МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

# МАТЕМАТИКА

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
в первом семестре для студентов
направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело»
(профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта
и хранения нефти, газа и продуктов переработки»)
очно-заочной формы обучения

Воронеж 2022

УДК 517.9(075)
ББК 22.161(я7)

***Составители:***
*канд. физ.-мат. наук А. П. Бырдин,*
*канд. техн. наук А. А. Сидоренко*

**Математика**: методические указания к проведению практических занятий в первом семестре для студентов направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело» (профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта и хранения нефти, газа и продуктов переработки») очно-заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. П. Бырдин, А. А. Сидоренко. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. – 42 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Математика». Подробно разобраны примеры решения задач и приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов первого курса очно-заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле Математика_21.03.01_1 семестр.pdf.

Ил. 4. Библиогр.: 6 назв.

**УДК 517.9(075)**
**ББК 22.161(я7)**

***Рецензент*** - *О. А. Соколова, канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ*

*Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета*

## 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Литература: [I, приложение, §§ 1,3,4; 2, гл. 21, §§ 2-9, § 15;3, гл. 1, §§5, гл. 2,4].

### l.1. Вычисление определителей. Решение систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера

**Пример.** Вычислить определитель четвертого порядка.

*Решение*. Для вычисления определителя используем свойства:

1) величина определителя не измениться, если к элементам строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число;

2) определитель равен сумме произведений элементов строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

Вычтем из элементов четвертого столбца элементы третьего и разложим полученный определитель по элементам четвертого столбца. Затем разложим определитель третьего порядка по элементам первого столбца. Имеем

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} == 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

**Пример**. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+6y+4z=-2, \\ 3x+9y+2z=6, \\ 2x+3y+8z=-7. \end{cases}$$

*Решение*. Вычислим определитель данной системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6\cdot 1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -90.$$

В вычислениях последовательно выполнены следующие операции:

1) вынесение за знак определителя общих множителей второго и третьего столбцов;

2) вычитание из элементов третьего столбца элементов второго и из элементов второго столбца удвоенных элементов первого столбца;

3) разложение определителя по элементам первой строки. Поскольку определитель системы не равен нулю, система

имеет единственное решение. Это решение можно найти по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ получаются из определителя $\Delta$ заменой первого, второго и третьего столбцов соответственно на столбец из свободных членов.

Вычисляем определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 2 \\ -7 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 6\cdot 1\cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -180.$$

При вычислении определителя к первому столбцу был прибавлен третий, а из второго столбца вычтен третий столбец.

Аналогично имеем $\Delta_2 = -30$, $\Delta_3 = 135$ и по формулам Крамера получим решение системы уравнений

$$x = 2, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = -\frac{3}{2}.$$

### 1.2. Матрицы. Действия с матрицами

Матрица - система элементов, расположенных в определенном порядке и образующих таблицу. Элементы матриц обозначаются $a_{ij}$, где $i$ - номер строки, а $j$ — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент. Обозначение матицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right], \quad (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n).$$

Матрица $A$ имеет размер $m \times n$ и называется прямоугольной. Если $m = n$, то матрица называется квадратной.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.

Единичной называется квадратная матрица $E$ вида

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \left[\delta_{ij}\right], \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ -}$$

символ Кронекера.

Если в матрице $A$ поменять местами строки и столбцы, то получиться новая матрица, называемая транспонированной и обозначаемая $A^T$. Например,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрицы $A$ и $B$ называются равными, если они имеют одинаковую размерность, и элементы матриц с одними и теми же индексами равны, т.е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$.

Суммой прямоугольных матриц $A$ и $B$ одинаковых размеров $(m = n)$ называется матрица $C$ того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов $A$ и $B$:

$$C = A + B, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Из определения сложения матриц вытекают переместительное и сочетательное свойства: $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$.

**Пример**. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Под произведением матрицы $A$ на число $\lambda$ понимается матрица, каждый элемент которой равен произведению $\lambda$ на $a_{ij}$:

$$\lambda\lfloor a_{ij} \rfloor = \lfloor \lambda a_{ij} \rfloor$$

Имеют место равенства $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

**Пример**. $3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$.

Произведением матриц $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ и $B=\lfloor b_{ij} \rfloor$ называется матрица $C$, элементы которой $\lfloor c_{ij} \rfloor$ равны сумме произведений элементов $i$-й строки матрицы $A$ на элементы $j$-го столбца матрицы $B$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Из определения следует, что произведения $AB$ в указанном порядке возможно лишь в случае, когда число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$.

Для единичной матрицы $E$, всегда $AE=EA=A$.

**Пример**. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0+(-2)\cdot 3 & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 2+(-2)\cdot 0 \\ 4\cdot 0+(-1)\cdot 3 & 4\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & 4\cdot 2+(-1)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 2 \\ -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

В общем случае произведение матриц не обладает переместительным свойством, т.е. $AB \neq BA$. Если умножения возможны, то справедливы следующие равенства:

1) $A(BC)=(AB)C$ (сочетательный закон произведения);
2) $\alpha(AB)=(\alpha A)B$ (сочетательный закон относительно скалярного множителя);
3) $(A+B)\cdot C=AC+BC$, $C\cdot(A+B)=CA+CB$ (распределительные законы).

### 1.3. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений матричным методом

Квадратная матрица, обозначаемая $A^{-1}$, называется обратной матрице $A$, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Для того чтобы матрица $A$ имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. чтобы определитель матрицы был не равен нулю. Обратная матрица определяется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где $\Delta$ определитель матрицы $A$, $A_{ij}$ - алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ в определителе матрицы $A$, причем алгебраические дополнения для строк матрицы $A$ записываются в столбцы матрицы $A^{-1}$.

С помощью обратной матрицы решаются матричные уравнения вида $AX = B$, $YA = B$. Умножая первое уравнение слева, а второе справа на матрицу $A^{-1}$, получим $X = A^{-1}B$, $Y = BA^{-1}$.

**Пример**. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y + 7z = 14, \\ 6x + 3y + 4z = 13, \\ 5x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

*Решение*. Вычислим определитель системы: $\Delta = -1 \neq 0$. Следовательно, матрица, составленная из коэффициентов системы невырожденная. Запишем систему в матричной форме, для чего введем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выполним умножение $AX$ и приравняем результат матрице $B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 5y + 7z \\ 6x + 3y + 4z \\ 5x - 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из условия равенства матриц получим рассматриваемую систему. Таким образом, система может быть записана в матричном виде $AX = B$. Следовательно, ее решение $X = A^{-1}B$. Для нахождения обратной матрицы $A^{-1}$ вычислим алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = -1, \quad A_{21} = 1, \quad A_{31} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = 38, \quad A_{22} = -41, \quad A_{32} = 34,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = -27, \quad A_{23} = -29, \quad A_{33} = -24.$$

Таким образом, обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & -29 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & 29 & 24 \end{bmatrix}.$$

Убедимся в правильности результата

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & 29 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Найдем матрицу решений

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&29&24\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}14\\13\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Имеем: $x=1$, $y=1$, $z=1$. Подставим найденное решение в исходную систему уравнений и убедимся в правильности полученного результата.

### 1.4. Ранг матрицы. Способы вычисления

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы. Вычислять ранг матрицы небольшой размерности можно методом окаймляющих миноров, который рассмотрим на примере.

**Пример**. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{bmatrix}1&4&2\\1&4&5\\2&8&1\end{bmatrix}$.

*Решение*. Выберем какой-либо отличный от нуля элемент матрицы, например, в левом верхнем углу. Выделим минор второго порядка, в который входит этот элемент: $\begin{vmatrix}1&4\\1&4\end{vmatrix}=0$.

Поскольку этот минор оказался равным нулю, строим другие миноры второго порядка, содержащие выделенный элемент, до тех пор, пока не найдем минор, отличный от нуля, если таковой найдется. Если нет минора второго порядка не равного нулю, то ранг матрицы будет равным единице. В нашем случае такой минор имеется: $\begin{vmatrix}1&2\\1&5\end{vmatrix}\neq 0$.

Затем строим минор третьего порядка, содержащий этот минор. В данном случае единственным таким минором является определитель матрицы

$$\begin{bmatrix}1&4&2\\1&4&5\\2&8&1\end{bmatrix}=0.$$

Таким образом, максимальный порядок отличного от нуля минора равен двум. Следовательно, ранг матрицы равен двум.

Из определения ранга матрицы вытекает, что если матрица $A$ имеет размерность $m\times n$, то ранг матрицы не превосходит наименьшего из этих чисел: $rangA\le\min(m,n)$.

В случае, когда размерность матрицы большая, более удобный метод вычисления ее ранга основан на линейных преобразованиях.

Элементарными преобразованиями первого рода матрицы $A$ называются следующие действия:

1) умножение какой либо строки матрицы на число $\lambda\neq 0$;
2) перестановка двух строк;
3) прибавление к элементам одной строки соответственных элементов другой строки, умноженных на число $\lambda$.

Элементарными преобразованиями второго рода называются аналогичные действия со столбцами.

Матрицы, получаемые друг из друга элементарными преобразованиями, называются эквивалентными и соединяются знаком $\Leftrightarrow$. Эквивалентные матрицы имеют равные ранги.

**Пример**. Найти ранг матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{bmatrix}$.

*Решение*. Умножим первый столбец на -3 и сложим со вторым столбцом; затем первый столбец прибавим к третьему; затем первый столбец умножим на 2 и прибавим к четвертому. Получим

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -7 & 5 & 1\\ 1 & 7 & -5 & -1\end{bmatrix}.$$

Умножим второй столбец на $\frac{1}{7}$, третий на $\frac{1}{5}$ и прибавим второй столбец к третьему и четвертому столбцам. Получим

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -7 & 5 & 1\\ 1 & 7 & -5 & -1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Умножим первую строку на -2 и прибавим ко второй строке. Вычтем из третьей строки первую. Имеем

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Последняя матрица получена из предыдущей прибавлением к третьей строке второй строки. Из вида последней матрицы видно, что $rangA=2$.

### 1.5. Общий случай решения систем линейных уравнений

Пусть дана система $n$ уравнений с $m$ неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2,\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n.\end{cases}$$

Введем расширенную матрицу системы, получаемую присоединением к матрице системы столбца свободных членов

$$A_p=\frac{1}{\Delta}\left[\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n\end{array}\right],$$

где чертой отделена матрица $A$ системы. Из вида расширенной матрицы следует, что в общем случае $rangA\le rangA_p$.

