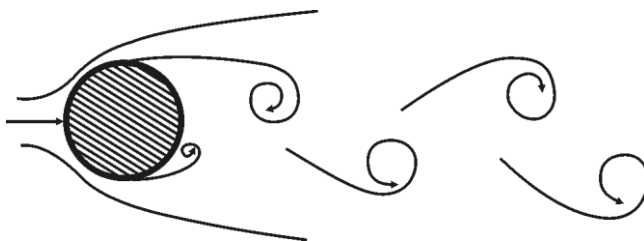


А. В. Муравьев Н. Н. Кожухов И. Г. Дроздов

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Учебное пособие



Воронеж 2018

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный
технический университет»

А. В. Муравьев Н. Н. Кожухов И. Г. Дроздов

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2018

УДК 532.5(07)
ББК 22.253.3я73
М91

Муравьев, А. В.

М91 Гидрогазодинамика: учеб. пособие / А. В. Муравьев, Н. Н. Кожухов, И. Г. Дроздов. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2018 – 334 с.

ISBN

В учебном пособии излагаются разделы гидромеханики и газодинамики, важные для бакалавров теплоэнергетического профиля. Рассматриваются понятия и методы гидравлики, теоретической и технической гидромеханики, газодинамики, их применение к решению задач о движении жидкости и газа в трубах и о внешнем обтекании тел.

Учебное пособие соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» и предназначено для студентов технических направлений, а также специалистам, занимающимся задачами гидродинамики.

Ил. 127, табл. 6. Библиогр.: 10 назв.

Научный редактор – д-р. техн. наук, проф. А. В. Бараков

Рецензенты: кафедра энергетики теплотехнологии ФГБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова (зав. кафедрой канд. техн. наук, проф. В. П. Кожевников);
д-р техн. наук, проф. Н.В. Мозговой

ISBN

© Муравьев А. В., Кожухов Н. Н.,
Дроздов И. Г., 2018
© ФГБОУ ВО Воронежский
государственный
технический университет, 2018

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии излагаются разделы гидромеханики и газодинамики, важные для инженера теплоэнергетического профиля. Рассматриваются понятия и методы гидравлики, теоретической и технической гидромеханики, газодинамики, их применение к решению задач о движении жидкости и газа в трубах и о внешнем обтекании тел. Отдельные главы посвящены течениям газа в решетках турбомашин, в диффузорах и инжекторах. Последовательное изложение учебного материала должно способствовать глубокому усвоению студентами дисциплины «Гидрогазодинамика». Оно важно для студентов направления 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», профиля «Промышленная теплоэнергетика» и может быть использовано при курсовом проектировании. Учебное пособие соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», профилю «Промышленная теплоэнергетика» и может быть полезно студентам технических направлений и специалистам, занимающимся задачами гидродинамики.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Совместно с технической термодинамикой гидрогазодинамика являются научной основой теории и методов расчета турбомашин (турбин, компрессоров, насосов) и различных систем, используемых в современной теплоэнергетике (трубопроводов, расходомеров, эжекторов и т.п.). Поэтому изучение данного курса предшествует таким специальным курсам, как «Тепловые двигатели и нагнетатели», «Котельные установки и парогенераторы», «Высокотемпературные теплотехнологические процессы и установки», «Источники и системы теплоснабжения предприятий». Курс гидрогазодинамики имеет в ряде случаев и самостоятельное значение, так как в нем излагаются принципы и методы расчета отдельных теплоэнергетических систем.

В свою очередь гидрогазодинамика опирается на курсы математики, физики, теоретической механики и технической термодинамики.

Ограниченный объем настоящего пособия вынуждает по возможности сокращать математические выкладки, обращая основное внимание на физический смысл явлений. Для более глубокого изучения курса рекомендуются литературные источники, приведенные в конце пособия. Примеры и некоторые второстепенные выводы набраны мелким шрифтом.

Многие измерительные и контрольные приборы, а также справочники, которые до сих пор применяются в теплоэнергетике для гидромеханических расчетов, используют техническую систему единиц. Поэтому в пособии наряду с системой СИ также используется техническая система.

Теоретическая механика изучает простейшие механические формы движения материальных тел. При этом отвлекаются от большинства их действительных характеристик и физических свойств и использовали понятия материальной точки и системы материальных точек.

Материальная система может быть как дискретной, с чем мы и имели место в теоретической механике, так и сплошной,

имеющей непрерывное распределение вещества и его физических характеристик в пространстве.

В этом случае материальную систему называют сплошной средой, простейшим примером которой является абсолютно твёрдое тело. Более общий случай изменяемой сплошной среды объединяет как упругие и пластические, так и жидкие и газообразные тела.

Раздел теоретической механики, изучающий движение подобного рода тел, носит название механики сплошной среды, а часть ее, к жидкостям и газообразным телам, – механики жидкости и газа.

Указанный термин «механика жидкости и газа» в последнее время получил и получает все более широкое распространение, придя на смену ранее употреблявшемуся термину «гидромеханика», включавшему в себя как механику жидкости, так и механику газов, в частности воздуха.

Бурное развитие воздухоплавания привело к возникновению аэромеханики, изучающей силовое воздействие воздуха с движущимися в нем телами.

Дальнейшее развитие знаний в области движения сжимаемых сред привело к возникновению газовой динамики, а применение ее результатов к авиационной и ракетной технике к созданию новой дисциплины – аэротермодинамики, под которой понимается механика и термодинамика газа, движущегося с большими сверх- и гиперзвуковыми скоростями.

Современный этап развития механики жидкости и газа и ее инженерного приложения характеризуется все большей связью с физикой. Требования ракетной техники поставили новые задачи, связанные, с одной стороны, гиперзвуковыми скоростями движения тел сквозь атмосферу в широком диапазоне высот, с другой – движениями газов в камерах сгорания ЖРД, соплах двигателей и газогенераторах.

Ряд специфических условий течения газов, таких как, диссоциация и ионизация газа, разрушение твердой поверхности движущегося тела, излучение тепла движущимся телом и самим

газом и т.д. Приводит к тому, что предмет механики жидкости и газа нельзя сводить просто к тому механическому движению жидкости и газа и просто к механическому воздействию их с твердыми телами. Следовательно, надо иметь в виду, что механическое движение сопровождается сложными физическими процессами, которыми не только нельзя пренебрегать, а которые в большом числе практических важных задач играют главную роль.

Кроме уже упомянутого основного свойства принятой моделей жидкой и газообразной среды, для динамики существенно второе свойство жидкостей и газов – ее легкая подвижность или текучесть, выражающаяся в том, что для большинства жидкостей касательные напряжения в среде отличны от нуля, только при наличии относительного движения сдвига между слоями жидкости. В этом как раз заключается отличие жидкой среды от упругой, где касательные напряжения, обусловленные наличием деформации (а не скоростей деформаций) сдвига, отличны от нуля и при относительном покое среды.

Количественная связь между скоростями сдвига и касательными напряжениями может быть различной и изучается в специальном курсе-реологии.

В пособии будем иметь дело преимущественно с двумя простейшими моделями жидкости: идеальной (без внутреннего трения) и вязкой (ньютоновской, с напряжениями трения, пропорциональным скоростям сдвига), т.е. подчиняющимся закону

$$\mu = \frac{du}{dn},$$

где μ – динамический коэффициент вязкости, связанный с кинематическим коэффициентом вязкости, следующим соотношением

$$\mu = \nu \rho.$$

Обладая общими свойствами непрерывности и легкой подвижности, жидкости и газы отличаются друг от друга по своим

физическим свойствам, связанным с их молекулярной структурой.

Расстояния между молекулами в жидкости крайне малы, следствием чего является большие молекулярные силы сцепления. Поэтому, в отличие от газов, жидкости можно считать малосжимаемыми, а иногда – просто несжимаемыми.

В противоположность жидкостям, в газах межмолекулярные расстояния велики и силы взаимодействия между молекулами слабы. В связи с этим газы по сравнению с жидкостями обладают значительным свойством сжимаемости. Однако, в случае слабых перепадов давлений, малых скоростей движения и значительных нагревов и газ можно считать несжимаемым.

Таким образом, свойство сжимаемости не является чем-то присущим одной среде. Все непрерывные материальные среды сжимаемы, но степень их сжимаемости зависит динамических и термодинамических условий движения.

В нашем курсе мы сосредоточим основное внимание лишь на основном различии – степени сжимаемости. Поэтому в дальнейшем, как это общепринято, будем пользоваться одним термином – жидкость.

Указанных двух основных свойств жидкости (ее модели) как сплошной среды – непрерывности и легкой подвижности – достаточно для того, чтобы установить уравнения равновесия и кинематические описания движения для решения которых существенно важным является четвертое свойство модели жидкости, а именно свойство прилипания к твердым стенкам.

Для решения практических задач прикладная гидрогазодинамика использует как точные, так и приближенные приемы решения дифференциальных уравнений.

В связи с повышением требований к точности расчетов все большее распространение находят компьютерные методы расчета.

История развития механики жидкости, как и история любой другой науки, убедительно свидетельствует о неразрывной связи между теорией и практической деятельностью человека.

Если античная механика появилась исходя из грандиозных строительных работ древних, для которой была просто необходима разработка специальных приспособлений, то выработке первых идей механики жидкости способствовали потребности судостроения, строительства водопроводов, полета летательных снарядов и т.д.

Отсутствие правильных представлений об инертности не позволяли древним обнаружить и объяснить сопротивление воды и воздуха движущимся в них телам. Практическая деятельность людей наталкивала их на как раз противоположную мысль о движущейся силе воды и о невозможности движения в безвоздушном пространстве.

Только более поздние работы Архимеда, замечательные идеи Галилея, Гюйгенса и Ньютона привели к расцвету общей механики и заложили основы бурного развития механики жидкости. Здесь следует отметить установление Гюйгенсом и Ньютоном квадратичной зависимости сопротивления от скорости.

Обобщение законов Ньютона на жидкость привела к образованию гидродинамики, как самостоятельного раздела теоретической механики.

Часть создания теоретической гидродинамики принадлежит русским академикам Леонарду Эйлеру (1707-1783) и Даниилу Бернулли (1700-1782).

В этой связи достаточно напомнить следующие работы Эйлера: вывод уравнений жидкости, расширение понятия давления на случай движущейся жидкости, вывод турбинного уравнения, формулировка теоремы об изменении момента количества движения применительно к жидким и газообразным средам и т.д.

А также формулировка уравнения Бернулли, устанавливающего связь между давлением, уровнем и скоростью движения тяжелой жидкости.

Эйлером дано четкое объяснение уравнения Бернулли: «вся сложность понимания этого предложения устраняется, если

считать что здесь сравнение производится не между скоростями двух разных течений, а между разными скоростями вдоль данной струи, которая обтекает поверхность тела».

М. В. Ломоносов своими работами по упругости газов, теплоте способствовал развитию механики газов (1711-1765). Особой отличительной чертой работ Ломоносова является непосредственная связь теории с практикой, теории с экспериментом. Эйлер отмечал: «Ныне таковые умы весьма редки, так как большая часть остаются только при опытах, почему и не желают пускаться в рассуждения; другие же пускаются в такие толки, которые находятся в противоречии со всеми началами естествознания».

Работы Эйлера, Бернулли, Даламбера, привели к почти полному завершению гидродинамики идеальной жидкости.

Дальнейшее развитие механики жидкости идет в двух направлениях, с одной стороны, математическая разработка гидродинамики идеальной жидкости, с другой – зарождение и развитие динамики вязкой жидкости и газовой динамики.

Основы учения о динамике вязкой жидкости были заложены Навье (1821) и получили свое завершение в работах Стокса (1845).

Развитие учения о вязкой жидкости было тесно связано с потребностями практики (смазочные вещества, учение о трении в машинах и т.д.).

Нельзя не упомянуть имя О. Рейнольдса (1842-1912), которым дан критерий перехода ламинарного течения в турбулентное.

Дифференциальные уравнения турбулентных течений, предложенные Рейнольдсом, вместе с некоторыми его энергетическими соотношениями используются и по настоящее время.

Развитие авиации наложило прочный отпечаток на гидроаэродинамику и тесно связано с именем русских ученых Н.Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным.

Это в первую очередь теория подъемной силы крыла, основанная на теории присоединенного вихря, вихревая теория гребного винта, теория решеток профилей, основы динамики полета.

Жуковский по праву может считаться создателем экспериментальной аэродинамики.

Фундаментальные идеи Жуковского и Чаплыгина были в дальнейшем развиты их учениками и последователями, к числу которых в первую очередь следует отнести М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева Л. И. Седова, Н. Е. Кочина и т.д., которые дали успешное развитие методов теории функции комплексного переменного в гидроаэродинамике.

Работы Жуковского и Чаплыгина по теории решеток получили развитие в работах Л. А. Симонова, Г. Ю. Степанова, Э. Л. Блоха и т.д.

Центральное место в механике жидкости занимает газовая динамика.

Характерный отпечаток на развитие данной отрасли науки, как в прочем и все точных наук, в настоящее время накладывает бурное развитие компьютерной техники.

1. ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

1.1. Физические свойства и параметры жидкостей и газов

Жидкостями называются тела, у которых силы взаимной связи между частицами невелики. Будучи помещены в сосуд, жидкости принимают его форму. При этом жидкости могут быть капельными (несжимаемыми) и газообразными (сжимаемыми). Капельные жидкости почти не меняют объема при изменении давления (например, вода при возрастании давления на 1 атмосферу уменьшает объем на $1/20000$). В газах изменение давления приводит к значительным изменениям объема; например, при изотермическом увеличении давления вдвое объем газа уменьшается в два раза. В капельных жидкостях имеют место силы сцепления между частицами, что приводит к появлению поверхности уровня; в газах сил сцепления между молекулами нет.

В гидромеханике и газодинамике используется понятие континуума, или сплошности. Предполагается, что любая частица жидкой среды, сколь бы мала она ни была, имеет свойства, одинаковые со свойствами окружающего большого объема жидкости. В действительности континуум в жидкости часто нарушается. Например, в зоне пониженного давления в потоке жидкости может возникнуть явление кавитации, т. е. образование полостей (каверн), заполненных парами и газами, выделившимися из жидкости. Однако, для большинства практических задач использование понятия сплошности является справедливым, что позволяет считать скорость течения, давление и другие параметры потока непрерывными функциями от координат. Молекулярные и внутриаомные эффекты при этом не учитываются.

Рассмотрим только основные существенные параметры.

Давление [P , Па] – сила, отнесенная к единице площади.

Если рассматривать некоторый элементарный объем как свободное тело, то система сил, действующих на данный объем должна включать поверхностные силы, действующие на каждый элемент поверхности, ограничивающий объем.

В общем случае поверхностная сила имеет как нормальную, так и касательную составляющие.

Давление – величина скалярная и измеряется по отношению к абсолютной нулевой величине или относительно атмосферного давления в месте измерения, т.е.

$$P(\text{избыточное}) = P(\text{абсолютное}) - P(\text{абсолютное ат.})$$

Техническая атмосфера – давление, которое принято считать равным 1 кг/см^2 .

Физическая атмосфера – давление, соответствующее нормальному атмосферному на уровне моря, принято считать равной 760 мм. рт. ст.

Температура $[T, K]$.

Два тела в тепловом равновесии имеют одинаковую температуру. Изменение температуры влечет за собой изменение других параметров вещества, последнее дает возможность определить температуру вещества.

Плотность $[\rho, \text{кг/м}^3]$.

Это свойство характеризует инерционные качества, жидкости. Плотностью ρ называют массу единицы объема жидкости. Если масса жидкости m занимает объем V , то

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1.1)$$

Размерность плотности в системе СИ – кг/м^3 .

В случае неоднородной жидкости плотность определяется через предельный переход

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (1.2)$$

Наряду с плотностью часто используется (особенно в гидравлике) понятие удельного веса. **Удельным весом** $[\gamma]$ называют вес единицы объема жидкости. Он определяется гравитационным полем. В земных условиях это сила тяжести, действующая на данную массу в данном месте. Удельный вес γ равен отношению веса жидкости G к ее объему и может быть получен из плотности умножением на ускорение силы тяжести g

$$\gamma = \frac{G}{V} = \rho g. \quad (1.3)$$

Размерность удельного веса в системе СИ – Н/м³.

В технической термодинамике и в некоторых разделах газодинамики в качестве величины, характеризующей плотностные качества газа, используется удельный объем ν – объем, занимаемый единицей массы газа. Очевидно, что

$$\nu = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}. \quad (1.4)$$

Это отношение массы вещества к его объему. Данное количество вещества имеет определенную массу, которая считается неизменной. Откуда следует, что $\rho = const$, если объем постоянен.

Удельные веса и плотности некоторых жидкостей при температуре 20 °С приведены в табл. 1.1.

Вязкость. Свойство вязкости проявляется при наличии относительного перемещения смежных объемов. Из понятия вязкости вытекает метод его определения.

Рассмотрим двумерное параллельно струйное течение, которое описывается скоростью ν в направлении оси x . Величина скорости ν зависит только от координаты y , перпендикулярной оси x , тогда величина касательного напряжения запишется как

$$\tau_{xy} = \mu \frac{d\nu}{dy}.$$

Таблица 1.1

Удельный вес и плотность жидкостей

Род жидкости	γ		ρ	
	техниче- ская си- стема, кгс/м ³	СИ, н/м ³	техниче- ская си- стема, кгс·с ² /м ⁴	СИ, кг/м ³
1	2	3	4	5
Бензин	740-760	7260-7450	75,4-77,4	740-760
Спирт этиловый	800	7840	81,6	800
Масло минеральное	870-900	8540-8830	88,8-91,8	870-900
Вода пресная	1000	9807	102	1000
Глицерин	1250	12260	127,5	1250
Ртуть	13600	133100	1382	13600
Воздух при нор- мальных условиях	1,23	12,1	0,121	1,23

Коэффициент μ называется динамическим коэффициентом вязкости потому, что вышенаписанное выражение представляет собой динамическую зависимость между силой и движением жидкости.

Для ньютоновской (есть понятие и неньютоновской) жидкости μ зависит только от состояния жидкости и поэтому зависит от температуры T и давления p . Зависимость от давления пренебрежимо мала для капельных жидкостей и для газов, пока давление не слишком велико.

С повышением температуры динамический коэффициент вязкости жидкостей уменьшается, а для газов увеличивается. Это является следствием различия в молекулярном строении.

Свойство вязкости проявляется в сопротивлении, которое оказывает движущаяся жидкость сдвигающим усилиям. Если в потоке скорости отдельных слоев неодинаковы, то молекулы жидкости в своем хаотическом тепловом движении проникают из слоев, имеющих малую скорость, в слои с большими скоростями и подтормаживают их (на рис. 1 снизу-вверх).

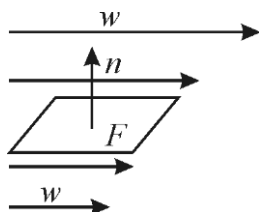


Рис. 1.1. Изменение скорости по слою жидкости

Наоборот, молекулы, поступающие в зону малых скоростей, увлекают жидкость. Таким образом, вследствие теплового движения молекул и сил сцепления между частицами жидкости возникает тенденция к выравниванию эпюры скоростей. Под тормаживание слоев с большей скоростью при этом аналогично действию трения в механике твердого тела; используя эту аналогию, действие вязкости называют внутренним трением в жидкости. Теряемая механическая энергия потока расходуется на увеличение внутренней энергии молекул, т.е. переходит в тепло.

По гипотезе И. Ньютона (1686), подтвержденной многочисленными экспериментами, касательное усилие между слоями жидкости, имеющими разную скорость («сила трения»), пропорционально площади соприкосновения слоев F и градиенту скорости в поперечном направлении $\frac{dv}{dn}$ (закон Ньютона о вязком трении).

$$f = -\mu F \frac{dv}{dn}. \quad (1.5)$$

Касательное напряжение τ , или сила трения на единицу площади соприкосновения слоев, выражается формулой

$$\tau = \frac{f}{F} = -\mu \frac{dv}{dn}. \quad (1.6)$$

Коэффициент пропорциональности μ в формуле Ньютона носит название **динамического коэффициента вязкости**. Его размерность в системе СИ – $(\text{Н} \cdot \text{с})/\text{м}^2$. В некоторых задачах гидромеханики, когда вязкость мало влияет на течение, используется понятие о фиктивной жидкости, лишенной свойства вязкости – «идеальной жидкости».

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости в гидромеханике часто используется также **кинематический коэффициент вязкости** ν , представляющий собой отношение

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Размерность кинематического коэффициента вязкости – $\text{м}^2/\text{с}$. В практике чаще применяется производная единица – $\text{см}^2/\text{с}$, причем $1 \text{ см}^2/\text{с} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Единица $\text{см}^2/\text{с}$ носит название *Стюкс* (Ст). В табл. 1.2 приведены значения кинематического коэффициента вязкости ν в стюксах для некоторых жидкостей при температуре 20 °С.

Вязкость капельных жидкостей уменьшается с повышением температуры, что связано с уменьшением сил сцепления между частицами. В табл. 1.3 даны значения коэффициента кинематической вязкости при различной температуре для воды и турбинного масла. Вязкость газов, наоборот, увеличивается с повышением температуры из-за увеличения скоростей хаотического движения молекул.

Таблица 1.2

Вид жидкости	ν , Ст
Ртуть	0,00111
Бензин	0,0083-0,0093
Вода	0,0101
Спирт	0,0133
Масло турбинное	1,32
Глицерин	4,1

Таблица 1.3

Кинематический коэффициент вязкости воды и масла
при различной температуре

Температура, °C	ν , см ² /с	
	Вода	Масло турбинное
0	0,0179	5,20
20	0,0101	1,32
40	0,0066	0,33
60	0,0048	0,146
100	0,0028	-

Для определения вязкости капельных жидкостей используются приборы – вискозиметры. Чаще других применяется вискозиметр Энглера, в котором вязкость определяется по времени истечения определенного объема жидкости через калиброванное отверстие. Размерность связывает только кинематические единицы $\nu = \mu / \rho$, откуда и происходит название.



Рис. 1.2. Вискозиметр: а – ротационный ZM-1001; б – Энглера В1-31Е

Удельная теплоемкость [c , Дж/(кг·К)] – количество тепла, поглощенного при нагревании единицы массы вещества, отнесенное к температуре.

Удельная теплоемкость обычно определяется экспериментально или подсчитывается с помощью молекулярной теории.

Эта величина естественно зависит от типа процесса при изменении состояния.

Внутренняя энергия [U , Дж].

Удельная внутренняя энергия определяется как энергия, приходящая на единицу массы вещества. Откуда следует и ее размерность Дж. Складывается из кинетической и потенциальной энергии, связанной с движением молекул, и зависит от температуры.

Для идеального газа, подчиняющегося уравнению состояния $P/\rho = RT$ удельная внутренняя энергия U зависит только от T .

$$dU = c_v dT.$$

При $c_v = \text{const}$

$$U_2 - U_1 = c_v (T_2 - T_1).$$

Воздух с большой точностью подчиняется законам идеального газа.

Энтальпия [i , Дж].

Удельной энтальпией называют величину

$$i = U + \frac{P}{\rho}.$$

Как легко видеть размерность i совпадает размерностью внутренней энергии, Дж. Энтальпия идеального газа зависит только от температуры и ее можно вычислить из соотношения

$$di = d\left(U + \frac{P}{\rho}\right) = c_p dT.$$

При $c_p = \text{const}$

$$i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1).$$

Объемный модуль упругости K есть мера изменения объема и плотности при изменении давления и, следовательно, определяется как

$$-\frac{dV}{V} \frac{1}{dP} = \pm \frac{d\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{dP}.$$

Величина, обратная сжимаемости, называется **объемным модулем упругости**

$$E_v = -\frac{dP}{dV/V} = \frac{dP}{d\rho/\rho},$$

который определяется обычно экспериментально и зависит от процесса $E_v = kP$ – адиабатический, где $k = \frac{c_p}{c_g}$; $E_v = P$ – изотермический. $E_v = 20000$ ат для воды при нормальных условиях.

Сжимаемость. Уменьшение объема при увеличении давления называется **сжимаемостью** жидкостей. По закону Гука, приращение объема жидкости dV , связанное с приращением давления dp , определяется формулой

$$dV = -\frac{1}{E} V dp, \quad (1.7)$$

где E – модуль объемной сжимаемости (модуль Юнга) жидкости, Па.

