан на использовании известных из математики частных решений неоднородного дифференциального уравнения (7.13) при заданной функции $F(t)$ в его правой части. Примеры приведены в табл. 7.2.

Параметры принужденной составляющей определяются при ее подстановке в дифференциальное уравнение (7.13) путем уравнивания коэффициентов при одинаковых функциях в правой и левой частях.

Таблица 7.2

Вид функции $F(t)$	Принужденная составляющая
Константа $F(t) = F_0$	Константа $s_{\text{ПР}}(t) = S_0$
Экспонента $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$	Экспонента $s_{\text{ПР}}(t) = S_0 e^{-\alpha t}$
Гармоническая функция $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t + \psi_0)$	Гармоническая функция $s_{\text{ПР}}(t) = S_{\text{ПР}} \cos(\omega_0 t + \psi_{\text{ПР}})$

Например, если правая часть постоянна $F(t) = F_0$, то получим (производные константы равны нулю)

$$a_0 S_0 = F_0, \quad (7.36)$$

откуда следует

$$s_{\text{ПР}}(t) = S_0 = \frac{F_0}{a_0}. \quad (7.37)$$

Второй метод заключается в том, что с течением времени (при $t \rightarrow \infty$) переходной процесс стремится к своей принужденной составляющей, так как свободная составляющая вида (7.17) или (7.18) при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю в силу отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения.

В результате можно записать

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t)) = s_{\text{ПР}}(t), \quad (7.38)$$

то есть принужденная составляющая является **стационарным процессом**, устанавливающимся в цепи через теоретически бесконечное время **после коммутации**. Тогда ее можно определить ранее изученными методами расчета **стационарных** токов и напряжений в линейной цепи.

Если в цепи после коммутации действуют источники постоянного тока (напряжения), то принужденная составляющая равна соответствующему искомому постоянному току (напряжению), который вычисляется методами расчета цепей постоянного тока.

При наличии в цепи после коммутации источников гармонических сигналов принужденная (стационарная) компо-

нента переходного процесса определяется известными методами расчета цепей при гармонических воздействиях - методом комплексных амплитуд с различными его вариантами.

7.9. Общее решение дифференциального уравнения

В результате определения свободной (7.17) и принужденной составляющих можно записать общее решение дифференциального уравнения в виде

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \left[e^{p_i} \sum_{k=1}^{r_i} A_{i,k} t^{k-1} \right] + s_{ПП}(t). \quad (7.39)$$

При некрратных корнях с учетом (7.18) аналогично получим

$$s(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i} + s_{ПП}(t). \quad (7.40)$$

Как видно, полученные решения содержат n постоянных интегрирования, которые необходимо определить из начальных условий.

7.10. Расчет постоянных интегрирования

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий переходного (свободного) процесса. Для этого необходимо через полученное общее решение дифференциального уравнения $s(t)$ вида (7.39) или (7.40) выразить **все** токи индуктивностей $i_L(A_1, A_2, \dots, A_n, t)$ и напряжения емкостей $u_C(A_1, A_2, \dots, A_n, t)$, содержащие неизвестные постоянные интегрирования. В результате, подставляя $t = 0$, получим выражения для $i_L(A_1, A_2, \dots, A_n)$ и $u_C(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Приравнивая их начальным условиям, получим систему уравнений для постоянных интегрирования:

$$\begin{cases} i_L(A_1, A_2, \dots, A_n) = i_L(0), \\ u_C(A_1, A_2, \dots, A_n) = u_C(0). \end{cases} \quad (7.41)$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, найдем в общем случае комплексные значения постоянных интегрирования. Подставляя их в общее решение дифференциального уравнения, получим выражение для искомого переходного процесса.

7.11. Задания для самостоятельного решения

Задание 7.7. Определите начальные условия в момент выключения источника тока рис. 7.3 а в цепях, показанных на рис. 7.3 б и рис. 7.3 в.

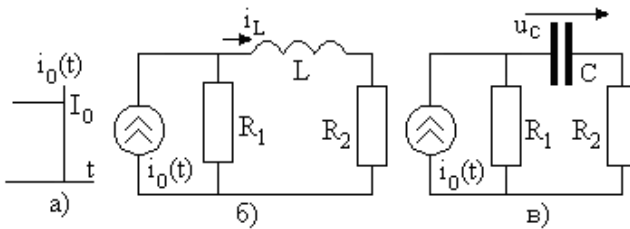


Рис. 7.3

Задание 7.2. Определите начальные условия в момент выключения источника тока рис. 7.4 а в цепях, показанных на рис. 7.4 б и рис. 7.4 в.

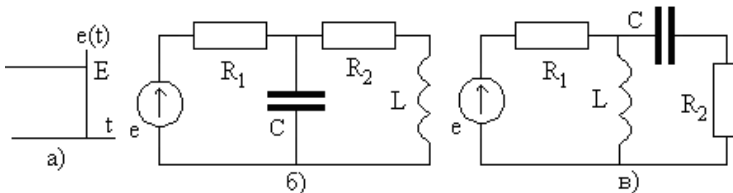


Рис. 7.4

Задание 7.3. Определите принужденную составляющую от включающегося источника тока рис. 7.5 для тока индуктивности в цепи рис. 7.5. б и напряжения емкости в цепи рис. 7.5 в.

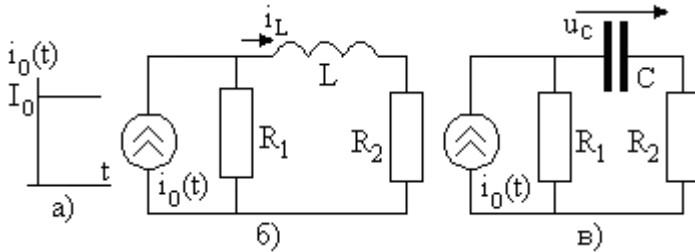


Рис. 7.5

Задание 7.4. Определите принужденную составляющую от включающегося источника напряжения рис. 7.6 а для тока индуктивности в цепи рис. 7.6 б и напряжения емкости в цепи рис. 7.6 в.

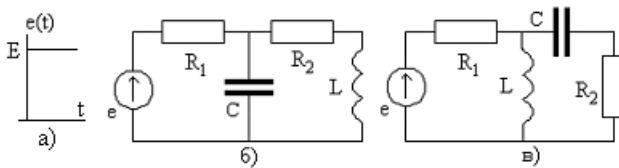


Рис. 7.6

8. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

8.1. Расчет свободного процесса в цепи первого порядка

Цепи первого порядка содержат только один реактивный элемент (индуктивность или емкость), а остальные элементы являются резистивными.

Рассмотрим цепь, показанную на рис. 8.1.

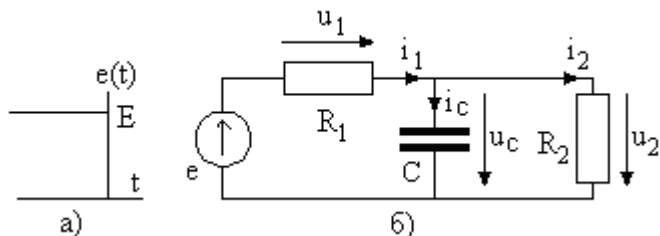


Рис. 8.1

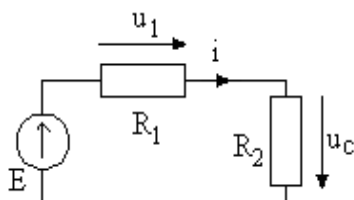


Рис. 8.2

Прежде всего, определим начальные условия. Для этого в цепи до коммутации (при включенном источнике постоянного напряжения с ЭДС E) заменим емкость разрывом цепи и получим цепь на рис. 8.2. Тогда постоянное напряжение $u_C = u_C(-0)$ равно

$$u_C = u_C(-0) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (8.1)$$

(получите этот результат самостоятельно). На основании закона коммутации это напряжение равно напряжению на емкости непосредственно после коммутации, которое является начальным условием рассматриваемого свободного процесса,

$$u_C(0) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (8.2)$$

Схема цепи после коммутации показана на рис. 8.3.

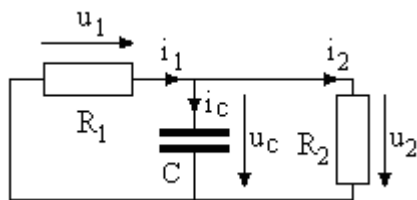


Рис. 8.3

Составим дифференциальное уравнение для напряжения емкости u_C в цепи рис. 8.3. Компонентные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1, \\ u_2 = R_2 i_2, \\ i_C = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (8.3)$$

По первому закону Кирхгофа можно записать одно уравнение вида

$$i_1 = i_C + i_2, \quad (8.4)$$

а по второму закону Кирхгофа получим

$$\begin{cases} u_1 + u_C = 0, \\ u_C = u_2. \end{cases} \quad (8.5)$$

С учетом первого уравнения (8.5) $u_1 = -u_C$ и второго уравнения $u_2 = u_C$ из компонентных уравнений можно записать выражения для токов ветвей

$$i_1 = -\frac{u_C}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_C}{R_2}, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (8.6)$$

Подставляя их в (8.4), получим

$$-\frac{u_C}{R_1} = \frac{u_C}{R_2} + C \frac{du_C}{dt}. \quad (8.7)$$

Приведем полученное однородное дифференциальное

уравнение первого порядка к каноническому виду

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}u_C = 0. \quad (8.8)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$p + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} = 0, \quad (8.9)$$

единственный действительный и отрицательный корень которого равен

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}. \quad (8.10)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (8.8) имеет вид

$$u_C(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}t}. \quad (8.11)$$

Так как определяется свободный процесс, то принужденная составляющая отсутствует и выражение (8.11) является окончательным общим решением дифференциального уравнения.

Подставляя в (8.11) $t = 0$, получим начальное значение свободного процесса

$$u_C(0) = A. \quad (8.12)$$

Приравняв его начальному условию (8.2), определим постоянную интегрирования

$$A = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (8.13)$$

В результате окончательно получим

$$u_C(t) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}t}. \quad (8.14)$$

Зависимость $u_C(t)$ показана на рис. 8.4 при $E = 2\text{В}$, $R_1 = R_2 = 1\text{кОм}$ и $C = 2\text{мкФ}$. Как видно, напряжение на емкости экспоненциально падает с течением времени (запасенная в ем-

кости C до коммутации энергия рассеивается после коммутации в сопротивлениях цепи). При $t = 0$ напряжение $u_C(t)$ равно начальному значению $u_C(0)$. С течением времени (при $t \rightarrow \infty$) емкость разряжается и напряжение на ней (8.14) стремится к нулю.

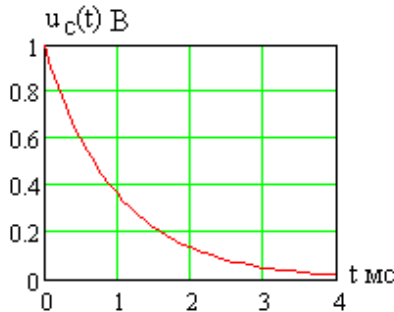


Рис. 8.4

Рассмотрим цепь, показанную на рис. 8.5 а, в которой идеальный источник тока отключается при $t = 0$.

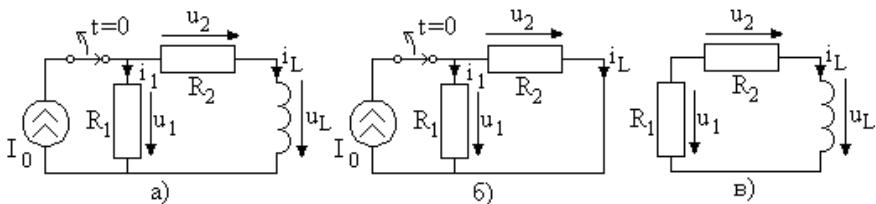


Рис. 8.5

Начальные условия определяются в схеме на рис. 8.5 б после замены на постоянном токе индуктивности коротким замыканием. В результате получим напряжение на сопротивлении R_2

$$u_2 = u_1 = I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad (8.15)$$

Тогда начальный ток индуктивности равен

$$i_L(0) = \frac{u_2}{R_2} = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (8.16)$$

Составим уравнения электрического равновесия цепи после коммутации (рис. 8.5 в) на основе законов Ома и Кирхгофа. Компонентные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} u_1 = -R_1 i_L, \\ u_2 = R_2 i_L, \\ u_L = L \frac{di_L}{dt}. \end{cases} \quad (8.17)$$

По второму закону Кирхгофа можно записать

$$u_1 = u_2 + u_L, \quad (8.18)$$

тогда с учетом (8.17) получим

$$L \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2) i_L = 0, \quad (8.19)$$

или в каноническом виде

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{L} i_L = 0. \quad (8.20)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$p + \frac{(R_1 + R_2)}{L} = 0, \quad (8.21)$$

единственный корень которого равен

$$p = -\frac{(R_1 + R_2)}{L}, \quad (8.22)$$

тогда общее решение уравнения (8.20) имеет вид

$$i_L(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t\right). \quad (8.23)$$

Для определения постоянной интегрирования A подставим в (8.23) значение $t = 0$, и приравняем результат начальному условию (8.16). Тогда получим искомый свободный процесс

$$i_L(t) = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t\right). \quad (8.24)$$

Зависимость тока индуктивности от времени при $I_0 = 2$ мА, $R_1 = R_2 = 1$ кОм и $L = 2$ мГн показана на рис. 8.6.

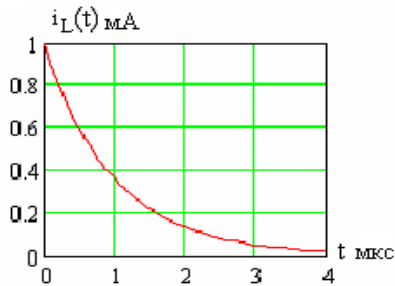


Рис. 8.6

8.2. Расчет переходного процесса в цепи первого порядка

Рассмотрим цепь на рис. 8.7, в которой идеальный источник напряжения включается в момент времени $t = 0$.