**Теорема Кронекера-Капелли** - важнейшая теорема о совместности системы гласит: система $n$ линейных уравнений с $m$ неизвестными совместна только тогда, когда ранг расширенной матрицы этой системы равен рангу основной матрицы системы.

Более детально:

1) если $rangA < rangA_p$, то система несовместна, т.е. решение не существует;

2) если $rangA = rangA_p = r \le \min(m,n)$, то система совместна, т.е. существует хотя бы одно решение; при этом:

а) если ранг равен числу неизвестных $r = m$, то система имеет единственное решение;

б) если ранг меньше числа неизвестных $r < m$, то система имеет бесконечное множество решений, которое можно найти методом Гаусса последовательного исключения неизвестных.

Отметим последовательность действий при доказательстве совместности системы и при отыскании неизвестных.

1) Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду, т.е. такому, чтобы ниже или выше главной диагонали стояли только нули. Удобно при этом пользоваться только элементарными преобразованиями первого рода, поскольку они эквивалентны соответствующим операциям с уравнениями системы. Число отличных от нуля диагональных элементов матрицы системы, а также расширенной матрицы будет равно их рангам. Если ранги не равны, то система несовместна.

2) Если ранги этих матриц одинаковы и равны некоторому числу $r$, то система совместна. Поскольку использовались лишь элементарные преобразования первого рода, то каждый строке матрицы соответствует определенное уравнение, в котором коэффициенты при неизвестных равны соответствующим элементам матрицы.

3) Выпишем $r$ уравнений и решим полученную систему относительно г неизвестных, считая параметрами $m - r$ неизвестных.

**Пример**. Решить систему уравнений или доказать ее несовместность

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

*Решение*. Выпишем расширенную матрицу системы, поменяв местами первые два уравнения

$$A_p = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right].$$

Последовательно умножая первую строку на -2, - 3, -4 и складывая со второй, третей и четвертой строками соответственно, получим

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Последняя матрица получена из предыдущей умножением второй строки на -2 и на -3 и прибавлением к третьей и четвертой строкам соответственно. В левом верхнем углу находится минор второго порядка отличный от нуля. Видим, что ранги матрицы системы и расширенной матрицы равны двум. Следовательно, система совместна. Выпишем уравнения, соответствующие этим строкам матрицы, считая неизвестные, не входящие в выделенный минор, параметрами. Получим

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 - x_4 + 2x_5 \\ 3x_2 = 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 1 \end{cases}.$$

Решим полученную систему уравнений относительно $x_1$ и $x_2$, считая остальные неизвестные произвольными числами. Тогда $x_2 = \frac{1}{3} + x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5$, $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5$.

## 1.6. Задачи к п. 1

**1.** Вычислить определители (в скобках указан ответ)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad (0); \quad \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0, \quad (-\infty, +\infty);$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ (-12); \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -13 & 6 \end{vmatrix}, \ (0); \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \ (36).$$

**2.** Найти произведения матриц $AB$, если:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\left( AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{bmatrix} \right)$;

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\left( AB = \begin{bmatrix} 21 & 37 & 21 \end{bmatrix} \right)$;

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$; $\left( AB = 31 \right)$

d) $3A + 2B$, *если* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{bmatrix}$.

**3.** Найти многочлен от матриц

a) $f(A) = A^2 - 3A + 5E$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\left( f(A) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right)$;

b) $f(A) = A^2 - 5A + 3E$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $\left( f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$.

**3.** Вычислить коммутатор $AB - BA$ матриц $A$ и $B$, если:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\left( AB - BA = \begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix} \right)$;

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; $\left( AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$.

**4.** Вычислить произведение трех матриц

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\left( 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\left( \begin{bmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{bmatrix} \right)$;

c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$.

**5.** Найти обратную матрицу.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\left( A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 24 \end{bmatrix} \right)$;

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $\left( A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{bmatrix} \right)$;

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\left( A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$.

**6.** Решить матричные уравнения.

a) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\left( X = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & 23 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\left( X = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 25 & -25 \\ -26 & -2 \end{bmatrix} \right)$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $\left( X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \right)$;

d) $X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$, $\left( X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \right)$.

**7.** Решить системы уравнений.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 4y = -5. \end{cases}$ $(-1,1,-2)$; b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ 3x + y - 5z = 0, \\ 4x - y + z = 3. \end{cases}$ $(-1,1,-2)$;

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 3x + 2y + z = 1, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$; d) $\begin{cases} x + y + 5z = 1, \\ x + y + 3z = -3, \\ 2x + y + 3z = -3. \end{cases}$ $(-1,1,-2)$.

**8.** Решить системы уравнений или доказать их несовместимость.

a) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - \quad 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$ $(-8, 3 + x_4, 6 + x_4, x_4)$;

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$ $(1,2,-2)$; d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$ $(x_1, x_2, -x_1 + 2x_2, 1)$.

**9.** Найти решения однородных систем.

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ 2x + 5y + 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 0. \end{cases}$ $(0,0,0)$; b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 3x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$ $(t \cdot (-4,-1,5), t \in R)$;

c) $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x - 2y + 4z = 0, \\ 5x - 5y + 10z = 0. \end{cases}$ $(y - 2z, y, z)$;

d) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$ $\left( x_1, x_2, -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2, \frac{7}{2}x_1 - 7 - \frac{5}{2}x_2 \right)$.

## 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Литература: [1, гл.7, §§ 44-47; гл.8, §§ 48-52; гл. 9, §§ 53, 54; гл. 10, §§ 55-58], [3, гл. 2, § 1-3].

Проекций вектора $\overline{a}$ на ось $l$ называется скалярная величина, равная произведению его длины на косинус угла между положительными направлениями оси и вектора

$$a_l = пр._l\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi ,$$

где $|\overline{a}|$ – длина вектора.

Если $\alpha, \beta, \gamma$ - углы, образованные вектором $\overline{a}$ с осями прямоугольной системы координат $Ox, Oy, Oz$, то проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси равны

$$a_x = |\overline{a}|\cos\alpha , \quad a_y = |\overline{a}|\cos\beta , \quad a_z = |\overline{a}|\cos\gamma \quad (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1).$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$. Проекции $a_x, a_y, a_z$ на оси $Ox, Oy, Oz$:

называются координатами вектора $\overline{a}$. При заданных проекциях на координатные оси (координатах) используется сокращенное обозначение $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Если вектор определяется двумя заданными точками - его началом $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом $B(x_2, y_2, z_2)$, то проекции вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на координатные оси определяются формулами

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1 .$$

Длина вектора $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ равна арифметическому значению квадратного корня из суммы квадратов координат вектора $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ .

Если $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ - векторы единичной длины, направленные по координатным осям $Ox, Oy, Oz$, то вектор $\overline{a}$ может быть представлен в виде $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ .

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi .$$

Скалярное произведение обладает перемести тельным и распределительным свойствами

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a} , \quad (\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c} .$$

Если векторы заданы координатами $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то их скалярное произведение определяется по формуле $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, а угол между ними соотношением - $\cos\varphi = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, определяемый условиями:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi$ - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ;

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен плоскости, определяемой перемножаемыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ;

3) вектор $\overline{c}$ направлен так, что наблюдателю, смотрящему из его конца на векторы $\overline{a}$ и

$\bar{b}$, кратчайшее вращение от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ видно производимым против часовой стрелки.

Основные свойства векторного произведения:

$$\bar{a}\times\bar{b} = -(\bar{b}\times\bar{a}), \quad (\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} + \bar{b}\times\bar{c}$$

Если векторы заданы координатами $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то их векторное произведение определяется по формуле

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

**<u>Пример</u>**. Даны векторы $\bar{a} = \{2;5;7\}$, $\bar{b} = \{1;\,2;\,4\}$. Найти координаты векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}$.

*<u>Решение</u>*. По формуле вычисления векторного произведения находим

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}.$$

Итак, $\bar{a}\times\bar{b} = \{6;-1;-1\}$.

<u>Смешанным произведением</u> трех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется их векторно-скалярное произведение $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Если векторы заданы своими координатами, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Следующая теорема выражает геометрический смысл смешанного произведения.

**<u>Теорема 1.</u>** *Смешанное произведение $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ равно объему $V$ параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - правая, и со знаком «-», если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - левая. Если же $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, то $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = 0$. Другими словами*:

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{cases} V, & \text{если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \text{правая тройка}, \\ -V, & \text{если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \text{левая тройка}, \\ 0, & \text{если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \text{компланарны}. \end{cases}$$

Итак, если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, то $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = 0$. Верно и обратное: если $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = 0$, то векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны. Действительно, если бы векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ были некомпланарны, то по теореме 1 смешанное произведение $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \pm V \neq 0$, что противоречит условию.

**<u>Пример</u>**. В пространстве даны четыре точки: $A(1;1;1)$, $B\,(4;4;4)$, $C(3;5;5)$, $D\,(2;4;7)$. Найти объем тетраэдра $ABCD$.

*<u>Решение</u>*. Как известно из элементарной геометрии, объем $V$ тетраэдра $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$; поэтому из теоремы 1 заключаем, что $V$ равен $\frac{1}{6}$ абсолютной величины смешанного произведения

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}$. Найдем это смешанное произведение. Прежде всего определим координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$. Имеем: $\overline{AB} = \{3;3;3\}$, $\overline{AC} = \{2;4;4\}$ $\overline{AD} = \{1;3;6\}$. Используя теорему 2, получаем

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 12 - 3\cdot 8 + 3\cdot 2 = 18.$$

Отсюда $V = \dfrac{1}{6}\cdot 18 = 3.$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>: [4, №№ 749, 751, 754, 774, 777, 782, 783, 789, 802, 816, 819, 832, 842, 850, 853, 867, 874, 875].

## 2.1. Задачи к п. 2

**1.** Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(-1;2;1)$. Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

**2.** Определить точку $N$, с которой совпадает конец вектора $\overline{a} = \{3;-1;4\}$, если его начало совпадает с точкой $M(1;2;-3)$.

**3.** Определить начало вектора $\overline{a} = \{2;-3;-1\}$, если его конец совпадает с точкой $(1;-1;2)$.

**4.** Вычислить направляющие косинусы вектора $\overline{a} = \left\{\dfrac{3}{13};\dfrac{4}{13};\dfrac{12}{13}\right\}$.

**5.** Вектор составляет с осями $OX$ и $OY$ углы $\alpha = 120^\circ$ и $\gamma = 45^0$. Какой угол он составляет с осью $OY$?

