ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий проектирования

222 - 2014

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине «Математическое обеспечение САПР» для студентов направления 230100.62 «Информатика и вычислительная техника» профиль («Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») заочной формы обучения

Воронеж 2014

Составитель старший преподаватель А.А. Пак

УДК 681.3

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине по дисциплине «Математическое обеспечение САПР» для студентов направления 230100.62 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») заочной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Пак. Воронеж, 2014. 57 с.

Методические указания содержат необходимые для выполнения практической работы теоретические сведения, примеры выполнения заданий.

Предназначены для студентов 3 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе Word и содержатся в файле «Математическое обеспечение САПР. Практическая работа.doc».

Библиогр.: 9 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.Н. Дурова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. М.И. Чижов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Практические занятия студентов по дисциплине «Математическое обеспечение САПР» является важной составляющей учебного процесса подготовки специалистов технического профиля.

Формами практической работы студентов является:

- проработка лекционного материала;
- подготовка к практическим занятиям, к лабораторным работам;
- выполнение и оформление курсовых работ и проектов;
- подготовка к контрольным мероприятиям (коллоквиумам, контрольным работам);
- выполнение домашних заданий (подготовка рефератов, решение задач, изучение дополнительных литературных источников и статей в периодической печати и др.).

Важными принципами организации практической работы студентов является ее систематичность, присутствие контроля и оценка выполнения задания. Конкретные задачи по изучению учебного материала по прочитанным лекциям и в порядке подготовки к практическим занятиям студенты получают от преподавателей данной дисциплины. Кроме того, студентам предлагаются к проработке определенные разделы учебников, учебных пособий и других методических разработок.

Необходимо, чтобы студент кратко законспектировал основные положения, самостоятельно приобрел навыки в решении задач.

Результаты по всем видам практической работы студентов преподаватели учитывают их при рейтинговой оценке знаний.

Математическое обеспечение САПР изучает теоретические основы численных методов: погрешности вычислений;

устойчивость и сложность алгоритма (по памяти, по времени) численные методы линейной алгебры; решение нелинейных уравнений и систем; интерполяция функций; численное интегрирование и дифференцирование; решение обыкновенных дифференциальных уравнений; методы приближения и аппроксимации функций; преобразование Фурье; равномерное приближение функций; математические программные системы.

Студенты изучат основные методы и алгоритмы вычислительной математики, связанные с моделированием технических систем, приобретают навыки приближенного решения дифференциальных уравнений, систем линейных уравнений, нелинейных уравнений; приобрести опыт обработки экспериментальных данных с помощью аппроксимации функций,

получать знания об основах математических вычислениях, реализуемых на ЭВМ; приобретают навыки приближенного решения дифференциальных уравнений, систем линейных уравнений, нелинейных уравнений.

Решение задач требует подготовки, предусматривающей последовательное выполнение следующих этапов:

- постановка задачи;
- формирование математической модели задачи;
- выбор численного метода решения;
- разработка алгоритма решения.

Постановка задачи - этап словесной формулировки, определяющий цель решения, исходные данные, основные закономерности, условия и ограничения применения этих закономерностей.

Постановка задачи должна отвечать следующим требованиям:

- четкая формулировка цели с указанием вида и характеристик конечных результатов;

- определение всех возможных вариантов решения, условий выбора каждого;
- обозначения границы применимости и действия в случае выхода за них.

Формирование математической модели задачи - этап перевода словесной постановки задачи в совокупность математических зависимостей, описывающих исходные данные и вычисления промежуточных и конечных результатов.

Полученная математическая модель должна отвечать следующим требованиям:

- вначале составляется постановка задачи, затем - расчетные зависимости;
- обозначение всех входящих в зависимости величин именами, определяющими их суть;
- представление математических зависимостей в общем виде для повышения универсальности решения.

Разработка алгоритма решения - этап разработки совокупности предписаний, однозначно определяющих последовательность преобразования исходных данных в конечные результаты.

Алгоритм должен удовлетворять свойствам:

- массовости - возможность их применения для решения целого класса конкретных задач, отвечающих общей постановки задачи;
- конечности - завершение работы алгоритма в целом за конечное число шагов;
- результативности - существование результата выполнения алгоритма.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1
ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ДЕЙСТВИЯ НАД ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Абсолютной погрешностью Δ (дельта) приближения называется модуль разности между точным значением величины a и её приближенным значением x, т.е. $|a - x| = \Delta$.

Например, абсолютная погрешность приближения 0,44 числа 4/9 составляет

$$\Delta = \left|\frac{4}{9} - 0.44\right| = \left|\frac{4}{9} - \frac{11}{25}\right| = \left|\frac{100-99}{225}\right| = \frac{1}{225}.$$

На практике во многих случаях точное значение величины бывает неизвестно, поэтому абсолютную погрешность приближения найти нельзя. Однако можно дать оценку абсолютной погрешности, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Если $|a - x| \le h$, или $x - h \le a \le x + h$, то говорят, что число a равно числу x с точностью до h, и пишут $a = x \pm h$. Положительное число h называют границей абсолютной погрешности приближения. Например, отношение длины окружности к её диаметру равно иррациональному числу $\pi = 3.14159\ldots$ Найдем границу абсолютной погрешности общепринятого приближения числа π числом 3.14:

$$\Delta = |3.14159\ldots - 3.14| = 0.00159\ldots$$

За границу абсолютной погрешности приближения можно взять любое число, большее числа 0.00159…, например 0.002, 0.005, 0.01.

Замечание. Граница абсолютной погрешности измерения обычно устанавливается по наименьшему делению шкалы прибора.

Цифра a называется верной, если граница абсолютной погрешности данного приближения не превосходит единицы того разряда, в котором записана цифра a. В противном случае цифра называется сомнительной.

Например, в числе $a = 27.4 \pm 0.08$ все цифры верные, так как $h = 0.08 < 0.1$; в числе $a = 9.746 \pm 0.04$ цифры 9 и 7 верные, поскольку $h = 0.04 < 0.1$, а цифры 4 и 6 сомнительные, так как $h = 0.04 > 0.01$.

Замечания. 1. Рекомендуется в записи приближенных чисел сохранять только верные цифры.

2. Если в десятичной дроби последние верные цифры – нули, то их оставляют в записи числа.

Например, если $a = 0.26 \pm 0.003$, то правильная запись числа есть 0.260.

3. Если в целом числе последние нули являются сомнительными цифрами, то их исключают из записи числа.

Например, если $a = 25000 \pm 25$, то правильная запись числа есть $250 \cdot 10^2$.

4. В записи числа $a \approx x$ последняя цифра десятичной записи числа указывает на точность приближения, т.е. граница абсолютной погрешности не превосходит единицы последнего разряда. Например, запись $a \approx 3.29$, означает, что $a = 3.29 \pm 0.01$.

В десятичной записи числа значащими цифрами числа называют все его верные цифры начиная с первой слева, отличной от нуля. Например, в числе 1.13 - три значащие цифры, в числе 0.017 – две, в числе 0.303 – три, в числе 5.200 – четыре, в числе $25 \cdot 10^3$ - две значащие цифры.

Правило округления чисел. Если первая слева отбрасываемая цифра меньше 5, то округляют с недостатком, а если эта цифра 5 или больше 5, то округляют с избытком. Например, округляя число 2.783 до сотых, получим 2.78, до десятых – получим 2.8.

Абсолютная погрешность показывает, насколько точным является приближение в случае, когда рассматривается несколько значений одной и той же величины. Лучшим приближением является то, у которого наименьшая абсолютная погрешность.

Относительной погрешностью ω приближения x величины a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого приближения к модулю приближенного значения x, т.е. $\omega = \Delta / |x|$. Обычно относительная погрешность выражается в процентах.

Так как обычно точное значение величины a, а следовательно, и погрешности Δ неизвестно, то на практике приходиться оценивать модуль относительной погрешности некоторым число ε, которое заведомо не меньше этого модуля: $|\omega| \le \varepsilon$.

В качестве такого числа можно взять отношение $h / |x|$. Положительное число ε называют границей относительной погрешности.