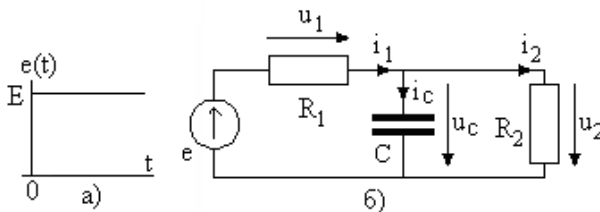


Рис. 8.7

В цепи до коммутации отсутствовали источники сигнала, поэтому в данном случае имеются **нулевые** начальные условия

$$u_c(0) = 0. \quad (8.25)$$

Запишем компонентные уравнения

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1, \\ u_2 = R_2 i_2, \\ i_c = C \frac{du_c}{dt}. \end{cases} \quad (8.26)$$

и топологические уравнения по первому

$$i_1 = i_C + i_2, \quad (8.27)$$

и второму законам Кирхгофа

$$\begin{cases} u_1 + u_C = E, \\ u_C = u_2. \end{cases} \quad (8.28)$$

Вызвав токи ветвей через напряжение на емкости u_C (проделайте это самостоятельно), получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}u_C = \frac{E}{CR_1}. \quad (8.29)$$

Его общее решение $u_C(t)$ равно сумме свободной $u_{C\text{ CB}}(t)$ и принужденной $u_{C\text{ ПП}}(t)$ составляющих,

$$u_C(t) = u_{C\text{ CB}}(t) + u_{C\text{ ПП}}(t). \quad (8.30)$$

Свободная составляющая $u_{C\text{ CB}}(t)$ является решением однородного уравнения, получающегося из (8.29) обнулением правой части,

$$\frac{du_{C\text{ CB}}}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}u_{C\text{ CB}} = 0. \quad (8.31)$$

Его решение получено ранее (8.11) и равно

$$u_{C\text{ CB}}(t) = Ae^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}t}. \quad (8.32)$$

Определим **принужденную компоненту** переходного процесса. Так как правая часть исходного дифференциального уравнения (8.29) постоянна, то и принужденная составляющая его решения также представляет собой константу вида

$$u_{C\text{ ПП}}(t) = B. \quad (8.33)$$

Она является частным решением (8.29), при подстановке которого получим (производная константы равна нулю)

$$\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}B = \frac{E}{CR_1}, \quad (8.34)$$

и тогда

$$u_{C \text{ ПР}}(t) = B = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (8.35)$$

В результате можно записать общее решение в виде

$$u_C(t) = A e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t} + E \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (8.36)$$

Определим постоянную интегрирования. Из (8.36) найдем значение $u_C(0)$ и приравняем его нулевому начальному условию, тогда получим

$$A + E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0, \quad (8.37)$$

и в результате

$$A = -E \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (8.38)$$

Подставляя найденную постоянную интегрирования в решение (8.36), запишем выражение для переходного процесса

$$u_C(t) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left[1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t} \right]. \quad (8.39)$$

Зависимость $u_C(t)$ показана на рис. 8.4 при $E = 2 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ и $C = 2 \text{ мкФ}$. В момент коммутации напряжение равно нулю, а после подключения источника напряжения емкость заряжается до стационарного значения напряжения (8.35).

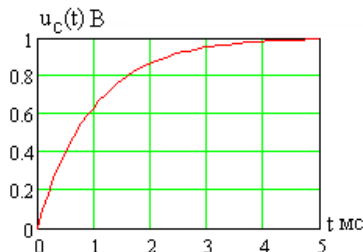


Рис. 8.8

Рассмотрим цепь на рис. 8.9 а, в которой идеальный источник тока включается в момент времени $t = 0$, а источник напряжения был и остается включенным в цепь.

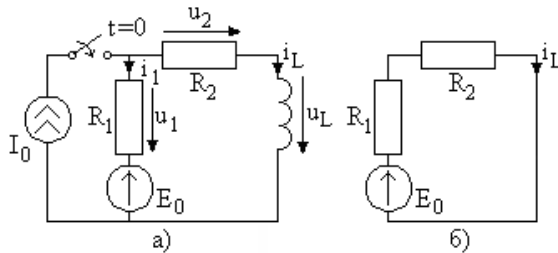


Рис. 8.9

До коммутации на постоянном токе индуктивность представляет собой короткое замыкание и схема цепи имеет вид, показанный на рис. 8.9 б. Начальный ток индуктивности равен

$$i_L(0) = \frac{E_0}{R_1 + R_2}. \quad (8.40)$$

В схеме на рис. 8.9 а после коммутации (при замкнутом ключе) система компонентных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1, \\ u_2 = R_2 i_L, \\ u_L = L \frac{di_L}{dt}. \end{cases} \quad (8.41)$$

Запишем уравнения по первому и второму законам Кирхгофа

$$\begin{cases} i_1 + i_L = I_0, \\ -u_1 + u_2 + u_L = E_0. \end{cases} \quad (8.42)$$

Выражая ток i_1 из уравнения первого закона Кирхгофа, подставляя его в уравнение закона Ома и используя уравнение второго закона Кирхгофа, получим неоднородное уравнение первого порядка

$$L \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2) i_L = E_0 + R_1 I_0. \quad (8.43)$$

Его общее решение является суммой свободной и принужденной составляющих в виде

$$i_L(t) = i_{L\ CB}(t) + i_{L\ ИП}(t). \quad (8.44)$$

Свободная компонента является решением однородного дифференциального уравнения, полученного из (8.43) обнулением правой части,

$$L \frac{di_{L\ CB}}{dt} + (R_1 + R_2)i_{L\ CB} = 0. \quad (8.45)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$Lp + (R_1 + R_2) = 0, \quad (8.46)$$

корень которого равен

$$p = -\frac{(R_1 + R_2)}{L}. \quad (8.47)$$

Общее решение однородного уравнения (8.45) - свободная составляющая переходного процесса - равна

$$i_{L\ CB}(t) = Ae^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t}. \quad (8.48)$$

Определим принужденную составляющую. Так как правая часть исходного дифференциального уравнения (8.40) постоянна, то и принужденная составляющая его решения также константа B , тогда подставляя ее в (8.43), получим уравнение

$$(R_1 + R_2)B = E_0 + R_1I_0, \quad (8.49)$$

из которого

$$i_{L\ ИП}(t) = B = \frac{E_0 + R_1I_0}{R_1 + R_2}. \quad (8.50)$$

Найдем принужденную составляющую как стационарное значение переходного процесса. В цепи на рис. 8.9 а через бесконечное время после коммутации установится постоянный ток. Тогда, заменив индуктивность коротким замыканием, получим цепь, показанную на рис. 8.10 а.

Расчет постоянного тока i_L проведем методом наложения, соответствующие схемы представлены на рис. 8.10 б и рис. 8.10 в. Проведите расчет самостоятельно. Получим выражение, совпадающее с (8.50).

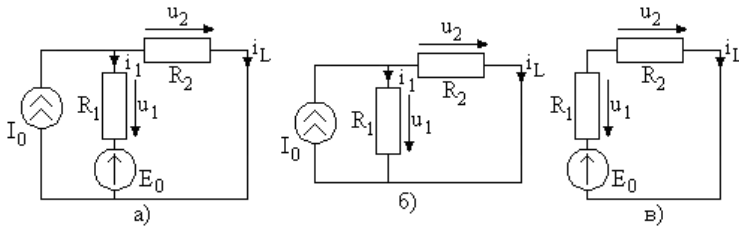


Рис. 8.10

В результате найдем общее решение неоднородного уравнения

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} + \frac{E_0 + R_1 I_0}{R_1 + R_2}. \quad (8.51)$$

Подставим (8.51) $t=0$ и приравняем результат начальному условию (8.40), тогда получим

$$A + \frac{E_0 + R_1 I_0}{R_1 + R_2} = \frac{E_0}{R_1 + R_2}, \quad (8.52)$$

откуда найдем постоянную интегрирования

$$A = -\frac{R_1 I_0}{R_1 + R_2} \quad (8.53)$$

и запишем решение дифференциального уравнения

$$i_L(t) = -\frac{R_1 I_0}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} + \frac{E_0 + R_1 I_0}{R_1 + R_2}. \quad (8.54)$$

Зависимость тока индуктивности $i_L(t)$ при $E_0 = 1$ В, $I_0 = 1$ мА, $R_1 = R_2 = 1$ кОм и $L = 2$ мГн показана на рис. 8.11.

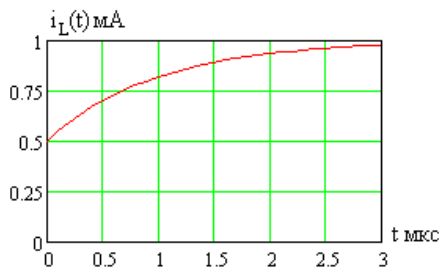


Рис. 8.11

8.3. Расчет свободного процесса в последовательном колебательном контуре

Проведем расчет свободного процесса в последовательном колебательном контуре в схеме на рис. 8.12 б при выключении источника напряжения рис. 8.12 а.

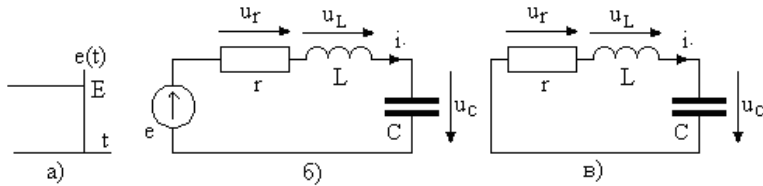


Рис. 8.12

До коммутации в цепи действовал источник постоянного напряжения с ЭДС E . Постоянный ток в цепи (ток индуктивности $i_L(-0)$) был равен нулю (емкость на постоянном токе – разрыв цепи) и все напряжение источника было приложено к емкости, напряжение $u_C(-0)$ на которой было равно E . Тогда начальные условия свободного процесса в цепи второго порядка имеют вид

$$\begin{cases} i_L(0) = 0, \\ u_C(0) = E. \end{cases} \quad (8.55)$$

После выключения идеального источника напряжения он заменяется коротким замыканием и после коммутации получим схему на рис. 8.11 в. Запишем систему компонентных уравнений по закону Ома в виде

$$\begin{cases} i = C \frac{du_C}{dt}, \\ u_L = L \frac{di}{dt}, \\ u_r = ri. \end{cases} \quad (8.56)$$

Уравнение второго закона Кирхгофа принимает вид

$$u_r + u_L + u_C = 0. \quad (8.57)$$

Подставляя в него компонентные уравнения, получим дифференциальное однородное уравнение второго порядка для напряжения на емкости

$$rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0. \quad (8.58)$$

В каноническом виде можно записать

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0. \quad (8.59)$$

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{r}{2L}, \quad (8.60)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (8.61)$$

где α – коэффициент затухания (его размерность $1/c$), а ω_0 – резонансная частота колебательного контура. Тогда дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0. \quad (8.62)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0, \quad (8.63)$$

два корня которого имеют вид

$$\begin{cases} p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \\ p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \end{cases} \quad (8.64)$$

Как видно, возможны три варианта корней характеристического уравнения, соответствующие трем режимам свободных колебаний в контуре:

1) два комплексных некрatных корня (**колебательный режим**) при условии

$$\alpha < \omega_0 \quad \text{или} \quad r < 2\rho, \quad (8.65)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ - характеристическое сопротивление контура;

2) два действительных кратных корня (**критический режим**) при условии

$$\alpha = \omega_0 \quad \text{или} \quad r = 2\rho; \quad (8.66)$$

3) два действительных некрatных корня (**апериодический режим**) при условии

$$\alpha > \omega_0 \quad \text{или} \quad r > 2\rho. \quad (8.67)$$

Рассмотрим свободный процесс в колебательном режиме, который возникает при малом сопротивлении потерь в контуре (8.65). При этом условии из (8.64) запишем

$$\begin{cases} p_1 = -\alpha + j\omega_{CB}, \\ p_2 = -\alpha - j\omega_{CB}, \end{cases} \quad (8.68)$$

где

$$\omega_{CB} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (8.69)$$

– **частота свободных колебаний** в контуре. Как видно, имеются два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью. Общее решение дифференциального уравнения (принужденная компонента отсутствует) имеет вид

$$u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (8.70)$$

Выразим через него ток индуктивности (в контуре) в виде

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C [A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}]. \quad (8.71)$$

Подставим в (8.70) и (8.71) значение $t = 0$ и приравняем результаты начальным условиям (8.55), в результате получим систему уравнений для постоянных интегрирования

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = E, \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0. \end{cases} \quad (8.72)$$

Его решение имеет вид

$$\begin{cases} A_1 = -E \frac{p_2}{p_1 - p_2}, \\ A_2 = E \frac{p_1}{p_1 - p_2}. \end{cases} \quad (8.73)$$

Подставляя постоянные интегрирования в общее решение (8.70), получим

$$u_C(t) = -E \frac{P_2}{P_1 - P_2} e^{P_1 t} + E \frac{P_1}{P_1 - P_2} e^{P_2 t}. \quad (8.74)$$

Используя выражения (8.68) для корней характеристического уравнения, можно записать

$$u_C(t) = E \left[-\frac{-\alpha - j\omega_{CB}}{j2\omega_{CB}} e^{(-\alpha + j\omega_{CB})t} + \frac{-\alpha + j\omega_{CB}}{j2\omega_{CB}} e^{(-\alpha - j\omega_{CB})t} \right]. \quad (8.75)$$

Преобразуя, получим

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E e^{-\alpha t} \left[\frac{\alpha + j\omega_{CB}}{j2\omega_{CB}} e^{j\omega_{CB}t} + \frac{-\alpha + j\omega_{CB}}{j2\omega_{CB}} e^{-j\omega_{CB}t} \right] = \\ &= E e^{-\alpha t} \left[\frac{(e^{j\omega_{CB}t} + e^{-j\omega_{CB}t})}{2} + \frac{\alpha}{\omega_{CB}} \frac{(e^{j\omega_{CB}t} - e^{-j\omega_{CB}t})}{2j} \right]. \end{aligned} \quad (8.76)$$

Используя известные соотношения

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \\ \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}. \end{cases} \quad (8.77)$$

окончательно запишем выражение для свободного колебательного процесса в контуре

$$u_C(t) = E e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega_{CB}t) + \frac{\alpha}{\omega_{CB}} \sin(\omega_{CB}t) \right]. \quad (8.78)$$

Как видно, получена действительная функция времени, представляющая собой гармоническое колебание с частотой свободных колебаний ω_{CB} (8.61) и с затухающей по экспоненте амплитудой, множитель в показателе экспоненты α (8.60) – **коэффициент затухания**. Зависимость $u_C(t)$ при $E = 1\text{ В}$, $r = 20\text{ Ом}$, $L = 1\text{ мГн}$ и $C = 1\text{ нФ}$ показана на рис. 8.13.

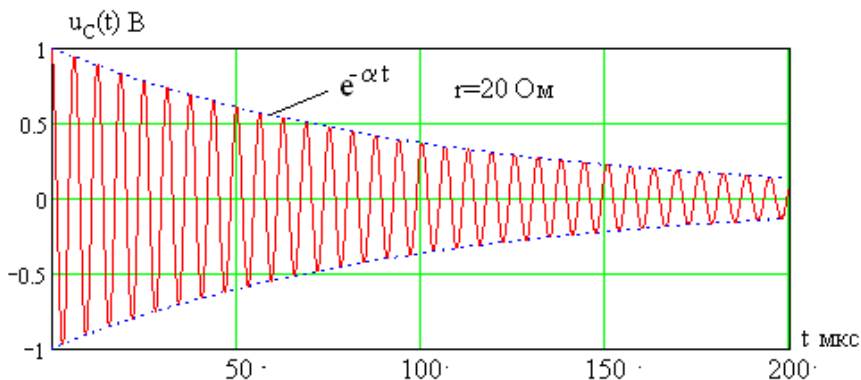


Рис. 8.13

Пунктирной линией показано экспоненциальное затухание амплитуды свободных колебаний. При малом сопротивлении потерь r (большой добротности контура Q) колебания затухают медленно. В рассматриваемом случае добротность равна 50.

На рис. 8.14 показаны те же зависимости при больших сопротивлениях потерь $r = 200 \text{ Ом}$ ($Q = 5$) и $r = 1000 \text{ Ом}$ ($Q = 1$). Как видно, даже в последнем случае имеют место затухающие гармонические колебания.