Модуль объемной сжимаемости газов зависит от термодинамического характера процесса сжатия; обычно он в тысячи раз меньше, чем для капельных жидкостей (поэтому газы и называют сжимаемыми жидкостями). Наряду с модулем Юнга E для характеристики сжимаемости жидкости применяют обратную ему величину – коэффициент сжимаемости $\beta = \frac{1}{E}$. Как уже упоминалось, капельные, или несжимаемые, жидкости при небольших изменениях давления практически не меняют объема.

Скорость звука [c , м/с].

$$c = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{0,5}.$$

Обычно определяется экспериментально по E_v и ρ .

С использованием адиабатического модуля упругости получаем

$$c = \left(\frac{kP}{\rho} \right)^{0,5}.$$

Это выражение дает высокую точность для обычных газов.

Давление насыщенного пара [P_v , Па] – давление, при котором происходит кипение жидкости.

Поверхностная энергия и поверхностное натяжение [σ , Н/м]. Мерой поверхностной энергии является поверхностное натяжение.

Уравнение состояния.

Жидкости. Уравнения состояния большинства веществ, в том числе и капельных, имеют простой вид только для очень редких случаев, если представить зависимость T, P, V совместно.

В широком диапазоне P большинство жидкостей несжимаемо и их состояние достаточно точно определяет T . Указанные зависимости обычно представлены в табличной форме в различных справочниках.

Газы. Газ, находящийся в равновесном состоянии с жидкой фазой, называется *насыщенным*.

Если температура газа при данном давлении выше равновесной, то такой газ называют *перегретым паром*.

Для насыщенных газов уравнения состояния также сложны, как и для жидкостей. Для перегретых, к которым относятся все входящие в атмосферу газы, справедливо уравнение состояния идеального газа

$$\frac{P}{\rho} = RT ,$$

где R – газовая постоянная, Дж/(кмоль·К);

P – абсолютное давление Па;

ρ – плотность, кг/м³;

$$R = \frac{8301,6}{\mu},$$

где 8301,6 Дж/(кмоль·К) – газовая постоянная для 1 кмоль двухатомных газов и для метана;

μ – молекулярный вес газа.

P иногда называют термодинамическим давлением, поскольку оно реализуется при термодинамическом равновесии.

Связь R, c_p, c_v ,

$$c_p = c_v + R = \frac{k}{k-1} R; c_v = \frac{R}{k-1}; k = \frac{c_p}{c_v}.$$

Процессы изменения состояния газов.

С использованием уравнения состояния идеального газа легко видеть:

- изотермический процесс

$$\frac{P}{\rho} = RT = const; \quad (1.8)$$

- изобарический процесс $P = \rho RT = const$;

- изоэнтропический адиабатический процесс

$$\frac{P}{\rho^k} = C_s = const. \quad (1.9)$$

Из уравнения (1.8) и (1.9) легко получить

$$\frac{T}{\rho^{k-1}} = \frac{C_s}{R} = const; \quad \frac{T}{P^{\frac{k}{k+1}}} = \frac{C_s^{\frac{1}{k}}}{R} = const.$$

В идеальном случае $k = const$, а для реальных газов он близок к константе в широком диапазоне состояний. При адиабатическом сжатии внешняя работа идет на повышение внутренней энергии и повышает температуру тела. Адиабатический процесс с трением описывается записанными выше уравнениями, но коэффициент k несколько отличается: при сжатии он больше; при растяжении меньше.

Поверхностное натяжение. Это механическое свойство капельной жидкости есть следствие действия в жидкости сил сцепления и проявляется в местах соприкосновения жидкости со стенками сосуда. В капиллярных трубах поверхностное натяжение играет существенную роль, в крупных же сосудах и трубопроводах, с которыми приходится иметь дело теплоэнергетике, силы поверхностного натяжения исчезающе малы по сравнению с другими силами.

Тепловое расширение. Тепловое расширение жидкости и связанное с ним изменение плотности при изменении температуры незначительны и обычно не принимаются во внимание в большей части гидравлических расчетов. Тепловое расширение и сжатие газов исследуется технической термодинамикой.

Капиллярные явления.

Свойство поверхностного натяжения вызывает особые явления на поверхности контакта. Устойчивые линзы на поверхности раздела будут тогда, если напряжения на поверхностях контакта и углы контакта удовлетворяют следующему требованию

$$\begin{aligned}\sigma_{AC} &= \sigma_{BC} \cos \varphi_{BC} + \sigma_{AB} \cos \varphi_{AB}, \\ \sigma_{BC} \sin \varphi_{BC} &= \sigma_{AB} \sin \varphi_{AB}.\end{aligned}$$

Устойчиво будет, если

$$\sigma_{AC} < (\sigma_{AB} + \sigma_{BC}).$$

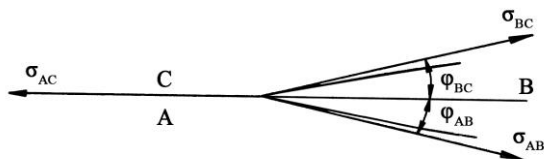


Рис. 1.3. Напряжения, связанные с тепловым расширением

Смачивание твердых поверхностей.

Конфигурация свободной поверхности зависит от сил сцепления между молекулами жидкости (силы когезии) и твердой поверхности (адгезии). Если происходит смачивание твердой поверхности, ее называют гидрофильной, если нет – то гидрофобной.

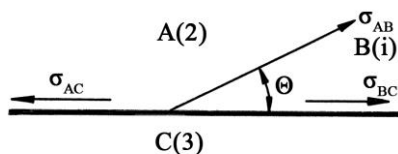


Рис. 1.4. Напряжения для смачиваемой поверхности: 1 – жидкость; 2 – газ

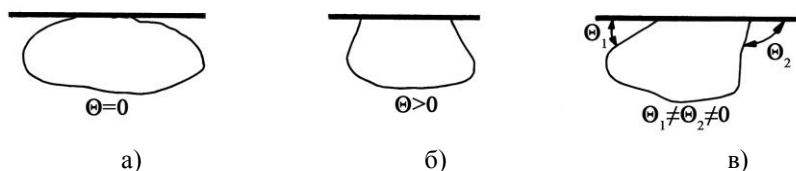


Рис. 1.5. Виды смачивания поверхности: а) полное смачивание; б) частичное движение пузыря; в) по несмачиваемой поверхности

$$\sigma_{II} = \sigma_{I*} + \sigma_{*I} \cos \theta;$$

$$\omega_{I*} = \sigma_{II} + \sigma_{*I} + \sigma_{*I};$$

$$\omega_{I*} = \sigma_{*I} (1 + \cos \theta).$$

Капиллярные явления в трубах.

Поведение жидкости в капиллярных трубах зависит от поверхностного натяжения и смачивания твердых стенок

$$\Delta P = P_1 + P_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где σ – поверхностное натяжение;

R_1, R_2 – радиусы кривизны, $R = \frac{r}{\cos \varphi}$.

Для случая круглой трубы $R_1 = R_2$.

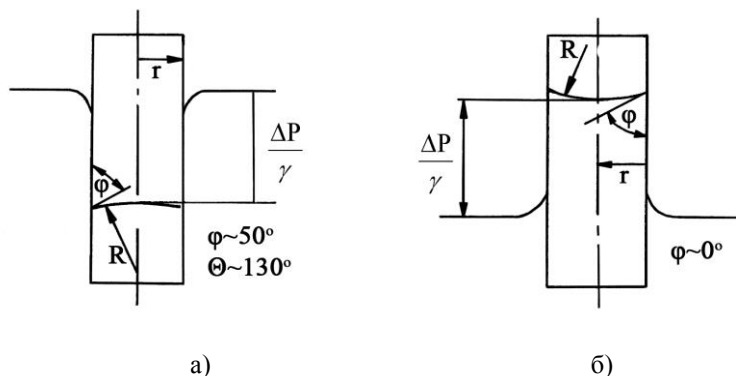


Рис. 1.6. Поверхностное натяжения для различных сред в трубе:
а) ртуть; б) вода

1.2. Основные понятия и уравнения гидростатики

Гидростатика – раздел гидродинамики, изучающий случаи равновесия жидкостей под действием различных сил.

1.2.1. Силы, действующие в жидкости

Механика жидкости и газа рассматривает две категории сил, действующих в жидкости: объемные и поверхностные.

Объемные, или массовые, силы действуют на каждую частицу жидкости внутри данного объема. Таковы силы тяжести и инерции (в том числе центробежная сила). Объемные силы,

отнесенные к единице массы жидкости, имеют размерность ускорения. Так, при действии силы тяжести объемная сила численно равна ускорению силы тяжести g ; при действии центро-

бежной силы инерции объемная сила равна $\frac{\omega^2}{r}$ (здесь

ω – окружная скорость вращения, r – радиус). Результат действия объемной силы на заданный объем жидкости V выражается ее произведением на массу жидкости внутри данного объема, которая в свою очередь равна произведению объема V на плотность ρ . В итоге действие силы тяжести выражается весом заданного объема $g\rho V$, действие центробежной силы равно

$$\rho V \frac{\omega^2}{r} \text{ и т.д.}$$

При выборе в жидкости декартовой системы координат x, y, z рассматривают проекции объемной силы на координатные оси, которые обозначаются прописными буквами X, Y, Z и также имеют размерность ускорения. Например, если плоскость xy параллельна поверхности жидкости, ось z направлена вертикально вверх, а на жидкость действует только сила тяжести, то проекции X и Y равны нулю, а проекция Z равна g (она отрицательна, поскольку сила тяжести действует в направлении, противоположном оси z).

Поверхностные силы действуют на поверхностях, ограничивающих данный объем жидкости от атмосферы, стенок сосуда или соседних объемов жидкости. К поверхностным силам относятся нормальные силы (атмосферное давление, давление со стороны стенок сосуда) и касательные силы, например: касательные напряжения у стенок трубы или у поверхности обтекаемого тела, возникающие при движении жидкости.

1.2.2. Гидростатическое давление в покоящейся жидкости

Сила, действующая со стороны жидкости на единицу площади поверхности тела, соприкасающегося с ней, называется гидростатическим давлением. Если на площадь F действует сила P , то гидростатическое давление определяется по формуле

$$p = \frac{P}{F}. \quad (1.10)$$

Если площадь F расположена в жидкости не горизонтально, то в разных ее точках гидростатическое давление оказывается не одинаковым, – оно зависит от глубины. В этом случае давление в точке определяется через предельный переход по формуле

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}. \quad (1.11)$$

Таким образом, гидростатическое давление аналогично напряжению сжатия тела под действием какой-либо силы.

Вектор давления на некоторую площадку, выбранную в жидкости, направлен по внутренней нормали к ней и не зависит от ориентации площадки.

Единица измерения давления P , Па. Наиболее распространенная в практике единица давления $\text{кгс}/\text{м}^2$ называется технической атмосферой, она равна $10000 \text{ кгс}/\text{м}^2$ и соответствует давлению столба ртути высотой 735,6 мм или столба воды высотой 10,0 м. Название «атмосфера» для этой единицы появилось потому, что она по величине близка к среднему атмосферному давлению на уровне моря, равному $1,033 \text{ кгс}/\text{м}^2$ (давление столбца ртути высотой 760 мм).

Следует отметить, что при сохранении сплошности жидкости давление в ней не может быть ниже некоторого минимума, равного давлению паров данной жидкости, насыщающих про-

странство при данной температуре. При попытке понизить давление ниже упругости насыщенного пара жидкость вскипает. В табл. 1.4 приведены данные о давлении насыщения для паров воды при различной температуре.

Таблица 1.4

Температура, °С	0	20	40	60	80	100
Давление насыщенного пара, кПа	0,5884	2,354	7,355	19,61	47,07	101,3

Из приведенных данных следует, например, что при температуре 80 °С вода вскипает, если давление на ее поверхности станет менее 47,07 кПа.

1.2.3. Равновесие жидкости

Для того чтобы жидкость находилась в равновесии, она должна быть в состоянии покоя или двигаться по законам твердого тела. Равновесное состояние есть результат действия внешних сил и связей на границах жидкости. В качестве связей проявляются нормальное давление и поверхностное натяжение.

Напряжение в жидкости, находящейся в равновесии. Рассмотрим равновесие некоторого объема жидкости. На него действуют внешние силы и внутри него возникают напряжения. Последнее утверждение может быть проиллюстрировано рис. 1.7.

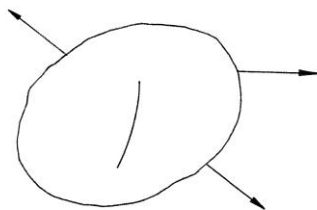


Рис. 1.7. Действие внешних сил на объем жидкости

Сделаем произвольный разрез. Для сохранения положения равновесия к нему (плоскости разреза) должна быть приложена некоторая сила, которая в общем случае дает τ и σ , т.е. нормальные и касательные напряжения. Последние будут равны нулю, т.к. жидкость находится в равновесии.

Рассмотрим элементарный объем призматической формы (рис. 1.8).

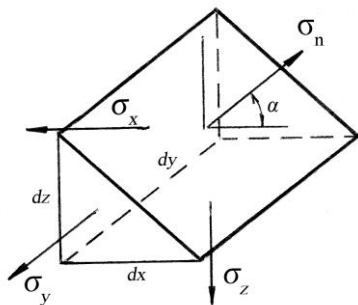


Рис. 1.8

$$\begin{aligned}
 -\sigma_x dydz + \sigma_n dS dy \cos \alpha &= 0, \\
 -\sigma_z dx dy + \sigma_n dS dy \sin \alpha - \gamma \frac{dx dy dz}{2} &= 0, \\
 \cos \alpha &= \frac{dz}{dS}; \quad \sin \alpha = \frac{dx}{dS}. \\
 -\sigma_x + \sigma_n &= 0, \\
 -\sigma_z + \sigma_n - \gamma \frac{dz}{2} &= 0.
 \end{aligned}$$

Стягивая элементарный объем к точке имеем

$$\sigma_x = \sigma_z = \sigma_n.$$

Изменив направление координат и снова записав уравнения равновесия, получим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_n = \sigma.$$

В результате можно сделать вывод, что σ в жидкости, находящейся в равновесии, не зависит от направления и является величиной скалярной.

1.2.4. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Вывод дифференциальных уравнений равновесия начнем с частного случая, когда на жидкость действует только сила тяжести и система координат выбрана таким образом, что плоскость xy расположена на поверхности жидкости, а ось h (ось глубин) направлена вертикально вниз (рис. 1.9).

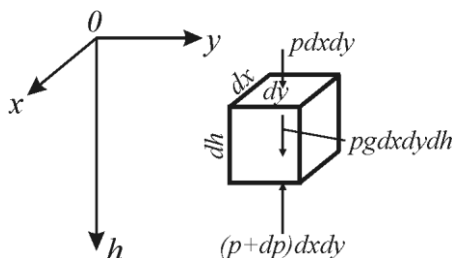


Рис. 1.9

Рассмотрим условие равновесия жидкости в параллелепипеде с ребрами dx, dy, dh параллельными координатным осям. Единственной объемной силой, действующей на жидкость внутри параллелепипеда, является сила тяжести g действие которой выражается весом жидкости – произведением $\rho g dxdydh$. Сила тяжести направлена вертикально вниз, и проекции объемной силы в направлении осей x и y равны нулю. В силу того, что жидкость неподвижна, силы давления на боковые грани взаимно уравновешиваются.

Рассмотрим проекции сил, действующих на параллелепипед в направлении оси h . Пусть давления на верхней и нижней площадках равны p и $p + dp$. На верхнюю грань действует сила давления $p dxdy$, на нижнюю грань – противоположно

направленная сила давления $(p + dp)dxdy$. Просуммировав алгебраически силы давления на верхнюю и нижнюю грань и вес жидкости в объеме параллелепипеда, получим условие равновесия

$$pdx dy - (p + dp)dxdy + gdx dy dh = 0,$$

или

$$\rho g dh = dp. \quad (1.12)$$

Последнее равенство может быть записано также в форме

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dh} = g. \quad (1.13)$$

При произвольной ориентации координатных осей, а также при действии кроме силы тяжести и других объемных сил, приходится учитывать все их проекции X, Y, Z на координатные оси. В этом случае нужно рассматривать изменение давления в направлении всех координатных осей, которое описывается частными производными $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$. Пользуясь выводом, ана-

логичным вышеизложенному, легко получить для этого случая систему дифференциальных уравнений равновесия жидкости Л. Эйлера (1755)

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = X; \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = Y; \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = Z. \end{cases} \quad (1.14)$$

Полный дифференциал гидростатического давления может быть определен из этой системы в результате умножения первого уравнения на dx , второго на dy , третьего на dz и их сложения

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (1.15)$$

1.2.5. Интегрирование дифференциальных уравнений гидростатики для несжимаемой жидкости

Рассмотрим равновесие несжимаемой жидкости под действием силы тяжести. В дифференциальном уравнении гидростатики (1.12) произведение ρg есть удельный вес жидкости γ . Интегрируя уравнение $dp = \gamma dh$, имеем

$$p = \gamma h + C.$$

Постоянная интегрирования C может быть определена с учетом условия на поверхности жидкости: при $h = 0$, $p = p_0$, следовательно, $C = p_0$. В результате давление p на любой глубине h может быть определено по основному уравнению гидростатики

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (1.16)$$

В частном случае, когда жидкость имеет свободную поверхность, давление p_0 равно атмосферному давлению p_a . Таким образом, давление на глубине h (абсолютное давление) складывается из давления на поверхности и давления столба жидкости высотой h – избыточного давления.

Из уравнения гидростатики следует, что давление может измеряться высотой столба жидкости h . На этом основано широкое применение для измерения давления сообщающихся сосудов – пьезометров, жидкостных барометров и манометров, микроманометров. Так, в пьезометре, давление внутри сосуда измеряется по высоте подъема h жидкости в открытой трубке,

давление на поверхности жидкости в ней равно атмосферному.

Очевидно, что $h = \frac{P_{\text{ман}}}{\gamma}$, где манометрическое давление

$P_{\text{ман}} = p - p_a$ – есть превышение давления над атмосферным.

Давление в сосуде определяется по формуле $p = p_a + \gamma h$. Микроманометр представляет собой пьезометр, в котором измерительная трубка наклонена под небольшим углом к горизонтальной плоскости. Незначительные изменения давления приводят к заметным изменениям длины столбика жидкости в измерительной трубке микроманометра, чем повышается точность измерений.

Если в пьезометре уровень жидкости расположен ниже уровня в сосуде, слагаемое γh в основном уравнении гидростатики имеет знак минус и называется вакуумом или недостатком давления до атмосферного. Величина, или глубина вакуума в сосуде, измеряется в долях атмосферы или высотах столба жидкости. При вакууме давление не может быть меньше давления паров жидкости, насыщающих пространство при данной температуре. Пьезометр, измеряющий глубину вакуума, называется вакуумметром.

Помимо жидкостных приборов для измерения давления в технике широко используются также механические манометры и вакуумметры – пружинные и мембранные. Давление в них измеряется по величине упругих деформаций чувствительного элемента.

Из уравнения гидростатики непосредственно следует закон Паскаля, согласно которому *давление, оказываемое на поверхность покоящейся жидкости, передается всем ее частицам без изменения величины*. Действительно, давление на поверхности p_0 входит слагаемым в основное уравнение гидростатики, и с его изменением на такую же величину меняется давление внутри жидкости p . На применении закона Паскаля основано

устройство гидростатических машин – гидравлических прессов, аккумуляторов и мультипликаторов.

При ускоренном движении сосуда в течение достаточно длительного времени находящаяся в нем жидкость оказывается в покое относительно сосуда, но перемещается вместе с ним (относительный покой жидкости). В этом случае, наряду с силой тяжести, на жидкость действуют также объемные силы инерции. В дифференциальном уравнении гидростатики (1.15) приходится учитывать горизонтальные компоненты объемных сил X и Y . В частности, при равноускоренном движении сосуда объемная сила в направлении действия ускорения равна этому ускорению. При вращении сосуда около вертикальной оси с угловой скоростью ω на частицу жидкости, расположенную на расстоянии r от оси вращения, кроме силы тяжести действует центробежная сила инерции ω^2/r . Действие этой силы приводит к возрастанию давления с удалением от оси вращения. Эффект увеличения давления у стенок вращающегося сосуда находит применение в технике, например, в центробежном литье.

1.2.6. Интегрирование дифференциальных уравнений гидростатики для сжимаемой жидкости

Равновесие неоднородной жидкости может быть устойчиво только в том случае, если на равных уровнях находятся жидкости равных удельных весов.

Уравнение $\frac{P}{\gamma} + z = \text{const}$ применимо, если $\gamma = \text{const}$.

В противоположном случае надо интегрировать следующее уравнение

$$\frac{dP}{dz} = -\gamma.$$

Для газов $\frac{P}{\rho} = RT$.

Данное уравнение легко интегрируется при любом законе изменения температуры T . Для атмосферы на высоте до 11000 м принимается линейная зависимость

$$T = T_0 + c_z = (288 - 0,0065z)^\circ K.$$

$$\left. \begin{aligned} dT &= cdz \\ \frac{P}{\rho} &= RT \\ \frac{dP}{dz} &= -\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{gdT}{cRT}.$$

После интегрирования от T_0 до T , получим

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{g}{cR} \ln \frac{T}{T_0}; \quad P = P_0 \left(\frac{T}{T_0 + cz} \right)^{\frac{g}{cR}}.$$

На высоте более 11000 м условия изотермические, т.е. уравнение состояния будет

$$\frac{P}{\rho} = RT; \quad \frac{P}{\gamma} = k.$$

Тогда получаем

$$dP = -\gamma dz;$$

$$P = \gamma k;$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P}{k}.$$

После интегрирования будем иметь

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{1}{k} (z_2 - z_1) = -\frac{\gamma_1}{P} (z_2 - z_1).$$

1.2.7. Давление жидкости на плоские стенки

Из определения гидростатического давления (1.11) следует, что сила давления жидкости на стенку может быть найдена суммированием произведений гидростатического давления на величину элементарной площадки или, в пределе, интегрированием сил давления по площади стенки F .

Величина избыточного давления на элементарную площадку dF

$$dP = p_{изб} dF = \gamma h dF.$$

Сила давления на всю площадку определяется интегрированием элементарного давления по площади F

$$P = \int_F \gamma h dF = \gamma \int_F h dF.$$

Но $\int_F h dF$ есть статический момент фигуры F относительно свободной поверхности жидкости, равный, согласно выводам теоретической механики, произведению площади F на глубину h_c погружения центра тяжести фигуры C

$$\int_F h dF = h_c F.$$

Таким образом, имеем

$$P = \gamma h_c F = p_{изб.C} F, \quad (1.17)$$

где $p_{изб.C}$ – гидростатическое давление в центре тяжести фигуры, Па.

Например, сила избыточного давления на прямоугольный щит шириной b , длиной l , установленной под углом α к поверхности жидкости, будет

$$P = \gamma h_c F = \gamma b l \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \gamma b l^2 \sin \alpha.$$

Выясним, где находится точка приложения равнодействующей сил давления, называемая *центром давления*.

Определим момент сил давления на стенку относительно линии ее пересечения с поверхностью жидкости. Элементарный момент dM равен силе давления на элементарную площадку $\gamma h dF$

$$dM = \gamma h dF l = \gamma l^2 dF \sin \alpha.$$

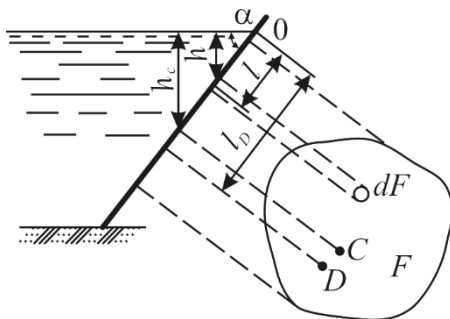


Рис. 1.10

Суммарный момент сил давления на фигуру определится в результате интегрирования этого выражения по площади F

$$M = \int_F \gamma l^2 \sin \alpha dF = \gamma \sin \alpha \int_F l^2 dF.$$

Выражение $\int_F l^2 dF = J_x$ представляет собой момент инерции фигуры F относительно линии пересечения поверхности жидкости со стенкой. Итак, $M = \gamma J_x \sin \alpha$.

Но, с другой стороны, момент инерции M равен произведению равнодействующей сил давления P на искомое плечо (координату центра давления) l_D .