Пример 1. Сравнить качества измерений толщины книги d (см) и высоты стола H(см), если известно, что $d = 2 \pm 0.5, H = 100 \pm 0.5.$

Решение. Для сравнения качества измерений найдем относительную погрешность каждого измерения:

$$\omega_d = \frac{0.5}{2} = 0.25 = 25\%, \omega_H = \frac{0.5}{100} = 0.005 = 0.5\%.$$

Итак, толщина книги измерена с относительной погрешностью до 25%, а высота стола – до 0.5%. Качество измерения высоты стола намного лучше качества измерения толщины книги.

Действия над приближенными значениями величин

Для того чтобы правильно производить действия над приближенными значениями величин, надо уметь находить погрешности этих действий.

В таблице приведены формулы для оценки границ погрешностей результатов действий:

Действие	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
$a+b$	$h_{a+b}=h_a+h_b$	$\varepsilon_{a+b}=\dfrac{h_a+h_b}{a+b}$
$a-b$	$h_{a-b}=h_a+h_b$	$\varepsilon_{a-b}=\dfrac{h_a+h_b}{a-b}$
ab	$h_{ab}=h_a\mid b\mid+h_b\mid a\mid\approx ab\varepsilon_{ab}$	$\varepsilon_{ab}=\dfrac{h_a}{a}+\dfrac{h_b}{b}=\varepsilon_a+\varepsilon_b$
$\dfrac{a}{b}$	$h_{a/b}=\dfrac{h_a\mid b\mid+h_b\mid a\mid}{b^2}\approx\dfrac{a}{b}\varepsilon_{a/b}$	$\varepsilon_{a/b}=\dfrac{h_a}{a}+\dfrac{h_b}{b}=\varepsilon_a+\varepsilon_b$
a^n	$h_{an}=na^{n-1}h_a\approx a^n\varepsilon_{an}$	$\varepsilon_{a_n}=n\dfrac{h_a}{a}=n\varepsilon_a$
$\sqrt[n]{a}$	$h_{\sqrt[n]{a}}=\dfrac{h_a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}\approx\sqrt[n]{a^{\varepsilon}}\,{}_{\sqrt[n]{a}}$	$\varepsilon_{\sqrt[n]{a}}=\dfrac{h_a}{na}=\dfrac{\varepsilon_a}{n}$

Пример 2. Вычислить сумму приближенных чисел 0.6, 0.42 и 0.286. Найти границу погрешности результата.

Решение. Округлим все данные, сохранив два десятичных знака, и выполним сложение:

$$0.6+0.42+0.286\approx 0.6+0.42+0.29=1.3\approx 1.3.$$

Граница погрешности каждого слагаемого не превосходит единицы последнего разряда; тогда

$$h=0.1+0.01+0.001=0.111\approx 0.2.$$

Пример 3. Найти частное приближенных чисел 654.1 и 8.5 и границу погрешности результата.

Решение. Округлим делимое, сохранив три значащие цифры, т.е. до единиц: $654.1\approx 654$. Выполним деление и оставим в результате две значащие цифры: $654.1:8.5\approx 654:8.5\approx 76.9\approx 77.$

Чтобы ответить на вопрос, с какой точностью найдено частное, сначала вычислим границу относительной погрешности результата:

$$\varepsilon=\frac{0.1}{654.1}+\frac{0.1}{8.5}\approx 0.00016+0.012\approx 0.0122.$$

Границу погрешности частного находим по формуле $h_{a/b}=\dfrac{a}{b}\varepsilon_{a/b}$, т.е. $h=77\cdot 0.0122=0.9394\approx 1.$ Итак, частное равно $77\pm 1.$

При возведении в квадрат и в куб в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число.

Пример 4. Вычислить приближенное значение числа 4.13^2 и найти относительную погрешность вычисления.

Решение. Сначала находим квадрат числа 4.13 и оставляем в результате три значащие цифры: $4.13^2=17.0569\approx 17.1.$ Относительную погрешность вычисления находим по формуле $\varepsilon_{a_n}=n\varepsilon_a$:

$$\varepsilon_{4.13}=\frac{0.01}{4.13}\approx 0.0025,\quad \varepsilon_{4.13^2}=2\cdot 0.0025=0.005=0.5\%.$$

Итак, $4.13^2 = 17.1$ с относительной точностью до 0.5%.

Замечание. Для более точных вычислений в результатах промежуточных действий рекомендуется сохранять одну запасную цифру, т.е. сохранять на один десятичный знак или на одну значащую цифру больше, чем рекомендует правило.

Пример 5. Вычислить приближенное значение выражения $x = \dfrac{5.34 \cdot 5.62^2}{\sqrt{18.50}}$ и найти границу погрешности результата.

Решение. Находим значение квадрата числа 5.62 и квадратного корня из числа 18.50; имеем $5.62^2 = 31.58; \sqrt{18.50} = 4.301.$ Теперь получаем

$$x = \frac{5.34 \cdot 31.58}{4.301} = 39.208 \approx 39.2,$$

где сначала выполнено деление, а затем умножение.

Найдем границу относительной погрешности результата:

$$\varepsilon = \frac{0.01}{5.34} + 2\frac{0.01}{5.62} + \frac{1}{2}\frac{0.01}{18.50} = 0.0019 + 0.0036 + 0.00028 \approx$$
$$\approx 0.0058 = 0.58\% \approx 0.6\%$$

Граница погрешности результата есть $h = 39.2 \times 0.0058 \approx 0.23 \approx 0.3.$ Итак, $x = 39.2 \pm 0.3.$

Пример 6. Вычислить приближенное значение выражения $x = \dfrac{3.15\sqrt{6.24}}{\cos 38^\circ 24'}$ и найти границу погрешности результата.

Решение. Находим значение квадратного корня из числа 6.24 и $\cos 38^\circ 24'$; имеем $\sqrt{6.24} = 2.4980$; $\cos 38^\circ 24' = 0.7837.$. Далее получим

$$x = \frac{3.15 \cdot 2.4980}{0.7837} \approx 10.04,$$

где сначала выполнено деление, а затем умножение.

Найдем границу относительной погрешности результата:

$$\varepsilon = \frac{0.01}{3.15} + \frac{1}{2}\frac{0.01}{6.24} + \frac{0.0001}{0.7837} = 0.0032 + 0.00081 + 0.00013 \approx$$

$$\approx 0.005 = 0.5\%.$$

Граница погрешности результата есть $h = 10.04 \cdot 0.005 = 0.05$. Итак, $x = 10.04 \pm 0.05$.

Задачи

1. Найдите абсолютную погрешность приближенного равенства $11/40 \approx 0.27$.

2. Округлите число до единиц и найдите абсолютную и относительную погрешности округления: а) 10.59; б) 0.892.

3. Сколько верных цифр имеет число: а) 5.74 ± 0.01; б) 1.174 ± 0.025; в) 0.874 ± 0.05?

4. Вычислите приближенное значение выражения и границу погрешности результата:

а) $\dfrac{437.5}{0.32 \cdot 84.8}$; б) $\dfrac{4.11 \cdot 2.37^3}{\sin 15^\circ 12'}$; в) $\dfrac{3.93\, tg\, 48^\circ 30'}{\sqrt{5.91}}$.

5. Найти относительную погрешность при вычислении определителя

а) $d_1 = \begin{vmatrix} 0.19 & -0.27 \\ 1.4 & 2.3 \end{vmatrix}$, б) $d_2 = \begin{vmatrix} 17.5 & 10.4 \\ 10.4 & 6.18 \end{vmatrix}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2
ПРИБЛИЖЕНИЕ И АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи. Пусть величина y является функцией аргумента x. Это означает, что любому значению x

из области определения поставлено в соответствие значение y. Вместе с тем на практике часто неизвестна явная связь между y и x, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$. В некоторых случаях даже при известной зависимости $y = f(x)$ она настолько громоздка (например, содержит трудно вычисляемые выражения, сложные интегралы и т.д.), что её использование в практических расчетах затруднительно.

Задача о приближении (аппроксимации) функций формулируется так: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение (в некотором смысле) $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ при этом называется аппроксимирующей.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m. \qquad (1)$$

При этом коэффициенты a_j будут подбираться так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции.