**6.** Даны $|\overline{a}| = 13$, $|\overline{b}| = 19$ и $|\overline{a}+\overline{b}| = 24$. Вычислить $|\overline{a}-\overline{b}|$.

**7.** Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = 60^\circ$, причем $|\overline{a}| = 5$ и $|\overline{b}| = 8$. Определить $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}-\overline{b}|$.

**8.** Даны векторы $\overline{a} = \{3;-2;6\}$ и $\overline{b} = \{-2;1;0\}$. Определить координаты следующих векторов: а) $\overline{a}-\overline{b}$; б) $2\overline{a}+3\overline{b}$; в) $\dfrac{1}{3}\overline{a}-\overline{b}$.

**9.** Найти орт вектора $\overline{a} = \{6;-2;-3\}$.

**10.** Определить модули суммы и разности векторов $\overline{a} = \{3;-5;8\}$ и $\overline{b} = \{-1;1;-4\}$.

**11.** Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$; зная, что

$|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, вычислить: а) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; б) $\overline{a}^2$; в) $(\overline{a}+\overline{b})^2$; г) $(3\overline{a}+2\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b})$;

д) $(3\overline{a}+2\overline{b})^2$.

**12.** Даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, удовлетворяющие условию $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$. Зная, что $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$ и $|\overline{c}| = 4$, вычислить $\overline{a}\overline{b}+\overline{b}\overline{c}+\overline{c}\overline{a}$.

**13.** Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; зная, что $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$, вычислить угол $\alpha$ между векторами $\overline{p} = \overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a}-\overline{b}$.

**14.** Даны точки $A(1;-2;2)$, $B(2;-1;5)$ и $C(0;1;-5)$. Вычислить: а) $(2\overline{AB}-\overline{CB})\cdot(2\overline{BC}+\overline{BA})$; б) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; в) $\sqrt{\overline{AC}^2}$.

**15.** Вычислить работу силы $\overline{F}=\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1;2;0)$ в положение $C(2;1;3)$.

**16.** Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}=\{2;-4;-4\}$ и $\overline{b}=\{-3;2;6\}$.

**17.** Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине $B$.

**18.** Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}=i-2\overline{j}-2\overline{k}$, образующий с ортом $\overline{j}$ острый угол и имеющий длину $|\overline{x}|=15$.

**19.** Найти вектор $\overline{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\overline{x}|=2\sqrt{3}$.

**20.** Найти координаты вектора $\overline{x}$, коллинеарного вектору $\overline{a}=\{2;1;-1\}$ и удовлетворяющего условию $\overline{a}\cdot\overline{x}=3$.

**21.** Вектор $\overline{x}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}_1=\{2;3;-1\}$, $\overline{a}_2=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $\overline{x}\cdot(2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k})=-6$. Найти координаты $\overline{x}$.

**22.** $|\overline{a}_1|=1,\ |\overline{a}_2|=2$ *и* $\left(\widehat{\overline{\boldsymbol{a}}_1,\overline{\boldsymbol{a}}_2}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить:

а) $|\overline{a}_1\times\overline{a}_2|$; б) $|(2\overline{a}_1+\overline{a}_2)\times(\overline{a}_1+2\overline{a}_2)|$; в) $|(\overline{a}_1+3\overline{a}_2)\times(3\overline{a}_1-\overline{a}_2)|$.

**23.** $|\overline{a}|=|\overline{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}-2\overline{b}$ и $3\overline{a}+2\overline{b}$.

**24.** Заданы векторы $\overline{a}_1=\{3;-1;2\}$ и $\overline{a}_2=\{1;2;-1\}$. Найти координаты векторов: а) $\overline{a}_1\times\overline{a}_2$; б) $(2\overline{a}_1+\overline{a}_2)\times\overline{a}_2$; в) $(2\overline{a}_1-\overline{a}_2)\times(2\overline{a}_1+\overline{a}_2)$.

**25.** Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$ и $C(4;3;2)$.

**26.** В треугольнике с вершинами $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ и $C(1;3;-1)$ найти высоту $h=|\overline{BD}|$.

**27.** Сила $\overline{F}=2\overline{i}-4\overline{j}+5\overline{k}$ приложена к точке $A(4;-2;3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3;2;-1)$.

**28.** Найти координаты вектора $\overline{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}_1=\{4;-2;-3\}$ и $\overline{a}_2=\{0;1;3\}$, образует с ортом $\overline{j}$ тупой угол и $|\overline{x}|=26$.

**29.** Найти координаты вектора $\overline{x}$, если он перпендикулярен векторам $\overline{a}_1=\{2;-3;1\}$ *и* $\overline{a}_2=\{1,-2,3\}$, а также удовлетворяет условию $\overline{x}\cdot(\overline{i}+2\overline{j}-7\overline{k})=10$.

**30.** Векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\overline{a}_1|=4$, $|\overline{a}_2|=2$, $|\overline{a}_3|=3$. Вычислить $\overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_3$.

**31.** Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $30^\circ$. Зная, что $|\overline{a}|=6$, $|\overline{b}|=3$, $|\overline{c}|=3$, вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

**32.** Доказать тождество: $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}-2\overline{b}+2\overline{c})(4\overline{a}+\overline{b}+5\overline{c})=0$.

**33.** Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overline{OA}=3\overline{i}+4\overline{j}$; $\overline{OB}=-3\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{OC}=2\overline{j}+5\overline{k}$.

**34.** Установить компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

а) $\bar{a} = \{2;3;-1\}$, $\bar{b} = \{1;-1;3\}$, $\bar{c} = \{1;9;-11\}$;

б) $\bar{a} = \{3;-2;1\}$, $\bar{b} = \{2;1;2\}$, $\bar{c} = \{3;-1;-2\}$;

в) $\bar{a} = \{2;-1;2\}$, $\bar{b} = \{1;2;-3\}$, $\bar{c} = \{3;-4;7\}$.

**35.** Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2;-3;5)$, $B(0;2;1)$, $C(-2;-2;3)$ и $D(3;2;4)$.

**36.** В тетраэдре с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$ и $D(3;4;-3)$ вычислить высоту $h = |\overline{DE}|$.

**37.** Доказать, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

## Ответы к п. 2

**1.** $\overline{AB} = \{-4;3;-1\}$, $\overline{BA} = \{4;-3;1\}$. **2.** $N(4;1;1)$. **3.** (-1;2;3). **4.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{13}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{13}$, $\cos\gamma = \dfrac{12}{13}$. **5.** $60^\circ$ или $120^0$. **6.** $|\bar{a} - \bar{b}| = 22$. **7.** $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{129}$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 7$. **8.** а) $\{5;-3;6\}$; б) $\{0;-1;12\}$; в) $\left\{3;-\dfrac{5}{3};2\right\}$. **9.** $\bar{a}^\circ = \left\{\dfrac{6}{7};-\dfrac{2}{7};-\dfrac{3}{7}\right\}$. **10.** $|\bar{a} + \bar{b}| = 6$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 14$. **11.** а) -6; б) 9; в) 13; г) -61; д) 73. **12.** $\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{a} = -13$. **13.** $\alpha = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. **14.** а) -524; б) 13; в) 3. **15.** 4. **16.** $\cos\varphi = \dfrac{5}{21}$. **17.** $45^\circ$. **18.** $\bar{x} = -5\bar{i} + 10\bar{j} + 10\bar{k}$. **19.** $\bar{x} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$. **20.** $\left(1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. **21.** $(-3;3;3)$. **22.** а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{3}$. **23.** $50\sqrt{2}$. **24.** а) $\{-3,5,7\}$; б) $\{-6;10;14\}$; в) $\{-12;20;28\}$. **25.** $2\sqrt{6}$. **26.** 5. **27.** $-4\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$. **28.** $\{-6;-24;8\}$. **29.** $\{7;5;1)$. **30.** 24. **31.** $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \pm 27$. **33.** $\dfrac{17}{2}$. **34.** а) Компланарны; б) не компланарны; в) компланарны. **35.** 6. **36.** $3\sqrt{2}$.

# 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Литература: [1, гл. 12, §§ 63-67]; [4, гл. 3, § 1].

## 3.1. Уравнение плоскости

В аналитической геометрии одним из способов задания плоскости является фиксация точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектора $\bar{N} = \{A, B, C\}$, перпендикулярного плоскости и называемого нормальным вектором.

Если $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости, то векторы $\bar{N}$ и $\overline{M_0 M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ перпендикулярны и их скалярное произведение равно нулю

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.1)$$

Обозначив $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, получим общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3.2)$$

Если три точки плоскости $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то приравнивая нулю смешанное произведение трех компланарных векторов

$\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, где $M(x,y,z)$ - произвольная точка плоскости, получим уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3}$$

При заданных точках пересечения плоскости с осями координат $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ из предыдущего уравнения можно получить уравнение плоскости в “отрезках”

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{3.4}$$

Уравнение плоскости в <u>нормальном виде</u>

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{3.5}$$

используется тогда, когда задано расстояние от начала координат до плоскости и углы $\alpha, \beta, \gamma$ между нормальным вектором и осями координат $Ox, Oy, Oz$.

Для проведения общего уравнения плоскости (3.2) к виду (3.5) нужно обе его части умножить на величину

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

причем знак нужно выбирать противоположным знаку $D$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости (3.2) определяется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{3.6}$$

<u>**Пример**</u>. Найти уравнение плоскости параллельной оси $Oy$ и проходящей через точки $M_1(2,1,-2)$, $M_2(-7,-2,1)$.

<u>*Решение*</u>. В соответствии с уравнением (3.1) уравнение плоскости ищем в виде

$$A(x-2)+B(y-1)+C(z+2)=0.$$

В качестве нормального вектора $\overline{N}=\{A,B,C\}$ к искомой плоскости можно ваять вектор, перпендикулярный к вектору $\overline{M_1M_2}=\{-9,-3,3\}$. Имеем $3(x-2)+0(y-1)+9(z+2)=0$ или $x+3z+4=0$.

<u>**Пример**</u>. Плоскость проходит через точку $P(3,3,-4)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$, а на оси аппликат отрезок $c=2$. Составить уравнение плоскости.

<u>*Решение*</u>. Воспользуемся уравнением плоскости в “отрезках” (3.4). Получим

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2}=1.$$

Так как точка $P$ лежит на плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Следовательно,

$$\frac{3}{-3}+\frac{8}{b}+\frac{-4}{2}=1.$$

Отсюда $b=2$ и искомое уравнение плоскости имеет вид

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1 \qquad \text{или} \qquad 2x-3y-3z+6=0.$$

## 3.2. Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны уравнения двух плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Угол между плоскостями определяется по формуле

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3.7)$$

В формуле (3.7) можно брать любой знак, что соответствует выбору одного из двух смежных двугранных углов.