Представляется целесообразным заменить в полученной формуле момент инерции фигуры относительно линии пересечения поверхности жидкости со стенкой J_x через ее момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести C

параллельно поверхности жидкости, по известной формуле механики

$$J_x = J_c + Fl_c^2.$$

Тогда

$$l_D = \frac{J_c + Fl_c^2}{Fl_c} = l_c + \frac{J_c}{Fl_c}. \quad (1.18)$$

Из полученной формулы видно, что центр давления D лежит ниже центра тяжести C на величину $e = \frac{J_c}{Fl_c}$, называемую *эксцентриситетом давления*. Например, для прямоугольного щита координата центра давления l_D равна

$$l_D = l_c + \frac{J_c}{Fl_c} = \frac{1}{2} + \frac{bl}{12} \cdot \frac{1}{bl} \cdot \frac{2}{l} = \frac{2}{3}l,$$

(так как для прямоугольника $J_c = \frac{bl^3}{12}$). Таким образом, точка приложения равнодействующей сил давления на прямоугольную стенку лежит ниже ее центра тяжести на $\frac{1}{6}l$.

Равнодействующая сил давления на криволинейную стенку может быть определена суммированием сил давления на элементарные площадки, которые можно считать плоскими. Обычно задача определения равнодействующей давления на криволинейную стенку сводится к нахождению ее составляющих по координатным осям.

1.2.8. Давление жидкости на криволинейные стенки

В практике приходится определять силу гидростатического давления не только на плоские поверхности, но и на криволинейные поверхности любого вида. Ниже рассмотрим только

простейший частный случай криволинейной поверхности – цилиндрическую поверхность, которая встречается наиболее часто. Будем рассматривать только избыточное давление, не интересуясь поверхностным давлением.

Первый случай цилиндрической поверхности. Представим на рис. 1.11 цилиндрическую поверхность ABC . Эта поверхность расположена перпендикулярно к плоскости чертежа, и потому она проектируется в одну линию ABC (кривая ABC есть направляющая рассматриваемой цилиндрической поверхности). Обозначим длину образующей цилиндрической поверхности, перпендикулярной к плоскости чертежа, через b ($b = const$). Наметим вертикальную плоскость CC' и оси координат x и z . Обозначим через P_x и P_z горизонтальную и вертикальную составляющие силы P гидростатического давления, действующего со стороны жидкости на цилиндрическую поверхность.

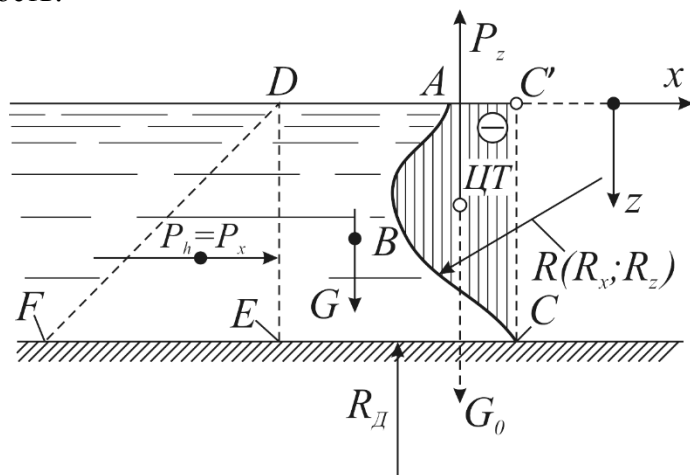


Рис. 1.11. Схема давления жидкости на цилиндрическую поверхность 1

Определим вначале составляющие P_x и P_z искомой силы P . С этой целью проведем вертикальную плоскость DE . Плоскость DE выделит объем покоящейся жидкости $ABCED$. На этот объем действуют следующие силы:

- сила P_h , действующая на вертикальную грань BE со стороны жидкости, расположенной слева от этой грани;
- сила R_D – со стороны дна EC (реакция дна)

$$R_D = S_{C'DEB} b \gamma; \quad (1.19)$$

- реакция R – со стороны цилиндрической поверхности; горизонтальную и вертикальную составляющие этой реакции обозначим соответственно R_x и R_z ; значения и направления этих сил (в отличие от других) нам неизвестны;

- собственный вес G рассматриваемого объема жидкости

$$G = S_{ABCED} b \gamma. \quad (1.20)$$

Проектируя все силы, действующие на покоящийся объем $ABCED$, соответственно на оси x и z , получаем следующие уравнения равновесия (не зная направления R_x и R_z , вводим их в уравнения (1.21) со знаком плюс)

$$P_h + R_x = 0; G + R_z - R_D = 0, \quad (1.21)$$

откуда

$$R_x = -P_h; R_z = R_D - G. \quad (1.22)$$

Так как силы P_x и P_z направлены противоположно силам R_x и R_z , то можно написать

$$P_x = -R_x, P_z = -R_z, \quad (1.23)$$

при этом вместо (1.22) имеем

$$P_x = P_h, \quad (1.24)$$

$$P_z = -(R_D - G). \quad (1.25)$$

Далее преобразуем уравнение (1.25), подставляя в него (1.19) и (1.20), получаем

$$P_z = -(S_{C'CED} - S_{ABCD})b\gamma \quad (1.26)$$

или

$$P_z = -S_{ABCC'}b\gamma. \quad (1.27)$$

Рассмотрев (1.24) и (1.27), можно заключить следующее:

- горизонтальная составляющая P_x искомой силы равна силе давления жидкости на плоскую вертикальную прямоугольную фигуру DE , представляющую собой проекцию рассматриваемой цилиндрической поверхности на вертикальную плоскость. В связи с этим сила $P_x = P_h$ может быть выражена, как и в случае плоских фигур, треугольником гидростатического давления DEF ;

- вертикальная составляющая P_z искомой силы равна взятому со знаком минус весу воображаемого жидкого тела площадью сечения $ABCC'$. Это воображаемое жидкое тело называется *телом давления* (площадь, покрытая на рис.1.11 штриховкой).

Обозначим вес тела давления через G_0 . Тогда вместо (1.27) можно написать

$$P_z = -G_0. \quad (1.28)$$

Найдя таким образом составляющие P_x и P_z путем их геометрического сложения, определяем искомую силу P давления жидкости на рассматриваемую цилиндрическую поверхность.

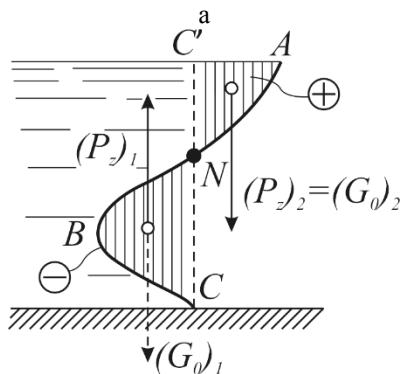
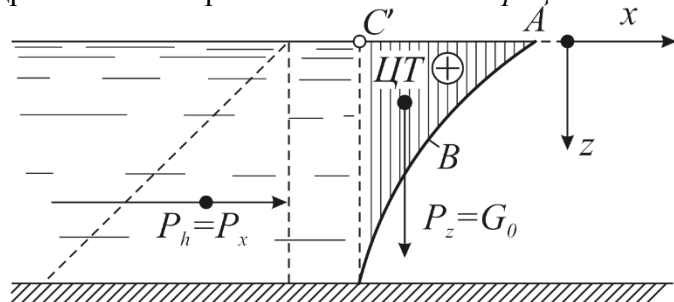
Как видно, первый случай цилиндрической поверхности характеризуется тем, что вертикаль CC' лежит вне жидкости.

Второй случай цилиндрической поверхности (вертикаль CC' лежит внутри жидкости). Представим на рис.1.12 случай, когда жидкость находится над цилиндрической поверхностью. Ограничимся здесь нахождением только составляющих P_x и

P_z . Рассуждая, как и выше, можно показать, что горизонтальная составляющая P_x выражается точно так же, как и в предыдущем случае. Что же касается составляющей P_z , то оказывается, что для цилиндрической поверхности, показанной на рис.1.12

$$P_z = +G_0. \quad (1.29)$$

Как видно, в данном случае «тело давления» (заштрихованная площадь на рис.1.12 лежит в области действительной, а не воображаемой жидкости. Имея это в виду, такое тело давления называют *положительным*; тело же давления в первом случае цилиндрической поверхности называют *отрицательным*.



б)

Рис. 1.12. Схема давления жидкости на цилиндрическую поверхность 2

Третий случай цилиндрической поверхности. Представим на рис. 1.13 такую цилиндрическую поверхность ABC , которая пересекается в некоторой «узловой точке» N с вертикалью CC' , проведенной через нижнюю точку C цилиндрической поверхности. Как видно, в данном случае одновременно получаем и положительное и отрицательное тела давления. Складывая силы $(P_z)_1, (P_z)_2, P_x$ (определенные, как указано выше), находим искомую силу P .

Четвертый случай цилиндрической поверхности. Плоский прямоугольник, проектирующийся в линию ABC (рис.1.14) является частным случаем цилиндрической поверхности. Поэтому при отыскании P для этого прямоугольника можно поступить так же, как во втором случае цилиндрической поверхности. В результате найдем составляющие P_x и P_z . Складывая геометрически эти две силы, получим силу, выражаемую эпюрой $OA'B$, представленной на рис.1.14.

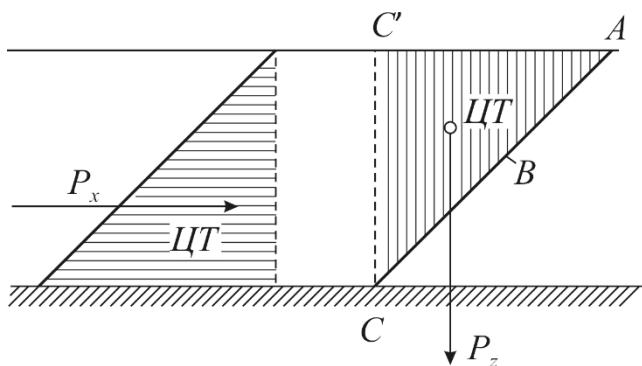


Рис. 1.13. Схема давления жидкости на цилиндрическую поверхность 4

Заключительное замечание. При построении поперечного сечения тела давления, т.е. эпюры, выражающей вертикальную составляющую P_z , в общем случае можно поступать следующим образом.

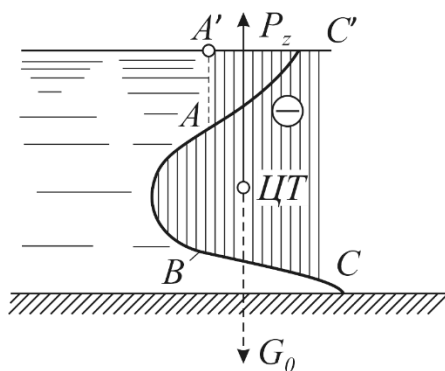


Рис. 1.14. Схема давления жидкости на цилиндрическую поверхность 4

Имеем цилиндрическую поверхность ABC , для которой следует построить тело давления (рис.1.14); при этом прежде всего фиксируем крайние точки A и C этой поверхности; далее от этих точек проводим вверх вертикали до горизонта жидкости или его продолжения; наконец, намечаем контур тела давления, причем руководствуемся правилом: *поперечное сечение тела давления (отрицательного или положительного) представляет собой фигуру, заключенную между указанными вертикалями, самой цилиндрической поверхностью ABC и горизонтом жидкости (или его продолжением)*. Если рассматриваемая цилиндрическая поверхность со стороны тела давления не смачивается жидкостью, то имеем отрицательное тело давления; в противном случае – положительное тело давления.

Следует принимать во внимание, что сила гидростатического давления P для криволинейной (цилиндрической) поверхности, в отличие от силы P , действующей на плоскую поверхность, не может быть представлена площадью только одной эпюры давления; выше эта сила представлена (в общем случае цилиндрической поверхности) двумя эпюрами – для P_x и P_z .

1.2.9. Круглая труба, подверженная внутреннему гидростатическому давлению

Будем рассматривать давление на стенки трубы со стороны жидкости, находящейся внутри трубы (внутреннее гидростатическое давление).

Сила гидростатического давления на стенки прямой трубы. Представим (рис.1.15) поперечное сечение горизонтальной трубы, заполненной покоящейся жидкостью. Обозначим через p гидростатическое давление в центре трубы O . Ясно, что давление в самой верхней точке трубы будет $p - \frac{D}{2}\gamma$, где D – диаметр трубы; давление же в самой нижней точке трубы будет равно $p + \frac{D}{2}\gamma$. Часто величиной $\frac{D}{2}\gamma$ сравнительно с величиной p можно пренебречь и считать, что давление жидкости, находящейся в трубе, одинаково по всему ее поперечному сечению ($p = const$). Этот случай и будем рассматривать.

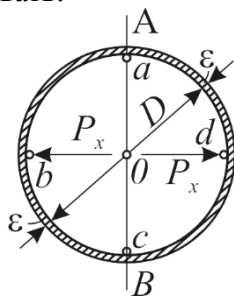


Рис. 1.15. Сечение трубы

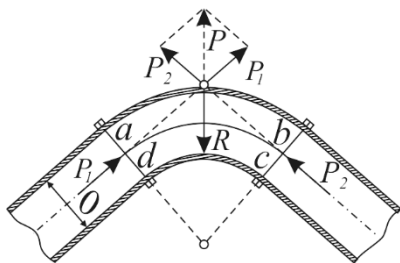


Рис. 1.16.

Под действием внутреннего давления p труба может разорваться, например, по плоскости AB . С тем, чтобы рассчитать толщину e стенок трубы, обеспечивающую достаточную прочность трубы, нам необходимо знать силу P_x гидростатического давления, действующего на цилиндрическую поверхность abc

или на цилиндрическую поверхность adc . Можно показать, что искомая сила P_x равна давлению на плоскую прямоугольную фигуру ac , являющуюся вертикальной проекцией цилиндрической поверхности abc (или adc).

Поскольку указанная прямоугольная фигура ac представляет собой диаметрально сечение трубы, то искомая сила

$$P_x = Dlp, \quad (1.30)$$

где l — длина трубы.

Пользуясь этой формулой, в практике рассчитывают толщину стенок круглоцилиндрических сосудов и труб, находящихся под внутренним гидростатическим давлением. Поскольку сила P_x стремится разорвать рассматриваемую трубу в двух местах (у точки a и у точки c), то толщину e стенки трубы следует рассчитывать на разрыв ее силой, равной $P_x/2$.

Сила гидростатического давления на стенки изогнутой трубы. Рассмотрим трубу, имеющую поворот (рис. 1.16). Колено трубы $abcd$ под действием внутреннего гидростатического давления будет стремиться сдвинуться в направлении силы P . Эта сила представляет собой разность давлений: а) на относительно большую внутреннюю поверхность трубы, лежащую в районе линии ab и б) на относительно малую внутреннюю поверхность трубы, лежащую в районе линии cd .

Силу P находим следующим образом.

Выделяем отсек жидкости $abcd$, находящейся в трубе. Если пренебречь собственным весом этого отсека, то можно сказать, что данный отсек находится в покое под действием сил, показанных на рис. 1.16

$$P_1 = \frac{\pi D^2}{4} p, P_2 = \frac{\pi D^2}{4} p, \quad (1.31)$$

а также под действием реакции R стенок трубы в пределах колена $abcd$ ($|R| = |P|$). Имея это в виду, складываем геометрически P_1 и P_2 и получаем силу P . На величину силы P обычно рассчитывают так называемые анкерные опоры трубопроводов, устраиваемые в местах поворота труб.

1.2.10. Простейшие гидравлические машины

Передача давления и энергии при помощи жидкости часто находит применение в практике машиностроения. Встречаются следующие так называемые простейшие гидравлические машины: гидравлические прессы, мультипликаторы (повысители давления), домкраты, подъемники и др. Во всех этих машинах, имеющих разное назначение и различную конструкцию, используется один и тот же гидравлический принцип.

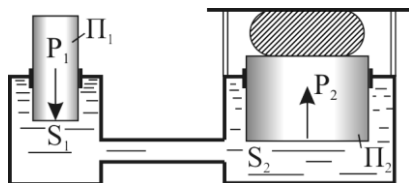


Рис. 1.17. Гидравлический пресс

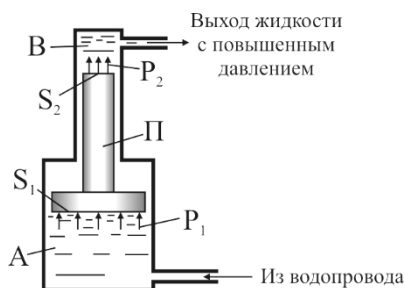


Рис. 1.18. Мультипликатор

На рис. 1.17 показана схема гидравлического прессы. Если к поршню P_1 , имеющему площадь S_1 приложим силу P_1 , то эта сила будет передаваться на жидкость; жидкость же будет давить на поршень P_2 , имеющий площадь S_2 , с силой

$$P_2 = P_1 \frac{S_2}{S_1}, \quad (1.32)$$

поскольку гидростатические давления в точках площади S_1 и площади S_2 практически равны между собой

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2} = p. \quad (1.33)$$

Как видно, при помощи пресса сила P_1 увеличивается в (S_2/S_1) раз.

На рис. 1.18 показана схема мультипликатора. Если в камере A создается гидростатическое давление p_1 , то гидростатическое давление p_2 в камере B должно удовлетворять условиям

$$p_2 S_2 = p_1 S_1, \quad (1.34)$$

откуда

$$p_2 = p_1 \frac{S_1}{S_2}, \quad (1.35)$$

где S_1 и S_2 – нижняя и верхняя площади поршня Π .

Как видно, при помощи мультипликатора гидростатическое давление повышается в (S_1/S_2) раз. Заметим, что как только поршень Π вытеснит всю жидкость из камеры B , данный мультипликатор выключают из работы, поршень Π опускают и камеру B заполняют жидкостью (со стороны). После этого мультипликатор снова вступает в работу.

1.2.11. Равновесие плавающих тел

Возьмем твердое тело AB , погруженное в жидкость (рис. 1.19.). Разобьем его на ряд вертикальных цилиндров с площадью поперечного сечения dS . Рассматривая один такой цилиндр, видим, что сверху на него давит вес столба жидкости, равный $\gamma h_1 dS$; снизу – вес столба жидкости, равный $\gamma h_2 dS$.

Ясно, что рассматриваемый цилиндр твердого тела будет испытывать подъемное усилие (направленное вверх), равное

$$dP_v = (h_2 - h_1) \gamma dS . \quad (1.36)$$

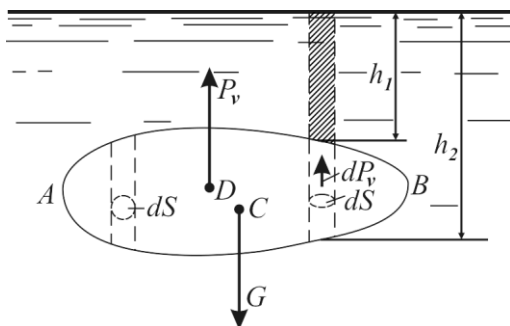


Рис. 1.19. Схема действия сил на тело, погруженное в жидкость

Сумма элементарных подъемных сил dP_v , действующих на все цилиндры, составляющие данное твердое тело, даст нам полную подъемную силу P_v , стремящуюся поднять тело вверх.

Как видно, вертикальная подъемная сила P_v (архимедова сила) равна весу жидкости в объеме рассматриваемого тела; точкой приложения силы P_v является центр тяжести D объема жидкости AB . Точка D называется *центром водоизмещения*. В общем случае точка D не совпадает с центром тяжести C твердого тела, где приложен его собственный вес G .

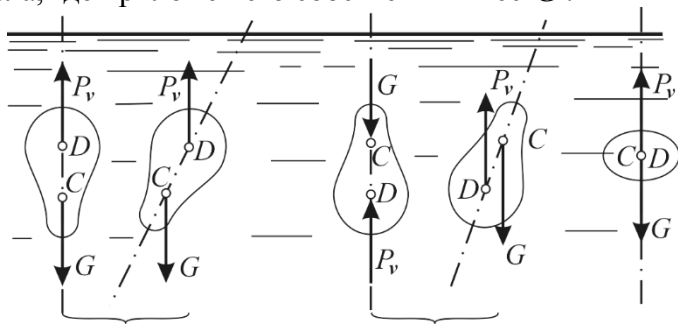


Рис. 1.20. Плавание тела в полностью погруженном состоянии

Можно различать следующие три случая (рис. 1.20):

$P_v < G$ – тело тонет;

$P_v > G$ – тело всплывает на поверхность жидкости;

$P_v = G$ – тело плавает в погруженном состоянии.

Первый случай $P_v = G$. Здесь, в свою очередь, можем различать (рис. 1.20):

- устойчивое равновесие тела (схема а);
- неустойчивое равновесие тела (схема б);
- безразличное равновесие (схема в).

Второй случай $P_v > G$. В этом случае тело будет всплывать до тех пор, пока часть его не выйдет из жидкости (рис. 1.21), причем будет соблюдено условие

$$G = P'_v, \quad (1.37)$$

где P'_v – вес жидкости, вытесненной плавающим телом.

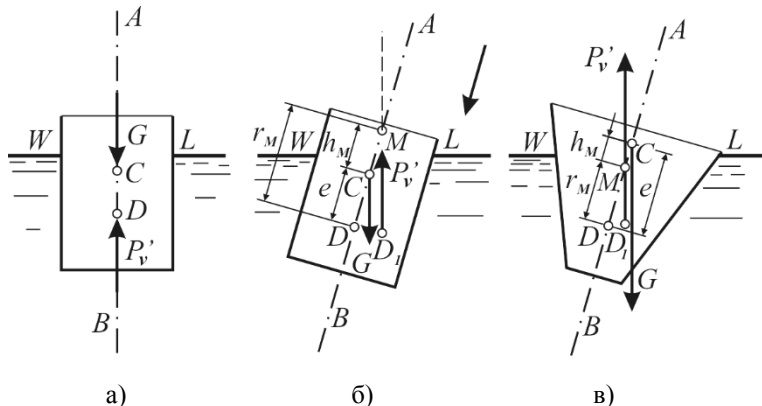


Рис. 1.21. Плавание судна в частично погруженном состоянии: а – состояние равновесия; б – устойчивое; в – неустойчивое

Рассмотрим схему, когда точка C (центр тяжести плавающего тела) выше точки D (центра водоизмещения). В этом случае, в отличие от схемы б на рис. 1.21, можем получить как неустойчивое, так и устойчивое равновесие. Поясним этот вопрос

применительно к плаванию судна (в покоящейся воде), причем будем пользоваться следующими терминами и обозначениями:

WL – площадь грузовой ватерлинии (площадь горизонтального сечения судна по линии WL ;

AB – ось плавания;

C – центр тяжести судна;

D – центр водоизмещения при равновесии судна;

D_1 – центр водоизмещения при крене судна;

M – точка пересечения оси плавания AB с вертикалью, проведенной через центр водоизмещения D_1 ; эта точка называется *метацентром*.

Сопоставляя два разных судна, представленных на рис. 1.21, б и 1.21, в, видим следующее:

а) на схеме б центр водоизмещения D_1 при крене оказался правее точки C , причем возник момент, возвращающий судно в положение покоя. Данный случай характеризуется тем, что метацентр M лежит выше точки C ;

б) на схеме в центр водоизмещения D_1 при крене оказался левее точки C , причем возник момент, опрокидывающий судно. Данный случай характеризуется тем, что метацентр M лежит ниже точки C .

Обозначим длины отрезков DC , CM и DM соответственно через e , h_m и r_m

$$\overline{DC} = e; \overline{CM} = h_m; \overline{DM} = r_m = e + h_m. \quad (1.38)$$

Эти отрезки называются: e – *эксцентриситетом*; h_m – *метацентрической высотой*; r_m – *метацентрическим радиусом*. Величина h_m считается положительной, если точка M располагается выше точки C (рис. 1.21, б), и отрицательной, если точка M располагается ниже точки C (рис. 1.21, в).

Остойчивостью судна называется способность его возвращаться в состояние равновесия после получения крена. Имея в виду сказанное, можем утверждать следующее:

- если для данного судна $h_m > 0$, или, что то же, $r_m > e$, то это судно является остойчивым (рис. 1.21, б);

- если для данного судна $h_m < 0$, или, что то же, $r_m < e$, то такое судно является нестойчивым (рис. 1.21, в).

Для данного судна эксцентриситет e является постоянной величиной.

При небольшом угле крена (меньше, например, 15°) можно считать, что точка D_1 перемещается по дуге окружности, описанной из метацентра радиусом r_m , причем сама точка M не меняет своего положения на оси плавания.

Как видно, для данного судна метацентрический радиус r_m и метацентрическая высота h_m считаются постоянными (в случае небольших кренов).