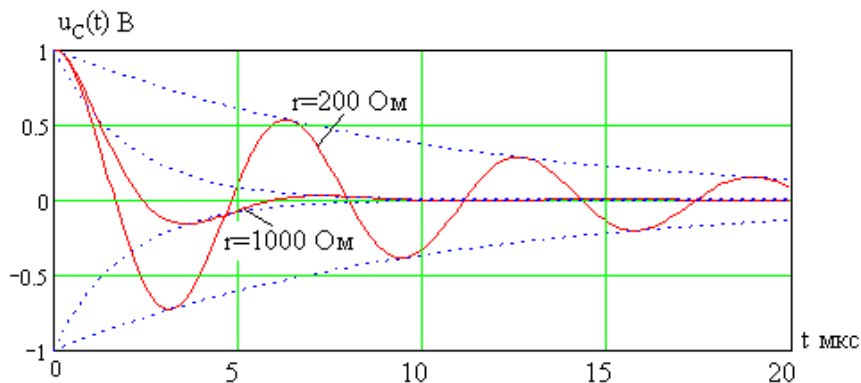


Рис. 8.14

Сопротивление потерь r влияет на частоту ω_{CB} (8.65) и период $T_{CB} = 2\pi / \omega_{CB}$ колебаний, как показано на рис. 8.15.

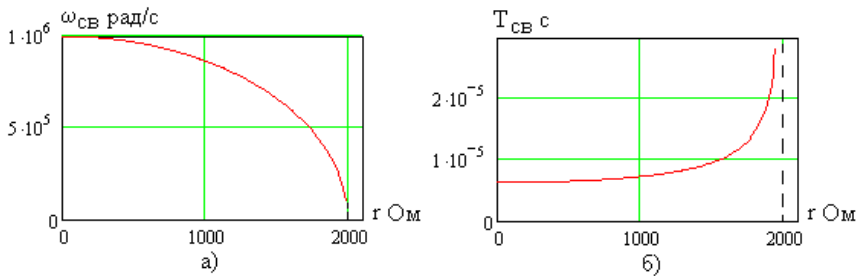


Рис. 8.15

Как видно, при малых r частота свободных колебаний практически совпадает с резонансной частотой ω_0 . При $r \rightarrow 2\rho$ частота колебаний падает до нуля (период T_{CB} стремится к бесконечности).

Рассмотрим свободный процесс в критическом режиме, который возникает при условии (8.66). В этом случае корни характеристического уравнения одинаковы (двукратный корень), действительны и отрицательны,

$$p_1 = p_2 = -\alpha. \quad (8.79)$$

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения равно (1.30)

$$u_c(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}. \quad (8.80)$$

Выразим через u_c ток в цепи (ток индуктивности)

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = C \left\{ -A_1 \alpha e^{-\alpha t} + A_2 [1 - \alpha t] e^{-\alpha t} \right\}. \quad (8.81)$$

Подставим значение $t=0$ и приравняем результат начальным условиям, тогда можно записать систему уравнений для постоянных интегрирования

$$\begin{cases} A_1 = E, \\ -\alpha A_1 + A_2 = 0. \end{cases} \quad (8.82)$$

В результате получим

$$\begin{cases} A_1 = E, \\ A_2 = \alpha E, \end{cases} \quad (8.83)$$

тогда общее решение дифференциального уравнения принимает вид

$$u_C(t) = E(1 + \alpha t)e^{-\alpha t}. \quad (8.84)$$

Зависимость напряжения на емкости $u_C(t)$ в критическом режиме показана на рис. 8.16 сплошной линией, там же пунктиром отображается кривая в колебательном режиме.

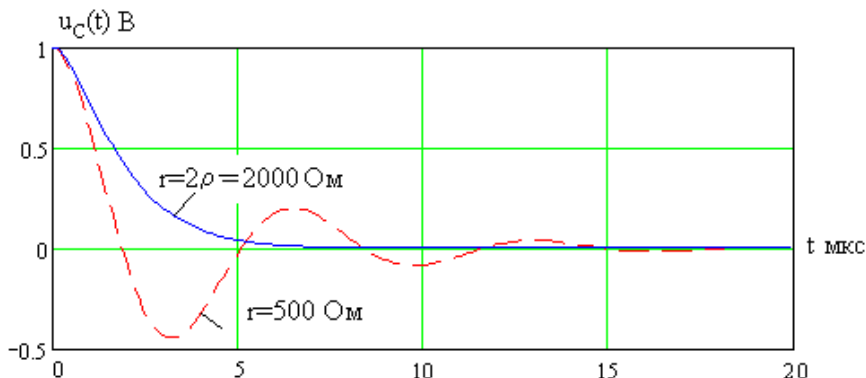


Рис. 8.16

Рассмотрим свободный процесс в аperiodическом режиме, который возникает при условии (8.67). При этом корни характеристического уравнения действительны, отрицательны и различны

$$\begin{cases} p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \\ p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \end{cases} \quad (8.85)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид (8.70). Выражая из него ток в цепи (индуктивности) и используя начальные условия, получим значения постоянных интегрирования (8.69)

$$\begin{cases} A_1 = -E \frac{p_2}{p_1 - p_2} = E \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}, \\ A_2 = E \frac{p_1}{p_1 - p_2} = E \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}. \end{cases} \quad (8.86)$$

Как видно, значение A_1 положительно, а A_2 - отрицательно, так как $\alpha > \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

В результате окончательно получим выражение для напряжения на емкости в аperiodическом режиме

$$u_C(t) = E \left[\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \right]. \quad (8.87)$$

На рис. 8.17 сплошной линией показана зависимость напряжения на емкости в аperiodическом режиме, штрихпунктирной линией показана аналогичная кривая в критическом режиме, а пунктирной - в колебательном.

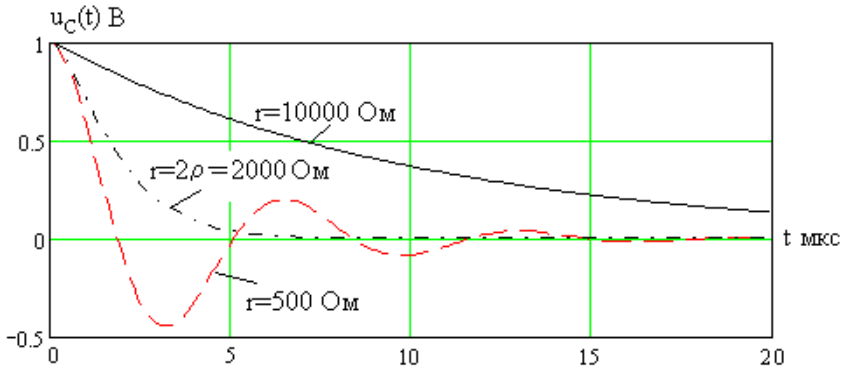


Рис. 8.17

8.4. Расчет переходного процесса в цепи второго порядка

Рассмотрим цепь второго порядка, схема которой показана на рис. 8.18, в которой в момент времени $t = 0$ включается идеальный источник напряжения с ЭДС E . До коммутации в цепи отсутствовали источники сигналов, следовательно начальные условия равны нулю,

$$u_{C1}(0) = 0, \quad u_{C2}(0) = 0. \quad (8.88)$$

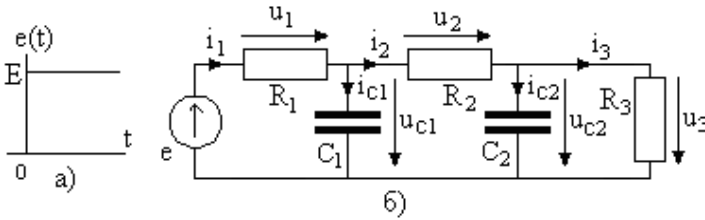


Рис. 8.18

Запишем систему уравнений цепи после коммутации:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = R_1 i_1, \\ u_2 = R_2 i_2, \\ u_3 = R_3 i_3, \\ i_{C1} = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}, \\ i_{C2} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \\ i_1 = i_2 + i_{C1}, \\ i_2 = i_3 + i_{C2}, \\ u_1 + u_{C1} = E, \\ u_{C1} = u_2 + u_{C2}, \\ u_{C2} = u_3. \end{array} \right. \quad (8.89)$$

Из седьмого уравнения получим

$$i_2 = \frac{1}{R_3} u_{C2} + C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \quad (8.90)$$

тогда из второго уравнения следует

$$u_2 = \frac{R_2}{R_3} u_{C2} + R_2 C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \quad (8.91)$$

и далее из девятого

$$u_{C1} = \left(\frac{R_2}{R_3} + 1 \right) u_{C2} + R_2 C_2 \frac{du_{C2}}{dt}. \quad (8.92)$$

Из четвертого уравнения найдем ток

$$i_{C1} = C_1 \left(\frac{R_2}{R_3} + 1 \right) \frac{du_{C2}}{dt} + R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2}. \quad (8.93)$$

Из шестого уравнения определим ток i_1

$$i_1 = \frac{1}{R_3} u_{C2} + \left[C_1 \left(\frac{R_2}{R_3} + 1 \right) + C_2 \right] \frac{du_{C2}}{dt} + R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} \quad (8.94)$$

и далее напряжение u_1

$$u_1 = \frac{R_1}{R_3} u_{C2} + R_1 \left[C_1 \left(\frac{R_2}{R_3} + 1 \right) + C_2 \right] \frac{du_{C2}}{dt} + R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2}. \quad (8.95)$$

В результате из восьмого уравнения с учетом (8.82) и (8.95) получим

$$\left(\frac{R_1}{R_3} + \frac{R_2}{R_3} + 1 \right) u_{C2} + \left[R_1 C_1 \left(\frac{R_2}{R_3} + 1 \right) + R_1 C_2 + R_2 C_2 \right] \frac{du_{C2}}{dt} + R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} = E. \quad (8.96)$$

Поделим обе части уравнения на множитель при старшей производной, тогда

$$\frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + \frac{R_1 C_1 (R_2 + R_3) + R_3 C_2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \frac{du_{C2}}{dt} + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} u_{C2} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} E. \quad (8.97)$$

Введем обозначения

$$2\alpha = \frac{R_1 C_1 (R_2 + R_3) + R_3 C_2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}, \quad (8.98)$$

$$\beta^2 = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}, \quad (8.99)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}. \quad (8.100)$$

Окончательно получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_{C2}}{dt} + \beta^2 u_{C2} = \gamma^2 E. \quad (8.101)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\alpha p + \beta^2 = 0, \quad (8.102)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{cases} p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \\ p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \end{cases} \quad (8.103)$$

Можно показать (проделайте это самостоятельно), что $\alpha > \beta$, тогда оба корня характеристического уравнения различные, действительные и отрицательные. Свободная составляющая переходного процесса (общее решение однородного дифференциального уравнения) равна

$$u_{C2\text{CB}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (8.104)$$

Определим принужденную составляющую переходного процесса. При постоянной правой части неоднородного уравнения принужденная составляющая также константа, тогда, подставляя ее в дифференциальное уравнение (8.101), получим

$$\beta^2 u_{C_2 \text{ ПП}} = \gamma^2 E, \quad (8.105)$$

тогда

$$u_{C_2 \text{ ПП}} = \frac{\gamma^2 E}{\beta^2} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E. \quad (8.106)$$

Рассмотрим принужденную составляющую как стационарный процесс (напряжение u_{C_2}). При $t \rightarrow \infty$ токи и напряжения становятся постоянными, емкости представляют собой разрыв цепи и тогда нетрудно записать выражение для постоянного напряжения u_{C_2} , которое полностью совпадает с (8.106).

В результате напряжение на емкости C_2 равно

$$u_{C_2}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E. \quad (8.107)$$

Напряжение на первой емкости из (8.92) определяется выражением

$$u_{C_1}(t) = \left(\frac{R_2}{R_3} + 1 \right) \left(A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E \right) + R_2 C_2 (A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}). \quad (8.108)$$

Подставляя значения $t \rightarrow \infty$ и используя нулевые начальные условия, получим систему уравнений для постоянных интегрирования в виде

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E = 0, \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0. \end{cases} \quad (8.109)$$

Решая систему уравнений, с учетом (8.104) получим

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E, \\ A_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E. \end{cases} \quad (8.110)$$

Подставляя постоянные интегрирования в общее решение дифференциального уравнения (8.107), можно записать

$$u_{C_2}(t) = E \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \left[1 - \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} e^{-(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})t} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} e^{-(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})t} \right] \quad (8.111)$$

При равных параметрах элементов $R_1 = R_2 = R_3 = R$ и $C_1 = C_2 = C$ получим

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{\tau}, \\ \beta^2 = \frac{3}{\tau^2}, \\ \gamma^2 = \frac{1}{\tau^2}, \end{cases} \quad (8.112)$$

где

$$\tau = RC, \quad (8.113)$$

тогда

$$u_{C_2}(t) = \frac{E}{3} \left[1 - \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{3t}{\tau}} \right]. \quad (8.114)$$

На рис. 8.19 показана зависимость напряжения u_{C_2} на емкости C_2 от нормированного времени t/τ при $E = 1$ В. Мелким пунктиром показано асимптотическое значение напряжения, равное $1/3$ В.

Подставляя результат (8.114) в выражение (8.92) для напряжения u_{C_1} на емкости C_1 , получим

$$u_{C_1}(t) = E \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{6} e^{-\frac{3t}{\tau}} \right]. \quad (8.115)$$

Эта зависимость широким пунктиром показана на рис. 8.16.

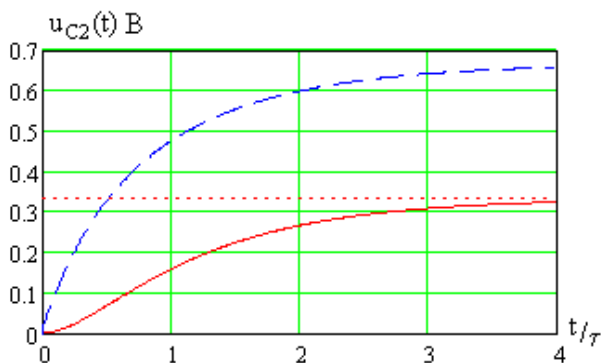


Рис. 8.19

8.5. Задания для самостоятельного решения

Задание 8.1. После выключения источников рис. 8.20 а и рис. 8.21 а рассчитайте свободные процессы $i_L(t)$ в цепях рис. 8.20 б и рис. 8.21 в, и $u_C(t)$ в цепях рис. 8.20 в и рис. 8.21 б.

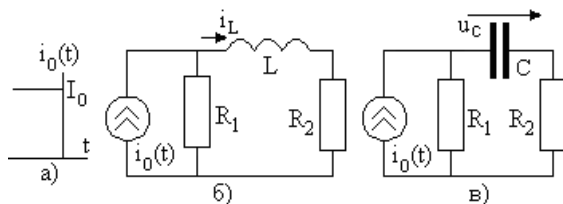


Рис. 8.20

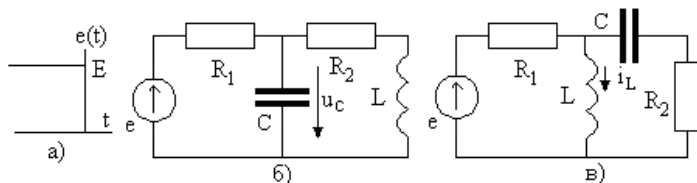


Рис. 8.21

Задание 8.2. Выполните задания 8.1 для **включающихся** в момент времени $t = 0$ источников напряжения и тока.

9. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

9.1. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа широко используется в математике в качестве символического метода решения дифференциальных уравнений. Оно ставит во взаимно однозначное соответствие функции времени $f(t)$, называемой **оригиналом**, функцию (**изображение**) $F(p)$ комплексной переменной p и применимо **только при условии**

$$f(t) = 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (9.1)$$

Прямое преобразование Лапласа имеет вид

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (9.2)$$

и предполагает интегрирование по действительной переменной t , а соответствующее ему **обратное преобразование** –

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (9.3)$$

требуется проведение интегрирования по **комплексной плоскости**, в пределах интегрирования величина c является правой границей всех особых точек функции $F(p)$.