Условие параллельности плоскостей (коллинеарности нормалей $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$) имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

а условие перпендикулярности плоскостей (равенство нулю скалярного произведения нормалей $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$) имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (3.8)$$

**Пример**. Острому углу соответствует положительное значение $\cos\varphi$. По формуле (3.7) имеем

$$\cos\varphi = \left|\frac{5\cdot 1 + (-3)\cdot(-2) + 5\cdot 3}{\sqrt{25 + 9 + 25}\cdot\sqrt{1 + 4 + 9}}\right| \approx 0.9046.$$

По таблице находим $\varphi \approx 25^0 14'$.

Задачи для самостоятельного решения: |4, №№ 915, 191, 921, 925, 927, 928, 941, 948, 958, 960, 964].

## 3.3. Уравнение прямой линии в пространстве

Совокупность уравнений, определяющих две непараллельные плоскости, задает общее уравнение прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.9)$$

Если задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащая прямой, и вектор $\overline{s} = \{l, m, n\}$, параллельный прямой и называемый направляющим вектором, то каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) представляет собой условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\overline{s}$, где $M(x, y, z)$ произвольная точка прямой.

**Пример**. Привести к каноническому виду общее уравнение прямой $\begin{cases} x - 4y + 5z - 1 = 0, \\ 2x + 3y + z + 9 = 0. \end{cases}$

*Решение*. Найдем сначала точку, лежащую на прямой, задаваемой пересечением двух плоскостей. Положив $z = 0$, будем иметь $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x + 3y = -9. \end{cases}$ Отсюда $x = -3,\ y = -1$. Итак, определена точка (-3,-1,0), через которую проходит прямая.

Найдем направляющий вектор $\bar{s}$ прямой. Так как $\bar{s}$ коллинеарен прямой, а нормальные векторы плоскостей $\bar{N}_1 = \{1,-4,5\}$ и $\bar{N}_2 = \{2,3,1\}$ перпендикулярны прямой, то в качестве $\bar{s}$ можно взять векторное произведение нормалей

$$\bar{s} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -19\bar{i} + 9\bar{j} + 11\bar{k}\,.$$

В соответствии с формулой (3.10) запишем каноническое уравнение прямой $\frac{x+3}{-19} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{11}$.

Если условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\bar{s}$ записать, используя параметр $t$, определяемый равенством $\overline{M_0M} = t\bar{s}$, то получим <u>параметрическое уравнение</u> прямой линии

$$x = x_0 + lt\,,\quad y = y_0 + mt\,,\quad z = z_0 + nt\,. \tag{3.11}$$

В уравнениях (6.18) $t$ рассматривается как произвольно изменяющийся параметр $(-\infty < t < +\infty)$; $x, y, z$ – как функции от $t$. При изменении $t$ величины $x$, $y$, $z$ изменяются так, что точка $M(x;y;z)$ движется по данной прямой.

Параметрические уравнения удобны в тех случаях, когда требуется найти точку пересечения прямой с плоскостью.

<u>**Пример**</u>. Даны прямая $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{1}$ и плоскость $x + 2y + z - 6 = 0$. Найти точку их пересечения.

<u>*Решение*</u>. Задача сводится к определению координат точки $x$, $y$, $z$ из трех данных уравнений (мы имеем два уравнения прямой и одно уравнение плоскости). Полагая $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{1} = t$, отсюда $x = 2 + t$, $y = 3 + 2t$, $z = 4 + t$. Подставляя эти выражения в левую часть уравнения данной плоскости, получим $(2+t) + 2(3+2t) + (4+t) - 6 = 0$.

Решая это уравнение, находим: $t = -1$, следовательно, координаты искомой точки будут $x = 1$, $y = 1$, $z = 3$.

Пусть даны канонические уравнения двух прямых

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}\,, \qquad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}\,.$$

Угол между двумя прямыми вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \pm\frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}\,. \tag{3.12}$$

Условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0\,. \tag{3.13}$$

### 3.4. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть даны уравнения прямой и плоскости

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}\,, \quad Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость

$$\sin\varphi = \frac{\overline{N}\cdot\overline{s}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{s}|} = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (3.14)$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$Al+Bm+Cn=0 \qquad (\overline{N}\cdot\overline{s}=0), \qquad (3.15)$$

а условие перпендикулярности

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \qquad (3.16)$$

Условие принадлежности прямой плоскости

$$Al+Bm+Cn=0, \qquad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \qquad (3.17)$$

**Пример.** Найти проекцию точки $P(4,3,10)$ на прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

*Решение*. Пусть точка $M$ - точка пересечения данной примой с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку $P$. Так как вектор $\overline{s}=\{2,4,5\}$ - перпендикуляр к этой плоскости, то его можно выбрать в качестве нормального вектора $\overline{s}=\overline{N}$. Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид

$$2(x-4)+4(y-3)+5(z-10)=0 \quad \text{или} \quad 2x+4y+5z-70=0.$$

Для нахождения точки пересечения прямой с плоскостью запишем уравнение прямой в параметрическом виде (3.11)

$$x=1+2t, \quad y=2+4t, \quad z=3+5t$$

и подставим $x, y, z$ в уравнение плоскости. Имеем

$$2(1+2t)+4(2+4t)+5(3+5t)-70=0, \text{ т.е. } t=1.$$

Подставим найденное значение параметра $t$ в параметрическое уравнение прямой и получим $M(3,6,8)$.

Задачи для самостоятельного решения: [4, №№ 1008, 1010, 1019, 1021, 1022, 1025, 1034, 1039, 1040, 1044, 1046, 1044, 1050. 1053].

### 3.5. Задачи к п. 3

**1.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;1;-1)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}=\{1;-2;3\}$.

**2.** Даны точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

**3.** Точка $P(2;-1;-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

**4.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M$ параллельно векторам $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, если:

а) $M(1;1;1)$, $\overline{a}_1=\{0;1;2\}$, $\overline{a}_2=\{-1;0;1\}$; б) $M(0;1;2)$, $\overline{a}_2=\{2;0;1\}$, $\overline{a}_2=\{1;1;0\}$.

**5.** Написать уравнение плоскости $P'$, проходящей через заданные точки $M_1$ *и* $M_2$ перпендикулярно заданной плоскости $P$, если:

а) $P$: $-x+y-1=0$, $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$;

б) $P$: $2x-y+z+1=0$, $M_1(0;1;1)$, $M_2(2;0;1)$.

**6.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1$ *и* $M_2$ параллельно вектору $\bar{a}$, если:

а) $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$, $\bar{a}=\{3;0;1\}$; б) $M_1(1;1;1)$, $M_2(2;3;-1)$, $\bar{a}=\{0;-1;2\}$.

**7.** Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1$, $M_2$ *и* $M_3$, если:

а) $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$, $M_3(3;0;1)$; б) $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;-1;2)$, $M_3(2;3;-1)$.

**8.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

**9.** Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

а) $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$; б) $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.

**10.** Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x-4y-24z+12=0$ на координатных осях.

**11.** Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла $XOY$.

**12.** Плоскость проходит через точки $M_1(1;2;-1)$ и $M_2(-3;2;1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b=3$. Составить для этой плоскости уравнение “в отрезках”.

**13.** Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку $M_1(4;3;2)$ и отсекают на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

**14.** Заданы плоскость $P$ и точка $M$. Написать уравнение плоскости $P'$, проходящей через точку $M$ параллельно плоскости $P$, и вычислить расстояние $\rho\,(P,P')$, если:

а) $P$: $-2x+y-z+1=0$, $M(1;1;1)$; б) $P$: $x-y-1=0$, $M(1;1;2)$.

**15.** Вычислить расстояние $d$ от точки $P(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

**16.** На оси $OZ$ найти точку, равноудаленную от точки $M(1;-2;0)$ и от плоскости $3x-2y+6z-9=0$.

**17.** Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно:

а) вектору $\bar{q}=\{2;-3;5\}$; б) прямой $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$; в) оси $Ox$; г) оси $Oz$;

д) прямой $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z-3=0;\end{cases}$ е) прямой $x=-2+t,\quad y=2t,\quad z=1-\dfrac{t}{2}.$

**18.** Написать канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1$ *и* $M_2$, если:

а) $M_1(1;-2;1)$, $M_2(3;1;-1)$; б) $M_1(3;-1;0)$, $M_2(1;0;-3)$.

**19.** Прямая $L$ задана общими уравнениями. Написать для этой прямой канонические уравнения, если:

а) $L$: $\begin{cases}x-2y+3z-2=0,\\ 3x+2y-5z-4=0;\end{cases}$ б) $L$: $\begin{cases}5x+y+z=0;\\ 2x+3y-2z+5=0.\end{cases}$

**20.** Составить параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases}2x+3y-z-6=0,\\ 3x-5y+2z+1=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y-z-6=0,\\ 2x-y+z+1=0.\end{cases}$

**21.** Доказать параллельность прямых:

а) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y+z+2=0; \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7. \end{cases}$

**22.** Доказать перпендикулярность прямых:

а) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$

**23.** Определить косинус угла между прямыми:

а) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$;

б) $\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$

**24.** Доказать, что прямые

$$L_1:\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad и \quad L_2:\left\{\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}\right.$$

параллельны и найти расстояние $\rho\,(L_1, L_2)$.

**25.** Доказать, что прямая $\begin{cases} x=3t-2, \\ y=-4t+1, \\ z=4t-5 \end{cases}$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

**26.** Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.

**27.** Найти точку пересечения прямой и плоскости:

а) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-6}$, $2x+3y+z-1=0$;

б) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;

в) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.