Можно показать, что метацентрический радиус

$$r_m = \frac{I}{V}, \quad (1.39)$$

где V – объем воды, вытесненной судном (объемное водоизмещение судна);

I – момент инерции площади грузовой ватерлинии (рис. 1.21, а) относительно горизонтальной продольной оси, проходящей через центр тяжести этой площади.

Ясно, что чем больше для данного судна величина r_m (сравнительно с величиной e), тем больше остойчивость судна.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

2.1. Определения кинематики жидкости

Задачей гидродинамики является определение скоростей, ускорений и давлений жидкости в различных точках потока и в различные моменты времени t . В общем случае вектор скорости v , ускорение a и давление p являются функциями четырех переменных

$$v = v(x, y, z, t), \quad a = a(x, y, z, t), \quad p = p(x, y, z, t).$$

Если скорость и давление в любой фиксированной точке потока остаются неизменными во времени (т.е. являются функциями только координат x, y, z), то течение называется *установившимся*. Пример установившегося течения – истечение жидкости из бака под постоянным напором. Если скорость и давление меняются со временем, то течение – *неустановившееся*. Например, если при истечении из бака убыль жидкости не восполняется, то напор, скорость и давление в любой точке постепенно уменьшаются, это течение неустановившееся.

2.1.1. Поле скоростей

Поле течения жидкости описывается скоростями и ускорениями жидких частиц во всем объеме занятом жидкостью.

Общеприняты следующие обозначения, соответственно: для скорости \vec{v} ; для ускорения \vec{a} .

\vec{v} и \vec{a} – являются функциями времени и координат в общем случае движения.

В декартовой системе координат их компоненты в проекциях на оси координат (x, y, z) соответственно записываются

$$\begin{pmatrix} u; & v; & \omega; \\ d_x; & d_y; & d_z; \end{pmatrix}.$$

Имеются два способа описания поля течения жидкости.

1. Метод Лагранжа, в котором координаты движущихся частиц записываются как функции времени, т.е. положение частиц в любой момент времени определяются системой уравнений

$$x = f_1(a, b, c, t);$$

$$y = f_2(a, b, c, t);$$

$$z = f_3(a, b, c, t).$$

и, следовательно, скорости и ускорения запишутся как

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad \omega = \frac{\partial z}{\partial t};$$

$$dx = \frac{\partial^2 x}{\partial^2 t}; \quad dy = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 t}; \quad dz = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 t};$$

При этом начало координат должно оставаться неизменным.

2. Метод Эйлера, при котором фиксируется внимание на характеристиках течения в окрестности фиксированной точки потока, т.е. описание течения сводится к установлению мгновенной картины течения (распределения поля скоростей и ускорений).

Таким образом, основное различие заключается в том, что в методе Лагранжа координаты частицы записываются как функция времени, а в методе Эйлера скорости частиц в различных точках потока записываются как функция времени.

И, следовательно, координаты x, y, z в методе Эйлера – независимые переменные, а в методе Лагранжа – зависимые.

Эйлерово поле скоростей записывается следующим образом

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + \omega\vec{k},$$

где

$$u = f_1(x, y, z, t); \quad v = f_2(x, y, z, t); \quad \omega = f_3(x, y, z, t).$$

Изменение скорости частиц в окрестности некоторой точки запишется

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z}.$$

И, следовательно

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Это полная производная, представляющая собой быстроту изменения скорости в данной фиксированной точке потока.

Здесь $\frac{\partial u}{\partial t}$ – локальное ускорение, $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z}$ – «конвективное» ускорение, которое связано с движением частицы в пространстве.

Любые другие свойства течения могут быть выражены аналогичным образом. Например,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial y} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

2.1.2. Установившееся движение и равномерное движение

Согласно правилам вычисления полной производной, для компонента ускорения имеем

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z}; \\ a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z}; \\ a_z &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned}$$

В векторной форме можно записать

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

или

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V},$$

где

$$\nabla = i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + j \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + k \left(\frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Движение может быть установившимся, если локальное ускорение равно нулю. Движение равномерное, если «конвективное» ускорение равно нулю.

2.1.3. Координатные системы, движущиеся с вращением или ускорением

Под инерциальной координатной системой понимается система, неподвижно связанная с некоторыми неподвижными звездами Вселенной. Такая система является инерциальной. Более приемлемой системой для инженерных задач является система, связанная с Землей.

Рассматриваем подвижную систему x_2, y_2, z_2 относительно неподвижной системы x_1, y_1, z_1 . Начало отсчета перемещается

со скоростью $\frac{d\vec{R}}{dt}$, а оси вращаются со скоростью $\vec{\Omega}$.

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r};$$

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{V}_2}{dt} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_2 + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r},$$

где $2\vec{\Omega} \times \vec{V}_2$ – кориолисово ускорение;

$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ – центростремительное ускорение, возникающее благодаря вращению подвижной системы;

$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}$ – вращательное ускорение, возникающее благодаря угловому ускорению подвижной системы.

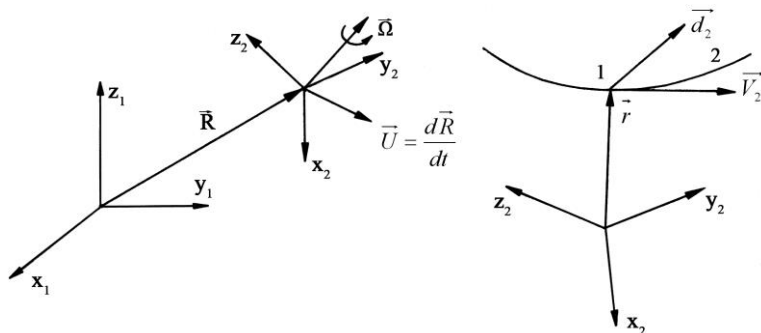


Рис. 2.1. Координатные системы: 1 – частица; 2 – траектория частицы.

Указанная интерпретация непосредственно применима к системе связанной с Землей, начало координат этой системы находится в центре Земли.

Рассматриваем правую координатную систему, начало координат которой закреплено на поверхности земли, находящейся на широте ϕ . Тогда

$$a_{2x} = \frac{du_2}{dt} - \Omega^2 x - 2\Omega(V_2 \sin\phi - \omega_2 \cos\phi);$$

$$a_{2y} = \frac{dv_2}{dt} = \Omega^2 (R \cos\phi - y \sin\phi + z \cos\phi) \sin\phi + 2\Omega u_2 \sin\phi;$$

$$a_{2z} = \frac{d\omega_2}{dt} - \Omega^2 (R \cos\phi - y \sin\phi + z \cos\phi) \cos\phi - 2\Omega u_2 \cos\phi.$$

Величина кориолисового ускорения мала и ей пренебрегают. Переносное ускорение, обусловленное вращением Земли, принимается во внимание посредством ориентации по направлению кажущейся силы тяжести.

Тогда приходим к равенству

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2.$$

Тем самым мы рассматриваем Землю как неподвижную и в нашей координатной системе справедливы записанные выше уравнения для компонент ускорения.

2.1.4. Линии тока и траектории

Линии тока есть воображаемые линии, являющиеся геометрическим местом точек в пространстве, в каждой из которых векторы скорости в данный момент времени направлены по касательной к данной линии. Они указывают направление движения в каждой точке вдоль этой линии в данный момент времени.

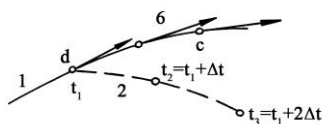


Рис. 2.2. Схема движения: 1 – линия тока; 2 – траектория

Трубка тока есть малая воображаемая трубка, ограниченная линиями токов. При установившемся движении линии тока неподвижны относительно координатной системы и представляют собой траектории движущихся частиц.

При неустановившемся движении линии тока и траектории не совпадают. Исключение представляет случай однородного движения, когда все векторы скорости равны.

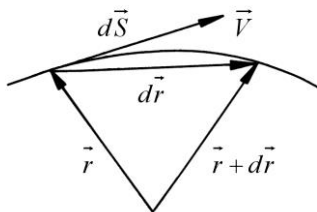


Рис. 2.3. Случай равных векторов скорости при движении

В случае плоского двумерного течения можно получить дифференциальное уравнение линии тока следующим образом

$$u = \frac{dx}{dt}; \quad v = \frac{dy}{dt}; \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

Так как вектор скорости касательный к линии тока, то

$$\begin{aligned}\vec{V} \times d\vec{r} &= 0; \\ d\vec{r} &= \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz.\end{aligned}$$

И, следовательно, в общем случае трехмерного течения имеем систему уравнений для линии тока

$$vdx = udy; \quad \omega dx = u dz; \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{\omega}; \quad \omega dz = v dz.$$

Этими уравнениями придется пользоваться непосредственно.

2.1.5. Понятие расхода жидкости

Мгновенную картину течения наглядно представляют линии тока (рис. 2.4а). В каждой точке линии тока вектор скорости направлен по касательной к ней. При установившемся течении линии тока совпадают с траекториями частиц, при неустановившемся течении они могут не совпадать.

Если провести линии тока через все точки элементарно малого контура, то образованная ими поверхность ограничит элементарную струйку (рис. 2.4, б). В элементарной струйке жидкость течет, не смешиваясь с соседними объемами, так как, по определению, векторы скорости направлены по касательной к ее поверхности. Площадь сечения струйки dF выбирают достаточно малой для того, чтобы вектор скорости v оставался в этом сечении неизменным по величине.

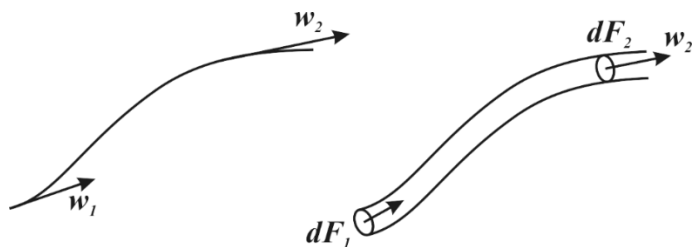


Рис. 2.4

Объем жидкости, протекающей через сечение струйки в единицу времени, называют *элементарным расходом* dQ . Он равен произведению длины вектора скорости на площадь сечения струйки

$$dQ = v dF. \quad (2.1)$$

Размерность расхода $\text{м}^3/\text{с}$.

Рассматривая поток жидкости, такой, например, как в трубе или канале, допустимо считать, что он состоит из большого числа элементарных струек. В этом случае сечение потока (в гидравлике его называют «живым сечением») равно сумме сечений элементарных струек. Расход потока есть сумма расходов струек, в пределе – интеграл по площади сечения

$$Q = \int_F dQ = \int_F v dF. \quad (2.2)$$

При известном расходе Q легко определить среднюю скорость потока v_{cp} в данном сечении

$$v_{cp} = \frac{Q}{F} = \frac{\int_F v dF}{F}. \quad (2.3)$$

Для характеристики торможения потока твердыми стенками кроме сечения F в гидравлике вводятся еще понятия смо-

ченного периметра χ – периметр сечения в пределах соприкосновения с твердыми стенками трубы или канала, и гидравлического радиуса R , причем

$$R = \frac{F}{\chi}. \quad (2.4)$$

Размерность смоченного периметра и гидравлического радиуса – метры (м). Как видно из выражения (2.4), гидравлический радиус характеризует компактность сечения потока. Для круглой трубы радиуса r , например, гидравлический радиус

$$R = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}.$$

2.2. Неразрывность потока

2.2.1. Уравнение неразрывности для одномерного течения

Если в потоке между какими-нибудь двумя его сечениями количество жидкости не пополняется извне и не убывает (нет источников и стоков), то масса протекающей через эти два сечения жидкости сохраняется неизменной. Математически этот принцип выражается уравнением неразрывности (это название подчеркивает, что в рассматриваемых сечениях поток сплошной, не содержит полостей и разрывов).

Наиболее просто записывается уравнение неразрывности для установившегося одномерного течения, в котором скорость меняется только в направлении одной продольной координаты. Примерами одномерного течения являются элементарная струйка, движение в трубе и канале. Для элементарной струйки несжимаемой жидкости принцип сохранения массы выражается через постоянство объемного расхода (2.1) в струйке (рис. 2.4, б)

$$dQ = v dF = const. \quad (2.5)$$

Очевидно, что для потока в трубе или канале необходимо постоянство расхода, вычисленного по средней скорости v_{cp}

$$Q = v_{cp} F = const. \quad (2.6)$$

В случае одномерного течения сжимаемой жидкости принцип неразрывности требует постоянства массового расхода, который равен произведению объемного расхода на плотность ρ

$$m = \rho Q = \rho v_{cp} F = const. \quad (2.7)$$

Одномерное течение несжимаемой жидкости является предметом изучения гидравлики. В отличие от нее гидродинамика рассматривает более сложные двухмерные и трехмерные потоки, в которых скорость может изменяться в направлении двух или трех координатных осей.

2.2.2. Уравнение неразрывности для трехмерного течения несжимаемой жидкости

Выберем в потоке фиксированный в пространстве элементарный объем в форме параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz (рис. 2.5). Пусть у левой грани этого объема составляющая скорости в направлении оси x равна v_x . По достижении правой грани эта составляющая может измениться и стать равной

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx.$$

Через левую грань за единицу времени втекает внутрь параллелепипеда объем жидкости, равный произведению нормальной составляющей скорости на площадь грани: $v_x dy dz$. Через правую грань вытекает объем

$$\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Суммарное поступление жидкости через левую и правую грани равно разности

$$v_x dydz - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Аналогично получим, что через грани, перпендикулярные оси y (задняя и передняя грани на рис. 2.5), суммарное поступление жидкости внутрь параллелепипеда равно $-\frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy dz$.

Через грани, перпендикулярные оси z (нижняя и верхняя на рис. 2.5), поступает объем

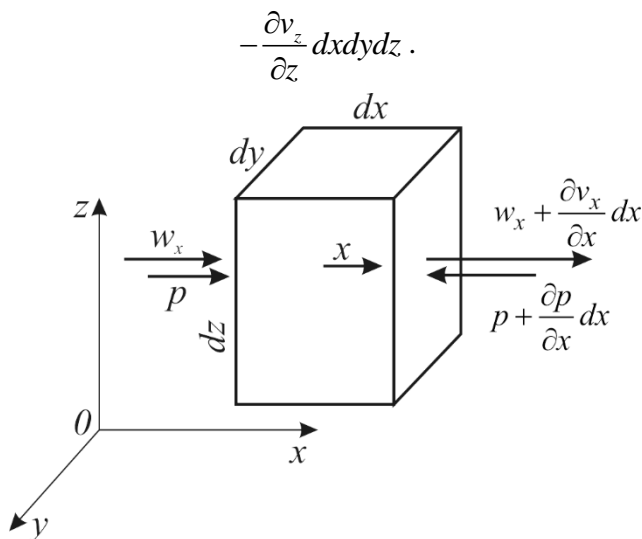


Рис. 2.5. Элементарный объем

Здесь v_y, v_z — составляющие скорости в направлении осей y, z . Если внутри параллелепипеда нет источников и стоков, т.е. объем жидкости в нем не меняется, то суммарный расход через все грани равен нулю

$$-\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz = 0.$$

Разделив последнее равенство на объем параллелепипеда $dx dy dz$, получим уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.8)$$

При выводе уравнения неразрывности мы не учитывали сжимаемости жидкости. В наиболее общем случае неустановившегося движения сжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

2.2.3. Уравнения движения идеальной жидкости Эйлера

Идеальной жидкости, лишенной свойства вязкости, в природе не существует. Опыт показывает, однако, что при обтекании некоторых тел маловязкой жидкостью (такой, как вода, воздух) торможение из-за вязкого трения охватывает лишь тонкий пристенный слой. За пределами этого слоя вязкость оказывает пренебрежимо малое влияние на распределение скоростей и давлений. Поэтому для изучения внешнего потока возможно использовать методы динамики идеальной жидкости, что существенно упрощает задачу по сравнению с динамикой вязкой жидкости. Пренебрежение вязкостью помогает также решать в первом приближении задачи одномерного течения.

Вывод уравнений. Уравнения гидродинамики Эйлера выражают в применении к жидкой частице второго закона Ньютона: «Произведение массы частицы на ускорение равно действующей силе», т.е.

$$m \frac{dv}{dt} = \sum f. \quad (2.10)$$

Здесь $\frac{dv}{dt}$ – производная вектора скорости по времени, или ускорение; $\sum f$ – сумма сил, действующих на частицу массы m .

Применим второй закон Ньютона к частице жидкости в форме параллелепипеда с малыми ребрами dx, dy, dz (рис. 2.5). Рассмотрим проекции записанного выше векторного равенства на координатные оси, причем начнем с проекции на ось x

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\sum f_x}{m}.$$

Здесь v_x и f_x – составляющие скорости и силы по оси x . Масса m равна произведению плотности ρ на объем частицы, или $\rho dx dy dz$. К силам, действующим на частицу, относится разность давлений на грани, перпендикулярные оси x . Если давление у левой грани (в соответствии с рис. 2.5) равно p , а у правой грани $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ (учтено возможное изменение давления вдоль оси x), то разность проекций сил давления на ось x составит

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Кроме силы давления частица может испытывать действие в направлении оси x внешних объемных сил (например, силы тяжести или инерции). Если проекцию ускорения, создаваемого внешними силами в направлении оси x , обозначить через X , м/с^2 (рис. 2.5), то сама сила окажется равна произведению ускорения на массу частицы, т.е. $X \rho dx dy dz$. Н. Подставляя полученные величины в уравнение (2.10) и пользуясь аналогич-

ными рассуждениями для проекций ускорений и сил на координатные оси y, z , получим систему дифференциальных уравнений гидродинамики Эйлера

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X; \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y; \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Здесь Y, Z – проекции ускорения объемных сил на оси y, z .

Дифференциальные уравнения Эйлера показывают, что ускорение частиц (левые части записанных уравнений) обусловлено перепадом давления (первые члены правых частей) и действием внешних объемных сил. В реальной жидкости, если скорости распределены неравномерно, возникают еще касательные напряжения вследствие вязкости.

Если из внешних сил на движущуюся жидкость действует только сила тяжести с ускорением g , представляется целесообразным выбрать систему координат так: плоскость xy расположить горизонтально, а ось z направить вертикально вверх. Тогда уравнения Эйлера примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Уравнения Эйлера (2.11) совместно с уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости (2.8) образуют систему

четырёх уравнений, содержащую четыре неизвестных: v_x , v_y , v_z , p . В случае сжимаемой жидкости (газа) к уравнениям Эйлера и неразрывности необходимо добавить еще уравнение, дающее связь между давлением и плотностью жидкости

$$\rho = f(p).$$

Интегрируя полученную замкнутую систему уравнений при заданных граничных и начальных условиях, можно в принципе определить вектор скорости и давление в любой точке потока и в любой момент времени.

Граничные и начальные условия. Граничные условия при обтекании тела задают распределение скоростей вдали от тела, где не сказывается его искажающее влияние на поток, и на поверхности тела. Согласно принципу относительности движения, известному из механики, задача о движении тела в неподвижной жидкости (например, самолета, корабля) в динамическом отношении тождественна задаче об обтекании неподвижного тела равномерным потоком. Поэтому гидромеханика широко использует принцип «обращения движения». Граничные условия для обращенной задачи о движении тела в неподвижной жидкости обычно задаются следующим образом:

- условия «на бесконечности». В удалении от обтекаемого тела задаются давление p_∞ , направление и скорость v_∞ обтекающего потока;

- условие «непроницаемости». Пусть n – нормаль к поверхности обтекаемого тела. Если жидкость через поверхность не протекает, то нормальная составляющая скорости равна нулю $v_n = 0$, и скорость течения на поверхности тела может быть только касательной к ней.

Начальные условия характеризуют состояние потока в некоторый конкретный момент. При установившемся движении скорость и давление в данной точке не меняются во времени и начальные условия не задаются.

В общем случае пространственного (трехмерного) потока, когда скорость изменяется в направлении всех трех координатных осей, интегрирование системы уравнений движения и неразрывности встречает чрезвычайные математические трудности. Поэтому задача решается при внесении различных упрощающих предположений. Наиболее полно разработана теория одномерного движения. Для несжимаемой жидкости эта теория составляет основу гидравлики.

При одномерном течении граничные условия задают величины скорости и давления на сечениях, ограничивающих заданный участок струйки (потока).

2.2.4. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Вывод уравнения. Пусть при установившемся движении идеальной жидкости из внешних сил на жидкость действует только сила тяжести. Такое движение описывается системой уравнений (2.12).

Проинтегрируем эту систему для некоторой линии тока. Для этого умножим уравнения (2.12) соответственно на dx, dy, dz и сложим. Получим

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz = \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \right) - g dz. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Величины dx, dy, dz мы рассматриваем как проекции элемента линии тока ds на координатные оси. Поэтому

$$\frac{dv_x}{dt} dx = dv_x \frac{dx}{dt} = v_x dv_x = d \left(\frac{v_x^2}{2} \right),$$

и точно так же

$$\frac{dv_y}{dt} dy = d\left(\frac{v_y^2}{2}\right), \quad \frac{dv_z}{dt} dz = d\left(\frac{v_z^2}{2}\right).$$

Поэтому левая часть уравнения (2.13) есть

$$d\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Сумма в скобках, стоящая в правой части уравнения (2.13) есть полный дифференциал давления p . Выражение (2.13) приобретает вид

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0. \quad (2.14)$$

Рассмотрим движение несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$). Проинтегрируем уравнение (2.14) вдоль элементарной струйки (в направлении вектора скорости v). Получим уравнение Бернулли (1738)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (2.15)$$

Разделив члены уравнения (2.15) на g , получим другую, более употребительную форму записи уравнения Бернулли

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}. \quad (2.16)$$

Из уравнения Бернулли следует, что при возрастании скорости в струйке уменьшается давление и наоборот.

2.2.5. Геометрическая и энергетическая интерпретация

Члены уравнения (2.16) имеют размерность длины, что позволяет выяснить их геометрический смысл как некоторых высот. Запишем уравнение Бернулли для двух сечений струйки (рис. 2.6) в форме

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2. \quad (2.17)$$

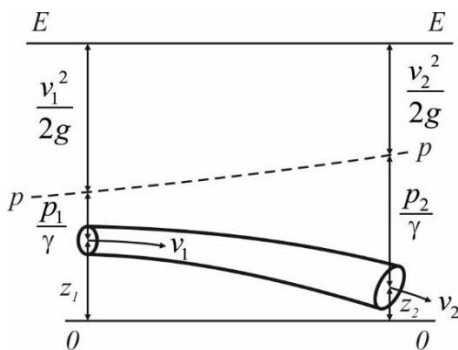


Рис. 2.6. Струйка потока

Величины z_1 и z_2 есть геометрические высоты расположения сечений над некоторой фиксированной горизонтальной плоскостью сравнения $O-O$ (рис. 2.6).

Величины $\frac{p_1}{\gamma}$ и $\frac{p_2}{\gamma}$ согласно уравнению гидростатики есть высоты столбов жидкости, создающих своим весом давления p_1 и p_2 . Они называются пьезометрическими высотами.

Линия $P-P$, проведенная на высоте $z + \frac{p}{\gamma}$ над плоскостью сравнения, называется пьезометрической линией.

Наконец, величины $\frac{v_1^2}{2g}$ и $\frac{v_2^2}{2g}$ называют скоростными напорами. При движении идеальной жидкости сумма геометрической, пьезометрической высот и скоростного напора остается, согласно уравнению Бернулли, постоянной величиной вдоль элементарной струйки. Поэтому гидродинамическая линия $E - E$, проведенная на высоте $\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$ над плоскостью сравнения, расположена горизонтально.

Уравнение Бернулли легко вывести, пользуясь энергетическим подходом. Энергия частицы жидкости массы m , перемещающейся вдоль элементарной струйки, складывается из кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальной. В свою очередь потенциальная энергия состоит из энергии положения mgz и энергии давления $mg \frac{p}{\gamma}$. (Смысл этого последнего члена легко пояснить следующими соображениями. Если к данному сечению струйки, где давление равно p , присоединить пьезометр, то частица с массой m поднимется в нем на высоту $\frac{p}{\gamma}$, совершив против силы тяжести работу $mg \frac{p}{\gamma}$. Эта работа и есть мера потенциальной энергии давления.) Суммарная механическая энергия частицы равна

$$\frac{mv^2}{2} + mg \frac{p}{\gamma} + mgz \text{ [Дж]}.$$

Удельная, т.е. отнесенная к частице единичного веса, механическая энергия может быть получена из последнего выражения делением на mg

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \left[\frac{\text{Дж}}{\text{Н}(\text{м})} \right].$$

При движении идеальной жидкости механическая энергия не теряется – вязкое трение, которое в реальной жидкости переводит механическую энергию в теплоту, отсутствует. Поэтому удельная механическая энергия остается постоянной вдоль элементарной струйки, что приводит снова к уравнению (2.16).