Одним из основных типов аппроксимации является интерполирование. Оно состоит в следующем: для данной функции $y = f(x)$ строим многочлен (1), принимающий в заданных точках x_i те же значения y_i что и функция $f(x)$, т.е.

$$\varphi(x_i) = y_i, i = 0,1,..., n. \qquad (2)$$

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых, т.е. $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$. Точки x_i называются узлами интерполяции, а многочлен $\varphi(x)$ - интерполяционным многочленом.

Пусть функция $y = f(x)$ определена таблицей

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Задачей интерполяции является построение многочлена $L_n(x)$, значения которого в узлах интерполяции $\{x_i\}$ равны соответствующим значениям заданной функции, т.е.

$$L_n(x) = y_i \quad (i=0,1,\ldots,n).$$

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула, представляющая многочлен $L_n(x)$ в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x), \tag{3}$$

где $p_i(x)$ - многочлен степени n, принимающий значение, равное единице в узле x_i, и равные нулю значения в остальных узлах x_k ($i \neq k$), ($i,k=0,1,\ldots,n$). Многочлен $L_n(x)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа. Следует отметить, что степень многочлена Лагранжа не превышает числа n. $L_n(x)$ определяется по следующей формуле

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{i=0,\\ i\neq j}}^{n} (x - x_i) \Big/ \prod_{\substack{i=0,\\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i). \tag{4}$$

Пример. Для функции, заданной таблицей, построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

x_i	-1	0	1
y_i	3	2	5

Решение. Многочлен Лагранжа для трех узлов интерполирования запишется так:

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Применяя формулу Лагранжа, получим

$$L_3(x) = 3 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 2 \cdot \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} +$$

$$+ 5 \cdot \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)}.$$

После элементарных преобразований получаем интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени $L_3(x) = 2x^2 + x + 2$.

Задачи

Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей, построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

1.

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y_i	1.5708	1.5738	1.5828	1.5981	1.62

2.

x_i	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	1.649	1.6858	1.7313	1.7868

3.

x_i	0.3	0.4	0.50	0.6	0.7

y_i	0.29131	0.37995	0.46212	0.53705	0.60437

4.

x_i	0.8	0.9	1.0
y_i	0.66404	0.7163	0.76159

5.

x_i	0.0	0.5	1.0	1.05	2.0
y_i	1.5708	1.5678	1.5589	1.5442	1.5238

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть, изучая неизвестную функциональную зависимость между y и x, в результате серии экспериментов произвели ряд измерений этих величин и получили таблицу значений

0	1	2		n
0	1	2		n

Задача состоит в том, чтобы найти приближенную зависимость

$$y = f(x), \tag{1}$$

значения которой при $x = x_i (i = \overline{0,n})$ мало отличаются от опытных данных y_i. Приближенная функциональная зависимость (1), полученная на основании экспериментальных данных, называется эмпирической формулой.

Задача построения эмпирической формулы отличается от задачи интерполирования. График эмпирической зависимости, вообще говоря, не проходит через заданные точки (x_i, y_i), как в случае интерполяции. Это приводит к тому, что экспериментальные данные в некоторой степени сглаживаются, а интерполяционная формула повторила бы все ошибки, имеющиеся в экспериментальных данных.

Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов: подбор общего вида этой формулы и определения наилучших значений содержащихся в ней параметров.

В методе наименьших квадратов в качестве эмпирической функции выбран многочлен. Согласно этому методу за меру отклонения многочлена

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m \tag{2}$$

от данной функции $f(x)$ на множестве точек x_0, x_1, …, x_n принимают величину

$$S_m = \sum_{i=0}^{n} [Q_m(x_i) - f(x_i)]^2 , \tag{3}$$

равную сумме квадратов отклонений многочлена $Q_m(x)$ от функции $f(x)$ на заданной системе точек.

Очевидно, что S_m есть функция коэффициентов c_0, c_1, …, c_m. Эти коэффициенты надо подобрать так, чтобы величина S_m была наименьшей. Полученный многочлен называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого многочлена – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования воспользуемся общим приемом дифференциального исчисления. Найдем частные производные от величины

$$S_m = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)^2,$$

где $y_i = f(x_i)$ по всем переменным a_0, a_1, …, a_n. Приравнивая эти частные производные к нулю, получим для определения неизвестных a_0, a_1, …, a_m систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S_m}{\partial a_0} = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)1 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S_m}{\partial a_1} = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)x_i = 0, \\ .... \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S_m}{\partial a_m} = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)x_i^m = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$s_k = x_0^k + x_1^k + ... + x_n^k, \ (k = 0,1,2,\ldots),$$

$$t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + ... + x_n^k y_n, \ (k = 0,1,2,\ldots).$$

Преобразуя систему (11) и используя введенные обозначения, будем иметь:

$$
\begin{cases}
a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_m s_m = t_0, \\
a_0 s_1 + a_1 s_2 + a_2 s_3 + \ldots + a_m s_{m+1} = t_1, \\
a_0 s_2 + a_1 s_3 + a_2 s_4 + \ldots + a_m s_{m+2} = t_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 s_m + a_1 s_{m+1} + a_2 s_{m+2} + \ldots + a_m s_{2m} = t_m.
\end{cases}
\qquad (5)
$$

где $s_0 = n+1$.

Можно доказать, что если среди точек x_0, x_1, …, x_n нет совпадающих и $m \le n$, то определитель системы (5) отличен от нуля и, следовательно, эта система имеет единственное решение $a_0 = a_0^*$, $a_1 = a_1^*$, …, $a_m = a_m^*$. Многочлен (2) с такими коэффициентами будет обладать минимальным квадратичным отклонением $S_{\min}$.

Таким образом, аппроксимирование функций представляет собой более общий процесс, чем интерполирование.

Для составления системы (4) рекомендуется схема способа наименьших квадратов, приведенная в таблице 1, где принято m=2.

Таблица 1

x^0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	$x_0\ y_0$	$x_0^2\ y_0$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1\ y_1$	$x_1^2\ y_1$
1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2\ y_2$	$x_2^2\ y_2$
1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	y_3	$x_3\ y_3$	$x_3^2\ y_3$
1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	y_4	$x_4\ y_4$	$x_4^2\ y_4$
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	t_0	t_1	t_2

Пример. Подобрать аппроксимирующий многочлен второй степени $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ для данных

x_i	0.78	1.50	2.34	3.12	3.81
y_i	2.50	1.20	1.12	2.25	4.28

Решение. Вычисления, которые нам нужно произвести, расположим по схеме (для m=2, n=4), приведенной в таблице 1.

Для данного примера получаем таблицу 2 (вычисления проводятся с тремя десятичными знаками).

Таблица 2

x^0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	$x^2 y$
1	0.78	0.608	0.475	0.370	2.50	1.950	1.520
1	1.56	2.434	3.796	5.922	1.20	1.872	2.921
1	2.34	5.476	12.813	29.982	1.12	2.621	6.133
1	3.12	9.734	30.371	94.759	2.25	7.020	21.902
1	3.81	14.516	55.306	210.717	4.28	16.307	62.128
5	11.61	32.768	102.761	341.750	11.35	29.770	94.604

Отсюда система для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2:

$$\begin{cases} 5a_0 + 11.61a_1 + 32.768a_2 = 11.350, \\ 11.61a_0 + 32.768a_1 + 102.761a_2 = 29.770, \\ 32.768a_0 + 102.761a_1 + 341.750a_2 = 94.604 \end{cases} \qquad (6)$$

Решив систему (6), получим $a_0 = 5.045$, $a_1 = -4.043$, $a_2 = 1.000$. Следовательно, искомый многочлен есть

$$y = 5.045 - 4.043x + 1.009x^2 \tag{7}$$

Сравним исходные значения для y с соответствующими значениями $\overline{y}$, полученными из приближенной формулы (7). Соответствующие результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3

x	y	$\overline{y}$	$\overline{y} - y$
0.78	2.50	2.505	0.005
1.56	1.20	1.194	0.006
2.34	1.12	1,110	0.010
3.12	2.25	2.252	0.002
3.81	4.28	4.288	0.008

Задачи

Подобрать аппроксимирующий многочлен второй степени $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ для функций

1.