**28.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

**29.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

**30.** При каком значении $C$ прямая $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$.

**31.** При каких значениях $A$ и $B$ плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} x=2t+3, \\ y=-3t+5, \\ z=-2t-2. \end{cases}$

**32.** Найти точку $Q$, симметричную точке $P(4;1;6)$ относительно прямой
$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

**33.** Найти точку $Q$, симметричную точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

**34.** Найти проекцию точки $P(5;2;-1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

**35.** Найти точку $Q$, симметричную точке $P(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

**36.** Вычислить расстояние $d$ от точки $P(2;3;-1)$ до следующих прямых:

а) $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+25}{-2}$; б) $\begin{cases} x = t+1, \\ y = t+2, \\ z = 4t+13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$

**37.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;2;-3)$ параллельно прямым
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

## Ответы к п. 3

**1.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$. **2.** $x - y - 3z + 2 = 0$. **3.** $2x - y - z - 6 = 0$. **4.** а) $x - 2y - z = 0$; б) $-x + y + 2z - 5 = 0$. **5.** а) $x + y - 3 = 0$; б) $x + 2y - 2 = 0$. **6.** а) $-x + 2y - 3z + 3 = 0$; б) $2x - 2y - z + 1 = 0$. **7.** а) $x + y - 3 = 0$; б) $2x - y - 1 = 0$. **8.** $2x - 3z - 27 = 0$. **9.** а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) $\arccos\dfrac{2}{15}$ и $\pi - \arccos\dfrac{2}{15}$. **10.** $a = -4$, $b = 3$, $c = \dfrac{1}{2}$. **11.** 240. **12.** $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{2z}{-3} = 1$. **13.** $x + y + z - 9 = 0$, $x - y - z + 1 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$, $x + y - z - 5 = 0$. **14.** а) $2x - y - 2 = 0$; $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; б) $x - y = 0$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **15.** $d = 4$. **16.** Условию задачи удовлетворяют точки $(0;0;-2)$ и $\left(0;0;-\dfrac{82}{13}\right)$. **17.** а) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$; б) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$; в) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{0}$; г) $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{1}$; д) $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z+3}{10}$; е) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1/2}$.
**18.** а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$; б) $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-3}$. **19.** а) $\dfrac{x-3/2}{2} = \dfrac{y+1/4}{7} = \dfrac{z}{4}$; б) $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13}$. **20.** а) $\begin{cases} x = t+1, \\ y = -7t, \\ z = -19t - 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = -t+1, \\ y = 3t+2, \\ z = 5t-1. \end{cases}$ **21.** а) $\cos\varphi = 60^\circ$; б) $\cos\varphi = \pm\dfrac{4}{21}$.
**24.** 25. **27.** а) (2;-3;6); б) прямая параллельна плоскости; в) прямая лежит в плоскости.
**28.** $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+5}{-5}$. **29.** $x + 2y + 3z = 0$. **30.** $C = -2$. **31.** $A = -3$, $B = \dfrac{9}{2}$. **32.** $Q(2;-3;2)$.
**33.** $Q(4;1;-3)$. **34.** (1;4;-7). **35.** $Q(-5;1;0)$. **36.** а) 21; б) 6; в) 15. **37.** $9x + 11y + 5z - 16 = 0$.

## 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [1, гл.4, §§ 16 - 22; гл.5, §§ 24, 25, 30, 35, 36], [3, гл.1, §§2 - 4].

### 4.1. Уравнение прямой на плоскости

Уравнение прямой, прохоляшей через данную точку плоскости $M_0(x_0, y_0)$ с заданным нормальным вектором $\overline{N} = \{A, B\}$, также лежащим на этой плоскости, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (4.1)$$

Общее уравнение примой на плоскости

$$Ax + By + C = 0. \qquad (4.2)$$

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \qquad (4.3)$$

где $M_0(x_0, y_0)$ - точка, лежащая на прямой, $\bar{s} = \{l, m\}$ - направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку, и имеющей угловой коэффициент $k$

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (4.4)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \qquad (4.5)$$

где $k = tg\varphi$, $\varphi$ - угол наклона прямой к оси $Ox$, $b$ - отрезок, отсекаемый прямой на оси $Oy$.

Угол между двумя прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, вычисляется по формуле

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \qquad (4.6)$$

где $\theta$ - тот из смежных углов между прямыми, который заметается первой прямой при повороте ее против часовой стрелки вокруг точки пересечения прямых до совпадения со второй прямой.

При задании уравнения прямой в виде (4.1) - (4.3) углы между прямыми находятся по формулам (3.7) и (3.12) при $c = 0$ и $n = 0$, соответственно.

Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

**<u>Пример</u>**. Через точку $P(1,-2)$ провести параллель и перпендикуляр к прямой $2x + 3y - 3 = 0$.

*<u>Решение</u>*. Уравнение прямой, параллельной данной, в соответствии с (4.1), ищем в виде $A(x-1) + B(y+2) = 0$.

Из условия параллельности прямых по формулам (3.9) имеем

$$2(x-1) + 3(y+2) = 0.$$

Уравнение прямой, параллельной заданной, ищем из (4.3)

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y+2}{m}.$$

Так как прямые перпендикулярны, то направляющий вектор $\bar{s} = \{l, m\}$ искомой прямой коллинеарен нормальному вектору $\overline{N}=\{2,3\}$ заданной прямой. Имеем $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$.

Для решения задачи можно воспользоваться уравнением примой с угловым коэффициентом. Преобразуем уравнение заданной прямой $y=-\dfrac{2}{3}x+1$.

Следовательно, угловой коэффициент $k=-\dfrac{2}{3}$. Тогда для параллельности прямой $k_1=k=-\dfrac{2}{3}$. Для прямой перпендикулярной данной $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{3}{2}$. По формуле (4.4) уравнения искомых прямых будут иметь вид $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$, $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

**Пример**. Дан треугольник с вершинами $A(-1,1)$, $B(1,5)$, $C(3,-2)$. Найти уравнения его сторон.

*Решение*. Уравнения сторон треугольника ищем в виде (4.3). Направляющие векторы сторон строим по двум заданным точкам.

Для стороны $AC$: $\bar{s}=\{4,-3\}$, $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-3}$, $3x+4y-1=0$.

Для стороны $AB$: $\bar{s}=\{2,4\}$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{4}$, $2x-y+3=0$.

Для стороны $BC$: $\bar{s}=\{2,-7\}$, $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-7}$, $7x+2y-17=0$.

Задачи для самостоятельного решения: [4, №№ 215, 217, 233, 226, 234, 245, 266, 299, 310, 315].

## 4.2. Задачи к п. 4

**1.** Даны точки $A(0;0)$, $B(3;-4)$, $C(-3;4)$, $D(-2;2)$ и $E(10;-3)$. Определить расстояние $d$ между точками: 1) $A$ и $B$; 2) $B$ и $C$; 3) $A$ и $C$; 4) $C$ и $D$; 5) $A$ и $D$; 6) $D$ и $E$.

**2.** Даны две смежные вершины квадрата $A(3;7)$ и $B(-1;4)$. Вычислить его площадь.

**3.** Даны две противоположные вершины квадрата $P(3;5)$ и $Q(1;-3)$. Вычислить его площадь.

**4.** Вычислить площадь правильного треугольника, две вершины которого суть $A(-3;2)$ и $B(1;6)$.

**5.** Даны три вершины $A(3;-7)$, $B(5;-7)$ и $C(-2;5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого $D$ противоположна $B$. Определить длины диагоналей этого параллелограмма.

**6.** Доказать, что точки $A(3;-5)$, $B(-2;-7)$ и $C(18;1)$ лежат на одной прямой.

**7.** Даны вершины треугольника $A(1;-3)$, $B(3;-5)$ и $C(-5;7)$. Определить середины его сторон.

**8.** Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3;5)$, $B(1;7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1;1)$. Определить две другие вершины.

**9.** Прямая проходит через точки $A(7;-3)$ и $B(23;-6)$. Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.

**10.** Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) $A(2;-3)$, $B(3;2)$ и $C(-2;5)$; 2) $M(3;-4)$, $N(-2;3)$ и $P(4;5)$.

**11.** Определить площадь параллелограмма, три вершины которого суть точки $A(-2;3)$, $B(4;5)$ и $C(-3;1)$.

**12.** Найти точку пересечения прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.

**13.** Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

**14.** Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Вычислить его площадь $S$.

**15.** Дана прямая $5x+3y-3=0$. Определить угловой коэффициент $k$ прямой:

1) параллельно данной прямой;
2) перпендикулярно к данной прямой.

**16.** Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x-5y+3=0$.

**17.** Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины $A$ на медиану, проведенную из вершины $B$.

**18.** Написать уравнение сторон треугольника $ABC$, если задана его вершина $A(1;3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ *и* $y-1=0$.

**19.** Даны две смежные вершины $A(-3;-1)$ и $B(2;2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(3;0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

**20.** Найти точку $M_1$ симметричную точке $M_2(8;-9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3;-4)$ и $B(-1;-2)$.

**21.** Точка $A(-4;5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x-y+8=0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

**22.** Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1;3)$ и $C(6;2)$. Составить уравнение его сторон

**23.** Даны три вершины $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$ и $C(1;-2;3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину $D$, противоположную $B$.

**24.** На оси абсцисс найти точку $M$, расстояние которой от точки $A(3;-5)$ равно 5.

**25.** На оси ординат найти точку $M$, равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.

**26.** Даны вершины треугольника $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$ и $C(-4;0;3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины $A$.

**27.** Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$.

**28.** Заданы прямая $L$ и точка $M$. Требуется:

1) вычислить расстояние $\rho(M,L)$ от точки $M$ до прямой $L$;

2) написать уравнение прямой $L'$ проходящей через точку $M$ перпендикулярно заданной прямой $L$;

3) написать уравнение прямой $L''$, проходящей через точку $M$ параллельно заданной прямой $L$.

Исходные данные:

а) $L\colon -2x+y-1=0,\ \ M(-1;2)$; б) $L\colon\ 2y+1=0,\ \ M(1,0)$; в) $L\colon\ x+y+1=0,\ \ M(0;1)$.

В задачах 29–33 исследовать взаимное расположение заданных прямых $L_1$ *и* $L_2$. Если прямые параллельны, то найти расстояние $\rho(L_1,L_2)$ между прямыми, а если пересекаются – косинус угла $(\widehat{L_1,L_2})$ и точку $M_0$ пересечения прямых.

**29.** $L_1: -2x+y-1=0,\quad L_2: 2y+1=0.$ **30.** $L_1: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1},\quad L_2: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{0}.$

**31.** $L_1: x+y-1=0, \quad L_2: 2x-2y+1=0.$ **32.** $L_1: x+y-1=0, \quad L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}.$

**33.** $L_1: x+2y+1=0, \quad L_2: 2x-4y-2=0.$

**34.** Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин. Требуется:

1) написать уравнение стороны $(AB)$;

2) написать уравнение высоты $(CD)$ и вычислить ее длину $h=|CD|$;

3) найти угол $\varphi$ между высотой $(CD)$ и медианой $(BM)$;

4) написать уравнения биссектрис $L_1$ *и* $L_2$ внутреннего и внешнего углов при вершине $A$.