Рассмотренный вывод показывает, что уравнение Бернулли выражает собой закон сохранения и взаимного преобразования механической энергии при движении идеальной жидкости. В этом смысле оно имеет фундаментальное значение для гидромеханики; уравнения (2.14) и (2.15) часто называют уравнениями энергии.

Измерение полного напора. Трубка Пито. Скоростной напор измеряется с помощью трубки Пито (рис. 7, а), представляющей собой трубку D , изогнутую открытым концом навстречу потоку. У открытого конца трубки обтекающая его струйка раздваивается, скорость здесь равна нулю. Кинетическая энергия струйки в этом сечении полностью переходит в приращение потенциальной энергии давления. Применяя уравнение Бернулли (2.17) к двум сечениям струйки, одно из которых относится к невозмущенному потоку с параметрами v и p , а второе – к входу в трубку Пито, имеем

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma},$$

отсюда разность высот столбов жидкости, уравновешивающих разность давления p_0 и p , равна

$$\frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{v^2}{2g}. \quad (2.18)$$

Превышение давления p_0 над статическим давлением p называется динамическим давлением потока p_∂ . Очевидно, что оно равно

$$p_\partial = p_0 - p = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (2.19)$$

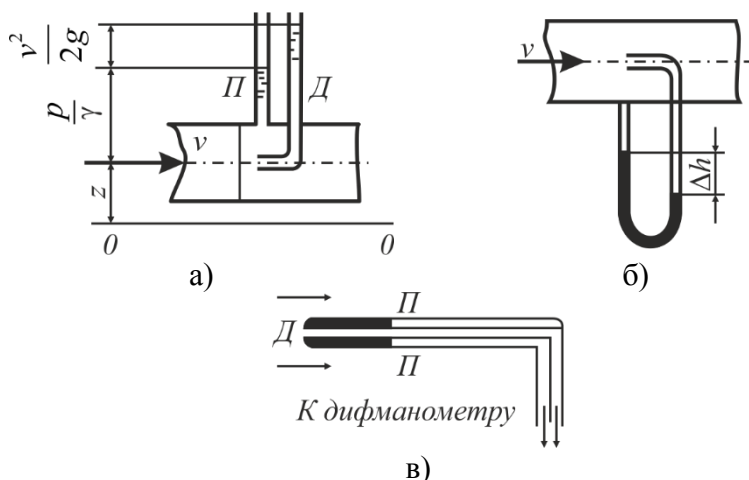


Рис. 2.7. Способы измерения полного напора

Таким образом, скоростной напор равен разности высот жидкости в трубке Пито и пьезометре, установленном в том же сечении (разумеется, предполагают, что возмущения, которые вносит в поток трубка Пито, оказывают пренебрежимо малое влияние на давление, измеряемое пьезометром Π).

Трубка Пито широко применяется для измерения скоростей в потоке и, наоборот, для определения скорости тела (корабля, самолета) относительно неподвижной жидкости. Разность динамического и статического давления измеряют обычно с помощью дифференциального манометра, присоединенного к трубке Пито и пьезометру и заполненного жидкостью большего удельного веса (рис. 2.7, б). Для измерения динамического давления,

а следовательно, и скорости потока часто используется трубка Пито-Прандтля (рис. 2.7, в), представляющая собой комбинацию датчиков динамического давления (трубка D) и статического давления (отверстия P).

2.2.6. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости

Уравнение Бернулли для струйки. Основным уравнением гидродинамики является уравнение Д. Бернулли, устанавливающее связь между давлением p , Па в жидкости и скоростью ее движения U , м/с.

Уравнение Д. Бернулли, записанное для двух произвольно взятых сечений элементарной струйки (скорости в различных точках сечения элементарной струйки одинаковы, а сама струйка с течением времени не изменяет своей формы) идеальной несжимаемой жидкости имеет вид

$$z_1 + \frac{p}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}, \quad (2.20)$$

где z – геометрическая высота, или геометрический напор, м;

$\frac{p}{\gamma}$ – пьезометрическая высота, или пьезометрический напор, м;

$\frac{U^2}{2g}$ – скоростная высота, или скоростной напор, м.

Термин высота применяется при геометрической, а напор – при энергетической интерпретациях уравнения Д. Бернулли. Трехчлен вида

$$Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = H \quad (2.21)$$

называется *полным напором*, под которым понимают удельную энергию жидкости, отнесенную к единице силы тяжести. Первые два члена представляют собой удельную потенциальную энергию жидкости, а третий член кинетическую энергию.

Энергетический смысл уравнения Д. Бернулли заключается в том, что для элементарной струйки идеальной жидкости полный напор, т.е. сумма геометрического, пьезометрического и скоростного напоров, есть величина постоянная во всех ее сечениях, т.е.

$$Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = H = const. \quad (2.22)$$

Таким образом, уравнение Д. Бернулли выражает закон сохранения механической энергии движущейся жидкости, которая может иметь три формы: энергия положения, энергия давления и кинетическая энергия.

С геометрической точки зрения уравнение Д. Бернулли может быть сформулировано так: для элементарной струйки идеальной жидкости сумма трех высот – геометрической, пьезометрической, скоростной – есть величина постоянная вдоль струйки. При этом члены уравнения Д. Бернулли имеют следующий физический смысл:

Z – расстояние от произвольно выбранной горизонтальной плоскости сравнения до центра тяжести рассматриваемого сечения объекта (например, трубопровода), м;

$\frac{P}{\gamma}$ – пьезометрическая высота такого столба жидкости, который у своего основания создает давление p , равное давлению в рассматриваемом сечении элементарной струйки, м;

$\frac{U^2}{2g}$ – высота, с которой должно упасть в пустоте тело, чтобы приобрести скорость U , м/с.

При геометрической интерпретации уравнения Д. Бернулли вводится понятие пьезометрической и напорной линии.

Линия, соединяющая сумму отрезков $\left(Z + \frac{P}{\gamma} \right)$ называется *пъезометрической линией*. Линия, соединяющая сумму отрезков $\left(Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right)$ называется *напорной линией* (для идеальной жидкости это горизонтальная линия).

Если вместо идеальной жидкости рассматривать жидкость реальную (вязкую), в которой при движении происходят потери на сопротивления, то уравнение Д. Бернулли для двух сечений элементарной струйки реальной жидкости примет вид

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta h_w, \quad (2.23)$$

где Δh_w , м – потеря напора между рассматриваемыми сечениями струйки 1 и 2, включающая в себя потери напора на преодоление сил трения (h_{mp}) и потери напора на местных сопротивлениях (h_m), т.е. $\Delta h_w = h_{mp} + h_m$.

При переходе от элементарной струйки к потоку реальной (вязкой) жидкости, имеющему конечные размеры и ограниченному стенками, необходимо учесть неравномерность распределения скоростей по сечению, а также потери энергии. Уравнение Д. Бернулли для потока реальной жидкости имеет вид

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_w, \quad (2.24)$$

где α – коэффициент Кориолиса или коэффициент кинетической энергии;

V_1, V_2 – соответственно средние значения скоростей потока в сечениях 1 и 2, м/с.

Коэффициент Кориолиса представляет собой отношение действительной кинетической энергии потока в данном сечении

к величине кинетической энергии, вычисленной по средней скорости, и зависит от степени неравномерности распределения скоростей в поперечном сечении потока. Для ламинарного режима $\alpha = 2$, а для турбулентного режима $\alpha \approx 1,1$.

Член Δh_w в уравнении (2.24) учитывает потери напора на преодоление сопротивлений движению жидкости между двумя сечениями потока.

Таким образом, уравнение Д. Бернулли свидетельствует о том, что по длине потока реальной жидкостью полный напор уменьшается на величину потерь. Кроме того, по длине потока с увеличением скорости уменьшается давление (пьезометрический напор) и наоборот, с увеличением давления скорости уменьшаются.

Необходимо помнить, что существует три основных условия применимости уравнения Д. Бернулли:

- 1) движение жидкости должно быть установившимся;
- 2) расход между двумя рассматриваемыми сечениями должен быть постоянным ($Q = const$);
- 3) движение жидкости в сечениях должно быть параллельно-струйным.

Уравнение Д. Бернулли может быть изображено графически. Для этого по оси абсцисс откладывают расстояния между сечениями трубопровода, а по оси ординат – значения составляющих напора для этих же сечений. Обычно, чтобы иметь полную характеристику трубопровода, строят пьезометрическую и напорную линии.

Расстояние от пьезометрической линии до плоскости сравнения указывает в каждом сечении потока величину пьезометрического напора, а расстояния от линии полного напора до плоскости сравнения дают значения гидравлического напора в соответствующих сечениях трубопровода.

График полного напора является нисходящей линией, так как часть напора Δh_w затрачивается на преодоление сопротивлений движению. Пьезометрическая линия может понижаться и повышаться.

При равномерном движении, т.е. когда средняя скорость на рассматриваемом участке во всех сечениях одинакова, напорные пьезометрические линии представляют собой взаимно параллельные прямые.

Уравнение Бернулли для потока. Применяя уравнение Бернулли к струйке реальной жидкости, необходимо учесть, что полная механическая энергия не остается постоянной вдоль струйки: она постепенно переводится в теплоту процессами вязкого трения. Эту потерю механической энергии на участке струйки между двумя сечениями учитывают введением в правую часть уравнения (2.17) слагаемого h_w – потери напора (потери удельной механической энергии). При наличии потерь гидродинамическая линия $E - E$ на диаграмме уравнения Бернулли (в соответствии с рисунком 2.6) не горизонтальна: она понижается вниз по течению. Отношение потерь напора h_w к длине струйки l называется гидравлическим уклоном

$$I = \frac{h_w}{l}. \quad (2.25)$$

Переходя к потоку жидкости (такому, как в трубе или канале), естественно для расчета скоростного напора использовать среднюю скорость v_{cp} . Для определения средней скорости по скоростям отдельных струек используется формула (2.3). Однако, если скорости струек в сечении неодинаковы (например, замедляются у стенок трубы вследствие трения), то расчет кинетической энергии по средней скорости v_{cp} приведет к заниженным результатам по сравнению с расчетом суммарной кинетической энергии отдельных струек. (Это происходит потому,

что скорость входит в член, учитывающий кинетическую энергию, в степени выше первой.) Такое затруднение преодолевают введением в кинетическую энергию, вычисленную по средней скорости, поправочного коэффициента $\alpha > 1$. Очевидно, что коэффициент неравномерности скоростей α численно равен отношению суммарной кинетической энергии струек к энергии, вычисленной по средней скорости потока. В итоге уравнение Бернулли для вязкой жидкости приобретает вид

$$\frac{\alpha v_{cp1}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha v_{cp2}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_w. \quad (2.26)$$

В дальнейшем среднюю скорость будем обозначать через v без индексов.

Величина коэффициента α возрастает с ростом поперечной неравномерности скоростей в сечении трубы. Для ламинарного течения в круглой трубе $\alpha = 2$, для турбулентного, в котором скорости мало меняются по сечению трубы, по опытным данным, $\alpha = 1,05 \dots 1,1$.

Рассмотрим вопрос о выборе сечений потока, к которым можно применять уравнение Бернулли. Очевидно, что эти сечения нельзя выбирать в местах резкого поворота потока, так как из-за действия центробежной силы инерции в таком сечении давления распределены неравномерно; в пьезометре, присоединенном у вогнутой стенки поворота, высота столба жидкости окажется больше, чем у выпуклой стенки. Уравнение Бернулли можно применять только к тем сечениям потока, в которых давление подчиняется закону гидростатики (1.9).

Нельзя применять уравнение Бернулли и к сечениям, в которых резко возрастает поперечная неравномерность скоростей, например, в зонах расширения потока после диафрагмы или в месте соединения труб разных диаметров, где появляются противотоки и вихревые области. В таких сечениях невозможно достаточно точно определить коэффициент неравномерности скоростей α .

2.2.7. Истечение жидкости через отверстия

Рассмотрим истечение жидкости через небольшое отверстие с острыми кромками (рис. 2.8).

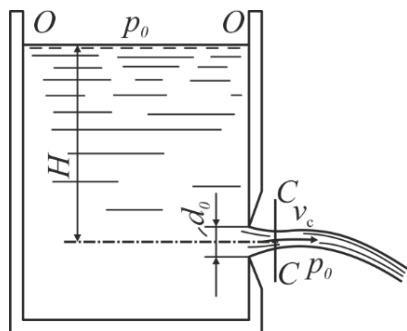


Рис. 2.8. Истечение жидкости из отверстия

Опыт показывает, что струя имеет меньший диаметр, чем отверстие. Это сжатие струи происходит главным образом вследствие действия центробежных сил на частицы, движущиеся из бака к отверстию по криволинейным траекториям. На расстоянии от выходной кромки порядка $\frac{D_0}{2}$, где D_0 – диаметр отверстия, сжатие прекращается и далее диаметр струи D_c можно считать неизменным. Отношение площадей сжатого сечения струи F_c и отверстия F_0 называют коэффициентом сжатия струи $\varepsilon = \frac{F_c}{F_0}$.

Определим скорость струи в сжатом сечении $C-C$. Для этого применим к струйке, начинающейся от поверхности жидкости в баке (сечение $O-O$), уравнение Бернулли (2.17)

$$\frac{p_0}{\gamma} + H = \frac{v_c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}. \quad (2.27)$$

Мы пренебрегли скоростным напором $\frac{v_0^2}{2g}$ ввиду малой скорости падения уровня в сравнении со скоростью истечения; жидкость считаем идеальной.

Если $p = p_0$, то $\frac{v_c^2}{2g} = H$, откуда скорость струи определяется формулой Торричелли (1641)

$$v_c = \sqrt{2gH}. \quad (2.28)$$

Как видим, скорость истечения идеальной жидкости равна скорости свободного падения тела в пустоте с высоты H . Если давление над поверхностью в баке и в пространстве, в которое вытекает струя, неодинаково, то из уравнения (2.27) следует

$$\frac{v_c^2}{2g} = \frac{(p_0 + \gamma H) - p}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma},$$

откуда

$$v_c = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \quad (2.29)$$

где Δp – разность давлений на уровне оси отверстия.

Из-за вязкого трения скорость струи оказывается несколько меньше теоретической. Влияние трения учитывают введением в формулу (2.28) коэффициента скорости истечения $\varphi < 1$, так что

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (2.30)$$

По опытным данным, в автомобильной области истечения $\varphi \approx 0,96$, т.е. вязкое трение снижает скорость истечения на 4 %.

При малых перепадах давления Δp (порядка нескольких процентов от исходного давления p_0) формулой (2.30) допустимо пользоваться также для расчета скорости истечения газов. В этом случае неучет их сжимаемости не приводит к существенным ошибкам. При значительных перепадах давления скорость истечения определяют по формулам газодинамики.

Пример. Воздух вытекает из баллона в атмосферу. Процесс истечения адиабатный. Разность плотностей в баллоне и атмосфере составляет 2 %. Определить соответствующую скорость истечения, пренебрегая сжимаемостью воздуха.

Для адиабатного процесса давление связано с плотностью соотношением $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$, где k – показатель адиабаты. Дифференцируя, имеем

$$dp = \text{const } k \rho^{k-1} d\rho = \frac{k p}{\rho} d\rho.$$

Для малых изменений плотности допустимо считать дифференциалы равными их приращениям, т.е.

$$\Delta p \approx k p_0 \frac{\Delta \rho}{\rho_0},$$

и, принимая для атмосферы $p_0 = 1$ бар, $\rho_0 = 1,52$ кг/м³, имеем

$$v_c = \varphi \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = 0,96 \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^5 \cdot 0,02}{1,25}} = 68 \text{ м/с}.$$

Приведенный пример показывает, что даже при сравнительно большой скорости истечения изменения плотности газа незначительны и воздух можно рассматривать как несжимаемую жидкость.

Расход Q в струе равен

$$Q = v_c F_c = \varepsilon \varphi F_0 \sqrt{2gH}.$$

Произведение коэффициентов сжатия струи ε и скорости истечения φ называют *коэффициентом расхода* μ (не путать с динамическим коэффициентом вязкости!), $\mu = \varepsilon\varphi$. Расход струи определяется формулой

$$Q = \mu F_0 \sqrt{2gH} = \mu F_0 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (2.31)$$

В автомобильной области истечения коэффициент расхода круглого отверстия с острыми кромками равен примерно 0,61.

2.2.8. Истечение жидкости через насадки. Расходомеры

Насадками называются короткие патрубки (длина порядка 3...5 диаметров), присоединенные к отверстию (рис. 2.9). Жидкость вытекает через все выходное сечение насадка.

Рассмотрим истечение через внешний цилиндрический насадок (рис. 2.9, а). У входа в насадок (сечение $C-C$) струя имеет меньший диаметр, чем на выходе, поэтому скорость v_c здесь больше, чем выходная скорость $v_{вых}$.

В соответствии с уравнением Бернулли давление в сжатом сечении оказывается меньше, чем на выходе из насадки. Появление вакуума в сжатом сечении равносильно увеличению напора H , что приводит к увеличению расхода по сравнению с истечением через отверстие того же диаметра. Опыт показывает, что коэффициент расхода μ в формуле (2.31) для внешнего цилиндрического насадка равен примерно 0,82.

При истечении через конический расходящийся насадок (рис. 2.9, б) особенно велика разность скоростей v_c и $v_{вых}$, поэтому вакуум в сжатом сечении оказывается более глубоким, чем в цилиндрическом насадке. Конические расходящиеся насадки используются для уменьшения скорости истечения.

Конический сходящийся (рису. 2.9, в) и коноидальный (рис. 2.9, г) насадки обеспечивают возрастание скорости истечения (коэффициент скорости коноидального насадка приближается к единице) и увеличивают компактность струи.

Расходомер. Эффект уменьшения давления при возрастании скорости течения используется для измерения скорости и расхода потока. Рассмотрим расходомер Вентури, представляющий собой трубу с плавным сужением и последующим уширением (рис. 2.10, а).

Перед сужением (сечение 1-1) и в наименьшем сечении трубы 2-2 установлены пьезометры.

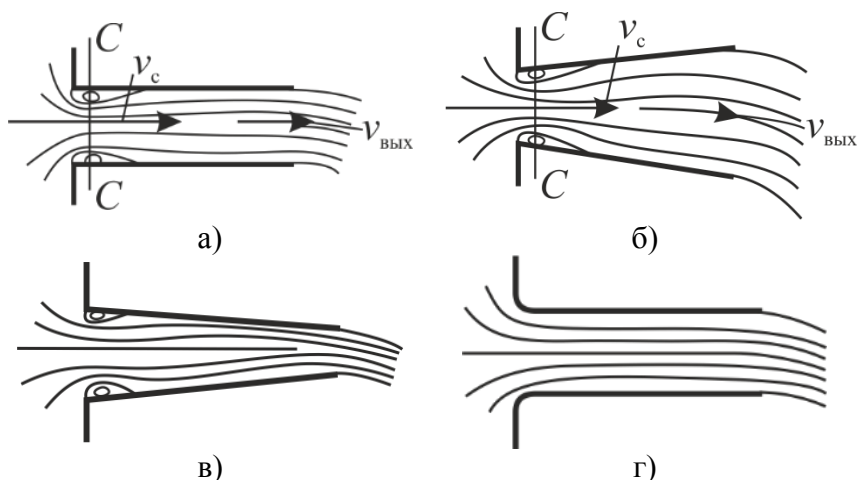


Рис. 2.9. Истечение жидкости через различные насадки

Применим уравнение Бернулли (2.16) к выбранным сечениям потока несжимаемой жидкости и пренебрежем поначалу потерями напора между ними. Имеем

$$\frac{\alpha v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{\alpha v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}.$$

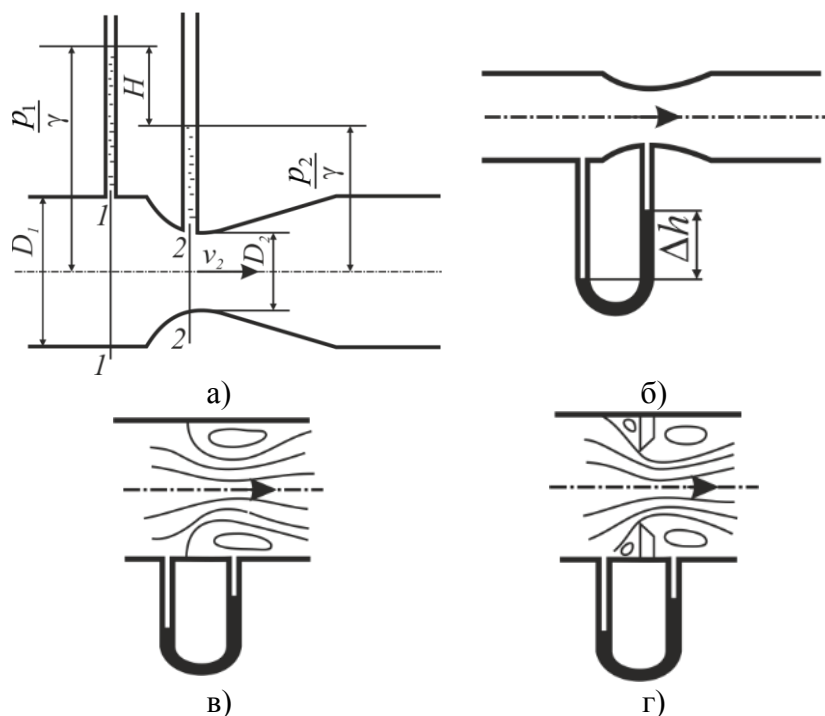


Рис. 2.10. Эффект уменьшения давления при возрастании скорости течения

Уравнение неразрывности $vF = \text{const}$ позволяет выразить v_1 через v_2

$$v_1 = v_2 \frac{F_2}{F_1} = v_2 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2.$$

Подставляя значение v_1 в уравнение Бернулли, имеем

$$\frac{\alpha v_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 \right] = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = H,$$

где H – разность уровней жидкости в пьезометрах. Отсюда расход, вычисляемый по средней скорости в сжатом сечении, равен

$$Q = v_2 F_2 = F_2 \sqrt{\frac{2gH}{\alpha \left[1 - \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 \right]}}.$$

При практическом использовании расходомеров величину расхода определяют по упрощенной формуле

$$Q = v_2 F_2 = K F_2 \sqrt{2gH}, \quad (2.32)$$

где K – поправочный коэффициент, мало отличающийся от единицы и учитывающий соотношение диаметров и потери напора от первого до второго сечения. Величину коэффициента K определяют экспериментально; сведения по величинам K для различных расходомеров содержатся в гидравлических справочниках.

Разность давлений в сечениях расходомера Δp определяют обычно с помощью дифманометра (рис. 2.10, б), при этом расход вычисляется по формуле

$$Q = K F_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (2.33)$$

Аналогичен расходомеру Вентури принцип действия расходомерного сопла (рис. 2.10, в) и диафрагмы (рис. 2.10, г), где струя после сжатого сечения не имеет твердых границ. Расход определяется с помощью этих устройств также по формуле (2.33), причем в качестве F_2 используют площадь проходного сечения сопла или диафрагмы. Из-за появления вихревых областей потери напора в них больше, чем в расходомере Вентури, соответственно отличаются и значения коэффициента K .

При достаточно большой скорости течения падение давления в сжатом сечении расходомера может оказаться столь значительным, что давление здесь оказывается ниже давления паров, насыщающих пространство при данной температуре. При этом начинается холодное кипение жидкости, или кавитация. В

жидкости образуются пузырьки, заполненные парами. Перемещаясь вместе с потоком, пузырьки при его расширении попадают в область повышенного давления. Здесь заполняющий их пар конденсируется, пузырьки захлопываются – окружающая жидкость с большой скоростью их заполняет. В заключительной фазе захлопывания пузырька кинетическая энергия частиц жидкости переходит в потенциальную энергию давления, что приводит к значительному местному повышению давления. Если пузырек захлопывается на твердой стенке трубы, такие повышения давления могут вызывать эрозию материала стенки.

Кавитация наблюдается также в проточных частях гидротурбин, насосов и на судовых гребных винтах. Возрастание скорости вращения, желательное для увеличения мощности машины, приводит к столь большим скоростям обтекания, что давление в отдельных местах потока падает ниже давления парообразования. Кроме эрозии материала кавитация порождает нежелательные вибрации, шум и падение мощности.