Вычисление преобразования Лапласа достаточно трудоемко и в инженерной практике оно проводится с использованием таблиц [1,2,7], в которых изображения представлены в виде дробно-рациональных функций, их числитель и знаменатель записаны в виде произведений простых сомножителей с единичным коэффициентом при старшей степени p и действительными параметрами. Примеры оригиналов и изображений по Лапласу приведены в табл. 9.1. Функции Хевисайда $1(t)$ и Дирака $\delta(t)$ описаны в приложении

Преобразование Лапласа обладает свойствами, представленными в табл. 9.2.

Таблица 9.1

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
Дельта-функция Дирака $\delta(t)$	1	Единичная функция Хевисайда $1(t)$	$\frac{1}{p}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{a} \sin(at)$	$\frac{1}{p^2 + a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$

Таблица 9.2

Свойство	Оригиналы	Изображения
линейности	$a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)$	$a \cdot F_1(p) + b \cdot F_2(p)$
дифференцирования	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
интегрирования	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$
задержки	$f(t - \tau)$	$e^{-ap} F(p)$
свертки	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(p) F_2(p)$

Взаимное соответствие оригиналов и изображений отображается символами \leftrightarrow или $\stackrel{\text{Ф}}{=}$, например,

$$e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{p+a}. \quad (9.4)$$

9.2. Вычисление оригинала

Если найдено изображение $F(p)$, то для определения оригинала $f(t)$ его необходимо преобразовать к указанной выше форме и по таблице найти соответствующий оригинал.

Если полученное изображение отсутствует в таблице, то используется **разложение Хевисайда** для изображения в виде рациональной алгебраической функции, выраженной отношением двух многочленов,

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (9.5)$$

где

$$A(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0, \quad (9.6)$$

$$B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0, \quad (9.7)$$

– полиномы степени m и n соответственно, причем $m < n$. Определяются **полюсы изображения** – корни полинома знаменателя:

$$B(p) = 0. \quad (9.8)$$

Если полюсы **простые** (корни уравнения (9.8) p_k при $k = \overline{1, n}$ не кратные), то оригинал можно записать в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (9.9)$$

– где $B'(p)$ – производная полинома знаменателя при $p = p_k$. В случае кратных корней также имеется общее выражение для оригинала [7].

В качестве примера рассмотрим изображение вида

$$F(p) = \frac{1}{p(p+a)(p+b)}, \quad (9.10)$$

для которого полином знаменателя $B(p)$ равен

$$B(p) = p(p+a)(p+b). \quad (9.11)$$

Из уравнения

$$B(p) = p(p+a)(p+b) = 0 \quad (9.12)$$

следует, что функция $F(p)$ имеет три некрратных действительных полюса

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -a, \quad p_3 = -b. \quad (9.13)$$

Производная полинома знаменателя равна

$$B'(p) = (p+a)(p+b) + p(p+b) + p(p+a), \quad (9.14)$$

тогда из (9.9) получим

$$f(t) = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)} e^{-bt}. \quad (9.15)$$

На практике часто применяют разложение рациональной алгебраической функции $F(p)$ в виде суммы простых дробей. Если корни уравнения (9.8) действительные и некрратные, то можно записать

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{p - p_k}. \quad (9.16)$$

Если среди некрратных корней имеются два комплексно-сопряженных корня $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$, то два соответствующих слагаемых в (9.16) заменяются выражением вида

$$\frac{c(p+d)}{[(p-\alpha)^2 + \omega^2]}. \quad (9.17)$$

Неизвестные коэффициенты разложения можно определить суммированием дробей (9.16) и уравниванием результата с исходным выражением $F(p)$.

Имеется общая формула разложения и в случае кратных корней [7].

В качестве примера вновь рассмотрим изображение вида

$$F(p) = \frac{1}{p(p+a)(p+b)}, \quad (9.18)$$

корни знаменателя определяются из (9.13), тогда получим

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p+a} + \frac{c_3}{p+b}. \quad (9.19)$$

Складывая дроби в (9.19), получим

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{c_1(p+a)(p+b) + c_2p(p+b) + c_3p(p+a)}{p(p+a)(p+b)} \\ &= \frac{p^2(c_1 + c_2 + c_3) + p[c_1(a+b) + c_2b + c_3a] + c_1ab}{p(p+a)(p+b)}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Сравнивая полученное выражение с (9.18), получим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_1(a+b) + c_2b + c_3a = 0, \\ c_1ab = 1, \end{cases} \quad (9.21)$$

решение которой имеет вид

$$c_1 = \frac{1}{ab}, \quad c_2 = \frac{1}{a(a-b)}, \quad c_3 = \frac{1}{b(b-a)}. \quad (9.22)$$

В результате из (9.19) получим

$$F(p) = \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{a(a-b)} \cdot \frac{1}{p+a} + \frac{1}{b(b-a)} \cdot \frac{1}{p+b}. \quad (9.23)$$

Обращаясь к таблице преобразования Лапласа, получим

$$f(t) = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)} e^{-bt}. \quad (9.24)$$

что полностью совпадает с (9.15) и (9.24).

9.3. Операторные свойства токов и напряжений

Применительно к расчету переходных процессов в линейных электрических цепях свойства сигналов и цепей выражаются в операторной форме. Токи, напряжения и ЭДС как функции времени при обязательном условии (9.1) представляются своими изображением по Лапласу. Например, ЭДС $e(t)$

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (9.25)$$

график которой показан на рис. 9.1, можно выразить с помощью функции Хевисайда $1(t)$,

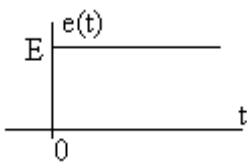


Рис. 9.1

$$e(t) = E \cdot 1(t). \quad (9.25)$$

Тогда в соответствии с табл. 9.1 **операторная ЭДС** равна

$$E(p) = \frac{E}{p}, \quad (9.26)$$

то есть $e(t) \leftrightarrow E/p$.

Аналогично можно записать операторные выражения для всех токов и напряжений цепи $i(t) \leftrightarrow I(p)$ и $u(t) \leftrightarrow U(p)$.

Если в результате расчетов будет получено выражение для операторного тока в виде

$$I(p) = A \frac{1}{p(p+a)}, \quad (9.27)$$

то соответствующий оригинал в соответствии с табл. 9.1 равен

$$i(t) = \frac{A}{a} (1 - e^{-at}). \quad (9.28)$$

9.4. Законы Кирхгофа в операторной форме

Законы Кирхгофа в **классической формулировке** справедливы для операторных токов и напряжений.

Первый закон Кирхгофа – алгебраическая сумма операторных токов, сходящихся в узле, равна нулю,

$$\sum_k I_k(p) = 0. \quad (9.29)$$

Второй закон Кирхгофа – алгебраическая сумма операторных напряжений на элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме операторных ЭДС включенных в контур идеальных источников напряжения,

$$\sum_k U_k(p) = \sum_n E_n(p). \quad (9.30)$$

Знаки в алгебраических суммах определяются выбранными положительными направлениями токов, напряжений, ЭДС и направлений обхода контуров.

9.5. Закон Ома в операторной форме для элементов цепи при нулевых начальных условиях

В операторной форме можно выразить сопротивления и проводимости элементов цепи **при нулевых начальных условиях**, результаты приведены в табл. 9.9.

Таблица 9.3

Элементы	Сопротивления $Z(p)$	Проводимости $Y(p)$
R	R	$\frac{1}{R}$
L	pL	$\frac{1}{pL}$
C	$\frac{1}{pC}$	pC

Тогда операторные токи и напряжения в элементах цепи связаны классическим выражением **закона Ома** в виде

$$U(p) = Z(p)I(p) \quad \text{или} \quad I(p) = Y(p)U(p). \quad (9.31)$$

9.6. Свойства цепи при ненулевых начальных условиях

При ненулевых начальных условиях токи или напряжения не равны нулю при $t < 0$, то есть нарушается условие (9.1) и к этим функциям времени нельзя применять преобразование

Лапласа. В этом случае реактивные элементы цепи с ненулевыми начальными условиями необходимо заменить эквивалентными схемами замещения, показанными на рис. 9.2.

На рис. 9.2 а показаны два варианта замены заряженной емкости (с начальным условием $u_c(0)$) на операторную цепь с незаряженной емкостью и идеальными источниками напряжения или тока. **Включающийся** после коммутации источник напряжения учитывает начальное напряжение емкости $u_c(0)$. Таким образом заряженная емкость заменяется «пустой» емкостью и источником напряжения, ЭДС которого удовлетворяет условию (9.1). Схема с источником тока получается в соответствии с теоремой об эквивалентном источнике.

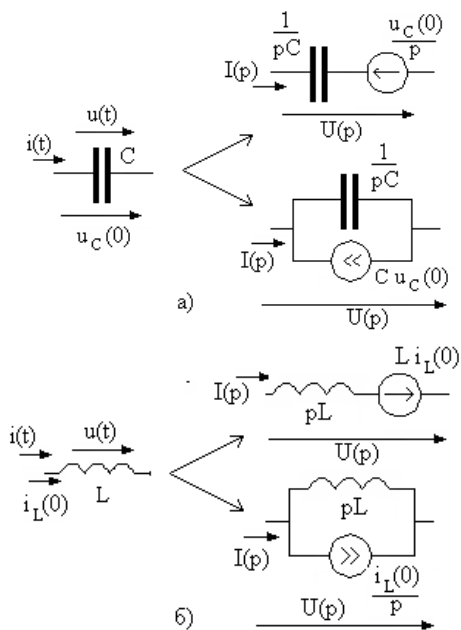


Рис. 9.2

На рис. 9.2 б показаны два варианта замены индуктивности с начальным условием $i_L(0) \neq 0$ на «незаряженную» индуктивность с идеальными источниками напряжения или тока.

Включающийся после коммутации идеальный источник тока учитывает начальный ток индуктивности. Схема с источником напряжения вытекает из теоремы об эквивалентном источнике тока.

9.7. Формирование уравнений цепи

Прежде всего, необходимо сформировать эквивалентную операторную схему анализируемой цепи. Для этого в исходной схеме необходимо индуктивности и емкости с **нулевыми начальными условиями** заменить их операторными сопротивлениями согласно табл. 9.3, а реактивные элементы с **ненулевыми начальными условиями** заменить их эквивалентными схемами согласно рис. 9.2.

Затем в полученной эквивалентной схеме вводятся обозначения и положительные направления **операторных** токов и напряжений в элементах цепи, и по законам Ома и Кирхгофа составляется система уравнений электрического равновесия. При этом могут использоваться: метод расчета на основе закона Ома, общий метод расчета цепи на основе законов Ома и Кирхгофа, методы контурных токов и узловых напряжений, метод наложения и теорема об эквивалентном источнике.

Затем из системы уравнений выражается изображение искомого тока или напряжения и оно преобразуется к форме, пригодной для использования таблиц обратных преобразований Лапласа. С их помощью по найденному изображению определяется оригинал искомого сигнала.

9.8. Задания для самостоятельного решения

Задание 9.1. Определите изображения по Лапласу следующих функций

$$f(t) = 1 - e^{-at}, \quad f(t) = e^{-at} - e^{-bt}.$$

Задание 9.2. Определите оригиналы следующих изображений по Лапласу

$$\frac{1}{ap+b}, \quad \frac{1}{p(ap+b)}, \quad \frac{1}{(ap+b)(cp+d)}.$$

Задание 9.3. При включении источника тока (рис. 9.3 а) запишите систему уравнений на основе общего метода расчета цепей по уравнениям Кирхгофа для операторного тока индуктивности (рис. 9.3 б) и напряжения емкости (рис. 9.3 в).

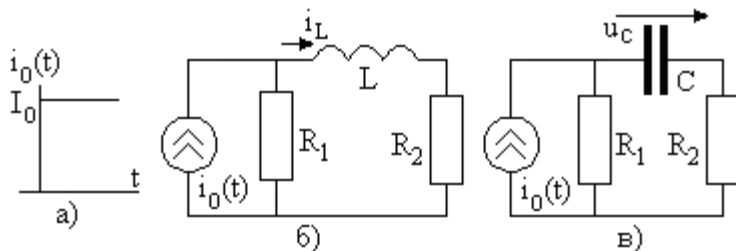


Рис. 9.3

Задание 9.4. При выключении источника напряжения (рис. 9.4 а) запишите систему уравнений на основе методов контурных токов и узловых напряжений для цепей с ненулевыми начальными условиями, показанных на рис. 9.4 б и рис. 9.4 в.

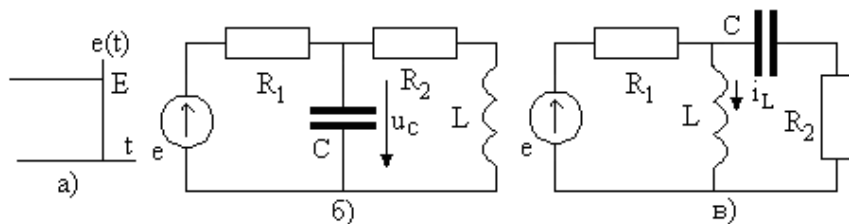


Рис. 9.4

10. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

10.1. Расчет переходного процесса в цепи первого порядка

Рассмотрим переходной процесс в цепи с **нулевыми начальными условиями**, показанной на рис. 2.7 и на рис. 10.1б, входное воздействие показано на рис. 10.1а.

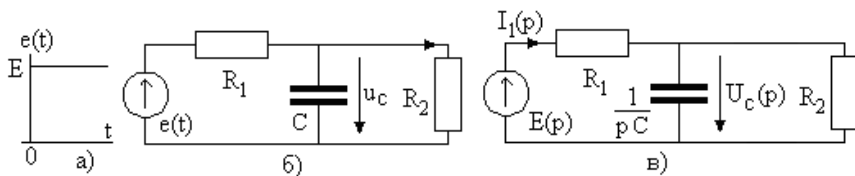


Рис. 10.1

Эквивалентная операторная схема замещения цепи приведена на рис. 10.1в. В ней емкость с нулевым начальным напряжением заменяется своим операторным сопротивлением, введены обозначения операторного напряжения $U_c(p)$, тока $I_1(p)$ и включающийся источник напряжения заменен операторной ЭДС

$$E(p) = \frac{E}{p}. \quad (10.1)$$

Операторное сопротивление цепи $Z(p)$ относительно точек подключения источника равно

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = R_1 + \frac{R_2}{1 + pCR_2}. \quad (10.2)$$

Тогда по закону Ома операторный ток $I_1(p)$ имеет вид

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p} \frac{1}{R_1 + \frac{R_2}{1 + pCR_2}} = \frac{E}{p} \frac{1 + pCR_2}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2}, \quad (10.3)$$

а напряжение на емкости –

$$U_C(p) = I_1(p) \frac{R_2}{1 + pCR_2} = \frac{E}{p} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2}. \quad (10.4)$$

Полученное изображение (10.4) искомого напряжения необходимо преобразовать в форму, в которой простые операторные сомножители имеют единичный множитель при старшей степени p , тогда вынося за скобку CR_1R_2 , получим

$$U_C(p) = \frac{E}{CR_1} \frac{1}{p \left(p + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} \right)}. \quad (10.5)$$

Обращаясь к табл. 3.1 преобразований Лапласа, можно записать оригинал искомого сигнала

$$u_C(t) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left[1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} t} \right]. \quad (10.6)$$

Как видно полученное напряжение совпадает с (2.39), но получено заметно проще. Его временная диаграмма показана на рис. 2.5.