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y_i	1.5708	1.5738	1.5828	1.5981	1.62

2.

x_i	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	1.649	1.6858	1.7313	1.7868

3.

x_i	0.3	0.4	0.50	0.6	0.7
y_i	0.29131	0.37995	0.46212	0.53705	0.60437

4.

x_i	0.8	0.9	1.0
y_i	0.66404	0.7163	0.76159

5.

x_i	0.0	0.5	1.0	1.05	2.0
y_i	1.5708	1.5678	1.5589	1.5442	1.5238

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4
ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1. Аппроксимация производных. Напомним, что производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (1)$$

Значение шага Δx полагают равным некоторому конечному числу и для вычисления значения производной получают приближенное равенство

$$y' \approx \Delta y / \Delta x. \qquad (2)$$

Это соотношение называется аппроксимацией (приближением) производной с помощью отношения конечных разностей (значения Δy, Δx в формуле (2) конечные в отличии от их бесконечно малых значений в (1)).

Рассмотрим аппроксимацию производной для функции $y = f(x)$, заданной в табличном виде: $y_0, y_1, \ldots$ при $x = x_0, x_1, \ldots$. Пусть шаг – разность между соседними значениями аргумента – постоянный и равен h. Запишем выражения для производной y_1 при $x = x_1$. В зависимости от способа вычисления конечных разностей получаем разные формулы для вычисления производной в одной и той же точке:

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0, \Delta x = h, y_1' \approx \frac{y_1 - y_0}{h} \qquad (3)$$

с помощью левых разностей;

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta x = h, y_1' \approx \frac{y_2 - y_1}{h} \qquad (4)$$

с помощью правых разностей;

$$\Delta y_1 = y_2 - y_0, \Delta x = 2h, y_1' \approx \frac{y_2 - y_0}{2h} \qquad (5)$$

с помощью центральных разностей.

Выражения для второй производной

$$y_1'' \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}. \qquad (6)$$

2. Использование интерполяционных формул. Предположим, что функция $f(x)$, заданная в виде таблицы с постоянным шагом $h = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,...,n)$, может быть аппроксимирована интерполяционным многочленом Ньютона:

$$y \approx N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, t = \frac{x - x_0}{h}. \qquad (7)$$

Дифференцируя этот многочлен по переменной x с учетом правила дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dN}{dt},$$

можно получить формулы для вычисления производных любого порядка:

$$y' \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}\Delta^4 y_0 +$$
$$+\frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots),$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!}\Delta^4 y_0 +$$
$$+\frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots).$$

Пример. Вычислить в точке $x = 0.1$ первую и вторую производные функции, заданной таблицей.

Здесь $h = 0.1, t = (0.1-0)/0.1 = 1.$ Используя полученные выше формулы, находим

$$y' \approx 10(0.5247 + \frac{2\cdot 1-1}{2}\cdot 0.0325 + \frac{3\cdot 1-6\cdot 1+2}{6}\cdot 0.0047 +$$
$$+\frac{4\cdot 1-18\cdot 1+22\cdot 1-6}{24}\cdot 0.0002) = 5.436,$$
$$y'' \approx 100(0.0325 + \frac{6\cdot 1-6}{6}\cdot 0.0047 + \frac{12-36+22}{24}\cdot 0.0002) = 3.25.$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1.2833	0.5274	0.0325	0.0047	0.0002	
0.1	1.8107	0.5599	0.0372	0.0049	0.0002	0.0000
0.2	2.3606	0.5971	0.0421	0.0051		

0.3	2.9577	0.6392	0.0472			
0.4	3.5969	0.6864				
0.5	4.2833					

Запишем интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$ и его остаточный член $R_L(x)$ для случая трех узлов интерполяции ($n = 2$) и найдем их производные:

$$L(x) = \frac{1}{2h^2}[(x - x_1)(x - x_2)y_0 - 2(x - x_0)(x - x_2)y_1 + (x - x_0)(x - x_1)y_2],$$

$$R_L(x) = \frac{y_*'''}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

$$L'(x) = \frac{1}{2h^2}[(2x - x_1 - x_2)y_0 - 2(2x - x_0 - x_2)y_1 + (2x - x_0 - x_1)y_2],$$

$$R_L'(x) = \frac{y_*'''}{3!}[(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)].$$

Здесь y_*''' - значение производной третьего порядка в некоторой внутренней точке $x_* \in [x_0, x_2]$.

Запишем выражение для производной y_0' при $x = x_0$:

$$y_0' = L'(x_0) + R_L'(x_0) = \frac{1}{2h^2}[(2x_0 - x_1 - x_2)y_0 - 2(2x_0 - x_0 - x_2)y_1 +$$

$$+ (2x_0 - x_0 - x_1)y_2] + \frac{y_*'''}{3!}[(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (x_0 - x_0)(x_0 - x_2) + (x_0 - x_0) \cdot$$

$$\cdot (x_0 - x_1)] = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3} y_*''' .$$

Аналогичные соотношения можно получить и для значений y_1', y_2' при $x = x_1, x_2$:

$$y_1' = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0) - \frac{h^2}{6} y_*''' \;, y_2' = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3} y_*'''. \qquad (8)$$

Записывая интерполяционный многочлен Лагранжа и его остаточный член для случая четырех узлов ($n=3$), получаем следующие аппроксимации производных:

$$\begin{aligned}
y_0' &= \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y_*^{IV}, \\
y_1' &= \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} y_*^{IV}, \\
y_2' &= \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y_*^{IV}, \\
y_3' &= \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} y_*^{IV}.
\end{aligned} \qquad (9)$$

В случае пяти узлов $(n = 4)$ получим

$$\begin{aligned}
y_0' &= \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{h^4}{5} y_*^{V}, \\
y_1' &= \frac{1}{12h}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{h^4}{20} y_*^{V}, \\
y_2' &= \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{h^4}{30} y_*^{V}, \\
y_3' &= \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) + \frac{h^4}{20} y_*^{V}, \\
y_4' &= \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{h^4}{5} y_*^{V}.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Выпишем аппроксимации производных для узла с произвольным номером i, считая его центральным:

$$y_i' = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) - \frac{h^2}{6} y_*''' \quad, n = 2, \tag{11}$$
$$y_i' = \frac{1}{12h}(y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}) + \frac{h^4}{30} y_*^V, n = 4.$$

С помощью интерполяционных многочленов Лагранжа можно получить аппроксимации для старших производных. Приведем аппроксимации для вторых производных.

В случае трех узлов интерполяции ($n = 2$) имеем

$$\begin{aligned}
y_0'' &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h), \\
y_1'' &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h^2), \\
y_2'' &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h).
\end{aligned} \tag{12}$$

В случае четырех узлов ($n = 3$) имеем

$$\begin{aligned}
y_0'' &= \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + O(h^2), \\
y_1'' &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h^2), \\
y_2'' &= \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) + O(h^2), \\
y_3'' &= \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + O(h^2).
\end{aligned} \tag{13}$$

В случае пяти узлов ($n = 4$) имеем

$$
\begin{aligned}
y_0'' &= \frac{1}{12h^2}(35y_0 - 104y_1 + 114y_2 - 56y_3 + 11y_4) + O(h^3),\\
y_1'' &= \frac{1}{12h^2}(11y_0 - 20y_1 + 6y_2 + 4y_3 - y_4) + O(h^3),\\
y_2'' &= \frac{1}{12h^2}(-y_0 + 16y_1 - 30y_2 + 16y_3 - y_4) + O(h^4),\\
y_3'' &= \frac{1}{12h^2}(-y_0 + 4y_1 + 6y_2 - 20y_3 + 11y_4) + O(h^3),\\
y_4'' &= \frac{1}{12h^2}(11y_0 - 56y_1 + 114y_2 - 104y_3 + 35y_4) + O(h^3).
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

3. Улучшение аппроксимации производной. Метод Рунге-Ромберга. Сущность метода Рунге – Ромберга. Пусть $F(x)$ - производная, которая подлежит аппроксимации; $f(x,h)$ - конечно–разностная аппроксимация этой производной на равномерной сетке с шагом h; R – погрешность (остаточный член) аппроксимации, главный член которой можно записать в виде $h^p\varphi(x)$, т.е.

$$R = h^p\varphi(x) + O(h^{p+1}).$$

$$F(x) = f(x,h) + \frac{f(x,h) - f(x,kh)}{k^p - 1} + O(h^{p+1}) \cdot \qquad (15).$$

Формула (15) позволяет по результатам двух расчетов значений производной $f(x,h)$ и $f(x,kh)$ (с шагом h и kh) с порядком точности p найти её уточненное значение с порядком точности p+1.