Исходные данные: а) $A(1, 2), B(2, -2), C(6, 1)$; б) $A(2, -2), B(6, 1), C(-2, 0)$.

**35.** Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(8,6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12.

## Ответы к п. 4

**1.** 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13. **2.** 137. **3.** 34. **4.** $8\sqrt{3}$. **5.** 13 и 15. **7.** Середины сторон $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно суть (2;-4), (-1;1), (-2;2). **8.** (5;-3), (1;-5). **9.** (-9;0). **10.** 1) 14; 2) 25. **11.** 20. **12.** $(3;-5)$. **13.** $(1;-3)$, $(-2;5)$, $(5;-9)$ и $(8;-17)$. **14.** $S=17$. **15.** 1) $-\dfrac{5}{3}$; 2) $\dfrac{3}{5}$. **16.** (-2;-1). **17.** $4x+y-3=0$. **18.** $x-2y-7=0$, $x-4y-1=0$, $x-y+2=0$. **19.** $3x-5y+4=0$, $x+7y-16=0$, $3x-5y-22=0$ и $x+7y+10=0$. **20.** $M_1(10;-5)$. **21.** Уравнения сторон квадрата: $4x+3y+1=0$, $3x-4y+32=0$, $4x+3y-24=0$, $3x-4y+7=0$; уравнение его второй диагонали: $x+7y-31=0$. **22.** $3x-4y+15=0$, $4x+3y-30=0$, $3x-4y-10=0$, $4x+3y-5=0$. **23.** $D(9;-5;6)$. **24.** $C(6;-2)$, $D(2;-4)$. **25.** $M_1(7;0)$, $M_2(-1;0)$. **26.** $M(0;1;0)$. **27.** 7.

**28.** $|AB|=5, \quad |BC|=5\sqrt{2}, \quad |AC|=5; \quad \hat{A}=\dfrac{\pi}{2}, \quad \hat{B}=\hat{C}=\dfrac{\pi}{4}.$

**29.** а) $\rho(M,L)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $L': \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}$, $L'': -2(x+1)+(y-2)=0$;

б) $\rho(M,L)=\dfrac{1}{2}$, $L': \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}$, $L'': y=0$; в) $\rho(M,L)=0$, $L': \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}$, $L'': x+y+1=0.$

**30.** Пересекаются в точке $M_0\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$; $\cos(L_1\hat{,}L_2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

**31.** Пересекаются в точке $M_0(1,0)$; $\cos(L_1\hat{,}L_2)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}.$ **32.** Параллельны, $\rho(L_1,L_2)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

**33.** Совпадают. **34.** а) $(AB): \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}$, $(CD): \dfrac{x-6}{-4}=\dfrac{y-1}{-1}$, $h=\dfrac{19}{\sqrt{17}}$,

$$\cos\varphi=\frac{19}{\sqrt{17\cdot 58}}, \quad L_1: \frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}}=\frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}},$$

$$L_2: (\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1)+(-4\sqrt{26}-\sqrt{17})(y-2)=0;$$

б) $(AB): \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{3}$, $(CD): \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-4}$, $h = 4$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$,

$L_1 : \dfrac{x-2}{4-2\sqrt{5}} = \dfrac{y+2}{3+\sqrt{5}}$, $L_2 : (4-2\sqrt{5})(x-2) + (3+\sqrt{5})(y+2) = 0.$

**35.** $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$.

## 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Литература: [1, гл. 3, §§ 1 – 10, 12 – 18, 20 – 23, 26; 2, раздел 4, гл. 1, §§ 1 – 9, 11 – 14].

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x$, если приращение этой функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ в точке $x$, отвечающее приращение аргумента $\Delta x$, можно представить в виде

$$\Delta y = A(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{5.1}$$

где $A(x)$ не зависит от $\Delta x$, $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Линейная относительно $\Delta x$ часть приращения функции называется дифференциалом в точке $x$ и обозначается $dy(x)$, т.е.

$$dy(x) = A(x)\ \Delta x. \tag{5.2}$$

Дифференциал независимой переменной $dx$ совпадает с приращением $\Delta x$. Коэффициент $A(x)$ при $\Delta x$ называется производной функции $f(x)$ в точке $x$ и обозначается $f'(x)$ или $y'(x)$: $f'(x) = A(x)$.

Из дифференцируемости функции следует формула для вычисления ее производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.3}$$

Справедливо утверждение: для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке $x$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную $f'(x)$, т.е. чтобы существовал конечный предел (5.3). Таким образом, дифференцируемость функции $f(x)$ в точке $x$ и существование конечного предела (5.3), т.е. производной $f'(x)$, эквиваленты. Поэтому выражение (5.3) и принимают за определение производной. Используя определение (5.3), обозначение производной $f'(x)$, дифференциал обычно записывают в виде $dy(x) = f'(x)\,dx$, а производную часто обозначают так $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

**Пример.** Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$.

*Решение.* Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin\left[3(x+\Delta x) - 5\right] - \sin(3x-5) = 2\cos(3x - 5 + \frac{3\Delta x}{2})\sin\frac{3\Delta x}{2}.$$

Чтобы воспользоваться формулой (5.3), найдем предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Имеем

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos\left(3x - 5 + \frac{3\Delta x}{2}\right) = = \lim_{\Delta x \to 0} 3\frac{\sin\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\frac{3\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(3x-5+\frac{3\Delta x}{2}\right)=3\cos(3x-5).$$

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке $x$, то справедливы следующие основные правила дифференцирования:

$C'=0,$ где $C$ – постоянная;

$(Cu(x))'=Cu'(x)$;

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x); \qquad (5.4)$$

$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Производная обратной функции. Пусть функция $y=f(x)$ монотонна и непрерывна в некотором промежутке, содержащем точку $x_0$. Если данная функция имеет в точке $x_0$ не равную нулю производную $f'(x_0)$, то обратная ей функция $x=\psi(y)$ также имеет производную $\psi'(y_0)$ в соответствующей точке и справедлива формула

$$\psi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (5.5)$$

Таблица производных элементарных функций найдена с помощью непосредственного дифференцирования.

| $y$ | $y'$ | $y$ | $y'$ |
|---|---|---|---|
| 1. $C$ | $0$ | 11. $\sin x$ | $\cos x$ |
| 2. $x^{\alpha}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | 12. $\cos x$ | $-\sin x$ |
| 3. $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | 13. $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| 4. $\log_a x$ | $\frac{1}{x\ln a}$ | 14. $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 5. $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | 15. $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 6. $a^x$ | $a^x\ln a$ | 16. $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 7. $e^x$ | $e^x$ | 17. $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| 8. $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ | 18. $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |
| 9. $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ | | |
| 10. $\operatorname{th} x$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ | 19. $\operatorname{cth} x$ | $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ |

Производная сложной функции. Пусть $y=f(z)$, а $z=\psi(x)$, причем для соответствующих друг другу значений $x$ и $z$ существуют конечные производные $f'(z)$ и

$\psi'(x)$. Тогда сложная функция $y = f(\psi(x))$ имеет конечную производную по переменной $x$, и эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{или} \quad y'_x = f'_z(z)\psi'_x(x). \tag{5.6}$$

Знание основных правил вычисления производных, а также таблицы производных позволяет отказаться от громоздкого метода непосредственного вычисления производных.

**Пример.** Найти производную функции $y = x\operatorname{ctg} x + \cos x$.

*Решение.* $y' = (x\operatorname{ctg} x + \cos x)' = (x\operatorname{ctg} x)' + (\cos x)' =$

$$= x'\operatorname{ctg} x + x(\operatorname{ctg} x)' + (\cos x)' = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x} - \sin x.$$

**Пример.** Найти производную функции $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3$.

*Решение.* Здесь $y = z^3$, где $z = \frac{x+2}{x-1}$. Используя формулу (5.6), имеем:

$$\frac{dy}{dz} = 3z^2 = 3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{(x+2)'(x-1) - (x+2)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{1\cdot(x-1) - (x+2)\cdot 1}{(x-1)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = -\frac{9(x+2)^2}{(x-1)^4}.$$

**Пример.** Найти производную функции $y = \cos(6^x)$.

*Решение.* $y = \cos z,\ z = 6^x,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = -\sin(6^x) \cdot 6^x \ln 6.$

**Пример.** Найти производную функции $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$.

*Решение.* $y = \ln z,\quad z = x + \sqrt{x^2+4},\quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}},$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}(x^2+4)' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.$$

<u>Производная функции заданной параметрически</u> $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{5.7}$$

**Пример.** Найти производную $y'(x)$ функции заданной параметрически $x = \ln\sin t,\ y = \ln\cos t$.

*Решение.* Используя формулу (5.7), имеем

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t),\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sin t}\cdot\cos t,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=-\operatorname{tg}^2 t.$$

<u>Геометрический смысл производной и дифференциала</u> (см. рис. 1). Производная функции $f(x)$ при $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$, т.е. $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$.

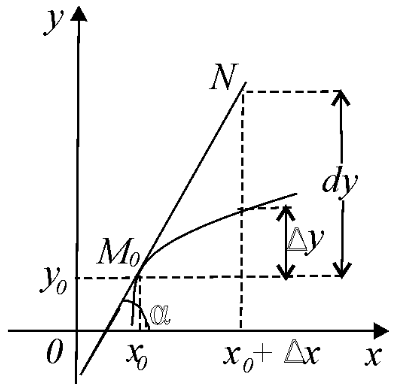


Рис. 1

<u>Уравнение касательной</u> к этой кривой в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

<u>Уравнение нормали</u> к кривой (т.е. прямой, перпендикулярной касательной в точке касания) имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

<u>Дифференциал функции</u> с геометрической точки зрения представляет собой приращение ординаты касательной, когда приращение ее абсциссы равно заданной величине $\Delta x$.

<u>**Пример.**</u> Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y=x^2-2x+5$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

<u>*Решение.*</u> Вычислим $f(2)=4-4+5=5$, следовательно, точка касания $M_0(2;5)$.

Угловой коэффициент касательной в точке $M_0$ равен $k_1=f'(2)=(2x-2)\big|_{x=2}=2$, а угловой коэффициент нормали – $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, уравнение касательной имеет вид $y-5=2(x-2)$, а уравнение нормали – $y-5=-\frac{1}{2}(x-2)$.