Рассмотрим переходной процесс $i_L(t)$ в цепи, показанной на рис. 10.2 (он рассмотрен ранее для цепи рис. 2.9). В ней в момент времени $t = 0$ включается идеальный источник постоянного тока I_0 . Идеальный источник напряжения с ЭДС E_0 был включен всегда, остается включенным после коммутации и в эквивалентной схеме рис. 10.2а он заменяется включающимся источником напряжения E_0/p . Источник напряжения $Li_L(0)$ учитывает ненулевое начальное условие (2.37),

$$i_L(0) = \frac{E_0}{R_1 + R_2}. \quad (10.7)$$

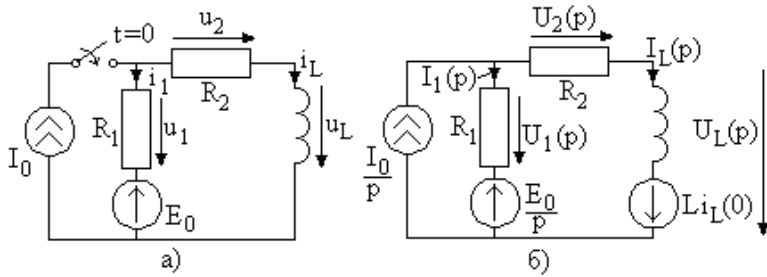


Рис. 10.2

Применим общий метод расчета цепи по уравнениям Кирхгофа, для которого система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} U_1(p) = R_1 I_1(p), \\ U_2(p) = R_2 I_L(p), \\ U_L(p) = pL I_L(p) - Li_L(0), \end{cases} \quad (10.8)$$

$$\begin{cases} I_1(p) + I_L(p) = \frac{I_0}{p}, \\ -U_1(p) + U_2(p) + U_L(p) = \frac{E_0}{p}. \end{cases} \quad (10.9)$$

Подставляя в уравнение второго закона Кирхгофа напряжения из уравнений закона Ома с учетом уравнения первого закона Кирхгофа, получим

$$I_L(p)(R_1 + R_2 + pL) = \frac{I_0 R_1 + E_0}{p} + Li_L(0), \quad (10.10)$$

откуда следует

$$I_L(p) = \frac{I_0 R_1 + E_0}{p(R_1 + R_2 + pL)} + \frac{Li_L(0)}{R_1 + R_2 + pL}. \quad (10.11)$$

С учетом начального условия (10.7) после преобразования к требованиям таблиц преобразования Лапласа, получим

$$I_L(p) = \frac{I_0 R_1 + E_0}{L} \frac{1}{p \left(p + \frac{R_1 + R_2}{L} \right)} + \frac{LE_0}{L(R_1 + R_2)} \frac{1}{\left(p + \frac{R_1 + R_2}{L} \right)}. \quad (10.12)$$

Используя табл. 3.1, найдем оригинал тока индуктивности (проделайте выкладки самостоятельно)

$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= \frac{E_0 + R_1 I_0}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \right) + \frac{E_0}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} = \\
 &= -\frac{R_1 I_0}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} + \frac{E_0 + R_1 I_0}{R_1 + R_2}.
 \end{aligned}
 \tag{10.13}$$

что полностью совпадает с (2.54). Зависимость тока индуктивности $i_L(t)$ при $E_0 = 1\text{В}$, $I_0 = 1\text{мА}$, $R_1 = R_2 = 1\text{кОм}$ и $L = 2\text{мГн}$ показана на рис. 2.11.

10.2. Расчет свободного процесса в цепи первого порядка

Проведем расчет свободного процесса $u_C(t)$ при выключении источника $e(t)$ (рис. 10.3 а) в цепи, показанной на рис. 10.3 б. Начальные условия равны

$$u_C(0) = E_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}
 \tag{10.14}$$

(проведите расчет самостоятельно).

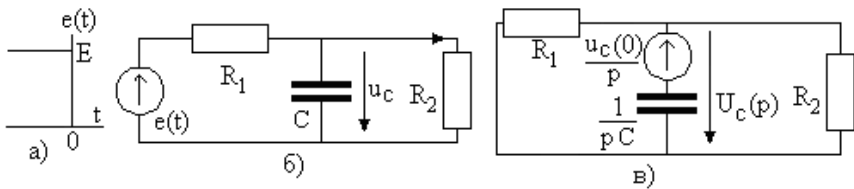


Рис. 10.3

Эквивалентная операторная схема цепи показана на рис. 10.3 в (емкость с ненулевыми начальными условиями заменена эквивалентной операторной схемой на рис. 9.2 а), тогда на основе закона Ома можно записать

$$U_c(p) = -\frac{u_c(0)}{p} \frac{\frac{1}{pC}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{pC}} + \frac{u_c(0)}{p}. \quad (10.15)$$

Преобразуя полученное выражение к виду, пригодному к использованию таблицы преобразования Лапласа, получим

$$U_c(p) = -\frac{u_c(0)}{C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{1}{p \left(p + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \right)} + \frac{u_c(0)}{p}. \quad (10.16)$$

В результате с помощью табл. 3.1 найдем оригинал напряжения на емкости

$$u_c(t) = -u_c(0) \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t} \right) + u_c(0) = E_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t}. \quad (10.17)$$

Зависимость напряжения на емкости $u_c(t)$ от времени при $E_0 = 1\text{В}$, $R_1 = R_2 = 1\text{кОм}$ и $C = 2\text{нФ}$ показана на рис. 10.4 (физический анализ полученных результатов проведите самостоятельно).

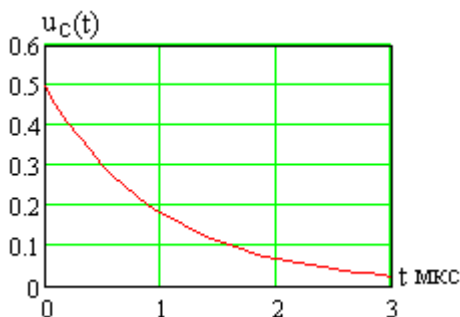


Рис. 10.4

10.3. Расчет переходного процесса в цепи второго порядка

Рассмотрим цепь второго порядка (последовательный колебательный контур с нагрузкой R_H), схема которой показана на рис. 10.5, в которой в момент времени $t = 0$ включается идеальный источник напряжения с ЭДС E . До коммутации в цепи отсутствовали источники сигналов, следовательно, начальные условия равны нулю,

$$i(0) = 0, \quad u_C(0) = 0. \quad (10.18)$$

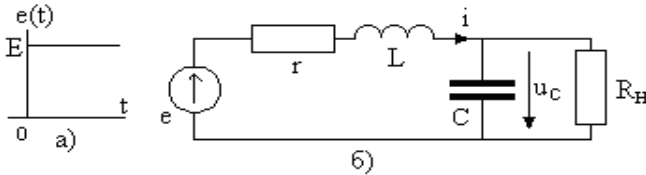


Рис. 10.5

Эквивалентная операторная схема замещения цепи показана на рис. 10.6.

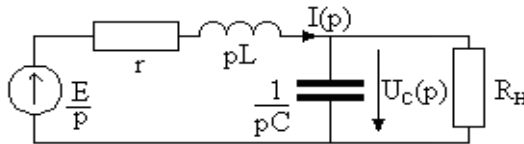


Рис. 10.6

По закону Ома запишем операторный ток

$$I(p) = \frac{E}{p} \frac{1}{r + pL + \frac{R_H \frac{1}{pC}}{R_H + \frac{1}{pC}}}, \quad (10.19)$$

После преобразований для напряжения на емкости получим

$$U_C(p) = \frac{E}{p} \frac{R_H}{(r + pL)(pCR_H + 1) + R_H}, \quad (10.20)$$

или, раскрывая скобки,

$$U_C(p) = \frac{E}{LC} \frac{1}{p(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)}, \quad (10.21)$$

где

$$\alpha = \frac{CrR_H + L}{2LCR_H}, \quad (10.22)$$

$$\omega_0^2 = \frac{R_H + r}{LCR_H}, \quad (10.23)$$

(проведите преобразования самостоятельно).

Первый полюс изображения $U_C(p)$ равен

$$p_1 = 0, \quad (10.24)$$

а два других определяются из решения уравнения

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0, \quad (10.25)$$

$$\begin{cases} p_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \\ p_3 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \end{cases} \quad (10.26)$$

В результате из (10.21) получим

$$U_C(p) = \frac{E}{LC} \frac{1}{p(p - p_2)(p - p_3)}. \quad (10.27)$$

Это изображение уже рассматривалось ранее (3.10) при замене $a = -p_2$, $b = -p_3$ и его оригинал равен выражению (3.24), которое можно преобразовать к виду

$$f(t) = \frac{1}{p_2 p_3} + \frac{1}{p_2 p_3 (p_3 - p_2)} [p_2 e^{p_3 t} - p_3 e^{p_2 t}]. \quad (10.28)$$

С учетом (10.26) получим выражение для напряжения емкости (проведите преобразования самостоятельно)

$$u_C(t) = E \frac{R_H}{r + R_H} \left\{ 1 + \frac{e^{-\alpha t}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \left[\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \right) e^{(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \right) e^{-(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \right] \right\}. \quad (10.29)$$

Результат зависит от свойств полюсов p_2 и p_3 . Выделяются три варианта, соответствующих режимам переходного процесса. **Колебательный режим** возникает при условии

$$\alpha < \omega_0, \quad (10.30)$$

которое при подстановке (10.22) и (10.23) принимает вид

$$\frac{rR_H + \frac{L}{C}}{\sqrt{R_H(R_H + r)}} < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.31)$$

Обратитесь к материалу, посвященному стационарным гармоническим процессам в последовательном колебательном контуре, где введено характеристическое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (10.32)$$

тогда (10.31) преобразуется к виду

$$\frac{rR_H + \rho^2}{\sqrt{R_H(R_H + r)}} < 2\rho. \quad (10.33)$$

Если выполняется типичное для колебательного контура условие

$$R_H \gg \rho \gg r, \quad (10.34)$$

то получим неравенство

$$r + \frac{\rho^2}{R_H} < 2\rho. \quad (10.35)$$

В теории последовательных колебательных контуров известна величина

$$\rho^2 / R_H,$$

равная эквивалентному сопротивлению потерь, вносимому в

контур активной нагрузкой R_H (найдите этот материал). При $R_H \rightarrow \infty$ неравенство (10.33) преобразуется к полученному ранее условию колебательного режима в контуре без нагрузки.

Обозначая

$$\omega_{CB} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{\frac{R_H + r}{R_H} - \frac{(R_H r + \rho^2)^2}{4\rho^2 R_H^2}}, \quad (10.36)$$

тогда из (10.29) получим

$$u_C(t) = E \frac{R_H}{r + R_H} \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega_{CB} t) + \frac{\alpha}{\omega_{CB}} \sin(\omega_{CB} t) \right] \right\} \quad (10.37)$$

(проведите эти преобразования самостоятельно).

Зависимость напряжения на емкости (10.37) от времени при $E = 10\text{В}$, $C = 1\text{нФ}$, $L = 1\text{мГн}$, $r = 100\text{Ом}$ для $R_H = 1\text{МОм}$ показана на рис. 10.7 а и для $R_H = 2\text{кОм}$ – на рис. 10.7 б. Как видно, процесс является колебательным, начинается со значения $u_C(0) = 0$ и стремится к величине

$$u_C(t \rightarrow \infty) = E \frac{R_H}{r + R_H} \quad (10.38)$$

в стационарном режиме.

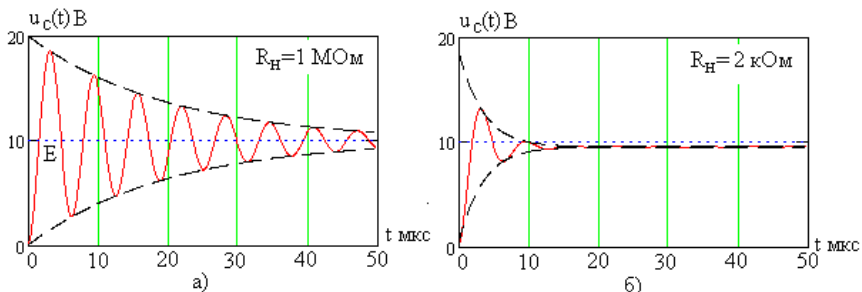


Рис. 10.7

Зависимости от сопротивления нагрузки R_H коэффициента затухания α , частоты свободных колебаний ω_{CB} и резонансной частоты ω_0 (пунктирная линия) показаны на рис. 10.8.

Как видно, с уменьшением сопротивления нагрузки увеличиваются потери мощности сигнала в контуре и колебания затухают быстрее, а их частота понижается, пока выполняется условие (10.30).

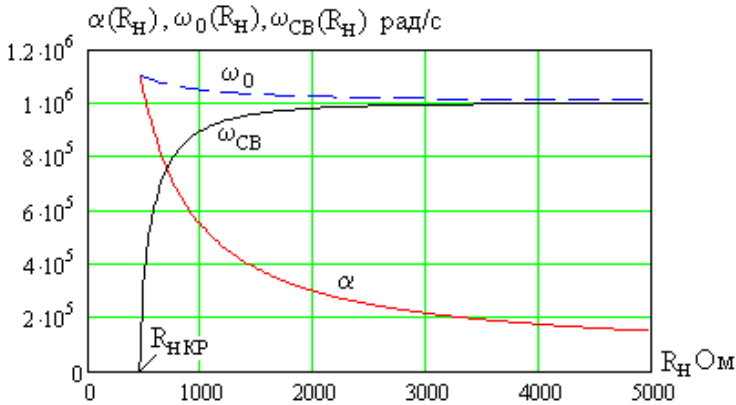


Рис. 10.8

При выполнении условия

$$\alpha = \omega_0, \quad (10.39)$$

которое принимает вид

$$\frac{rR_H + \rho^2}{\sqrt{R_H(R_H + r)}} = 2\rho, \quad (10.40)$$

в цепи возникает **критический режим** свободных колебаний.

Это условие можно преобразовать к виду

$$4\rho^2 R_H^2 = (rR_H - \rho^2)^2, \quad (10.41)$$

откуда следует условие критического режима в виде

$$R_{HKP} = \frac{\rho^2}{2\rho + r}. \quad (10.42)$$

Выражение для $u_c(t)$ можно получить из (10.29) рассматривая его предел при $\alpha \rightarrow \omega_0$ и используя разложение экспоненты в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x \text{ и } e^{-x} = 1 - x. \quad (10.43)$$

В результате получим (проведите расчет самостоятельно)

$$u_c(t) = E \frac{R_H}{R_H + r} [1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha t)]. \quad (10.44)$$

Этот же результат следует из таблицы преобразований Лапласа [6] вида

$$\frac{1}{p(p+a)^2} \leftrightarrow \frac{1}{a^2} [1 - e^{-at} (1 + at)], \quad (10.45)$$

(проверьте это самостоятельно).

В аperiodическом режиме свободных колебаний при

$$\alpha > \omega_0, \quad (10.46)$$

или

$$\frac{rR_H + \rho^2}{\sqrt{R_H(R_H + r)}} > 2\rho, \quad (10.47)$$

Напряжение на емкости определяется выражением (10.29).

Зависимости напряжения на емкости в колебательном (10.37), критическом (10.45) и аperiodическом (10.29) режимах от времени при $E = 10\text{В}$, $C = 1\text{нФ}$, $L = 1\text{мГн}$, $r = 100\text{Ом}$ для различных R_H ($R_{H\text{кр}} = 476\text{Ом}$) показаны на рис. 10.9.