Пример. Вычислить производную функции $y = x^3$ в точке x=1.

Очевидно, что $y' = 3x^2$, поэтому $y'(1) = 3$. Найдем эту производную численно. Составим таблицу значений функции:

x	0.8	0.9	1.0
y	0.512	0.729	1.0

Воспользуемся аппроксимацией производной с помощью левых разностей, имеющей первый порядок (p=1). Примем шаг равным 0.1 и 0.2, т.е. k=2. Получим

$$f(x,h) = y'(1{,}0.1) = \frac{y(1) - y(0.9)}{0.1} = \frac{1 - 0.729}{0.1} = 2.71,$$

$$f(x,kh) = y'(1{,}0.2) = \frac{y(1) - y(0.8)}{0.2} = \frac{1 - 0.512}{0.2} = 2.44.$$

По формуле Рунге найдем уточненное значение производной:

$$F(x) = y'(1) = 2.71 + \frac{2.71 - 2.44}{2^1 - 1} = 2.98.$$

Задачи

Для функции, заданной таблицей

1) вычислить y_0', y_1', y_2' с первым и вторым порядком погрешности аппроксимации;

2) вычислить y_0'', y_1'', y_2''.

1.

x_i	-2	0	2
y_i	5	4	-1

2.

x_i	-3	-1	0
y_i	-4	0	3

3.

x_i	1	3	5
y_i	-2	0	2

4.

x_i	1	2	4
y_i	3	5	1

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Постановка задачи. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. С помощью точек x_0, x_1, …, x_n разобьем отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1,n}$), причем $x_0 = a$, $x_n = b$. На каждом их этих отрезков выберем произвольную ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ и найдем произведение (S_i) значения функции в этой точке $f(\xi_i)$ на длину отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$$S_i = f(\xi_i)\Delta x_i \quad . \qquad (1)$$

Составим сумму всех таких произведений:

$$S_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

Сумма S_n называется интегральной суммой. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения, при этом длина наибольшего из отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

Теорема существования определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек ξ_i.

Геометрический смысл введенных понятий для случая $f(x)>0$ проиллюстрирован на рисунке 1.

Абсциссами точек M_i являются значения ξ_i, ординатами – значения $f(\xi_i)$. Выражения (1) при $i = 1,2,\ldots, n$

описывают площади элементарных прямоугольников (штриховые линии), интегральная сумма (2) - площадь ступенчатой фигуры, образуемой этими прямоугольниками. При неограниченном увеличении числа точек деления и стремлении к нулю всех Δx_i верхняя граница фигуры (ломаная) переходит в линию $y = f(x)$. Площадь полученной фигуры, которую называют криволинейной трапецией, равна определенному интегралу (3).

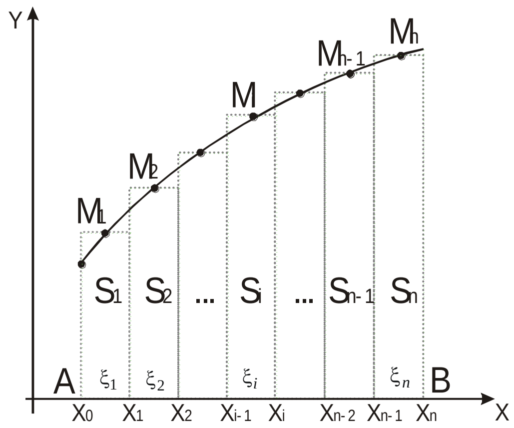

Рис. 1

Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл удается найти по формуле Ньютона-Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен приращению первообразной $F(x)$ на отрезке интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Методы прямоугольников и трапеций

Простейшим методом численного интегрирования является <u>метод прямоугольников</u>. Он непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной сумой (2). В качестве точек ξ_i могут выбираться левые ($\xi_i = x_{i-1}$) или правые ($\xi_i = x_i$) границы отрезков. Обозначая $f(x_i) = y_i$, $\Delta x_i = h_i$, получаем следующие формулы метода прямоугольников соответственно для этих двух случаев:

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_0 + h_2 y_1 + \dots + h_n y_{n-1}, \tag{5}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n \tag{6}$$

Более точным является вид формулы прямоугольников, использующий значения функции в средних точках отрезков (в полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-1/2}) \qquad (7)$$

$$x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2 = x_{i-1} + \frac{h_i}{2} \;, i = 1,2,..., n$$

В дальнейшем под методом прямоугольников будем понимать последний алгоритм (он еще называется методом средних).

Метод трапеций использует линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i). В этом случае площадь всей фигуры (криволинейной трапеции) складывается из площадей прямолинейных трапеций (рис. 2).

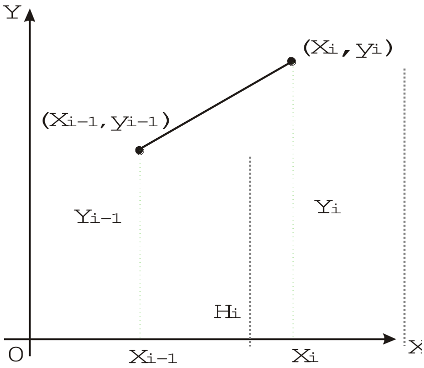

Рис. 2

Площадь каждой такой трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h_i, \; i = 1,2,..., n .$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i) .$$

(8)

Важным частным случаем этих формул является их применение при численном интегрировании с постоянным шагом $h_i = h = const \;\; (i = 1,2,3)$. Формулы прямоугольников и трапеций в этом случае принимают соответственно вид:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}), \tag{9}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i). \tag{10}$$

Метод Симпсона

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на четное число n равных частей с шагом h. На каждом отрезке $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$ …,$[x_{i-1}, x_{i+1}]$, …, $[x_{n-2}, x_n]$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменим интерполяционным многочленом второй степени: $f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$, $\qquad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$.

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена в точках x_i соответствующим табличным данным y_i. В качестве $\varphi_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$,

$M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$:

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_i +$$

$$+ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_{i+1}.$$

Элементарная площадь S_i (рис. 3) может быть вычислена с помощью определенного интеграла.

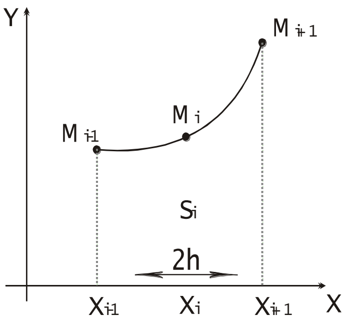

Рис. 3

Учитывая равенства $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$, получаем

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \frac{1}{2h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [(x-x_i)(x-x_{i+1})y_{i-1} - 2(x-x_{i-1})\times$$

$$\times(x - x_{i+1})y_i + (x - x_{i-1})(x - x_i)y_{i+1}]dx = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

Проведя такие вычисления для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, просуммируем полученные выражения:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\cdot$$

Данное выражение для S принимается в качестве значения определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + y_n] \qquad (11)$$

Полученное соотношение (11) называется формулой Симпсона.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ методами прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Решение. Используем для вычисления интеграла формулы прямоугольников и трапеций. Для этого разобьем отрезок интегрирования [0,1] на десять равных частей: n=10, h=0.1. Вычислим значения подынтегральной функции $y_i = 1/(1+x_i^2)$ в точках разбиения $x_i = x_{i-1} + h$, а также в полуцелых точках $x_{i-1/2} = x_{i-1} + h/2$, $(i = \overline{1{,}10})$. Результаты вычислений занесем в таблицу.

x_i	y_i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
0.0	1.000000	-	-
0.1	0.990099	0.05	0.997506
0.2	0.961538	0.15	0.977995
0.3	0.917431	0.25	0.941176
0.4	0.862069	0.35	0.890868
0.5	0.800000	0.45	0.831601
0.6	0.735294	0.55	0.767754
0.7	0.671141	0.65	0.702988
0.8	0.609756	0.75	0.640000
0.9	0.552486	0.85	0.580552
1.0	0.500000	0.95	0.525624

По формуле прямоугольников (9) получим

$$I_1 = h\sum_{i=1}^{10} y_{i-1/2} = 0.1\cdot(0.997506 + \ldots + 0.525624) = 0.785606$$

Вычислить значение интеграла по методу Симпсона. Значения функции при n=10, h=0.1 приведены в таблице 1. Применяя формулу (19), находим:

$$I=\frac{0.1}{3}[y_0+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+y_{10})=$$
$$=\ldots=0.785398$$

Задачи

Вычислить интеграл методами прямоугольников, трапеций и Симпсона.