Физические интерпретации производной весьма многообразны. Простейшей из них является скорость перемещения материальной точки, двигающейся по закону $x=x(t)$. При этом мгновенная скорость перемещения равна $v(t)=x'(t)$.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u> [3, №№ 773 – 782, 784 – 792, 800 – 807, 827 – 830, 846 – 855, 4, гл. 5, №№ 1.1, 1.9, 1.10, 1.21 – 1.45, 1.131, 1.132, 1.138 – 1.142, 1.154 – 1.158, 1.205 – 1.208, 1.216, 1.221].

## 5.1. Задачи к п. 5

Найти производные следующих функций:

**1.** $y=6-2x+\frac{2}{3}x^4$. **2.** $y=-\dfrac{5x^5}{a^2}$. **3.** $y=x^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{x^5+a}$. **4.** $y=\dfrac{a}{\sqrt[5]{x^3}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{b}$. **5.** $y=\dfrac{a+bx}{c+dx}$.

**6.** $y=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}$. **7.** $y=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$. **8.** $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$. **9.** $y=2\sin x-3\operatorname{tg}x$. **10.** $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

**11.** $y=\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$. **12.** $y=\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$. **13.** $y=\cos^2\left(\sin\frac{x}{3}\right)$. **14.** $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

**15.** $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$. **16.** $y=\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}$. **17.** $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2x}$. **18.** $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$. **19.** $y=2^{\sqrt{\sin^2 x}}$. **20.** $y=3^{2^x}$.

Используя предварительное логарифмирование, найти производные следующих функций:

**23.** $y=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$. **24.** $y'$ $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$. **25.** $y=x^{\sin x}$. **26.** $y=x^{2^x}$. **27.** $y=\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}$. **28.** $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

Для функций, заданных параметрически, найти $y'_x$

**29.** $x=2t,\quad y=3t^2-5t,\quad t\in(-\infty,+\infty)$. **30.** $x=t^3+2,\quad y=0{,}5t^2,\quad t\in(-\infty,+\infty)$.

**31.** $x=\dfrac{1}{1+t},\quad y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$. **32.** $x=2^{-t},\quad y=2^{2t},\quad t\in(-\infty,+\infty)$.

Найти производные второго порядка следующих функций:

**33.** $y=\cos^2 x$. **34.** $y=\operatorname{arctg}x^2$. **35.** $y=\log_2\sqrt[3]{1-x^2}$. **36.** $y=e^{-x^2}$.

Найти производные второго порядка следующих функций заданных параметрически:

**37.** $x=\sec t,\quad y=\operatorname{tg}t,\quad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. **38.** $x=\arcsin t,\quad y=\ln(1-t^2),\quad t\in(-1,\ 1)$.

Написать уравнение касательной и нормали к графику функций $y=f(x)$ в данной точке, если:

**39.** $y=x^2-5x+4,\quad x_0=-1$. **40.** $y=x^3+2x^2-4x-3,\quad x_0=-2$.

**41.** $y=\sqrt{x},\quad x_0=4$. **42.** $y=\operatorname{tg}2x,\quad x_0=0$.

**43.** В какой точке $M_0$ кривой $y^2=2x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $4x-3y+2=0$?

**44.** Составить уравнение нормали к параболе $y=-\sqrt{x}+2$ в точке пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

**45.** Доказать, что для линейной функции $y=ax+b$ приращение $\Delta y$ и дифференциал $dy$ совпадают.

**46.** Найти приращение $\Delta y$ и дифференциал $dy$ функции $y=x^3$, соответствующие значению аргумента $x_0=2$ и двум различным значениям аргумента $(\Delta x)_1=0{,}1$ и $(\Delta x)_2=0{,}01$.

**47.** Найти приращение $\Delta S$ и дифференциал $dS$ площади $S$ квадрата, соответствующие приращению $\Delta x$ стороны $x$. С помощью рисунка геометрически истолковать $\Delta S$, $dS$ и разность $\Delta S - dS$.

Найти дифференциал указанных функций при произвольных значениях аргумента $x$ и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$:

**48.** $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - 5.$ **49.** $\sin x - x\cos x + 4.$

**50.** $x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}.$ **51.** $x\ln x - x + 1$

**52.** Вычислить приближенно: а) $\arcsin 0{,}05$; б) $\operatorname{arctg} 1{,}04$; в) $\ln 1{,}2$.

## Ответы к п. 5

**39.** $7x + y - 3 = 0$, $x - 7y + 71 = 0$. **40.** $y - 5 = 0$, $x + 2 = 0$. **41.** $x - 4y + 4 = 0$, $4x + y - 18 = 0$. **42.** $y - 2x = 0$, $x + 2y = 0$. **43.** $M_0(1/8, -1/16)$. **44.** $2x-y-1=0$. **46.** $(\Delta y)_1 = 1{,}261$; $(dy)_1 = 1{,}2$; $(\Delta y)_2 = 0{,}120601$; $(dy)_2 = 0{,}12$. **47.** $\Delta s = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$; $ds = 2x\Delta x$. **52.** а) 0,05; б) 0,805; в) 0,2.

# 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Литература: [1, гл. 5, §§ 2 – 6, 9 – 11; 2, раздел 4, гл. 2, §§ 2 – 9].

## 6.1. Возрастание и убывание функций

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале $(a,b)$, если для $x_1, x_2 \in (a,b)$ из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ $\left(f(x_2) < f(x_1)\right)$.

Если же из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \ge f(x_1)$ или $f(x_2) \le f(x_1)$, то функция называется соответственно неубывающей или невозрастающей на этом интервале.

**Теорема** (достаточной признак возрастания и убывания функции). Если во всех точках интервала $(a,b)$ производная функции удовлетворяет неравенству $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Таким образом, для определения интервалов монотонности функции, т.е. интервалов на которых функция возрастает или убывает, следует решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$, найдя предварительно область определения этой функции.

**Пример.** Найти интервалы монотонности функции $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

*Решение.* Функция определена при значениях $x \in [-1,1]$. Найдем производную рассматриваемой функции. Имеем

$$y' = x' \cdot \sqrt{1 - x^2} + x \cdot \left(\sqrt{1 - x^2}\right)' = \sqrt{1 - x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Поскольку $\sqrt{1 - x^2} > 0$ при $x \in (-1;1)$, то знак производной определяется знаком числителя $1 - 2x^2 = -2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, который находим методом интервалов:

$$y' > 0 \text{ при } x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad y' < 0 \text{ при } x \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Следовательно, функция убывает при $x \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ и возрастает при $x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

## 6.2. Максимум и минимум функций

Точка $x_0$ называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значения во всех точках достаточно близких к $x_0$, т.е. если

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad \left(f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)\right).$$

Необходимое условие экстремума. Если функция имеет экстремум при $x = x_0$, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо бесконечности, либо не существует. Сама же функция обязательно определена в этой точке.

Следовательно, точки экстремума функции следует разыскивать только среди тех точек, в которых $f'(x) = 0$, либо $f'(x) = \infty$, либо $f'(x)$ не существует. Такие точки называются критическими точками.

Достаточные условия экстремума.

1. Пусть функция $f(x)$, определена и непрерывна в интервале, содержащем критическую точку $x_0$ и имеет производную во всех точках этого интервала, за исключением, быть может самой этой точки. Тогда если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $x_0$ является точкой максимума, если же $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то точка $x_0$ является точкой минимума.

2. Если в точке $x_0$ первая производная равна нулю $f'(x_0) = 0$, то точка $x_0$ является точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$ и является точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.

**Пример.** Найти точки экстремума функции $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 2$.

*Решение.* 1. Областью определения функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

2. Находим производную $y' = 6x^2 - 30x + 24$.

3. Решаем уравнение $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 24 = 0$, т.е. находим критические точки. Имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ и, следовательно,

$$y' = 6(x-1)(x-4).$$

4. Определим знаки производной в интервалах $(-\infty,1)$, $(1,4)$, $(4,+\infty)$. Методом интервалов установим, что $y' > 0$ для $x \in (-\infty,1) \cup (4,\infty)$ и $y' < 0$ для $x \in (1,4)$.

5. Используя первое достаточное условие экстремума, определим, что точка $x_1 = 1$ является точкой максимума, т.к. производная при переходе через эту точку меняет знак с «+» на «–», а точка $x_2 = 4$ является точкой минимума, т.к. производная меняет знак с «–» на «+». Найдем значения функции в точках экстремума. Имеем $y(1) = 13$, $y(4) = -14$.

6. Проведем теперь исследование на экстремум с помощью второго достаточного условия. Вместо действий пятого пункта вычислим вторую производную $y'' = (6x^2 - 30x + 24)' = 12x - 30$ и найдем значение второй производной в критических точках. Имеем $y''(1) = -18 < 0$, $y''(4) = 18 > 0$. Следовательно, точка $x_1 = 1$ является точкой максимума, а точка $x_2 = 4$ является точкой минимума.

Задачи для самостоятельного решения: [3, №№ 1055 – 1068; 4, гл. 5, №№ 4.5 – 4.10].

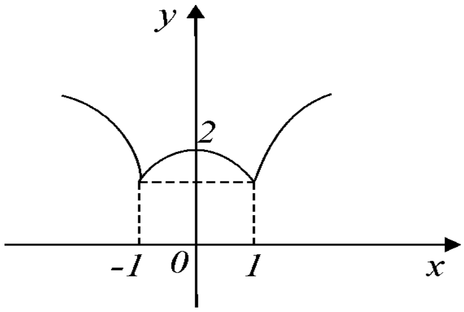


Рис. 2

### 6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то в точках этого отрезка она принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах отрезка или в критических точках.

**<u>Пример.</u>** Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$ на отрезке $[-1,3]$.

<u>*Решение.*</u> 1. Функция является непрерывной на заданном отрезке. Следовательно, имеет на данном отрезке наибольшее и наименьшее значения.

2. Вычислим ее значения на концах отрезка $y(-1)=\dfrac{3}{5}$, $y(3)=-\dfrac{5}{13}$.

3. Найдем критические точки, принадлежащие отрезку $[-1,3]$ и вычислим значения функции в этих точках. Получим

$$y'=\frac{-2x(4+x^2)-2x(4-x^2)}{(4+x^2)^2}=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}=0\,.$$

Критическая точка $x=0\in[-1;3]$, $y(0)$=1.

4. Из трех полученных значений функции выберем наибольшее и наименьшее. Имеем

$$\max_{[-1,3]} y(x)=y(0)=1,\quad \min_{[-1,3]} y(x)=y(3)=-\frac{5}{13}.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>: [3, № 1070 – 1073, 1075, 1076; 4, гл. 5, №№ 4.13, 4.14, 4.17, 4.18].