2.2.9. Уравнение количества движения

Если энергетические характеристики потока исследуются с помощью уравнения Бернулли, то для определения его силовых и временных характеристик используется уравнение количества движения. Оно выводится из теоремы механики об изменении количества движения, которая формулируется так: при движении массы m изменение во времени ее количества движения mv равно результирующей f внешних сил, действующих на эту массу

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = f. \quad (2.34)$$

Количество движения, или импульс, mv является вектором.

При установившемся движении некоторой массы жидкости количество движения может изменяться из-за перемещения ее

границ. Рассмотрим объем жидкости, заключенный между двумя сечениями струйки (рис. 2.11). Торцевые поверхности этого объема перемещаются вместе с жидкостью и через промежуток времени Δt занимают положение, показанное на рис. 2.11 пунктиром.

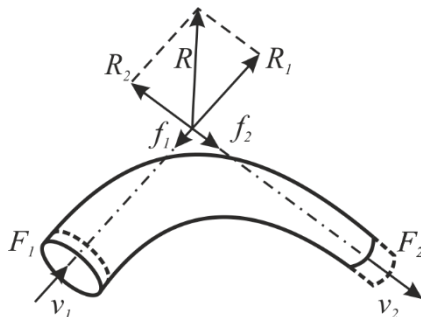


Рис. 2.11. Изменение движения жидкости за время Δt

За время Δt внутрь выбранного объема втекает масса жидкости $\rho_1 F_1 v_1 \Delta t$ и из него вытекает масса $\rho_2 F_2 v_2 \Delta t$, соответственно поступающее количество движения равно

$$(mv)_1 = \rho_1 F_1 \omega_1 v_1 \Delta t,$$

а теряемое

$$(mv)_2 = \rho_2 F_2 \omega_2 v_2 \Delta t.$$

Согласно уравнению (2.34) векторное приращение этих количеств движения, отнесенное ко времени, равно результирующей внешних сил, действующих на выделенный объем

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \rho_1 F_1 \omega_1 v_1 - \rho_2 F_2 \omega_2 v_2 = m(v_1 - v_2) = f. \quad (2.35)$$

Выражение (2.35) называется уравнением количества движения в гидродинамической форме; оно получено Эйлером (1757). Поскольку внешние силы уравновешиваются реакцией потока, уравнение (2.35) позволяет определить усилие, с которым поток действует на ограничивающие его поверхности, если количество движения меняется только за счет скорости

($m = const$). В сущности, при постоянной массе исходные уравнения (2.10) и (2.34), использованные для вывода системы дифференциальных уравнений динамики идеальной жидкости и уравнения количества движения одномерного потока, идентичны. Поэтому систему уравнений Эйлера (2.11) также называют «уравнениями импульса».

Давление струи на преграду. Рассмотрим задачу о натекании струи под углом на плоскую стенку (рис. 2.12). Выберем сечения потока, показанные на рисунке пунктирными линиями.

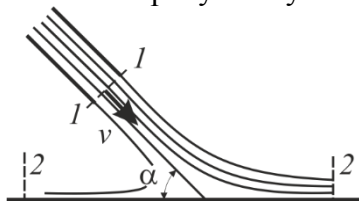


Рис. 2.12. Натекание струи на плоскую стенку

Разложим члены уравнения количества движения (2.35) на компоненты, касательные к поверхности (индекс t) и нормальные к ней (индекс n)

$$m(v_{1t} - v_{2t}) = f_t, \quad m(v_{1n} - v_{2n}) = f_n.$$

Если пренебречь вязким трением, то в направлении касательной к поверхности действующая на струю сила равна нулю, т.е. $f_t = 0$. В направлении нормали сила воздействия стенки на струю (очевидно, равная по величине и противоположная по направлению силе давления струи на стенку) равна

$$f_n = m(v_{1n} - v_{2n}) = \rho_1 F_1 \omega_1 (\omega_{1n} - 0) = \rho_1 F_1 \omega_1^2 \sin \alpha, \quad (2.36)$$

где F_1 – площадь исходного сечения струи 1-1.

Реакция вытекающей струи. Рассмотрим истечение струи из бака под действием перепада давления Δp . Поскольку

в баке жидкость можно считать неподвижной $v_1 = 0$, то переносимое струей количество движения равно $\rho F_c v_c$, где F_c и v_c – площадь сечения и скорость струи. Выражая скорость струи через перепад давления по формуле (2.30) и подставляя в уравнение (2.35), получим силу реакции струи (коэффициент скорости истечения φ считаем равным единице)

$$R = \frac{2\rho F_c \Delta p}{\rho} = 2F_c \Delta p. \quad (2.37)$$

Таким образом, реакция струи, направленная противоположно скорости истечения, равна удвоенной величине силы статического давления на площадь сечения струи.

Сила давления потока на стенки криволинейного канала. При движении по криволинейному каналу (рис. 2.11) на его стенки действуют со стороны жидкости силы давления на торцевые сечения F_1 и F_2 и сила инерции потока, определяемая по уравнению количества движения (2.35).

Изменение количества движения во входном сечении равно $\rho_1 F_1 v_1^2$; оно уравновешивается силой давления стенок канала на поток f_1 . В свою очередь, эта сила равна по величине и противоположна по направлению реакции потока, которая вместе с силой статического давления дает величину

$$R_1 = p_1 F_1 + \rho F_1 v_1^2. \quad (2.38)$$

Изменение количества движения в выходном сечении уравновешивается силой $f_2 = \rho_2 F_2 v_2^2$ сила реакции потока совместно с силой статического давления на сечение 2 составляет величину

$$R_2 = p_2 F_2 + \rho F_2 v_2^2. \quad (2.39)$$

Полная сила R воздействия потока на стенки канала равна геометрической сумме сил R_1 и R_2

$$R = R_1 + R_2. \quad (2.40)$$

Приведенный вывод составляет основу раздела о силовом взаимодействии потока со стенками канала в теории турбомашин.

2.2.10. Уравнение моментов количества движения

Рассмотрим движение жидкости в рабочем колесе центробежного насоса (рис. 2.13). Пусть внутренний радиус колеса равен r_1 внешний r_2 . Абсолютная скорость жидкости на входе в межлопаточный канал равна c_1 , на выходе c_2 . Окружные скорости колеса на входе u_1 и на выходе u_2 . Очевидно, что $u_1 = \omega r_1$, $u_2 = \omega r_2$, где ω – угловая скорость колеса. Скорость движения жидкости относительно колеса равна векторной разности абсолютной скорости c и окружной u . Обозначим ее на входе в колесо через ω_1 и на выходе через ω_2 . Угол, образованный векторами скорости c_1 и u_1 на входе в колесо обозначим через α_1 («угол входа»), между векторами c_2 и u_2 на выходе из колеса – через α_2 .

Применим к частице с массой m , движущейся через колесо вдоль лопатки, теорему механики об изменении моментов количества движения: изменение во времени момента количества движения относительно оси вращения колеса $m\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ равно результирующему моменту внешних сил

$$\frac{\Delta(m\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\Delta t} = M. \quad (2.41)$$

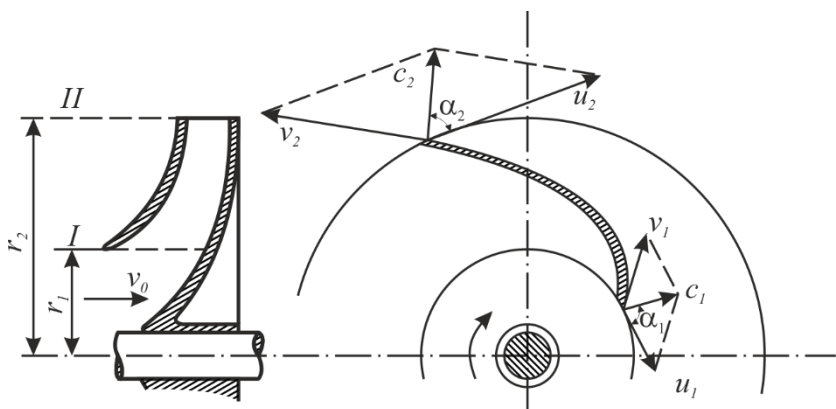


Рис. 2.13. Схема движения колеса с лопатками

На выходе из колеса момент количества движения равен произведению количества движения mc_2 на плечо, равное $r_2 \cos \alpha_2$, т.е. $mc_2 r_2 \cos \alpha_2$; на входе в колесо этот момент равен $mc_1 r_1 \cos \alpha_1$. Подставляя эти величины в уравнение (2.41), получим уравнение моментов количества движения Эйлера (1757)

$$\frac{m(c_2 r_2 \cos \alpha_2 - c_1 r_1 \cos \alpha_1)}{\Delta t} = M. \quad (2.42)$$

Уравнение (2.42) одинаково справедливо как для лопастного насоса, так и для гидравлической турбины. В последнем случае поток входит в рабочее колесо через сечение II и выходит сечением I , изменяя свой момент количества движения и передавая крутящий момент M лопаткам колеса. Для турбины векторы скорости c_2 и c_1 имеют противоположное направление.

Отношение $\frac{m}{\Delta t}$ в уравнении (2.42) представляет секундный массовый расход ρQ с размерностью кг/с.

Умножая уравнение (2.42) на угловую скорость колеса ω , получим в правой части полезную мощность насоса (или турбины)

$$\rho Q \omega (c_2 r_2 \cos \alpha_2 - c_1 r_1 \cos \alpha_1) = M \omega = N.$$

Очевидно, что эта мощность будет наибольшей при $\cos \alpha_1 = 0$, т.е. при $\alpha_1 = 90^\circ$ (для насоса это – радиальный вход потока в рабочее колесо, для турбины – радиальный выход). В этом случае

$$N = \rho Q c_2 u_2 \cos \alpha_2.$$

Уравнение (2.42) имеет особую ценность потому, что крутящий момент здесь получен независимо от каких-либо особенностей потока внутри межлопаточного канала.

3. ПОТЕРИ НАПОРА И ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

3.1. Потери напора. Формулы Вейсбаха и Дарси

Формулы Вейсбаха и Дарси. Величина потерь напора h_v в уравнении Бернулли (3.1) не зависит от выбора плоскости сравнения (т.е. от абсолютной величины членов z). Давление, под которым находится жидкость, также практически не влияет на потери напора, так как вязкость при изменении давления почти не меняется. Поэтому абсолютная величина членов $\frac{p}{\gamma}$ несущественна для определения потерь h_v .

Но скорость потока v имеет к потерям самое непосредственное отношение: возрастание скорости всегда приводит к росту потерь напора, так как при этом увеличиваются градиенты скорости и силы внутреннего трения у стенок потока.

Поэтому принято замерять потери напора в долях скоростного напора $v^2/2g$ по формуле Вейсбаха

$$h_v = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (3.1)$$

где ζ – безразмерный коэффициент сопротивления. Для круглых труб с длиной l и диаметром D потери по длине h_l связанные с трением о стенки трубы, определяют по формуле Дарси

$$h_l = \lambda_{mp} \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}, \quad (3.2)$$

где λ_{mp} – безразмерный гидравлический коэффициент трения. Очевидно, что формула Дарси представляет собой детализацию формулы Вейсбаха, потери по длине предполагаются пропорциональными длине трубы и обратно пропорциональными диаметру.

3.2. Режимы течения вязкой жидкости. Число Рейнольдса

Число Рейнольдса. Опыт показывает, что при движении вязкой жидкости относительно твердой поверхности возможны две качественно отличные формы течения. Условия их существования и взаимного перехода были исследованы Рейнольдсом (1883).

В экспериментах Рейнольдса жидкость вытекала из бака по стеклянной трубе (рис. 3.1), скорость течения регулировалась краном. Чтобы наблюдать перемещение струек, в поток вводился струйка красителя.

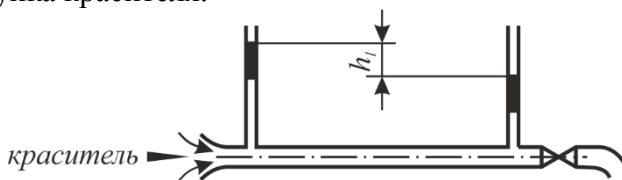


Рис. 3.1. Схема эксперимента Рейнольдса

Опыты показали, что при малых скоростях течения v струйка красителя распространяется вдоль трубы в виде нити, не перемешиваясь с соседними объемами жидкости. Жидкость движется слоями, скорость течения поперек трубы изменяется плавно. Сила трения между слоями определяется формулой Ньютона, такой режим течения был назван *ламинарным*.

Если скорость течения делается больше некоторой критической скорости $v_{кр}$, окрашенная струйка начинает колебаться и размываться. В поперечной эпюре скоростей появляются разрывы, скорости отдельных частиц изменяются при их перемещении; в фиксированной точке потока появляются пульсации скорости и давления. Такое течение называется *турбулентным*. При турбулентном течении обмен количеством движения между слоями, движущимися друг относительно друга, происходит за счет взаимного перемещения уже не отдельных молекул, как при ламинарном течении, а значительно больших по сравнению

с молекулой частиц! Это приводит к возрастанию силы трения между слоями.

Рейнольдс показал, что режим движения в трубе определяется величиной безразмерного соотношения, названного впоследствии числом Рейнольдса Re

$$Re = \frac{vD}{\nu}, \quad (3.3)$$

где D – диаметр трубы, м;

ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Согласно опытным данным, при $Re < 2300$ течение всегда ламинарное, в этом случае возмущения, вносимые в поток жидкости, затухают из-за действия вязкого трения. При больших значениях числа Рейнольдса внесенные в поток возмущения приводят к потере его устойчивости, наблюдается турбулизация.

Значение $Re_{кр} = 2300$ называют *критическим числом Рейнольдса*.

Величину Re можно трактовать как соотношение между силой инерции, опрокидывающей частицу, и силой вязкого трения, препятствующей такому опрокидыванию. Возрастание числа Рейнольдса влечет за собой уменьшение относительного влияния на поток стабилизирующей силы трения у стенки. С достижением $Re_{кр}$ это приводит к потере устойчивости потока, разрывам поперечной эпюры скорости и появлению пульсаций.

Опытные данные по потерям напора. Установка Рейнольдса (рис. 3.1) позволяет исследовать влияние режима течения на потери напора в трубе. В результате измерения потерь, h_f связанных с трением о стенки трубы, при разных скоростях течения было обнаружено, что при ламинарном режиме потери напора пропорциональны скорости в первой степени, а при турбулентном – в степени от 1,75 до 2. Для развитого турбулентного движения при больших скоростях потока характерен квадратич-

ный закон сопротивления: $h_l \sim v$. Соответственно при различных режимах течения гидравлический коэффициент трения $\lambda_{тр}$ в формуле Дарси (3.2) зависит от разных факторов.

Зависимость $\lambda_{тр}$ от числа Рейнольдса и относительной шероховатости стенок трубы была исследована экспериментально немецким ученым Никурадзе (1933). Схема опытной установки принципиально не отличалась от прибора Рейнольдса. По измеренным в опытах h_l и v вычислялась величина $\lambda_{тр}$. Шероховатость стенок создавалась наклеиванием на внутреннюю поверхность трубы калиброванного песка, причем диаметр песчинки Δ отождествлялся с высотой выступа шероховатости.

Полученная в экспериментах Никурадзе зависимость представлена графически на рис. 3.2.

$$\lambda_{тр} = f\left(Re, \frac{r}{\Delta}\right), \quad (3.4)$$

где r – радиус трубы, м.

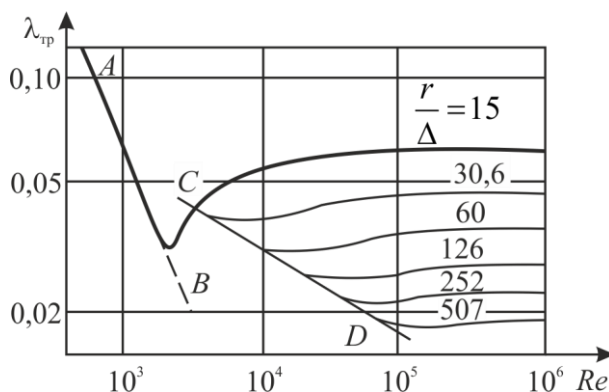


Рис. 3.2. Зависимость коэффициента трения $\lambda_{тр}$ от числа Рейнольдса Re

Величины Re и $\lambda_{тр}$ отложены по осям в логарифмическом масштабе. Анализ графика Никурадзе показывает, что при ма-

лых числах Рейнольдса ($Re < 2300$), ламинарный режим) коэффициент трения не зависит от размеров бугорков шероховатости, величины $\lambda_{тр}$ для разных труб лежат на общей прямой AB .

Это происходит потому, что при ламинарном течении скорость у стенки равна нулю, выступы шероховатости находятся в застойной зоне (рис. 3.3, а) – область гидравлически гладкого сопротивления. В этом случае между турбулентным ядром потока, занимающим большую часть сечения трубы, и стенкой лежит тонкий ламинарный подслой. На рис. 3.3, б его граница показана пунктирной линией. Эпюра скоростей в ламинарном подслое переходит на его границе в эпюру осредненных скоростей турбулентного течения v в ядре потока. Ламинарный подслой играет роль своего рода слоя смазки, покрывающего выступы шероховатости; проникновению в него турбулентных пульсаций препятствует близость стенки. Потери напора в трубе определяются вязким трением внутри подслоя и зависят только от числа Рейнольдса.

С возрастанием скорости (увеличением Re) ламинарный подслой утоняется, отдельные выступы шероховатости вторгаются в турбулентное ядро потока (рис. 3.3, в). При этом меняется сама природа сопротивления. Если при ламинарном течении и в области гладкого сопротивления потери напора были связаны с внутренним трением в жидкости, то при выдвигании бугорков шероховатости из ламинарного подслоя поток обтекает их с образованием за тыловым склоном вихревых областей. Давление на переднем склоне бугорка оказывается больше, чем на заднем, и поток тормозится этими перепадами давления. При наличии остатков ламинарного подслоя, покрывающих мелкие выступы шероховатости, величина коэффициента трения определяется совместным влиянием числа Рейнольдса и относительной шероховатости. Эта область сопротивления называется *доквадратичной*.

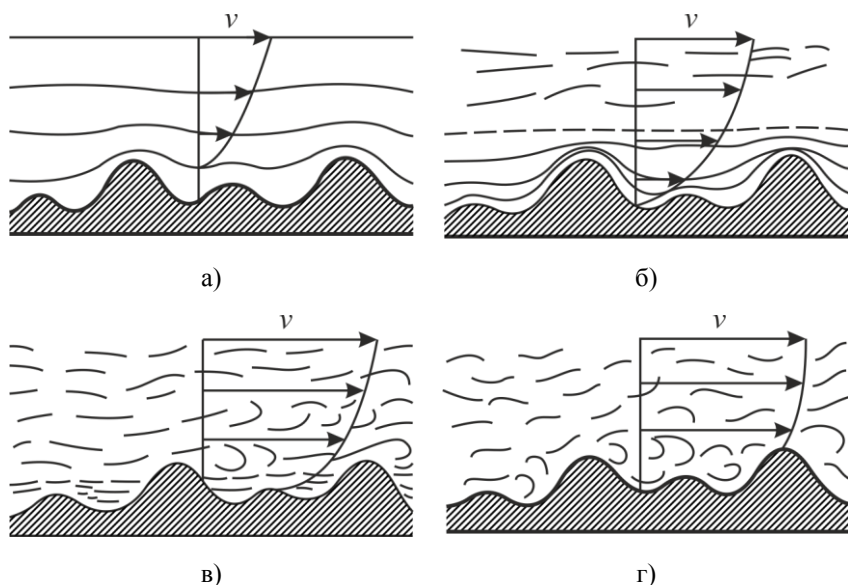


Рис. 3.3. Развитие течения с увеличением числа Re

Наконец, при дальнейшем увеличении Re ламинарный подслои полностью срывается (рис. 3.3, г), λ_{mp} становится функцией только относительной высоты выступов шероховатости. Это – область *квадратичного сопротивления*.

Переход от одной области сопротивления к другой определяется величинами Re и $\frac{r}{\Delta}$. Из рис. 3.2 следует, например, что сопротивление становится квадратичным (λ_{mp} перестает зависеть от Re) примерно при $Re = 100000$.

В технических условиях шероховатость труб отличается от зернистой шероховатости опытов Никурадзе более плавными очертаниями бугорков и неодинаковой их высотой. Средняя высота выступов шероховатости составляет для цельнотянутых стальных труб от 0,02 до 0,1 мм, для бывших в употреблении, незначительно корродированных, – от 0,1 до 0,4 мм. Сопротивление труб с естественной шероховатостью исследовалось в

специальных опытах (например, работы Ф. А. Шевелева). Свод данных, характеризующих течение в различных областях сопротивления, приведена в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Характеристики течения в различных областях сопротивления

Режим течения	Область сопротивления	Закон сопротивления	Пределы области	Формула для λ_{mp}
1	2	3	4	5
Ламинарный	-	$h_l \sim \nu$	$Re < 2300$	$\frac{64}{Re}$
Турбулентный	гидравлически гладкая	$h_l \sim \nu^{1,75}$	$4000 \leq Re < 46 \frac{r}{\Delta}$	$\frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$
Турбулентный	доквадратичная	$h_l \sim \nu^m, m = 1,75..2$	$46 \frac{r}{\Delta} \leq Re < 1120 \frac{r}{\Delta}$	$0,14 \left(1,46 \frac{\Delta}{r} + \frac{100}{Re} \right)^{0,25}$
Турбулентный	квадратичная	$h_l \sim \nu^2$	$Re > 1120 \frac{r}{\Delta}$ ($Re \geq 100\,000$)	$\frac{1}{\left(2 \lg \frac{r}{\Delta} + 1,74 \right)^2}$ (формула Прандтля-Никурадзе)

Ламинарное течение в круглой трубе. Плавное изменение скоростей при ламинарном режиме и удобство задания граничных условий (нулевая скорость у стенки) позволяют исследовать ламинарные потоки аналитически. Рассмотрим, например, ламинарное течение в круглой трубе радиуса r (рис. 3.4). Определим силы, действующие на объем жидкости в форме цилиндра радиусом r и длиной l . В направлении оси трубы на

торцевые поверхности этого цилиндра действуют силы давления $p_1\pi r^2$ и $p_2\pi r^2$, на боковую поверхность – сила $\tau 2\pi r l$ (здесь τ – касательное напряжение трения). Приравнявая эти силы, имеем

$$\tau = \frac{(p_1 - p_2)r}{2l}. \quad (3.5)$$

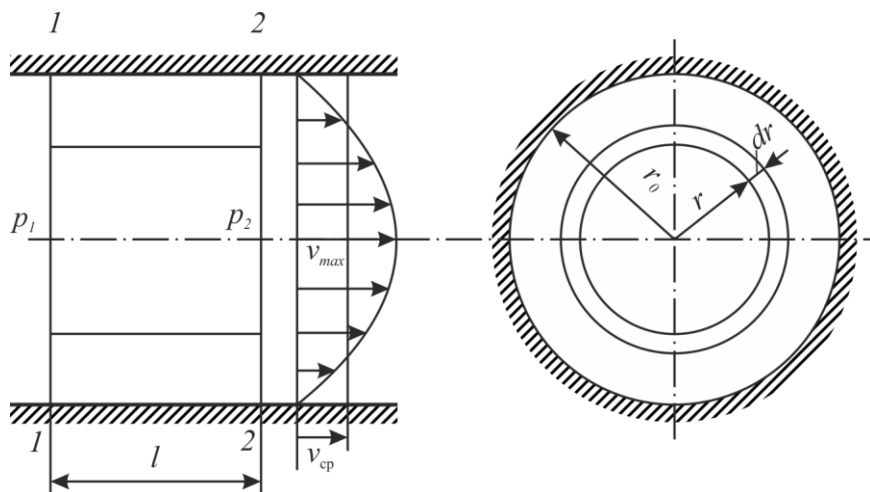


Рис. 3.4. Схема ламинарного движения течения в трубе

Поскольку в круглой трубе течение осесимметрично и скорость измеряется только по радиусу, выражение для напряжения трения (3.5) приобретает вид

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}. \quad (3.6)$$

Два последних выражения дают дифференциальное уравнение, описывающее поперечное распределение скоростей в трубе

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r. \quad (3.7)$$

Интегрируя его, имеем

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu l} + C. \quad (3.8)$$

Постоянную интегрирования C определим из условия на стенке $v=0$ при $r=r_0$. Подставляя в выражение для v , получим формулу Пуазейля (1840)

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r_0^2 - r^2). \quad (3.9)$$

Согласно формуле Пуазейля эпюра скоростей в поперечном сечении трубы имеет форму параболы (рис. 3.4). Максимальная скорость наблюдается при $r=0$, здесь

$$v_{max} = \frac{(p_1 - p_2)r_0^2}{4\mu l}. \quad (3.10)$$

Расход в трубе можно определить интегрированием по сечению трубы элементарных расходов, которые равны произведению скорости (3.10) на площадь элементарного кольца $2\pi r dr$

$$Q = \int_0^{r_0} v 2\pi r = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (3.11)$$

Средняя скорость в трубе

$$v_{cp} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{(p_1 - p_2)r_0^2}{8\mu l} = \frac{v_{max}}{2}. \quad (3.12)$$

Используя (3.12) легко определить величину гидравлического коэффициента трения $\lambda_{тр}$ по формуле Дарси (3.2). Действительно, принимая, во внимание, что

$$p_1 - p_2 = \gamma h_l, \quad (3.13)$$

$$\mu = \rho \nu = \frac{\gamma \nu}{g}, \quad (3.14)$$

$$r_0 = \frac{D}{2}, \quad (3.15)$$

получаем

$$\lambda_{mp} = \frac{64\nu}{vD} = \frac{64}{Re}. \quad (3.16)$$

Зависимость (3.16) для коэффициента трения при ламинарном течении в круглой трубе приведена в таблице 3.1. Она хорошо подтверждается результатами опытных данных.