1. $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. 2. $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4}$. 3. $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

4. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$. 5. $\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx.$ 6. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие сведения. Требуется найти функцию $Y=Y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dY}{dx}=f(x,Y) \qquad (1)$$

и принимающую при $x=x_0$ заданное значение Y_0:

$$Y(x_0)=Y_0, \qquad (2)$$

при этом будем для определенности считать, что решение надо получить при $x>x_0$.

Из курса дифференциальных уравнений известно, что решение $Y(x)$ задачи (1)-(2) существует, единственно и является гладкой функцией, если правая часть $f(x,Y)$ уравнения (1), являющаяся функцией двух переменных x, Y, удовлетворяет некоторым условиям гладкости. Будем считать, что эти условия выполнены и существует единственное гладкое решение $Y(x)$.

Численное решение задачи Коши (1)-(2) состоит в том, чтобы получить искомое решение $Y = Y(x)$ в виде таблицы его приближенных значений для заданных значений аргумента x на некотором отрезке $[a,b]$:

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2, ..., \quad x_m = b.$$

Для решения задачи Коши (30)-(31) будем использовать разностные методы. Введем последовательность точек $x_0, x_1, ...,$ и шаги $h_i = x_{i+1} - x_i (i = 0,1,...)$. Точки x_i называют узлами, а множество этих точек называют сеткой. В каждой точке x_i вместо значений функции $Y(x_i)$ вводятся числа y_i, аппроксимирующие точное решение Y на данном множестве точек. Функцию Y, заданную в виде таблицы $\{x_i, y_i\}(i = 0,1,....)$, называют сеточной функцией.

Далее, заменяя значение производной в уравнении (30) отношением конечных разностей, осуществляем переход от дифференциальной задачи (30)-(31) относительно функции y:

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, ..., y_{i-k+1}), i = 1,2,.... \tag{3}$$

$$y_0 = Y_0 \ . \tag{4}$$

Здесь разностное уравнение (3) записано в общем виде, а конкретное выражение его правой части зависит от способа аппроксимации производной. Для каждого численного метода получается свой вид уравнения (3).

Одношаговые методы. Простейшим численным методом решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является метод Эйлера. Он основан на разложении искомой функции *Y(x)* в ряд Тейлора в окрестностях узлов $x = x_i (i = 0,1,...)$, в котором отбрасываются все члены, содержащие производные второго и более высокого порядков. Запишем это разложение в виде

$$Y(x_i + \Delta x_i) = Y(x_i) + Y'(x_i)\Delta x_i + O(\Delta x_i^2). \tag{5}$$

Заменим значения функции *Y* в узлах x_i значениями сеточной функции y_i . Кроме того, используя уравнение (1), полагаем

$$Y'(x_i) = f(x_i, Y(x_i)) = f(x_i, y_i).$$

Будем считать для простоты узлы равноотстоящими, т.е. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const(i = 0,1,...)$. Учитывая введенные обозначения и пренебрегая членами порядка $O(h^2)$, из равенства (5) получаем

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0,1.... \tag{6}$$

Полагая i=0, с помощью соотношения (6) находим значение сеточной функции y_1 при x=x_1:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Требуемое здесь значение y_0 задано начальным условием (31), т.е. $y_0 = Y(x_0) = Y_0$. Аналогично могут быть найдены значения сеточной функции в других узлах:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

$$\text{.......... ....}$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Построенный алгоритм называется методом Эйлера. Разностная схема этого алгоритма представлена соотношениями (6). Они имеют вид рекуррентных формул, с помощью которых значение сеточной функции y_{i+1} в узле x_{i+1} вычисляется по её значению y_i в предыдущем узле x_i .

Пример 1. Найти решение задачи Коши $\frac{dY}{dx} = x + Y, \quad Y(0) = 1$ методом Эйлера на отрезке [0; 0.4] с шагом h=0.1.

Решение. Здесь $f(x, y) = x + y$, $a = 0,$ $b = 0.4$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Используя рекуррентные формулы

$$y_i = y_{i-1} + 0.1(x_{i-1} + y_{i-1}) \quad (i = 1,2,3,4),$$

последовательно находим

при $i = 1$: $x_1 = 0.1;$ $y_1 = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1;$

при $i = 2$: $x_2 = 0.2;$ $y_2 = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22;$

при $i = 3$: $x_3 = 0.3;$ $y_3 = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362;$

при $i = 4$: $x_4 = 0.4;$ $y_4 = 1.362 + 0.1(0.3 + 1.362) = 1.5282.$

Решение задачи Коши представлено в таблице 1.

Таблица 1

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	1	1.1	1.22	1.362	1.5282

Существуют и другие явные одношаговые методы. Наиболее распространенным из них является метод Рунге–

Кутта. На его основе могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Приведем схему Рунге–Кутта четвертого порядка. Вычисление приближенного значения y_{i+1} в точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по следующим формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i ,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i),$$

$$k_1^i = hf(x_i, y_i), \qquad k_2^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}),$$

$$k_3^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}), \qquad k_4^i = hf(x_i + h, y_i + k_3^i). \tag{7}$$

Таким образом, метод Рунге–Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения $f(x, y)$.

Все вычисления удобно производить по следующей схеме (таблица 2).

Таблица 2

i	x_i	y_i	$k^i = hf(x,y)$	Δy
0	x_0	y_0	k_1^0	k_1^0
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^0}{2}$	k_2^0	$2k_2^0$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^0}{2}$	k_3^0	$2k_3^0$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^0$	k_4^0	k_4^0
				Δy_0

1	x_1	y_1	…	…

Порядок заполнения таблицы.

1. Записать в первой строке таблицы значения x_0, y_0. Вычислить $hf(x_0, y_0)$ и записать в таблицу в качестве k_1^0.

2. Во второй строке таблицы записать $x_0 + \frac{h}{2}$, $y_0 + \frac{k_1^0}{2}$.

3. Вычислить $hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2})$ и записать в таблицу в качестве k_2^0.

4. В третьей строке таблицы записать $x_0 + \frac{h}{2}$, $y_0 + \frac{k_2^0}{2}$.

5. Вычислить $hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2})$ и записать в таблицу в качестве k_3^0.

6. В четвертую строку таблицы записать $x_0 + h$, $y_0 + k_3^0$.

7. Вычислить $hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0)$ и записать в таблицу в качестве k_4^0.

8. В столбец Δy записать числа k_1^0, $2k_2^0$, $2k_3^0$, k_4^0, просуммировать эти числа, полученную сумму разделить на 6 и записать в таблицу в качестве Δy_0.

9. Вычислить $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. Затем все вычисления продолжаем в том же порядке, принимая за начальную точку

(x_1, y_1). Результаты вычислений записать в следующий блок таблицы.

Метод Эйлера может рассматриваться как метод Рунге–Кутта первого порядка. Метод Рунге–Кутта (7) требует большего объема вычислений, однако окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге–Кутта.

Пример 2. Методом Рунге – Кутта найти решение задачи Коши $\frac{dY}{dX} = x + Y, Y(0) = 1$ на отрезке $[0;0.4]$, приняв шаг h=0.1

Решение. Покажем начало процесса.