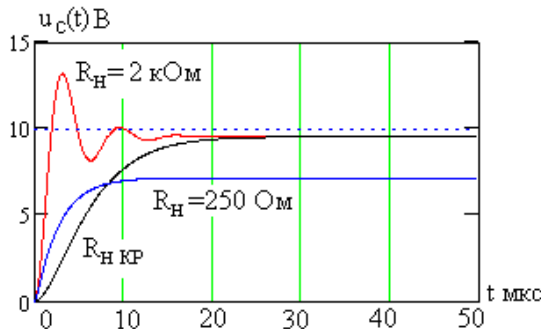


Рис. 10.9

10.4. Расчет свободного процесса в цепи второго порядка

Рассмотрим нагруженный последовательный колебательный контур (рис. 10.10 б), в котором выключается действовавший до коммутации источник напряжения (рис. 10.10 а). Начальные условия свободного процесса имеют вид

$$\begin{cases} i_L(0) = \frac{E}{R_H + r}, \\ u_C(0) = E \frac{R_H}{R_H + r}. \end{cases} \quad (10.48)$$

Эквивалентная операторная схема цепи показана на рис. 10.10в.

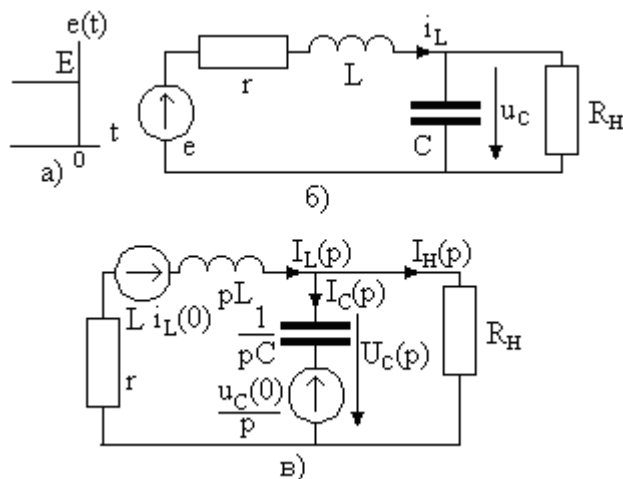


Рис. 10.10

Воспользуемся методом узловых напряжений, выразив операторные токи ветвей через операторное напряжение на емкости $U_C(p)$,

$$\begin{cases} I_L(p) = \frac{U_C(p) - Li_L(p)}{r + pL}, \\ I_C(p) = pC \left[U_C(p) - \frac{u_C(0)}{p} \right], \\ I_H(p) = \frac{U_C(p)}{R_H}. \end{cases} \quad (10.49)$$

По первому закону Кирхгофа можно записать

$$I_L(p) = I_C(p) + I_H(p), \quad (10.50)$$

тогда с учетом (10.49) получим уравнение

$$-\frac{U_C(p) - Li_L(0)}{r + pL} = pC \left[U_C(p) - \frac{u_C(0)}{p} \right] + \frac{U_C(p)}{R_H}, \quad (10.51)$$

решение которого имеет вид

$$U_C(p) = \frac{1}{LC} \frac{Li_L(0) + rCu_C(0)}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} + \frac{pu_C(0)}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} \quad (10.52)$$

(получите это выражение самостоятельно), где α определяется из (10.22), а ω_0^2 – из (10.23). Вынося за скобку $u_C(0)$ и используя выражения для начальных условий, получим

$$U_C(p) = u_C(0) \left[\frac{1}{LC} \frac{\frac{L}{R_H} + rC}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} + \frac{p}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} \right]. \quad (10.53)$$

С учетом (10.22) можно записать

$$\begin{aligned} U_C(p) &= u_C(0) \left[\frac{2\alpha}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} + \frac{p}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} \right] = \\ &= u_C(0) \left[\frac{p + 2\alpha}{(p - p_1)(p - p_2)} \right], \end{aligned} \quad (10.54)$$

где полюсы p_1 и p_2 определяются из (10.26). Оригинал (10.54) можно найти, воспользовавшись известным [7] преобразованием Лапласа

$$\frac{p+d}{(p-a)(p-b)} = \frac{a+d}{a-b} e^{at} - \frac{b+d}{a-b} e^{bt}. \quad (10.55)$$

Условия колебательного, критического и аperiodического режимов определены в предыдущем подразделе. Получите самостоятельно выражения для мгновенных значений напряжения на емкости $u_C(t)$, постройте их временные диаграммы, сравните их с полученными ранее результатами. Эти зависимости при $E = 10\text{В}$, $C = 1\text{нФ}$, $L = 1\text{мГн}$, $r = 100\text{Ом}$ для различных R_H ($R_{HKP} = 476\text{ Ом}$) показаны на рис. 10.11.

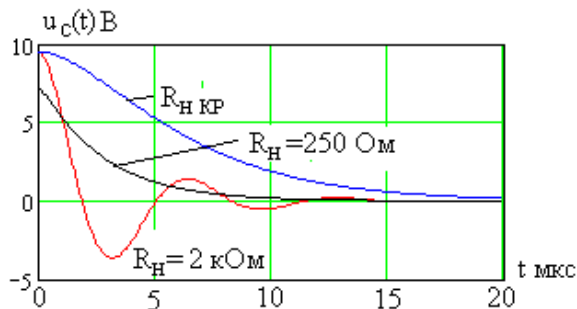


Рис. 10.11

10.5. Задания для самостоятельного решения

Задание 10.1. Операторным методом рассчитайте переходные процессы в цепях на рис. 10.12 а и рис. 10.12 б при выключении (рис. 10.12 в) и включении (рис. 10.12 г) источника тока.

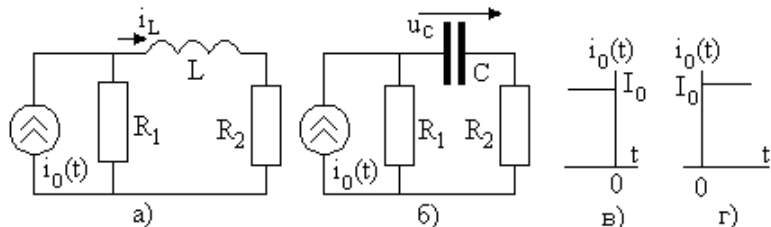


Рис. 10.12

Задание 10.2. Операторным методом рассчитайте переходные процессы в цепях на рис 10.13 а и рис. 10.13 б при выключении (рис. 10.13 в) и включении (рис. 10.13 г) источника напряжения.

Задание 10.3. Исследуйте влияние сопротивления потерь r нагруженного колебательного контура рис.10.10 на временные диаграммы напряжения на емкости $u_c(t)$.

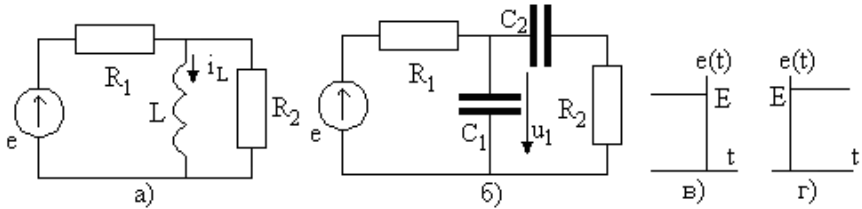


Рис. 10.13

Задание 10.4. Рассмотрите свободные процессы в цепях первого (рис. 10.14 а) и второго (рис. 10.14 б) порядка, которые исследуется в ходе лабораторной работы «Свободные процессы в линейных цепях».

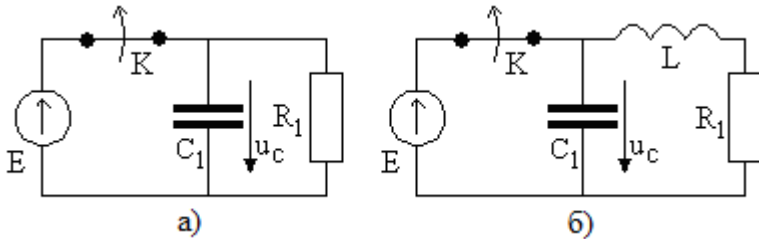


Рис. 10.14

11. ВРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

11.1. Постоянная времени цепи

Постоянная времени τ электрической цепи – это интервал времени, в течение которого **свободная составляющая** переходного процесса в цепи первого порядка или **амплитуда свободной составляющей** колебательного процесса в цепи второго порядка уменьшается в $e = 2,71$ раз от своего начального значения.

Свободная составляющая переходного процесса всегда в целом **затухающая** функция времени, так как она возникает за счет энергии, накопленной в реактивных элементах цепи до коммутации.

В цепи первого порядка свободная составляющая $s_{CB}(t)$ изменяется по экспоненциальному закону вида

$$s_{CB}(t) = S_m e^{-\alpha t}, \quad (11.1)$$

где α – коэффициент затухания. Зависимость $s_{CB}(t)$ показана на рис. 11.1, там же отмечена постоянная времени.

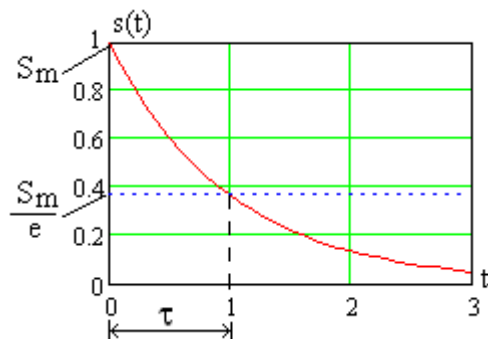


Рис. 11.1

Из (11.1) можно записать

$$S_0 e^{-\alpha(t+\tau)} = \frac{S_0 e^{-\alpha t}}{e}, \quad (11.2)$$

откуда следует

$$\tau = \frac{1}{\alpha}, \quad (11.3)$$

то есть постоянная времени цепи τ обратно пропорциональна коэффициенту затухания α .

В колебательном режиме в цепи второго порядка по экспоненциальному закону затухает амплитуда свободной составляющей

$$S_{CB}(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \quad (11.4)$$

как показано на рис. 11.2.

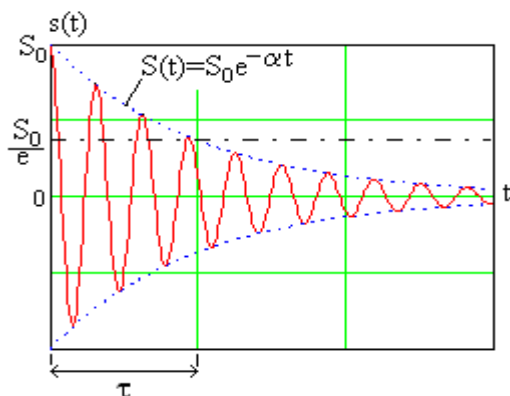


Рис. 11.2

В этом случае для определения постоянной времени τ проводится **огibaющая** колебательного процесса (пунктир на рис. 11.2), по которой и определяется величина τ . И в этом случае справедлива формула (11.3).

Постоянная времени зависит от схемы цепи и параметров элементов. Она определяется в результате расчета свободной составляющей переходного процесса.

Например, для цепи первого порядка на рис. 2.1 получено

выражение свободной составляющей (2.11) вида (11.1), из которого вытекает выражение для постоянной времени

$$\tau = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (11.5)$$

В последовательном колебательном контуре рис. 2.12 получено выражение для колебательного свободного процесса (2.78), амплитуда которого меняется по закону (11.4). Тогда для постоянной времени получим

$$\tau = \frac{2L}{r}. \quad (11.6)$$

Величина постоянной времени характеризует инерционность цепи. Чем она выше, тем медленнее изменяются в цепи свободные токи и напряжения.

11.2. Время установления переходного процесса

Теоретически свободные и переходные процессы устанавливаются (протекают) бесконечно долго и строго говоря, время установления переходного процесса **бесконечно**. Однако подобное определение технически неконструктивно и его необходимо уточнить, введя определенный уровень снижения **свободной составляющей** переходного процесса, при котором его можно считать **практически** установившимся.

Например, если принять допустимым снижение свободной составляющей до 1% от начального значения, то из (11.1) получим уравнение для времени установления t_y

$$S_0 e^{-\alpha t_y} = \frac{S_0}{100}, \quad (11.7)$$

откуда следует

$$t_y = \frac{1}{\alpha} \ln(100) = \frac{4,605}{\alpha} = 4,605\tau. \quad (11.8)$$

Чаще всего используют инженерную оценку времени установления в виде

$$t_y = (3 \div 5)\tau = \frac{3 \div 5}{\alpha}, \quad (5.9)$$

что вполне согласуется с (11.8).

11.3. Декремент затухания

Для **колебательного** свободного процесса вида рис. 11.2 в качестве характеристики уменьшения ее амплитуды используется величина **декремента затухания**, равного отношению амплитуд колебаний A_1 и A_2 на соседних периодах (отстоящих на интервал периода свободных колебаний T друг от друга в любом месте временной диаграммы),

$$D = \frac{A_1}{A_2}, \quad (11.10)$$

как показано на рис. 11.3.

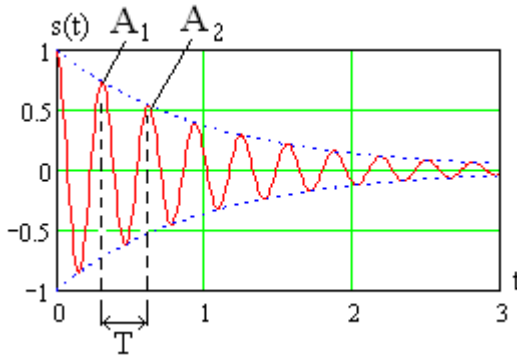


Рис. 11.3

При незатухающих колебаниях (в идеальном контуре без потерь) $D = 1$. В реальном контуре при наличии потерь $r > 0$ свободные колебания всегда затухают и $D > 1$. С учетом (11.4) нетрудно показать, что

$$D = \frac{S_0 e^{-\alpha(t+T)}}{S_0 e^{-\alpha t}} = e^{\alpha T}. \quad (11.11)$$

На практике часто удобнее пользоваться **логарифмическим декрементом затухания** d , равным

$$d = \ln(D) = \alpha T. \quad (11.12)$$

Для простого последовательного колебательного контура вида рис. 2.12 были получены выражения для коэффициента затухания (2.56)

$$\alpha = \frac{r}{2L} \quad (11.13)$$

и частоты свободных колебаний (2.65)

$$\omega_{CB} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (11.14)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (11.15)$$

Определим период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{CB}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}, \quad (11.16)$$

тогда для логарифмического декремента затухания получим

$$d = \alpha T = \frac{\pi}{Q} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}, \quad (11.17)$$

где Q – добротность контура (повторите необходимый материал). При $Q \gg 1$ приближенно

$$d = \frac{\pi}{Q}. \quad (11.18)$$

Как видно, логарифмический декремент затухания полностью определяется добротностью колебательного контура.

Декремент затухания D просто определяется экспериментально по осциллограмме свободного процесса (рис. 11.3) согласно (11.10). Тогда появляется возможность экспериментально определить добротность колебательного контура с помощью соотношения (11.18).

В высокодобротном колебательном контуре свободные

колебания затухают медленно, как показано на рис. 11.4 при $Q = 100$. Как видно, измерение декремента затухания затруднительно ввиду близости значений соседних амплитуд A_1 и A_2 , что приведет к большой погрешности определения величины D . Удобнее проводить измерения амплитуд A_1 и A_n , разделенных n периодами,

$$D_n = \frac{A_1}{A_n}, \quad (11.19)$$

(пример для $n = 10$ показан на рис. 11.4).