### 6.4. Выпуклость кривой. Точки перегиба графика функции

Говорят, что на интервале $(a,b)$ кривая <u>выпукла (вогнута</u>), если она лежит ниже (выше) касательной, проведенной в любой ее точке.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f''(x_0)>0$, то кривая в точке с абсциссой $x_0$ вогнута. Если же функция удовлетворяет условию $f''(x_0)<0$, то кривая в этой точке выпукла.

Точка кривой, отделяющая выпуклую часть дуги от вогнутой, называется <u>точкой перегиба.</u>

<u>Необходимое условие перегиба.</u> Если $x_0$ – абсцисса точки перегиба графика функции $y=f(x)$, то $f''(x_0)=0$, или $f''(x_0)=\infty$, или $f''(x_0)$ не существует. Такие точки называются <u>критическими точками второго рода.</u>

<u>Достаточное условие перегиба.</u> Если в достаточно малой окрестности критической точки второго рода $x_0$ вторая производная функции $y=f(x)$ имеет противоположные

знаки при $x < x_0$ и при $x > x_0$, то точка кривой $y = f(x)$ с абсциссой $x_0$ есть точка перегиба данной кривой.

**Пример.** Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 45x - 14$.

*Решение.* 1. Область определения функции $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Находим первую и вторую производные функции. Получим

$$y' = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 45, \quad y'' = 12x^2 - 24x - 36.$$

3. Находим критические точки второго рода. При любом $x$ вторая производная существует и конечна. Следовательно, критические точки второго рода являются решениями уравнения

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x - 36 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

4. Используем достаточное условие перегиба. Критические точки разделяют область существования функции на следующие интервалы: $(\infty,-1)$, $(-1,3)$, $(3,\infty)$. В каждом из этих интервалов $y'' = 12(x+1)(x-3)$ сохраняет знак. При $x \in (-\infty,-1) \cup (3,\infty)$ $y'' > 0$ и кривая вогнута, а на интервале $(-1,3)$ $y'' < 0$ и кривая выпукла.

Задачи для самостоятельного решения: [8, №№ 1083 – 1087, 4, гл. 5, №№ 4.40 – 4.43, 4.45].

## 6.5. Асимптоты кривой

Прямая называется асимптотой кривой, если при удалении точки по кривой в бесконечность, ее расстояние до прямой стремится к нулю. Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты.

Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой, если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ равен бесконечности, т.е. если выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty.$$

**Пример.** Найти вертикальные асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

*Решение.* Функция не определена в точке $x=1$. Вычислим левый и правый пределы функции при $x \to 1$. Имеем

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Для определения наклонной асимптоты $y = kx + b$ кривой $y = f(x)$ надо найти параметры $k$ и $b$ из равенств

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left( f(x) - kx \right).$$

Причем случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ следует рассматривать отдельно. Наклонные асимптоты у кривой $y = f(x)$ существуют только тогда, когда эти пределы имеют конечные значение.

Если $k=0$ и $b$ имеет конечное значение, то асимптота является горизонтальной.

**Пример.** Найти наклонные асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

*Решение.* Найдем пределы

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x+1} = -1.$$

Таким образом, кривая имеет наклонную асимптоту $y = x - 1$. График функции представлен на рис 3.

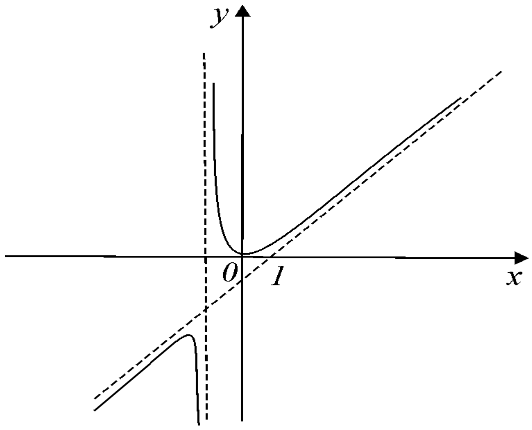


Рис. 3

### 6.6. Общее исследование функции. Построение графика функции по характерным точкам

Общее исследование функции включает следующие этапы.

1. Нахождение области определения функции, точек разрыва и выяснения их характера.
2. Определение четности, нечетности, периодичности функции (в случае положительного ответа вести исследование на соответствующем множестве значений аргумента), нахождение точек пересечения графика функции с осями координат.
3. Определение асимптот графика функции.
4. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
5. Нахождение точек экстремума.
6. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции и точек перегиба.

Полученные данные используются для построения графика функции. Основными ориентирами являются точки кривой, соответствующие экстремальным значениям функции, точки перегиба графика и асимптоты.

**Пример**. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$ и построить ее график.

*Решение.* 1. Функция определена при всех значениях $x$, кроме точки $x$=0, следовательно, область определения: $x \in (-\infty,0) \bigcup (0,\infty)$. Выясним характер точки разрыва $x$=0. Для этого вычислим левый и правый пределы функции при $x \to 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{x\to 0\pm}\left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{7x-3}{2x^2}\right) = -\infty,$$

так как первые два члена имеют конечный предел, числитель же третьего члена стремиться к числу –3, а знаменатель стремится к нулю, оставаясь положительным. Таким образом, в точке $x$=0 функция имеет разрыв второго рода.

2. Функция не является четной или нечетной. Действительно,

$$f(-x)=\frac{-x^3+2x^2-7x-3}{2x^2}\neq f(x), \qquad f(-x)\neq -f(x).$$

Функция не является также периодической. Следовательно, ни оси, ни центра симметрии график функции не имеет и исследовать функцию надо на всей области определения.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Полагая $y$=0, имеем $x^3+2x^2+7x-3=0$. Точное решение уравнения элементарными методами получить нельзя, но границы корня получить просто: $f(1) = 7 > 0$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{27}<0$. Таким образом, кривая пересекает ось $Ox$ в точке $x_0\in\left(\frac{1}{3},1\right)$. Ось $Oy$ кривая не пересекает, так как $x\neq 0$.

3. Найдем асимптоты графика. Из п. 1 решения следует, что ось $Oy$ является вертикальной асимптотой графика, поскольку при $x\to 0$ функция стремится к бесконечности. Проверим, имеет ли кривая наклонные асимптоты. Вычислим пределы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{7}{2x^2}-\frac{3}{2x^3}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{7}{2x}-\frac{3}{2x^2}\right)=1.$$

Следовательно, кривая имеет наклонную асимптоту $y=\frac{1}{2}x+1$.

4. Найдем интервалы монотонности и точки экстремума. Дифференцируя, получаем $y'=\frac{1}{2}-\frac{7}{2x^2}+\frac{3}{x^3}=\frac{x^3-7x+6}{2x^3}$. Решая уравнение $x^3-7x+6=0$ или $(x-1)(x^2+x-6)=0$, находим три критические точки $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$. Таким образом, имеем

$$y'=\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Видим, что на интервалах $(-\infty,-3)$, $(0,1)$, $(2,\infty)$ производная $y'>0$ и функция возрастает. На интервалах $(-3,0)$, $(1,2)$ производная $y'<0$ и функция убывает.

При переходе через критические точки $-3$ и $1$ производная меняет знак с + на –. В этих точках функция имеет локальный максимум $f(-3) = -11/6$, $f(1) = 7/2$. При переходе через критическую точку $x$=2 производная меняет знак с "–" на "+". В этой точке функция имеет локальный минимум $f(2) = 27/8$.

5. Определим интервалы выпуклости и вогнутости графика и точки перегиба. Вычислим вторую производную

$$y''=\frac{7}{x^3}-\frac{9}{x^4}=\frac{7}{x^4}\left(x-\frac{9}{7}\right).$$

Имеется одна критическая точка второго рода $x$=9/7. Легко проверить, что $y''<0$, если $x\in(-\infty,0)\cup(0,9/7)$ и функция выпуклая. При $x\in(9/7,\infty)$ $y''>0$ и функция вогнута.

График функции изображен на рис. 4.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u> [3, №№ 1099, 1100 – 1104, 1106; гл. 5, №№ 4.61, 4.64, 4.66, 4.74, 4.83, 4.97, 4.100, 4.111].

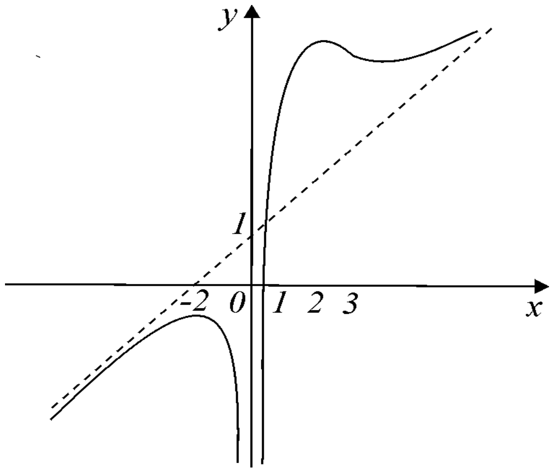


Рис. 4

### 6.7. Задачи к п. 6

Построить графики функций:

**1.** $y = x^3 - 3x$. **2.** $y = \dfrac{x}{1-x^2}$. **3.** $y = \dfrac{x}{x^2-4}$. **4.** $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. **5.** $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$. **6.** $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

**7.** $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. **8.** $y = xe^{-x/2}$. **9.** $y = \dfrac{e^x}{x}$. **10.** $y = x^2 e^{1/x}$. **11.** $y = (1-x)e^x$. **12.** $y = x\ln x$.

**13.** $y = x - \ln x$. **14.** $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$. **15.** $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **16.** $y = \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$. **17.** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$. **18.** $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


**1.** Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. - М.: Наука, 1969.

**2.** Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1985. Т.1. 432 с. .

**3.** Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. шк., 1986. Ч. 1.

**4.** Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. - М.: Наука, 1994.

**5.** Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты / Л.А. Кузнецов. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. 240 с.

**6.** Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. – СПб., Изд-во «Профессия», 2006. 432 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# МАТЕМАТИКА

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
в первом семестре для студентов
направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело»
(профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта
и хранения нефти, газа и продуктов переработки»)
очно-заочной формы обучения

**Составители:**
**Бырдин** Аркадий Петрович
**Сидоренко** Александр Алексеевич

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 09.06.2022.
Уч.-изд. л. 2,3.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84