Вычисление y_1. Последовательно имеем

$k_1^0 = (0+1)\cdot 0.1 = 0.1; \quad k_2^0 = 0.05 + (1+0.05)\cdot 0.1 = 0.11;$

$k_3^0 = 0.05 + (1+0.055)\cdot 0.1 = 0.1105;$

$k_4^0 = 0.1 + (1+0.1105)\cdot 0.1 = 0.12105.$

Отсюда $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0.1 + 2\cdot 0.11 + 2\cdot 0.1105 + 0.12105) = 0.1103$ и,

следовательно, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.1103 = 1.1103.$

Аналогично вычисляются дальнейшие приближения.

Результаты вычислений приведены в таблице 4.

Решение задачи Коши представлено в таблице 3.

Таблица 3

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	1	1.1103	1.2427	1.3996	1.5836

Задачи

Найти решение задачи Коши методом Эйлера и методом Рунге-Кутта на отрезке $[a; b]$ с шагом h

1) $\frac{dY}{dx} = 2(x^2 + Y), Y(0) = 1$, [0; 1], 0.1. 2) $\frac{dY}{dx} = \frac{1}{Y} + x, Y(0) = 1$, [0; 1], 0.2.

3) $\frac{dY}{dx} = x - Y, Y(0) = 1$, [0; 1], 0.2. 4) $\frac{dY}{dx} = x^2 + Y, Y(0) = 0.3$, [0; 1], 0.2.

5) $\frac{dY}{dx} = x^2 - Y^2, Y(-1) = 0$ [-1; 0], 0.2.

Таблица 4

i	x	y	$k = 0.1(x + y)$	Δy
0	0	1	0.1	0.1000
	0.05	1.05	0.11	0.2200
	0.05	1.055	0.1105	0.2210
	0.1	1.1105	0.1210	0.1210
				$\frac{1}{6} \cdot 0.6620 = 0.1103$
1	0.1	1.1103	0.1210	0.1210
	0.15	1.1708	0.1321	0.2642
	0.15	1.1763	0.1326	0.2652
	0.2	1.2429	0.1443	0.1443
				$\frac{1}{6} \cdot 0.7947 = 0.1324$
2	0.2	1.2427	0.1443	0.1443
	0.25	1.3149	0.1565	0.3130
	0.25	0.3209	0.1571	0.3142
	0.3	1.3998	0.1700	0.1700
				$\frac{1}{6} \cdot 0.9415 = 0.1569$
3	0.3	1.3996	0.17	0.1700
	0.35	1.4846	0.1835	0.3670
	0.35	1.4904	0.1840	0.3680
	0.3	1.5836	0.1984	0.1984
				$\frac{1}{6} \cdot 1.1034 = 0.1840$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

К решению систем линейных уравнений сводятся многочисленные практические задачи. Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространённых и важных задач вычислительной математики.

Запишем систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

здесь a_{ij} и b_i $(i, j = \overline{1,n})$ – числовые коэффициенты, x_j – неизвестные.

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы – прямые и итерационные. Прямые методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций. Итерационные методы – это методы последовательных приближений. В них необходимо задать некоторое приближённое решение – начальное приближение. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемых итерацией. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с требуемой точностью. Одним из самых распространенных итерационных методов является метод Гаусса-Зейделя.

Метод Гаусса–Зейделя

Достаточным условием сходимости метода Гаусса-Зейделя является

$$|a_{ii}| \ge \sum_{j+1}^{n} |a_{ij}|, \quad j \ne i \qquad \text{при} \quad i=1, 2,\ldots, n.$$

Следующая последовательность шагов представляет метод Гаусса-Зейделя.

Шаг 1. Проверить выполнение условия $a_{11} \ne 0$, $a_{22} \ne 0$, …, $a_{nn} \ne 0$. Если оно не выполняется, переставить уравнения так, чтобы оно выполнялось.

Шаг 2. Выразить j-ю переменную из j-го уравнения для каждого j=1,…,n . Получим

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(B_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)$$

……………………………………………

$$x_j = \frac{1}{a_{jj}}(B_j - a_{j1}x_1 - \ldots - a_{jj-1}x_{j-1} - a_{jj+1}x_{j+1} - \ldots - a_{jn}x_n) \qquad (2)$$

……………………………………………

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(B_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1})$$

Шаг 3. Выбрать произвольным образом начальное приближение $\overline{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Шаг 4. Подставить $\overline{x}^{(0)}$ в правую часть системы (2), тогда в левой её части получится первое приближение $\overline{x}^{(1)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(B_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - ... - a_{1n}x_n^{(0)})$$

. . . .

$$x_j^{(1)} = \frac{1}{a_{jj}}(B_j - a_{j1}x_1^{(0)} - ... - a_{jj-1}x_{j-1}^{(0)} - a_{jj+1}x_{j+1}^{(0)} - ... - a_{jn}x_n^{(0)})$$

. . . .

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}(B_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)})$$

Шаг 5. Вычислить δ=max| $x_j^{(0)} - x_j^{(1)}$ |, 1≤j≤n.

Шаг 6. Если δ меньше заданной точности, то $\overline{x}^{(1)}$ - приближенное решение, в противном случае подставить $\overline{x}^{(1)}$ в правую часть системы (2), тогда в левой части получим второе приближение $\overline{x}^{(2)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$. Снова вычислить δ=max| $x_j^{(1)} - x_j^{(2)}$ | и поступать таким образом до тех пор, пока δ станет меньше заданной точности.

Переход от k-ого приближения к (k+1)-му осуществляется по формулам

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(B_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - ... - a_{1n}x_n^{(k)}) \qquad (3)$$

. . . .

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(B_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}),$$

а выход из цикла происходит при выполнения условия

$$\max_{1 \le j \le n} \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k+1)} \right| < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность приближения.

Пример 7. Решить с точностью 0,001 систему

$$5x_1 + 0.12x_2 + 0.09x_3 = 10$$
$$0.08x_1 + 4x_2 - 0.15x_3 = 20$$
$$0.18x_1 - 0.06x_2 + 3x_3 = -4.5.$$

Решение. Диагональные элементы отличны от нуля, поэтому можно применить метод Гаусса-Зейделя. Приведем систему к виду (3):

$$x_1 = 2 - 0.024x_2 - 0.018x_3$$
$$x_2 = 5 - 0.02x_1 + 0.03x_3$$
$$x_3 = -1.5 - 0.06x_1 + 0.02x_2.$$

Выберем начальное (нулевое) приближение $\bar{x}^{(0)} = (0,0,0)$ и найдем $\bar{x}^{(1)}$:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0.024 \cdot 0 - 0.018 \cdot 0 = 2$$
$$x_2^{(1)} = 5 - 0.02 \cdot 0 + 0.03 \cdot 0 = 5$$
$$x_3^{(1)} = -1.5 - 0.06 \cdot 0 + 0.02 \cdot 0 = -1{,}5.$$

Найдем второе приближение $\bar{x}^{(2)}$:

$$x_1^{(2)} = 2 - 0.024 \cdot 5 - 0.018 \cdot (-1.5) = 1.907$$
$$x_2^{(2)} = 5 - 0.02 \cdot 2 + 0.03 \cdot (-1.5) = 4.915$$
$$x_3^{(2)} = -1.5 - 0.06 \cdot 0 + 0.02 \cdot 0 = -1.5.$$

Найдем третье приближение $\bar{x}^{(3)}$:

$$x_1^{(3)} = 2 - 0.024 \cdot 4.915 - 0.018 \cdot (-1.52) = 1.90940$$
$$x_2^{(3)} = 5 - 0.02 \cdot 1.907 + 0.03 \cdot (-1.52) = 4.91626$$
$$x_3^{(3)} = -1.5 - 0.06 \cdot 1.907 + 0.02 \cdot 4.915 = -1.51612.$$

Найдем четвертое приближение $\bar{x}^{(4)}$:

$$x_1^{(4)} = 2 - 0.024 \cdot 4.91626 - 0.018 \cdot (-1.51612) = 1.9092999$$
$$x_2^{(4)} = 5 - 0.02 \cdot 1.90940 + 0.03 \cdot (-1.51612) = 4.9163284$$

$$x_3^{(4)} = -1.5 - 0.06 \cdot 1.90940 + 0.02 \cdot 4.91626 = -1.5162388.$$

Первые три знака после запятой в $\bar{x}^{(3)}$ и $\bar{x}^{(4)}$ одинаковы, поэтому приближенным решением с заданной точностью является вектор $\bar{x} = (1.909;\ 4.916;\ -1.516)$.