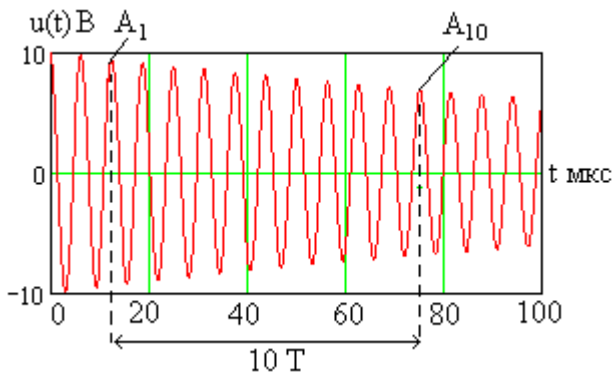


Рис. 11.4

Так как амплитуда свободного процесса затухает экспоненциально (11.4), то нетрудно показать, что

$$D = \sqrt[n]{D_n}. \quad (11.20)$$

Предлагаемая методика позволяет измерять декремент затухания свободных колебаний в высокочастотном контуре.

11.4. Задания для самостоятельного решения

Задание 11.1. Определите постоянные времени цепей, показанных на рис. 11.5 при выключении идеального источника постоянного входного напряжения $u_{BX} = U$.

Задание 11.2. Определите время установления переходных процессов для цепей из задания 11.1.

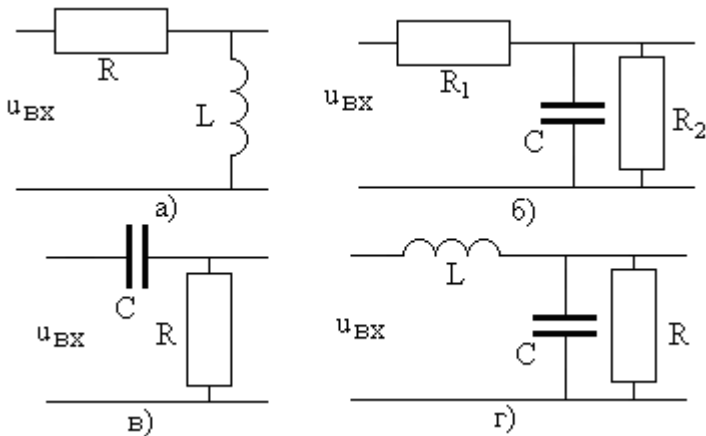


Рис. 11.5

Задание 11.3. Определите условия возникновения колебательного режима и частоту свободных колебаний в цепи на рис. 11.6. Получите выражение для декремента и логарифмического декремента затухания.

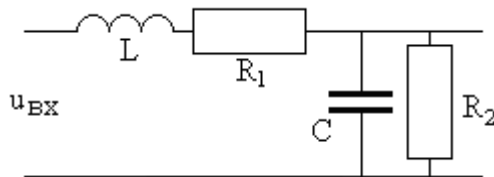


Рис. 11.6

12. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

12.1. Силовая трехфазная сеть переменного тока

Трехфазная силовая сеть представляет собой четырехпроводную систему электропитания, соответствующая «розетка» показана на рис. 12.1 а, временные диаграммы гармонических напряжений с частотой $f = 50$ Гц между фазами А ($u_A(t)$), В ($u_B(t)$) и С ($u_C(t)$) и нейтралью N приведены на рис. 12.1 б. Напряжения фаз с действующими значениями **220 В** (амплитудами $U=311$ В) сдвинуты друг от друга по фазе на 120° (на $2\pi/3$ радиан) согласно выражениям

$$\begin{cases} u_1(t) = U \cos(\omega t), \\ u_2(t) = U \cos(\omega t + 2\pi/3), \\ u_3(t) = U \cos(\omega t + 4\pi/3). \end{cases}$$

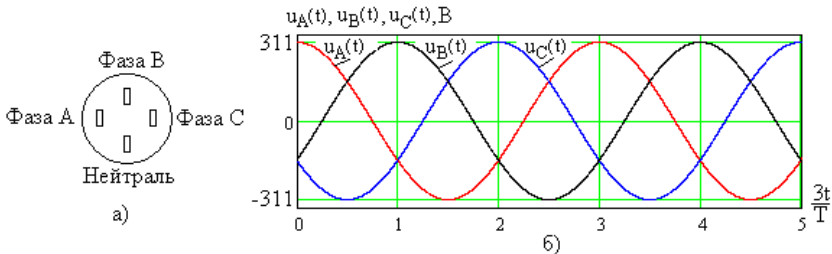


Рис. 12.1

Напряжения между фазами АВ ($u_{AB}(t)$), ВС ($u_{BC}(t)$) и СА ($u_{CA}(t)$) также имеют гармоническую форму (как и на рис. 12.9 б) но с действующим значением **380 В** (амплитудой 537 В).

12.2. Модель трехфазной цепи

Модель трехфазной сети (трехфазного источника напряжения) строится из **трех** идеальных источников напряжения,

соединенных «звездой» или «треугольником», как показано на рис. 12.2 а и рис. 12.2 б соответственно.

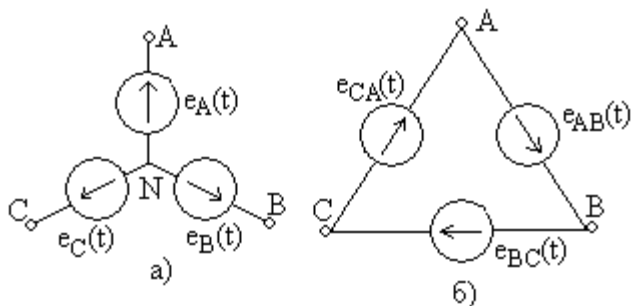


Рис. 12.2

Нагрузка трехфазной сети (например, обмотки электродвигателя) также включается «звездой» или «треугольником», как показано на рис. 12.3 а и рис. 12.3 б соответственно.

Трехфазный источник (рис. 12.2) и нагрузка (рис. 12.3) могут соединяться пятью способами:

- звезда – звезда;
- звезда – треугольник;
- треугольник – звезда;
- треугольник – треугольник;
- звезда – звезда без нейтрали.

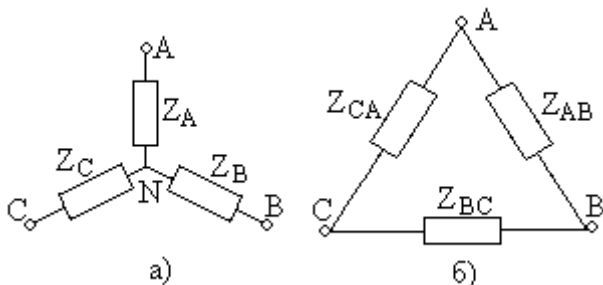


Рис. 12.3

Пример соединения «звезда – звезда» показан на рис. 12.4
(остальные варианты схем изобразите самостоятельно).

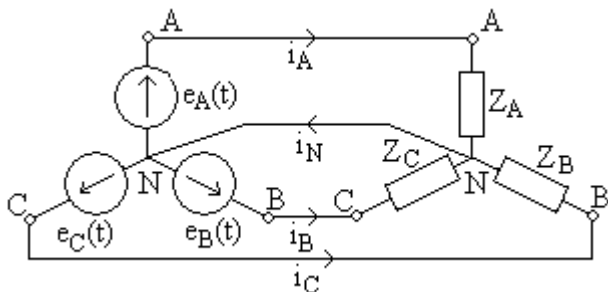


Рис. 12.4

В модели «звезда» комплексные амплитуды ЭДС источников равны

$$\dot{E}_A = E e^{j\psi_A}, \dot{E}_B = E e^{j\psi_B}, \dot{E}_C = E e^{j\psi_C},$$

при условиях

$$\psi_B - \psi_A = 120^\circ, \psi_C - \psi_A = 240^\circ$$

и $E = \sqrt{2} \cdot 220 = 311 \text{ В}$, например,

$$\dot{E}_A = E, \dot{E}_B = E e^{j120^\circ}, \dot{E}_C = E e^{j240^\circ}.$$

Очевидно, что

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0.$$

В модели соединения треугольником (рис. 12.2 б) имеет место аналогичное равенство вида

$$\dot{E}_{AB} + \dot{E}_{BC} + \dot{E}_{CA} = 0,$$

то есть кольцевой ток в «треугольнике» отсутствует.

Векторная диаграмма ЭДС при соединении звездой показана на рис. 12.5 а.

Трехфазную сеть называют симметричной, если каждая фаза нагружена на одинаковое сопротивление,

$$Z_A = Z_B = Z_C.$$

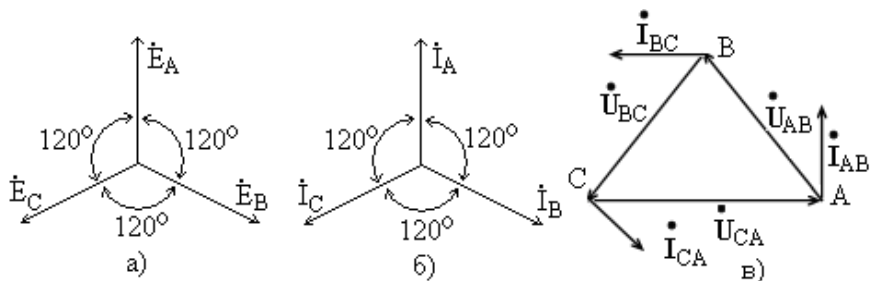


Рис. 12.5

12.3. Токи и напряжения в трехфазной цепи

Комплексные амплитуды токов фаз в цепи на рис. 12.4 равны

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A}, \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B}, \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C},$$

В симметричной цепи токи с одинаковыми амплитудами сдвинуты по фазе друг от друга на 120° , их векторная диаграмма при активных сопротивлениях показана на рис. 12.5 б. Если нагрузка комплексна,

$$Z_A = Z_B = Z_C = Ze^{j\varphi},$$

Z - модуль, а φ - аргумент сопротивления нагрузки (сдвиг фаз между напряжением и током фазы), то диаграмма токов будет отличаться от показанной на рис. 12.5 б поворотом на угол φ по часовой стрелке. Аналогичная векторная диаграмма для соединения треугольником резистивно-индуктивных нагрузок показана на рис. 12.5 в.

По первому закону Кирхгофа (рис. 12.4 б) сумма токов фаз равна току нейтрали

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N,$$

а при симметричной нагрузке ток нейтрали равен нулю,

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

При **асимметрии нагрузки** в трехфазной сети появляется ток нейтрали. На практике его значение в несколько раз

меньше токов фаз.

В трехфазном источнике **фазные напряжения** формируются на **нагрузках**, например, обмотках электродвигателя (катушках индуктивности). Источник соединен с нагрузкой проводными **линиями**, например, как показано на рис. 12.4. Напряжения между линиями фаз называют **линейными**.

При включении обмоток звездой (рис. 12.14а) напряжения между соответствующей фазой и нейтралью равны фазным напряжениям генератора U_A, U_B, U_C с действующими значениями $U_\phi = 220$ В. **Линейными** напряжениями в этом случае являются U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} , их действующие значения одинаковы и определяется из векторной диаграммы на рис. 12.5 а,

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 2 \cdot \cos(30^\circ) \cdot U_\phi = \sqrt{3} \cdot U_\phi,$$

$U_\phi = 220$ В получим $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = \sqrt{3} \cdot 220 = 380$ В. По этой причине однофазную силовую сеть (одна из фаз и нейтраль) называют **сетью 220В**, а трехфазную – **сетью 380 В**. Сдвиги фаз между фазными (линейными) напряжениями равны 120° . **Ток фазной обмотки равен линейному току.**

При соединении треугольником формируемое **фазное** напряжение (оно должно быть равно 380 В) включено между линиями, соединяющими генератор с нагрузкой, то есть является **линейным**,

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_\phi = 380$$
 В.

Ток в линейном проводе (**линейный ток**) при симметричной нагрузке (рис. 12.6) равен алгебраической сумме **фазных** токов двух обмоток, подключенных к соответствующей фазе. Из векторной диаграммы (постройте ее самостоятельно) получим

$$I_A = I_B = I_C = 2 \cdot \cos(30^\circ) \cdot I_\phi = \sqrt{3} \cdot I_\phi.$$

12.4. Преобразование «треугольник-звезда» и «звезда-треугольник»

Модели пассивных трехполюсников «звезда» и «треугольник» могут эквивалентно взаимозаменяться. Рассмотрим цепи на рис. 12.7.

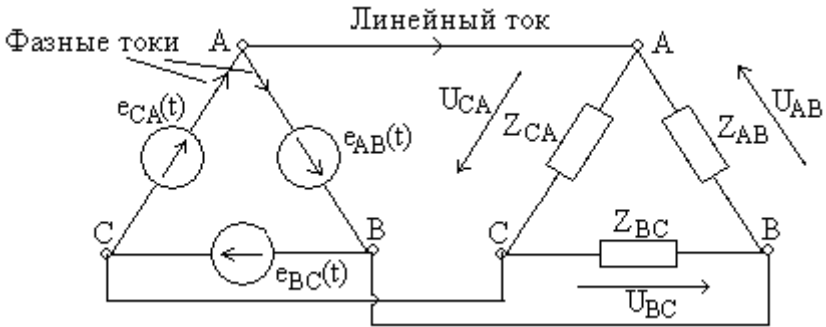


Рис. 12.6

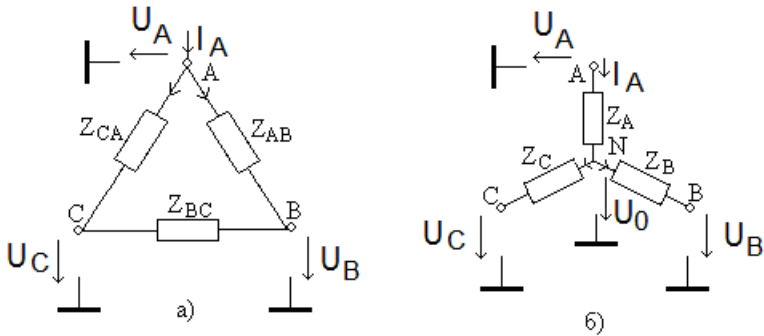


Рис. 12.7

Многополюсники (трехполюсники) эквивалентны, если при одинаковых напряжениях на полюсах через них протекают одинаковые токи.