3.3. Некоторые частные случаи ламинарного течения жидкости

3.3.1. Ламинарное течение жидкости в круглой трубе

Рассмотрим участок трубы длиной l расположенный достаточно далеко от входа и горизонтально, чтобы исключить влияние сил тяжести.

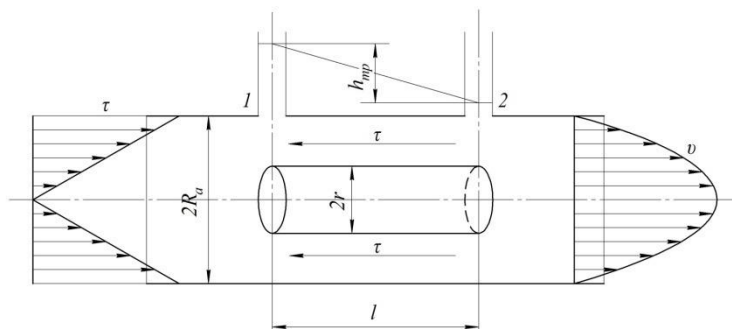


Рис. 3.5

Уравнение Бернулли для выбранных сечений будет иметь вид

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + h_{mp}, \quad (3.17)$$

где h_{mp} – потеря напора на трение.

Тогда

$$h_{mp} = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{P_{mp}}{\gamma}. \quad (3.18)$$

В потоке жидкости выделим контрольный объём в форме цилиндра, как показано на рисунке, и составим уравнение равномерного движения его. Уравнение будет иметь следующий вид

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 - 2\pi r l \tau = 0.$$

Здесь $(P_1 - P_2)\pi r^2$ – суммарная составляющая сил давления; $2\pi r l \tau$ – силы сопротивления.

Отсюда

$$\tau = \frac{P_{mp} r}{2l}. \quad (3.19)$$

Выразим касательное напряжение по закону Ньютона, т.е.

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}. \quad (3.20)$$

Знак минуса обусловлен тем, что направление отсчёта радиуса противоположное ранее принятому направлению отсчёта нормали. Получаем

$$\frac{P_{mp} r}{2l} = -\mu \frac{dv}{dr}, \quad (3.21)$$

$$dv = -\frac{P_{mp}}{2\mu l} r dr, \quad (3.22)$$

$$v = -\frac{P_{mp}}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C. \quad (3.23)$$

Постоянную интегрирования определим из условий, заданных на стенке трубы, где при $r = r_0$; $v = 0$.

$$C = \frac{P_{mp}}{4\mu l} r_0^2. \quad (3.24)$$

И тогда получаем закон распределения скоростей по сечению круглой трубы при ламинарном течении, получаемый путём непосредственного интегрирования уравнений Навье-Стокса.

$$v = \frac{P_{\text{тр}}}{4\mu l} (r_0^2 - r^2), \quad (3.25)$$

$$v_{\text{max}} = \frac{P_{\text{мп}}}{4\mu l} r_0^2. \quad (3.26)$$

Следовательно, расход жидкости составит

$$Q = \int_{(Q)} dQ = \int_{(S)} v ds = \int_{(r)} \frac{P_{\text{мп}}}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi P_{\text{мп}}}{8\mu l} r_0^4. \quad (3.27)$$

Среднее по сечению значение скорости будет

$$v_{\text{cp}} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{P_{\text{мп}}}{8\mu l} r_0^2, \quad (3.28)$$

т.е. $v_{\text{cp}} = \frac{1}{2} v_{\text{max}}.$

Получим закон сопротивления, т.е. зависимость $h_{\text{мп}}$ от расхода и геометрии трубы. Из (3.28) имеем

$$P_{\text{мп}} = \frac{8\mu l}{\pi r_0^4} Q, \quad (3.29)$$

$$h_{\text{мп}} = \frac{P_{\text{мп}}}{\gamma} = \frac{8\mu l Q}{\pi r_0^4 \gamma} = \frac{128 \nu l Q}{\pi g d^4}. \quad (3.30)$$

Формула (3.30) получена Пуазейлем экспериментально в 1840 г. Получим так называемый закон Пуазейля-Гагена, который используется для расчёта трубопроводов с ламинарным режимом течения. Приведём уравнение (3.30) к виду

$$h_{\text{мп}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{cp}}^2}{2g}. \quad (3.31)$$

С этой целью в формуле (3.30) заменим расход через произведение $\frac{\pi d^2}{4} v_{cp}$, после соответствующих преобразований будем иметь

$$h_{mp} = \frac{32 \nu l v_{cp}}{g d^2} = \frac{64 \nu}{v_{cp} d} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v_{cp}^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g} = \lambda_{\lambda} \frac{l}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}, \quad (3.32)$$

где $\lambda_{\lambda} = \frac{64}{Re}$.

Здесь следует обратить внимание, что h_{mp} при ламинарном течении пропорциональна скорости в первой степени, а квадрат скорости в формуле (3.32) получен искусственно.

Зная закон распределения скоростей по сечению трубы и закон сопротивления, легко определить значение α для случая стабилизированного ламинарного течения жидкости в круглой трубе

$$\alpha = \frac{\int_{(s)} v^3 ds}{v_{cp}^3 s} = \frac{1}{v_{cp}^3 s} \int_{(s)} v^3 ds = 16 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 \frac{r dr}{r_0^2}. \quad (3.33)$$

После замены переменной

$$1 - \frac{r^2}{r_0^2} = z, \quad (3.34)$$

получим

$$\alpha = -8 \int_1^0 z^3 dz = 2. \quad (3.35)$$

Таким образом, можно показать, что импульс ламинарного потока с полученным законом распределения скоростей в β раз больше импульса того же потока, но с равномерным распределением скорости

$$\beta = \int_{(s)} \frac{v^2 ds}{v_{cp}^2 s} = \frac{4}{3}. \quad (3.36)$$

Полученные соотношения хорошо подтверждаются экспериментально за исключением некоторых частных случаев.

3.3.2. Начальный участок ламинарного течения

Формирование параболического профиля скоростей на начальном участке ламинарного течения в круглой трубе под действием сил вязкости происходит как показано на рис. 3.6.

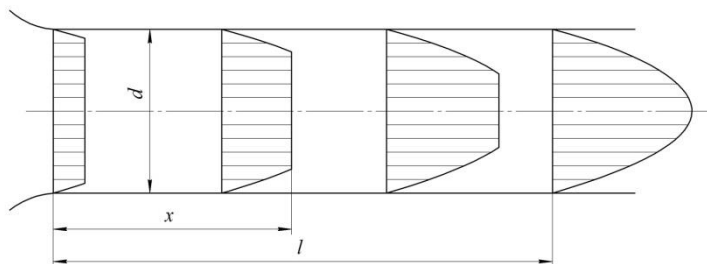


Рис. 3.6. Формирование параболического профиля скоростей на начальном участке ламинарного течения в круглой трубе

Расстояние от начала трубы, на котором происходит стабилизация параболического профиля скоростей, называется начальным участком течения ($l_{нач.}$). За пределом этого участка мы имеем стабилизированное ламинарное течение. Для определения длины начального участка используется формула Шиллера

$$\frac{l_{нач.}}{d} = 0,029 \text{ Re}. \quad (3.37)$$

Тогда максимально возможная длина начального участка составит

$$l_{нач. \max} = d \cdot 0,029 \text{ Re}_{кр} = 66,5d. \quad (3.38)$$

Т.к. значение градиента скорости у стенки на начальном участке больше, чем на участке стабилизированного ламинарного течения, то сопротивление начального участка будет больше и составит

$$h_{mp} = k \lambda_{\text{л}} \frac{x}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}, \quad (3.39)$$

где $k > 1$ и является функцией $\frac{x}{Re d}$, с увеличением которой он уменьшается и при $x = l_{нач}$ становится равным 1,09, т.е. сопротивление всего начального участка на 9 % больше, чем сопротивление такого же участка трубы, взятого в области стабилизированного ламинарного течения.

3.3.3. Ламинарное течение жидкости в зазорах

Рассмотрим ламинарное течение жидкости в зазоре, образованном двумя параллельными твёрдыми стенками, расстояние между которыми равно a . Выделим контрольный объём жидкости в зазоре в форме прямоугольного параллелепипеда, как показано на рис. 3.7, и запишем условие его равномерного движения вдоль оси x

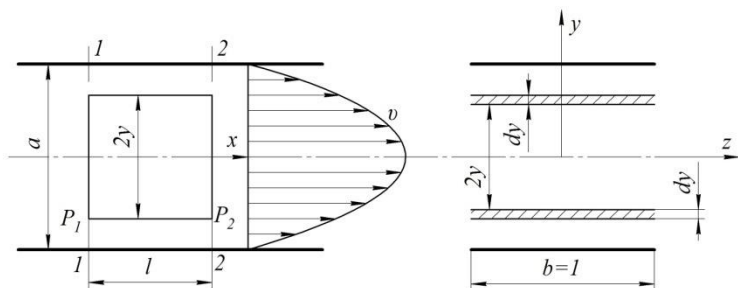


Рис. 3.7. Ламинарное течение потока в зазоре

Т.к. движение является равномерным вдоль оси x , то

$$2yP_{mp} = -\mu \frac{dv}{dy} 2l_1; \quad dv = -\frac{P_{mp}}{\mu l} y dy; \quad v = -\frac{P_{mp}}{2\mu l} y^2 + C. \text{Здесь}$$

$$P_{mp} = P_1 - P_2.$$

Т.к. при $y = \frac{a}{2}$ $v = 0$, то $c = \frac{P_{mp}}{2\mu l} \cdot \frac{a^2}{4}$, откуда окончательно получаем

$$v = \frac{P_{mp}}{2\mu l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right). \quad (3.40)$$

А теперь получим значение расхода,

$$Q = \int_{(Q)} dQ = \int_{(s)} v ds = \int_{(y)} \frac{P_{mp}}{2\mu l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) 2dy = \frac{P_{mp} a^3}{12\mu l}. \quad (3.41)$$

Получили параболический закон распределения скоростей – течения Пуазейля. Следовательно, потеря давления через v_{cp} выразится следующим образом

$$P_{тр} = \frac{Q \cdot 12\mu l}{a^3} = \frac{12\mu l v_{cp}}{a^2}. \quad (3.42)$$

Рассмотрим случай, когда одна из стенок движется, а давление вдоль зазора постоянно. При этом возникает так называемое фрикционное безнапорное движение. Из уравнения равновесия элемента жидкости следует $d\tau = 0$ Тогда $\tau = const$. Из уравнения Ньютона получаем

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy} = const, \quad (3.43)$$

$$v = -\frac{C}{\mu} y + C_1. \quad (3.44)$$

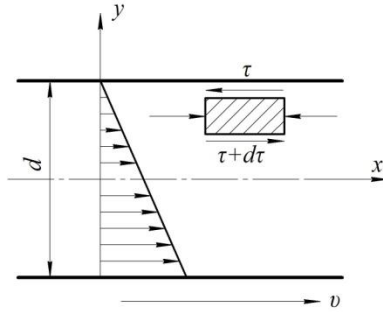


Рис. 3.8. Случай с движущейся стенкой

Для определения постоянных интегрирования C и C_1 используем следующие граничные условия: при $y = \frac{a}{2}$; $v = 0$ и при $y = -\frac{a}{2}$ $v = V$. Отсюда получаем $C = \frac{V\mu}{a}$; $C_1 = \frac{V}{2}$; $v = \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2}\right)V$.

Расход жидкости при этом составит

$$Q = \frac{V}{2} a. \quad (3.45)$$

Т.е. имеет место течения Куэтта. Если перемещение стенки происходит при наличии перепада давления, то закон распределения скорости как алгебраическая сумма ранее полученных выражений, а именно

$$v = \frac{P_{\text{тр}}}{2\mu l} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \mp \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{a} \right). \quad (3.46)$$

Соответственно выражение для расхода будет иметь вид

$$Q = \frac{P_{\text{тр}} a^3}{12\mu l} \mp \frac{V}{2} a. \quad (3.47)$$

Этими выражениями можно пользоваться и тогда, когда зазор образован двумя цилиндрическими поверхностями.

3.3.4. Течение с теплообменом

Выше были рассмотрены случаи изотермического течения, т.е. предполагалось постоянство температуры во всех точках потока. Если температура жидкости существенно отличается от температуры окружающей среды, то будет иметь место теплообмен с внешней средой, при этом температура жидкости и её вязкость не остаются постоянными, течение является неизоермическим и полученные выше выражения для h_{mp} и P_{mp} нуждаются в уточнении.

Действительно, если температура окружающей среды ниже температуры жидкости в трубопроводе, то в пристеночных слоях температура жидкости будет ниже, а, следовательно, её вязкость будет больше, чем в основном ядре потока, где температура будет больше. В случае, когда температура окружающей среды будет выше температуры жидкости, будет иметь место обратная картина. Соответствующим образом будет меняться и гидравлическое сопротивление потока.

Таким образом, в результате теплообмена нарушается обычный параболический закон распределения скоростей. Как видно из нижеприведенного рисунка, охлаждение увеличивает неравномерность исходного изотермического течения ($\alpha > 2$) и сопротивление получается больше, а нагревание жидкости – уменьшает неравномерность распределения скоростей ($\alpha < 2$) и сопротивление будет меньше, чем в исходном потоке. Это является следствием изменения вязкости жидкости в пристеночных слоях в зависимости от температуры.

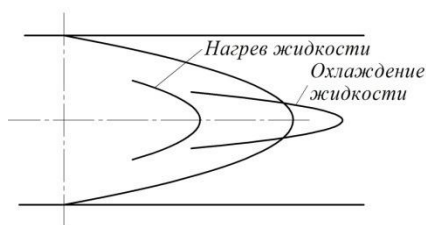


Рис. 3.9. Различные виды течения: 1 – изотермическое течение, 2 – течение с охлаждением, 3 – течение с подогревом

Точное решение рассматриваемой задачи представляет определённые трудности, поэтому на практике рекомендуется пользоваться ранее полученным выражением

$$h_{mp} = \lambda_l \frac{l}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}, \quad (3.48)$$

а коэффициент потерь на трение определять как

$$\lambda_l = \lambda = \frac{64}{Re_*} \sqrt{\frac{v_{cm}}{v_*}}, \quad (3.49)$$

где Re_* – число Re , подсчитанное по средней вязкости жидкости;

v_* – средняя вязкости жидкости;

v_{cm} – вязкость жидкости, соответствующая средней температуре стенки.

Облитерация. Под *облитерацией* понимают процесс уплотнения жидкости до практически твёрдого состояния на поверхности стенки. В случае зазоров и капилляров размером до 0,01 мм может произойти полное зарастивание проходного сечения и уменьшение расхода до нуля.

Степень облитерации зависит от молекулярной структуры жидкости, причём в большей степени облитерация проявляется в сложных, высокомолекулярных соединениях, к которым относятся практически все жидкости, используемые в гидравличе-

ских системах летательных аппаратов. Толщина адсорбционного слоя на керосиновой основе составляет несколько микрон. Повышение температуры уменьшает степень облитерации, а повышение давления, наоборот, увеличивает степень облитерации.

Если одна из стенок зазора приходит в движение, то адсорбционные слои разрушаются, но для такого сдвига требуется весьма значительное усилие. Вообще в зазорах с подвижной стенкой облитерации не происходит.

В целях избежания облитерации в жиклёрах и дросселях не рекомендуется выполнять отверстия диаметром менее диапазона значений от 0,2 до 0,4 мм.

3.4. Турбулентное движение жидкости в трубах

Как было установлено ранее, в турбулентном потоке всегда наблюдаются пульсации скорости. Под действием пульсаций частицы жидкости, движущиеся в главном направлении потока, получают, кроме того, и поперечные перемещения, вследствие чего между соседними слоями жидкости возникает обмен частицами жидкости, вызывающий непрерывное её перемешивание.

Однако у стенок, ограничивающих поток, создаются особые условия для движения жидкости.

В теориях, которые господствовали в гидродинамике до начала XX века, принималось, что здесь образуется некоторый неподвижный, «мёртвый слой», по которому со значительными скоростями движется вся остальная масса жидкости. Наличие этого неподвижного слоя привело к выводу о «разрыве» скоростей, т.е. к такому закону распределения скоростей в поперечном направлении, при котором происходит внезапное, скачкообразное изменение скорости от 0 в неподвижном слое до некоторого конечного значения в остальной части потока.

Многочисленные экспериментальные данные, полученные различными исследователями по изучению турбулентных потоков, показали очевидную несостоятельность этой теории. Было установлено, что скорости течения жидкости непосредственно на самой поверхности стенок вследствие прилипания к ним смазывающей жидкости равны нулю; на весьма малом расстоянии от стенок скорости достигают значительной величины; в остальных, более удалённых от стенок точках поперечного сечения происходит дальнейшее (но уже значительно более медленно) увеличение скорости.

Эти результаты явились основанием для построения нижеследующей схематизированной модели турбулентного потока, предложенной в 1930-х годах немецким физиком Л. Прандтлем, согласно которой у стенок образуется весьма тонкий слой, в котором скорости изменяется не скачкообразно, а непрерывно и движение жидкости происходит по законам ламинарного режима.



Рис. 3.10. Разделение потока на слои при турбулентном течении

Основная же центральная часть потока (ядро), связанная с этим слоем, называемым вязким (или ламинарным) подслоем, с некоторой переходной зоной, движется турбулентно с почти одинаковой для всех частиц жидкости осреднённой скоростью. Здесь следует оговориться особо – понятие о вязком подслое нельзя смешивать с введенным нами ранее понятием пограничного слоя, под которым понимают, что очевидно, совокупность вязкого подслоя и переходной зоны.

Наличие у стенок твёрдых частиц делает невозможным вблизи их поперечное движение частиц жидкости, а поэтому в

ламинарном подслое перемешивание жидкости не происходит, её частицы движутся тут по слегка извилистым траекториям, почти прямолинейным и параллельным стенкам.

Равномерное распределение скорости в ядре потока, объясняется интенсивным перемешиванием основной массы жидкости в этой центральной части потока.

Наличие вязкого (ламинарного) подслоя доказано экспериментально. Толщина этого слоя весьма мала и обычно определяется долями мм. Она зависит от числа Re и тем меньше, чем больше это число, т.е. больше турбулентность потока.

Толщина отдельных зон турбулентного потока может быть установлена из следующих соотношений:

- вязкий ламинарный подслой $0 < v_* a / \nu < 7$;
- переходная зона $7 < v_* a / \nu < 70$;
- турбулентное ядро $v_* a / \nu > 70$.

Здесь v_* – динамическая скорость, под которой понимают

$$v_*^2 = \frac{\tau_r}{\rho} \quad \text{или} \quad \left(\frac{v_*}{\nu} \right)^2 = \frac{1}{8},$$

где τ_r – касательное напряжение;

ρ – плотность жидкости;

a – расстояние от стенки;

ν – кинематическая вязкость.

При $Re > 10^5$ толщина вязкого подслоя $\delta_{вс}$ в круглой трубе может быть определена также по эмпирической формуле

$$\delta_{вс} = 62,8d Re^{-0,875}, \quad (3.50)$$

где d – диаметр трубы.

На механизм турбулентного потока большое влияние оказывает состояние ограничивающих его твёрдых стенок, всегда в той или иной степени обладающих известной шероховатостью. Шероховатость характеризуется величиной и формой различ-

ных, порой самых незначительных по размерам, выступов и неровностей, имеющих на стенках, и зависит от материала стенок и их обработки. Обычно с течением времени шероховатость изменяется от появления ржавчины, коррозии, отложения осадков и др.

В качестве основной характеристики шероховатости служат так называемая абсолютная шероховатость k , представляющая собой среднюю величину указанных выступов и неровностей, измеренную в линейных единицах.

В качестве примера можно привести следующие данные по абсолютной шероховатости труб:

- чистые цельнотянутые из латуни, меди, свинца: 0,01 мм;
- цельнотянутые стальные: от 0,05 до 0,15 мм;
- стальные с незначительной коррозией: от 0,20 до 0,30 мм;
- новые чугуны: 0,30 мм;
- асбоцементные: от 0,03 до 0,80;
- старые стальные: от 0,50 до 2,00.

Если выступы шероховатости будут меньше, чем толщина вязкого (ламинарного) подслоя, т.е. $k < \delta_{\text{вс}}$, то неровности стенки будут полностью погружены в этот слой, турбулентная часть потока не будет входить в непосредственное соприкосновение со стенками и движение жидкости, а следовательно, и потеря энергии, не будет зависеть от шероховатости стенок, а будет обусловлена лишь свойствами самой жидкости.

Если же высота выступов такова, что они превышают вязкий (ламинарный) подслой, т.е. $k > \delta_{\text{вс}}$, то неровности стенок будут выступать в ядро потока, увеличивать тем самым беспорядочность движения и существенным образом влиять на потерю энергии. В этом случае каждый отдельный выступ можно уподобить плохо обтекаемому телу, находящемуся в окружающем его потоке жидкости и являющимся источником образования вихрей.

В соответствии со сказанным различают поверхности гидравлически гладкие $k < \delta_{\text{вс}}$ и шероховатые $k > \delta_{\text{вс}}$.

Конечно, такое деление является достаточно условным, поскольку абсолютная толщина вязкого подслоя зависит от числа Re . Поэтому у гидравлически гладких стенок с увеличением Re начинает проявляться шероховатость, так как вязкий подслей становится меньше и выступы шероховатости, которые первоначально были полностью погружены в вязкий подслей, при достижении определённых значений Re , начинают выходить из вязкого подслоя и вступать в контакт с ядром потока. А значит, одна и та же стенка в зависимости от Re может вести себя по-разному: в одном случае – как гладкая, а в другом – как шероховатая. Поэтому абсолютная шероховатость не может полностью характеризовать влияние стенок на движение жидкости.

Для характеристики влияния шероховатости на гидравлическое сопротивление с учётом условий соблюдения подобия вводится понятие *относительной шероховатости* ε , под который понимается безразмерное отношение абсолютной шероховатости к некоторому линейному размеру, характеризующему сечение потока.

$$\varepsilon = k/r. \quad (3.51)$$

В некоторых случаях вводится понятие *относительной гладкости* ε' – величина, обратная относительной шероховатости

$$\varepsilon' = r/k = 1/\varepsilon. \quad (3.52)$$

В действительности, как показывают исследования, на гидравлическое сопротивление влияет не только степень шероховатости, но в значительной степени и форма выступов, густота и характер их расположения. Следует различать стенки с равномерной и неравномерной шероховатостью.

Трубы с равномерной шероховатостью можно считать гидравлически гладкими, если

$$\varepsilon \leq 33,7 Re^{-0,875}. \quad (3.53)$$

Для трубы с неравномерной шероховатостью для этого необходимо, чтобы

$$\varepsilon \leq 10 Re^{-0,875}. \quad (3.54)$$

Поскольку учесть влияние всех перечисленных выше факторов непосредственными измерениями не представляется возможным, в настоящее время для характеристики шероховатости стенок промышленных труб при расчётах используют понятие эквивалентной шероховатости k_1 , под который понимают такую величину выступов однородной абсолютной шероховатости, которая даёт при подсчётах одинаковую с действительной шероховатостью величину потери напора. Значение эквивалентной шероховатости определяют на основании гидравлических испытаний трубопроводов и пересчёта их результатов по соответствующим формулам.