Задачи

Решить методом Гаусса-Зейделя следующие системы уравнений с точностью 0.001.

1. $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= -6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 200 \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 &= 600 \\ x_1 + 2x_2 + 100x_3 &= 500. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 0.4x_1 + 0.0003x_2 + 0.0008x_3 + 0.0014x_4 &= 0.122 \\ -0.0029x_1 - 0.5x_2 - 0.0018x_3 - 0.0012x_4 &= -0.2532 \\ -0.0055x_1 - 0.005x_2 - 1.4x_3 - 0.0039x_4 &= -0.9876 \\ -0.0082x_1 - 0.0076x_2 - 0.007x_3 - 2.3x_4 &= -2.0812 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 9.87x_1 + 4.25x_2 - 1.63x_3 &= 0.28 \\ 0.94x_1 - 7.31x_2 + 2.15x_3 &= 4.32 \\ 1.17x_1 + 2.56x_2 + 5.29x_3 &= 8.44. \end{aligned}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи. Вычисление корней уравнения - одна из важнейших математических задач. Сравнительно редко удаётся найти точные значения корней. Поэтому важное значение приобретают способы приближённого нахождения корней уравнения и оценка степени их точности.

Пусть дано уравнение с одним неизвестным вида

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ - непрерывная функция переменной *x*. Требуется найти корень этого уравнения. Представить решение этого уравнения в виде конечной формулы оказывается невозможным, поэтому мы откажемся от поиска точного значения корней и займёмся их приближённым вычислением с заданной точностью.

Основные этапы решения. Решение задачи отыскания корней осуществляется в два этапа. Первый этап называется этапом отделения (локализации) корней, второй - итерационного уточнения корней.

Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b)<0$, то внутри этого промежутка имеется хотя бы один корень уравнения.

Геометрически это означает, что график непрерывной функции, расположенной по разные стороны оси *OX*, пересекает эту ось, по меньшей мере, в одной точке.

Отрезок $[a,b]$, содержащий только один корень уравнения $f(x)$, называется отрезком локализации корня. Цель этапа локализации считается достигнутой, если для каждых подлежащих определению корней удалось указать отрезок локализации.

К сожалению, универсальный метод локализации не представляется возможным. В простых ситуациях хороший результат может давать графический метод. Часто применяется построение таблиц значений функций вида $y_i = f(x_i)$, $i=1,2,\ldots$ и при этом о наличии корня на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$, судят по перемене знака функции на концах отрезка.

Пример 1. Локализуем корни уравнения

$$4-2x^2-e^x=0.$$

Для этого преобразуем уравнение к виду $4-2x^2 = e^x$ и построим графики функций $y=4-2x^2$ и $y=e^x$. Абсциссы точек пересечения этих графиков являются корнями данного уравнения. Из графика, изображенного на рис. 1, видно, что уравнение имеет два коня, расположенные на отрезках [-2,-1] и [0,1].

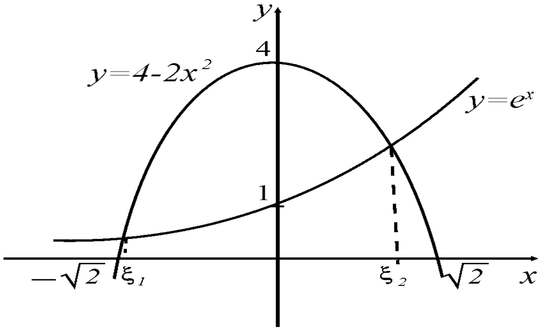

Рис. 4

Пример 2. Локализуем корни уравнения

$$x^3- 1.1x^2-2.2x+1.8=0.$$

Для этого составим таблицу значений функции $F(x)= x^3-1.1x^2-2.2x+1.8$ на отрезке [-2,2] с шагом 0.4.

x_i	-2	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0
y_i	-6.2	-1.592	1.128	2.344	2.44	1.8

x_i	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
y_i	0.808	-0.152	-0.696	-0.44	1

Из таблицы видно, что функция f меняет знак на концах отрезков [-1.6, -1.2], [0.4, 0.8], [1.6, 2.0]. Поэтому каждый из этих отрезков содержит, по крайней мере, один корень. Учитывая, что $f(x)$ - многочлен третьей степени, который не может иметь более трех корней, то задача локализации решена.

<u>Метод половинного деления</u>. Пусть дано уравнение (1), причем функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$. Для вычисления корня уравнения (1), принадлежащего отрезку $[a,b]$, найдем середину этого отрезка $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Если $f(x_0) \neq 0$, то для продолжения вычислений выберем ту из частей данного отрезка $[a, x_0]$ или $[x_0, b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим через a_1 и b_1.

Новый отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим пополам и проводим те же рассуждения и т. д. В результате получаем на каком-то этапе или точный корень уравнения (1), или же бесконечную последовательность вложенных отрезков $[a, b]$, $[a_1, b_1]$,…, $[a_n, b_n]$, таких что

$$f(a_n)f(b_n)>0 \qquad (n=1,2,\ldots), \qquad (2)$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a). \qquad (3)$$

Число ξ - общий предел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - является корнем уравнения *f(x)=0.*

Оценку погрешности на *n*-ом шаге вычислений можно получить из соотношения (3) в виде

$$0 \le b_n - a_n \le \frac{1}{2^n}(b-a). \qquad (4)$$

Здесь $a_n \approx \xi$ с точностью ε, не превышающей $\frac{1}{2^n}(b-a)$.

Если требуется найти корень уравнения с точностью ε, то деление пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда координата середины отрезка и есть значение корня с требуемой точностью.

Задачи

Отделить корни уравнения и найти их с точностью ε=0,01 методом деления пополам. Сделать чертеж.

1. $4x = 2^x$	**2.** $x^3 + 2x - 8 = 0$	3. $x^3 - 5x + 1 = 0$
4. $(x+1)^3 - x = 0$	5. $x + \sin x - 1 = 0$	6. $x^2 = \cos x$
7. $x = 2 - \ln x$	8. $x^2 = e^x + 2$	9. $x^3 + 2x + 1 = 0$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Омельченко В.П. Математика: учеб.пособие / В.П. Омелченко, Э.В. Курбатова.- Ростов н/Д: Феникс, 2008.- 380с.
2. Пантина И.В. вычислительная математика / И.В.Пантина,А.В.Синчуков.-М.:Маркет ДС, 2010.- 176с. Амосов А.А., Вычислительные методы для инженеров / А.А.Амосов, Ю.А.Дубинский, Н.В. Копченова.- М.: Высш. шк.,1994.- 544 с.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак. - М.: Наука, 1987. – 320 с.
4. Демидович Б.Н.,Основы вычислительной математики / Б.Н.Демидович, И.А. Марон.- М.: Высш. шк., 1994. - 172 с.
5. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование / Ю.П. Боглаев.- М.: Высш. шк., 1990. - 544 с.
6. Семенов М.П., Катрахова А.А. Жучкова В.В. Основы численных методов / М.П.Семенов, А.А.Катрахова, В.В.Жучкова.- Воронеж: Изд-во ВГТУ, 1997. - 62 с.
7. Ушаков Д.М.Введение в математические основы САПР / Д.М. Ушаков, В.П.Корячко, И.П.Норенков.-
8. Федорков Е.Д.Численные методы : учеб. пособие / Е. Д. Федорков, А. И. Бобров. - Воронеж: ВГТУ, 2004. - 164 с. - 33-00.
9. Федорков, Е.Д. Вычислительная математика: Учеб.пособие / Е. Д. Федорков, А. И. Бобров. - Воронеж: ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2006. - 168 с. - 35-00.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине
«Математическое обеспечение САПР» для студентов
направления 230100.62 «Информатика и
вычислительная
техника» (профиль «Системы автоматизированного
проектирования в машиностроении»)
заочной формы обучения

Составитель
Пак Алла Анатольевна

В авторской редакции

Компьютерный набор А.А. Пак

Подписано к изданию . 25.09. 2014.
Уч.-изд. л. 3,6 . «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14