Определим ток полюса A в цепи «треугольник» на рис. 12.7 а. Очевидно, что

$$I_A = \frac{U_A - U_B}{Z_{AB}} + \frac{U_A - U_C}{Z_{CA}} = U_A \left(\frac{1}{Z_{AB}} + \frac{1}{Z_{CA}} \right) - \frac{U_B}{Z_{AB}} - \frac{U_C}{Z_{CA}}.$$

Для соединения «звезда» в цепи на рис. 12.7 б тот же ток равен

$$I_A = \frac{U_A - U_0}{Z_A}.$$

Для узла нейтрали (N) в цепи на рис. 12.7 б по первому закону Кирхгофа получим выражение

$$\frac{U_A - U_0}{Z_A} = \frac{U_0 - U_B}{Z_B} + \frac{U_0 - U_C}{Z_C},$$

из которого определим напряжение нейтрали U_0 ,

$$U_0 = \frac{1}{Y} \left[\frac{U_A}{Z_A} + \frac{U_B}{Z_B} + \frac{U_C}{Z_C} \right],$$

$$Y = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}.$$

В результате для тока I_A при соединении «звездой» получим

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{U_A - U_0}{Z_A} = \frac{U_A}{Z_A} - \frac{U_0}{Z_A} = \frac{U_A}{Z_A} - \frac{1}{YZ_A} \left[\frac{U_A}{Z_A} + \frac{U_B}{Z_B} + \frac{U_C}{Z_C} \right] = \\ &= U_A \left(1 - \frac{1}{YZ_A} \right) - \frac{U_B}{YZ_A Z_B} - \frac{U_C}{YZ_A Z_C} = \\ &= U_A \left(\frac{1}{YZ_A Z_B} + \frac{1}{YZ_A Z_C} \right) - \frac{U_B}{YZ_A Z_B} - \frac{U_C}{YZ_A Z_C}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное последнее выражение с формулой для тока в цепи рис. 12.7а, можно записать

$$Z_{AB} = YZ_A Z_B = Z_A Z_B \left[\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right],$$

$$Z_{AC} = YZ_A Z_C = Z_A Z_C \left[\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right],$$

а для проводимостей получим

$$Y_{AB} = \frac{1}{Z_{AB}} = \frac{Y_A Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C},$$

$$Y_{AC} = \frac{1}{Z_{AC}} = \frac{Y_A Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Аналогично для узла В или С получим еще (проведите эти расчеты самостоятельно)

$$Z_{BC} = Y Z_B Z_C = Z_B Z_C \left[\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right],$$

$$Y_{BC} = \frac{1}{Z_{BC}} = \frac{Y_B Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Таким образом проведено эквивалентное преобразование модели «звезда» в «треугольник».

Можно провести и обратное преобразование соединения «треугольник» в модель «звезда». Из уравнений

$$Z_{AB} = Y Z_A Z_B, \quad Z_{BC} = Y Z_B Z_C, \quad Z_{CA} = Y Z_C Z_A, \quad (12.1)$$

получим

$$Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA} = Y (Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A).$$

С другой стороны для проводимости Y можно записать

$$Y = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A}{Z_A Z_B Z_C},$$

тогда

$$Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA} = Y^2 Z_A Z_B Z_C$$

или

$$1 = \frac{Y^2 Z_A Z_B Z_C}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}. \quad (12.2)$$

Умножив обе части равенства (12.2) на Z_A , получим

$$Z_A = \frac{Y^2 Z_A^2 Z_B Z_C}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}},$$

а с учетом (12.1)

$$Z_A = \frac{Z_{AB}Z_{AC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}.$$

Аналогично получим

$$Z_B = \frac{Z_{AB}Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}},$$

$$Z_C = \frac{Z_{CA}Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}$$

(проведите эти расчеты самостоятельно).

12.5. Моделирование трехфазной цепи

Пример модели трехфазной цепи типа «звезда-звезда» с нейтралью показан на рис. 12.8.

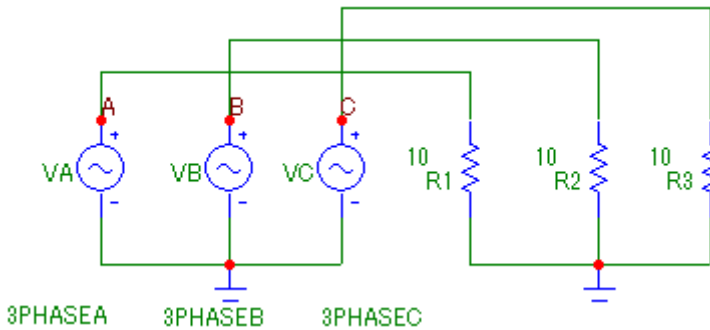


Рис. 12.8

Источники фазных напряжений VA, VB и VC формируют гармонические ЭДС с амплитудами 311 В (действующими значениями 220 В), частотами 50 Гц и начальными фазами 0, $2\pi/3$ и $4\pi/3$ соответственно. К каждой фазе подключена нагрузка 10 Ом.

Результаты моделирования приведены на рис. 12.9. В его верхней части показаны напряжения источников (фаза А – сплошная, фаза В – пунктирная, фаза С – точечная линии).

В средней части показаны временные диаграммы токов

фаз, а в нижней части – суммарный ток фаз, который в симметричной трехфазной сети должен быть равен нулю.

Проведите моделирование трехфазных цепей с различными моделями источника и нагрузки.

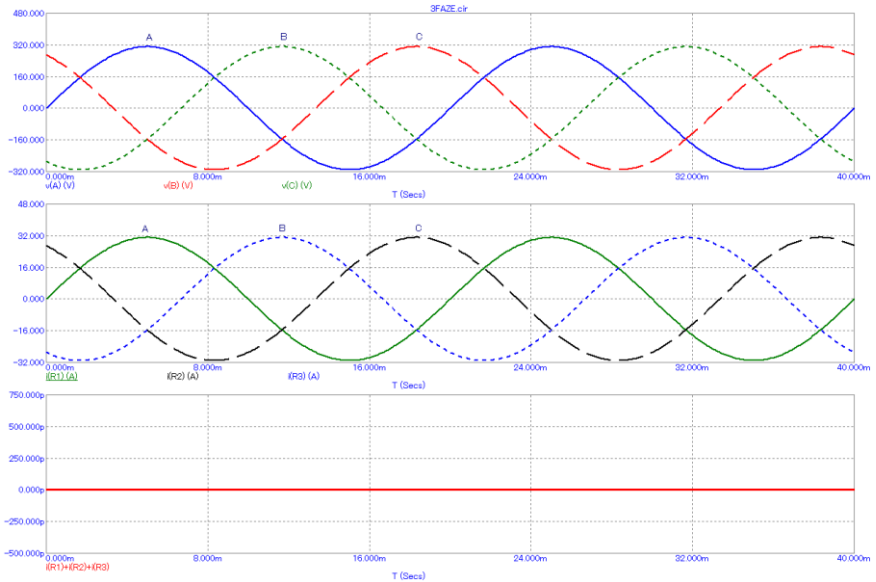


Рис. 12.9

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный материал второй части дисциплины «Основы теории цепей» позволяет выполнять расчеты магнитных цепей, проводить спектральный анализ периодических и непериодических сигналов, расчет переходных процессов в электрических цепях классическим и операторным методами, анализировать линейные цепи при произвольных воздействиях, проводить расчеты трехфазных цепей.

Он является основой для изучения дополнительных разделов теории цепей и методов проектирования радиоэлектронной аппаратуры.

Теоретический материал сопровождается примерами, рекомендуется проводить схемотехническое моделирование и использовать программирование на языках высокого уровня. Панорама примеров расчета сигналов и цепей приведена в [7].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В математике, физике и технике широко используются дифференциальные операторы векторной функции.

Оператор **дивергенции** $\operatorname{div}(\vec{F})$ вектора \vec{F} является **скалярной** величиной, в декартовой системе координат равный

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

где F_x, F_y, F_z – проекции вектора \vec{F} на оси x, y и z . Физически это **мера источников** поля \vec{F} . Если $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$, то векторное поле в рассматриваемой точке свободно от источников.

Оператор **ротора** $\operatorname{rot}(\vec{F})$ векторного поля \vec{F} является **вектором**, характеризующим **вихревые** свойства поля. В декартовой системе координат

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

где \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} – единичные векторы осей x, y и z соответственно. В матричной форме можно записать

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}.$$

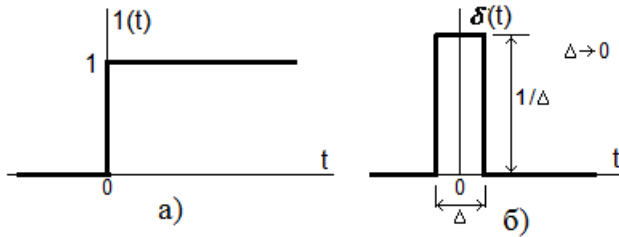
ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Функции Хэвисайда $1(t)$ и Дирака $\delta(t)$

Функция Хэвисайда (единичная функция) $1(t)$ имеет вид

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

ее график показан на рис. П.1а.



Функция Дирака, δ (дельта) – функция, единичный импульс $\delta(t)$ имеет график, показанный на рис. П.1б, и представляет собой бесконечно узкий ($\Delta \rightarrow 0$) и бесконечно высокий ($1/\Delta \rightarrow \infty$) прямоугольный импульс с единичной площадью в точке $t = 0$.

Справедливо соотношение

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Диапазоны радиотехнических сигналов

Частотный диапазон	Границы диапазона	Волновой диапазон	Границы диапазона
Крайние низкие (КНЧ)	3–30 Гц	Декамегаметровые	100–10 Мм
Сверхнизкие (СНЧ)	30–300 Гц	Мегаметровые	10–1 Мм
Инфранизкие (ИНЧ)	0,3–3 кГц	Гектокилометровые	1000–100 км
Очень низкие (ОНЧ)	3–30 кГц	Мириаметровые	100–10 км
Низкие (НЧ)	30–300 кГц	Километровые	10–1 км
Средние (СЧ)	0,3–3 МГц	Гектометровые	1–0,1 км
Высокие (ВЧ)	3–30 МГц	Декаметровые	100–10 м
Очень высокие (ОВЧ)	30–300 МГц	Метровые	10–1 м
Ультравысокие (УВЧ)	0,3–3 ГГц	Дециметровые	1–0,1 м
Сверхвысокие (СВЧ)	3–30 ГГц	Сантиметровые	10–1 см
Крайне высокие (КВЧ)	30–300 ГГц	Миллиметровые	10–1 мм
Гипервысокие (ГВЧ)	300–3000 ГГц	Децимиллиметровые	1–0,1 мм

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов В.П. Основы теории цепей / В.П. Попов. М.: Высш. шк., 2003, 575с.
2. Литвиненко В.П. Основы теории цепей: учеб. пособие / В.П. Литвиненко, О.В. Чернояров. Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2016. ч. 1. – 230 с.
3. Семенцов В.И. Сборник задач по теории цепей / В.И. Семенцов, В.П. Попов, В.Н. Бирюков. М.: Высш. шк., 2003 – 270 с.
4. Литвиненко В.П. Лабораторный практикум по теории цепей: учеб. пособие / В.П. Литвиненко, Ю.В. Литвиненко. Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2014. 104 с.
5. Макаров Е. Г. Mathcad: учебный курс [Текст] / Е.Г. Макаров. СПб.: Питер, 2006. – 394 с.
6. Амелина М.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8 / М.А. Амелина, С.А. Амелин. – М.: Горячая линия – Телеком, 20011. – 464 с.
7. Карлащук В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение. [Текст] / В.И. Карлащук. – М.: Солон – Р, 1996. – 506 с.
8. Литвиненко В.П. Расчет линейных электрических цепей: учеб. пособие / В.П. Литвиненко, Ю.В. Литвиненко. – Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2006. – 243 с.
9. Литвиненко В.П. Практикум по расчету линейных электрических цепей: учеб. пособие / В.П. Литвиненко. – Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2014. – 164 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
2. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ	4
1.2. Магнитное поле и его характеристики	4
1.2. Магнитная цепь	7
1.3. Электромагнитная индукция	9
1.4. Магнитные свойства среды	12
1.5. Электромагнитное поле	16
1.6. Контрольные вопросы	18
2. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ	19
2.1. Методика расчета магнитных цепей	19
2.2. Магнитное напряжение	19
2.3. Вебер–амперная характеристика	20
2.4. Расчет неразветвленной магнитной цепи	22
2.5. Расчет разветвленной магнитной цепи	24
2.6. Линейные магнитные цепи переменного тока	28
2.7. Вариометр	32
2.8. Измерение взаимной индуктивности	33
2.9. Контрольные вопросы	34
3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТРАНСФОРМАТОРЫ	35
3.1. Конструкция электрического трансформатора	35
3.2. Линейный трансформатор	38
3.3. Режимы работы трансформатора	42
3.4. Измерение параметров модели трансформатора ...	45
3.5. Автотрансформатор	47
3.6. Силовой трансформатор	49
3.7. Трехфазный трансформатор	53
3.8. Высокочастотный трансформатор	53
3.9. Согласующий трансформатор	54
3.10. Гальваническая развязка	55
3.11. Контрольные вопросы	56
4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	58
4.1. Разложение периодических сигналов по ортогональным функциям	58

4.2. Ряд Фурье	59
4.3. Спектры амплитуд и фаз периодического сигнала	60
4.4. Синтез сигнала по его спектру	64
4.5. Ряд Фурье в комплексной форме	64
4.6. Влияние формы сигнала на спектры амплитуд и фаз	66
4.7. Свойства спектров сигналов	69
4.8. Мощность периодического сигнала	73
4.9. Ширина спектра	73
4.10. Задания для самостоятельного решения	76
5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	79
5.1. Спектры непериодических сигналов	79
5.2. Энергетические характеристики	83
5.3. Ширина спектра непериодического сигнала	84
5.4. Спектральные характеристики экспоненциального импульса	86
5.5. Свойства спектров непериодических сигналов	87
5.6. Задания для самостоятельного решения	88
6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ	90
6.1. Анализ цепей и устройств	90
6.2. Синтез цепей	91
6.3. Спектральный анализ сигналов	92
6.4. Прохождение сложного сигнала через линейную цепь	94
6.5. Моделирование сигналов и цепей	97
8. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	103
7.1. Физика переходных процессов	103
7.2. Законы Ома и Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений	104
7.3. Уравнения электрического равновесия	105
7.4. Законы коммутации	107
7.5. Начальные условия	107

7.6. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	109
7.7. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений	111
7.8. Расчет принужденной составляющей переходного процесса	113
7.9. Общее решение дифференциального уравнения	115
7.10. Расчет постоянных интегрирования	115
7.11. Задания для самостоятельного решения	116
8. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ	118
8.1. Расчет свободного процесса в цепи первого порядка	118
8.2. Расчет переходного процесса в цепи первого порядка	123
8.3. Расчет свободного процесса в последовательном колебательном контуре	129
8.4. Расчет переходного процесса в цепи второго порядка	137
8.5. Задания для самостоятельного решения	142
9. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	143
9.1. Преобразование Лапласа	143
9.2. Вычисление оригинала	145
9.3. Операторные свойства токов и напряжений	147
9.4. Законы Кирхгофа в операторной форме	148
9.5. Закон Ома в операторной форме для элементов цепи при нулевых начальных условиях	149
9.6. Свойства цепи при ненулевых начальных условиях	149
9.7. Формирование уравнений цепи	151
9.8. Задания для самостоятельного решения	151
10. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ	153
10.1. Расчет переходного процесса в цепи первого порядка	153

10.2. Расчет свободного процесса в цепи первого порядка	156
10.3. Расчет переходного процесса в цепи второго порядка	158
10.4. Расчет свободного процесса в цепи второго порядка	164
10.5. Задания для самостоятельного решения	166
11. ВРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	168
11.1. Постоянная времени цепи	168
11.2. Время установления переходного процесса	170
11.3. Декремент затухания	171
11.4. Задания для самостоятельного решения	173
12. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ	175
12.1. Силовая трехфазная сеть переменного тока	175
12.2. Модель трехфазной цепи	175
12.3. Токи и напряжения в трехфазной цепи	178
12.4. Преобразование «треугольник-звезда» и «звезда-треугольник»	179
12.5. Моделирование трехфазной цепи	183
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	185
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ	186
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Функции Хевисайда $1(t)$ и Дирака $\delta(t)$	187
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Диапазоны радиотехнических сигналов	188
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	189

Учебное издание

Литвиненко Владимир Петрович
Литвиненко Юлия Владимировна

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕНЕЙ

Часть 2

Подписано В ПЕЧАТЬ 16.02.18.

Формат 60x84/1/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. 12,0. Тираж 250 экз. Зак. №

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14