Несмотря на большое число теоретических и экспериментальных работ, выполненных различными исследователями, в настоящее время в теории перемешивания до конца не установлены необходимые для выполнения инженерных расчётов строго обоснованные расчётные зависимости для количественного описания явлений, происходящих в турбулентных потоках.

Поэтому широкое применение получили полуэмпирические теории турбулентности, основанные на схематизированных физических моделях турбулентного потока. Широкое распространение получила полуэмпирическая теория Л. Прандтля, в основу которой положена рассмотренная выше модель, предполагающая разделение потока на две части: турбулентное ядро и ламинарный подслой.

При этом принимаются следующие основные допущения:

- касательное напряжение одинаково по всему поперечному сечению потока и равно напряжению на стенке

$$\tau = \tau_r; \quad (3.55)$$

- длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию от стенки

$$l = \chi a, \quad (3.56)$$

где χ — универсальная постоянная.

Под длиной пути перемешивания понимают путь, который должна пройти в поперечном направлении частица жидкости относительно остальной её массы, чтобы в результате смешивания с окружающим турбулентным потоком потерять свою поперечную пульсационную составляющую скорость.

С учётом принятых допущений выражение для касательного напряжения в случае круглой трубы принимает вид

$$\tau_r = \rho \chi^2 a^2 (dv/da)^2, \quad (3.57)$$

или $v_*^2 = \frac{\tau_r}{\rho} = \chi^2 a^2 (dv/da)^2$.

Интегрирование этого уравнение даёт $v/v_* = (1/\chi) \ln a + c$. Получили так называемый логарифмический закон распределения скоростей, справедливый для всего ядра турбулентного потока.

С целью определения постоянной интегрирования c запишем это уравнение для границы с ламинарным подслоем $v_\delta/v_* = (1/\chi) \ln \delta + c$, где δ — толщина ламинарного подслоя. Тогда $c = v_\delta/v_* - (1/\chi) \ln \delta$ и, следовательно,

$$v/v_* = \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln a + v_\delta/v_* - \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln \delta. \quad (3.58)$$

В ламинарном подслое перемешивание отсутствует и поэтому здесь напряжения определяются по Ньютону, т.е.

$$\tau = \tau_r = \mu \frac{v}{a} = \mu \frac{v_\delta}{\delta}, \quad (3.59)$$

что можно переписать следующим образом

$$\frac{\tau_r}{\rho} = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{v_\delta}{\delta} \right) = v \frac{v_\delta}{\delta} = v_*^2, \quad (3.60)$$

$$\delta = \frac{v v_{\delta}}{v_*^2}. \quad (3.61)$$

Тогда получаем окончательно

$$\frac{v}{v_*} = \left(\frac{1}{\chi} \right) \ln(v_* a/v) + c_1; \quad (3.62)$$

$$c_1 = v_{\delta}/v_* - \frac{1}{\chi} \ln v_{\delta}/v_*. \quad (3.63)$$

Экспериментами Никурадзе установлены следующие значения коэффициентов χ и c_1 :

- для гладких труб $\chi = 0,4$; $c_1 = 5,5$;
- для шероховатых труб $\chi = 0,4$; $c_1 = 8,48$.

С учётом этих значений получаем следующие удобные для практического использования выражения:

- для гладких труб $v = v_* (5,75 \lg v_* a/v + 5,5)$;
- для шероховатых труб $v = v_* (5,75 \lg a/k + 8,5)$.

Приближённо распределение скорости при турбулентном режиме течения можно получить также из уравнения

$$v/v_0 = (a/r)^m,$$

где $m = f(Re, \varepsilon)$;

v_0 – скорость на оси трубы;

a – расстояние от стенки;

$m = 0,25$ трубы

$m = 0,1$.

Если принять $m = 1/7$, получаем

$$v/v_0 = (a/r)^{1/7}. \quad (3.64)$$

Это так называемый закон $1/7$ Кармана.

Начальный участок турбулентного режима в круглом трубопроводе определяется по формуле Лацко

$$L'_{нач}/d = 0,693 Re^{0,25}. \quad (3.65)$$

Высказанные выше предположения о механизме движения и установление закономерности распределения скоростей в турбулентном потоке хорошо подтверждаются экспериментом. Так в случае круглой трубы для ламинарного режима $v_{cp}/v_0 = 0,5$, а для турбулентного режима от 0,75 до 0,90 соответственно.

Законы распределения скорости имеют большое значение поскольку они позволяют установить связь между распределением скорости и коэффициентом гидравлического сопротивления λ .

Рассмотрим случай гидравлически гладких труб.

Используя выражение

$$(v_*/v)^2 = \lambda/8, \quad (3.66)$$

получаем

$$\sqrt{8/\lambda} = 5,75 \lg a_{cp} v \sqrt{\lambda/8} / v + 5,5. \quad (3.67)$$

Если учесть, что расстояние от стенки трубы до слоя, движущегося со средней скоростью, определяется для гидравлически гладких труб выражением

$$a_{cp} = 0,223r, \quad (3.68)$$

то после несложных преобразований будем иметь следующую формулу для определения коэффициента гидравлического сопротивления

$$1/\sqrt{\lambda} = 2 \lg Re \sqrt{\lambda} - 0,8. \quad (3.69)$$

Рассмотренная выше теория Прандтля является основополагающей. Вместе с тем более поздние исследования не подтвердили некоторых положений, из которых исходит Прандтль при построении своей теории, в частности о наличии у стенок подслоя со строго ламинарным течением. В действительности турбулентные пульсации существуют и в непосредственной

близости у стенок и турбулентный поток необходимо рассматривать как единое целое, без разделения на ядро и ламинарный подслой.

Исходя из этих представлений о турбулентном потоке, Альтшуль получил следующую формулу для распределения скоростей в поперечном сечении трубы

$$v = v_* \left[7,8 + 5,15 \lg \frac{1 + 0,4(v_* a/v)}{1 + 0,4(v_* k/v)} \right]. \quad (3.70)$$

При больших числах Re формула принимает вид

$$v = v_* \left[7,8 - 5,75 \lg \left[(2,5 v/v_* a) + (k/a) \right] \right]. \quad (3.71)$$

Формула учитывает влияние на профиль скоростей одновременно и вязкости жидкости, и шероховатости стенок и справедлива для всей области турбулентного режима как в гидравлически гладких, так и в шероховатых трубах.

Вопросу влияния различных факторов на коэффициент сопротивления λ посвящено большое число работ. Рассмотрим опыты Никурадзе, произведенные в 1932 г. Эти опыты поставлены весьма тщательно и проводились в трубах с искусственной шероховатостью, которая создавалась путем наклеивания зерен песка определенного размера на внутреннюю поверхность труб. В этих трубах при различных расходах определялась потеря напора, а по формуле Дарси-Вейсбаха

$$h_{1-2} = \lambda (L/a) (v^2/2g) \quad (3.72)$$

вычислялся коэффициент λ .

Рассмотрим результаты опытов Никурадзе.

В области ламинарного режима λ зависит только от Re и не зависит от шероховатости.

При Re от 2300 до 3000, т.е. в переходной области от ламинарного режима к турбулентному, коэффициент λ быстро возрастает с увеличением Re , оставаясь по-прежнему одинаковым для различных шероховатостей.

При $Re > 3000$ начинается сказываться влияние шероховатости. При этом чем больше шероховатость, тем выше λ для одних и тех же Re .

Для труб с большой относительной шероховатостью λ возрастает с увеличением Re , достигая некоторого значения, сохраняющегося потом постоянным.

Для труб с малой шероховатостью опытные точки в некотором интервале значений Re располагаются вдоль наклонной прямой, известной под названием прямой Блазиуса для гладких труб, и отклонение от этой прямой наступает тем раньше, чем больше шероховатость труб (стенок).

При этом λ тоже стремится к некоторому определённом пределу, разному для труб с различной шероховатостью, затем при дальнейшем увеличении Re также сохраняет своё значение постоянными. Это так называемая область вполне шероховатых труб, отвечающая квадратичному закону сопротивлений.

Подытоживая, приходим к выводу, что вся область по Re может быть подразделена на 5 зон:

- 1) ламинарный режим $[\lambda = f(Re)]$;
- 2) переходная зона (ламинарный режим переходит в турбулентный);
- 3) область гидравлически гладких труб при турбулентном режиме течения $[\lambda = f(\varepsilon, Re)]$;
- 4) область шероховатых труб при турбулентном режиме $[\lambda = f(\varepsilon, Re)]$;
- 5) область вполне шероховатых труб при турбулентном режиме $[\lambda = f(\varepsilon)]$.

Полученным результатам можно дать истолкование, находящееся в полном соответствии с установленной выше схемой турбулентного режима. До тех пор пока $k < \delta_{\text{вс}}$, λ будет зави-

сеть только от Re . Если $k > \delta_{bc}$, то ламинарное течение нарушается и выступы шероховатости приведут к отрыву жидкости от стенок и образованию в ней вихрей.

Поскольку δ_{bc} уменьшается с увеличением Re , то при малых Re , когда k имеет тот же порядок, что и δ_{bc} , коэффициент λ должен зависеть не только от шероховатости стенок, но и от Re . Если Re весьма велик и k значительно превышает δ_{bc} , λ зависит только от шероховатости.

Опыты Никурадзе проводились в трубе с искусственной шероховатостью, поэтому в дальнейшем были проведены дополнительные исследования для определения возможности распространения выводов Никурадзе на промышленные трубы. Эти исследования подтвердили основные закономерности Никурадзе.

Для определения λ предложено в разное время большое число расчётных формул. Это, во-первых, чисто эмпирические зависимости (Прони, Этельвейна, Дарси и т.д.), недостаток которых заключается в ограниченной возможности их применения. В дальнейшем теория подобия позволила получить ряд обобщённых зависимостей. Это формулы Блазиуса, Мизеса, Ланга, Прандтля и Никурадзе, Альтшуля и др. Однако и эти формулы имеют ограниченное применение и поэтому возникла идея об установлении единой универсальной формулы, которая была бы пригодна для всех областей турбулентного режима.

Из этих универсальных формул следует назвать прежде всего формулу Кольбрука и Уайта

$$1/\sqrt{\lambda} = -2 \lg \left(k_1/3,7d + 2,51/Re \sqrt{\lambda} \right), \quad (3.73)$$

где k_1 – эквивалентная шероховатость.

Приведём ещё формулу А.Д. Альтшуля

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \frac{Re}{Re(k_1/10a) + 7} \quad (3.74)$$

и предложенную им ещё более простую зависимость

$$\lambda = 0,11 \left[k_1/d + 68/Re \right]^{0,25}. \quad (3.75)$$

Эти формулы достаточно полно и правильно учитывают влияние различных факторов на гидравлические сопротивления и получили широкое применение в практике гидравлических расчётов. Различные зависимости коэффициента гидравлического трения от числа Рейнольдса представлены на рис. 3.11.

Кроме того, имеется ряд специальных формул для определения потерь напора в трубопроводах специального назначения. Особому рассмотрению подлежат трубопроводы некруглого поперечного сечения.

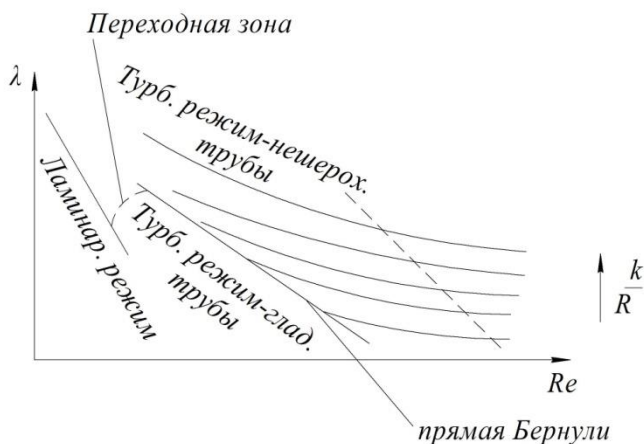


Рис. 3.11. Зависимость коэффициента гидравлического трения от числа Re

3.5. Местные сопротивления и расчет трубопроводов

Потери напора в местных сопротивлениях. В участках резкого изменения геометрии потока, там, где он сжимается, расширяется, изменяет направление, появляются обратные течения. На рис. 3.12 показана картина течения в элементах трубопроводной арматуры: при резком расширении трубы (а), резком сужении (б), задвижке (в), в колене (г). Появление обратных

течений приводит к резкому возрастанию градиентов скорости течения внутри вихревых образований, и в соответствии с законом Ньютона для вязкого трения к росту сил трения и более интенсивному превращению механической энергии потока в тепло.

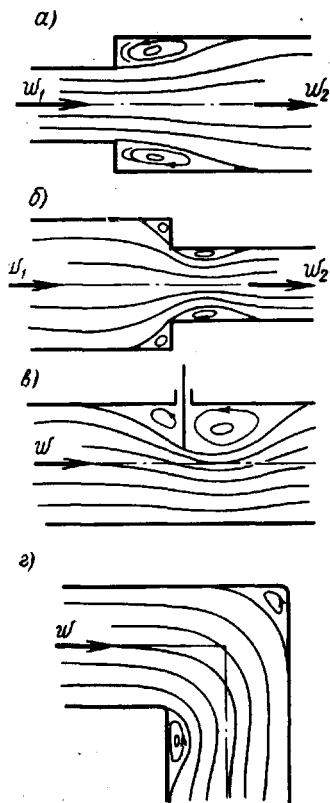


Рис. 3.12. Схема движения течения в различных элементах трубопровода

Потери энергии потока на поддержание движения в таких областях называются местными потерями напора h_m . Они сконцентрированы на небольших (в сравнении с длиной трубы) участках. Местные потери определяются по формуле Вейсбаха

$$h_m = \zeta_m \frac{v^2}{2g}, \quad (3.76)$$

где ζ_m – безразмерный коэффициент местного сопротивления.

Величины ζ_m для различных видов местных сопротивлений определяют экспериментально. Сведения по коэффициентам местных сопротивлений содержатся в гидравлических справочниках и таблицах, например [9]. В том случае, когда поток, проходя через местные сопротивления, меняет сечение, ζ_m обычно определяют для скоростного напора в трубе после сопротивления. В частности, для резкого расширения (рис. 3.12,а)

$$h_{p.p} = \zeta_{p.p} \frac{v_2^2}{2g}, \quad (3.77)$$

где $\zeta_{p.p} = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2$.

Резкое расширение – единственное из местных сопротивлений, для которого h_m определяется теоретически по формуле Борда

$$h_{p.p} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (3.78)$$

Для резкого сжатия потока (рис. 3.12, б)

$$h_{p.c} = \zeta_{p.c} \frac{v_2^2}{2g}, \quad (3.79)$$

где $\zeta_{p.c} = 0,5 \left(1 - \frac{F_2}{F_1} \right)$.

3.6. Расчет трубопроводов

3.6.1. Простой трубопровод постоянного сечения

Трубопроводы подразделяются на простые и сложные.

Простым называется трубопровод без разветвлений, а сложным – трубопровод с одним или несколькими разветвлениями.

Давление жидкости в трубопроводе возникает благодаря превышению потенциальной энергии жидкости в начале трубопровода над ее потенциальной энергией в конце трубопровода. Это превышение может быть создано различными способами: работой полога, давлением газа или же за счет разности уровней жидкости.

Рассмотрим произвольно расположенный в пространстве простой трубопровод, параметры трубопровода и протекающей в нем жидкости представлены на рис. 3.13.

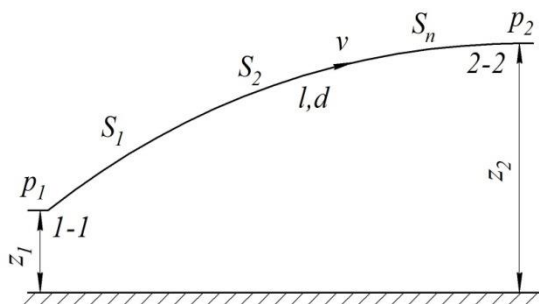


Рис. 3.13. Трубопровод с указанием параметров

Запишем уравнение Бернулли для сечения 1-1 и 2-2, скорость движения жидкости в которых будет одинаковой т.к. $d = const$, будем считать при этом, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Тогда будем иметь

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \Sigma h, \quad (3.80)$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = z_2 - z_1 + \Sigma h + \frac{P_2}{\gamma} = \Delta z + \frac{P_2}{\gamma} + \Sigma h. \quad (3.81)$$

Пьезометрическую высоту в левой части уравнения назовем *потребным напором* $H_{\text{потр.}}$, если эта величина задана, то

будем называть ее *располагаемым напором* $H_{\text{расч.}}$. $\Delta z + \frac{P_2}{\gamma}$ – ста-

тический напор, который можно представить как некоторую эквивалентную высоту подъема жидкости $\Delta z'$; Σh можно представить как степенную функцию расхода жидкости. Тогда

$$H_{\text{потр.}} = \frac{P_1}{\gamma} = \Delta z' + \Sigma h = \Delta z' + kQ^m, \quad (3.82)$$

где k и m – величины, зависящие от режима течения жидкости.

В случае ламинарного течения жидкости

$$\Sigma h = \frac{128\nu(l + l_{\text{эkv}})Q}{\pi g d^4}. \quad (3.83)$$

Здесь $k = \frac{128\nu(l + l_{\text{эkv}})}{\pi g d^4}$, а $m = 1$.

Для турбулентного течения будем иметь

$$\Sigma h = \left(\Sigma \xi + \lambda_T \frac{l}{a} \right) \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4}. \quad (3.84)$$

Здесь $k = \left(\Sigma \xi + \lambda_T \frac{l}{a} \right) \frac{8}{2\pi^2 d^4}$, а $m = 2$.

Эта формула является основной для расчета простых трубопроводов и позволяет построить кривую напора – зависимость потребного напора от расхода жидкости в трубопроводе. При ламинарном режиме эта кривая изобразится прямой линией, а при турбулентном – параболой с показателем степени, равным 2. Величина $\Delta z'$ положительная, если жидкость при движении по трубопроводу поднимается с меньшей высоты на большую или движется в область с повышенным давлением и

наоборот. Крутизна кривой зависит от k и возрастает с увеличением длины трубопровода, уменьшением α , а так же с увеличением коэффициента местных сопротивлений.

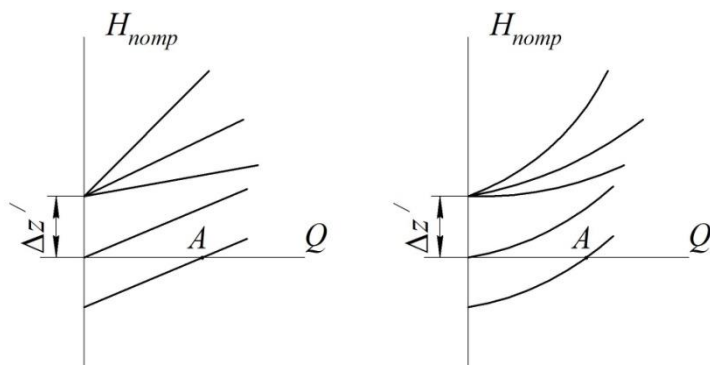


Рис. 3.14. Зависимости потребного напора от расхода среды для различных режимов течения

Точка A на кривой потребных напоров определит расход жидкости при движении её самотёком, т.е. за счёт разности нивелирных высот Δz , а потребный напор при этом равен 0 как это следует из графика, так как давление в начале и в конце трубопровода при этом равно P_a , т.е. атмосферному, такой трубопровод называется *самотечным*.

В некоторых случаях вместо кривых потребных напоров бывает удобно пользоваться такой характеристикой трубопровода как зависимость суммарной потери напора (давления) от расхода $\Sigma h = f(Q)_1$. Таким образом, характеристика трубопровода есть кривая потребного напора сдвинутая в начало координат. Характеристика трубопровода совпадает с кривой потребного напора при $\Delta z' = \Delta z + \frac{P_2}{\gamma} = 0$, например, когда трубопровод лежит в горизонтальной плоскости, а противодействие равно 0.

Возможны три нижеследующие задачи на расчёт простого трубопровода:

1) заданы: расход Q , давление P , свойство жидкости γ и ν , геометрические размеры и качество изготовления трубы (шероховатость). Надо найти $H_{ном.}$;

2) заданы: располагаемый напор $H_{расп.}$, свойства жидкости, все размеры трубопровода, а также шероховатость. Требуется найти расход жидкости Q ;

3) заданы: расход Q , располагаемый напор $H_{расп.}$, свойства жидкости и все размеры трубопровода, кроме его диаметра. Требуется определить диаметр трубопровода.

3.6.2. Сифон

Сифоном называют простой самотечный трубопровод, часть которого расположена выше питающего его резервуара. Движение жидкости при этом происходит за счёт разности уровней H . Схема сифона представлена на рис. 3.15.

Особенностью такого трубопровода является тот факт, что давление жидкости по всей восходящей ветви трубопровода и по части нисходящей ветви меньше атмосферного.

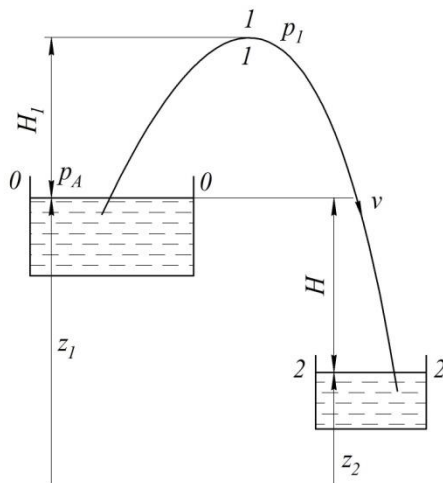


Рис. 3.15. Схема сифона

Для того, чтобы такой трубопровод начал подавать жидкость необходимо весь его объём предварительно заполнить жидкостью.

Уравнение Бернулли для сечений 0-0 и 2-2 будет иметь вид

$$z_1 = z_2 + \Sigma h;$$

$$\Delta z = kQ^m = H.$$

Таким образом, расход жидкости через сифон определяется разностью уравнений и сопротивлением трубопровода. Это утверждение справедливо до определённых пределов. С увеличением H_1 давление P_1 понижается, когда оно достигнет упругости паров, начнётся кавитация и Q уменьшается, а затем могут образоваться паровые пробки, при этом подача жидкости полностью прекратится.

Давление P_1 определим из уравнения Бернулли, составленного для сечений 0-0 и 1-1

$$\frac{P_A}{\gamma} = H_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} + \Sigma h_{0-1}. \quad (3.85)$$

Если же известно P_{1min} , то из этого уравнения можно определить H_{1max} .

3.6.3. Последовательное и параллельное соединение труб

Если соединить последовательно несколько труб различного диаметра с разными местными сопротивлениями последовательно, то получим простой трубопровод переменного сечения.

Очевидно, что в этом случае справедливо написать

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \\ \Sigma h_{M-N} = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 + \Sigma h_3 \end{array} \right\}$$

Эти уравнения и определяют правило построения характеристики простого трубопровода переменного сечения.

Действительно, пусть даны характеристики трёх трубопроводов соединённых последовательно. В соответствии с вышеприведенной системой уравнений, чтобы построить характеристику всего трубопровода, мы должны сделать так, как показано на рис. 3.16.

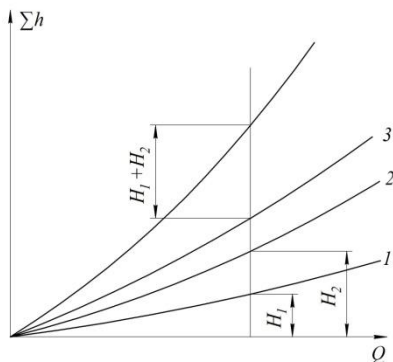


Рис. 3.16. Характеристика трубопровода

Если рассматривать более общий случай, то выражение для потребного напора должно содержать разность скоростных напоров в конце и начале трубопровода и уравнение для расчёта простых трубопроводов примет вид

$$\begin{aligned}
 H_{\text{номр}} &= z_M - z_N + \frac{\alpha_H v_H^2 - \alpha_M v_M^2}{2g} + \Sigma h_{M-N} + \frac{P_N}{\gamma} = \\
 &= \Delta z' + CQ^2 + kQ^M; \\
 C &= \frac{1}{2g} \left(\frac{\alpha_N}{S_N^2} - \frac{\alpha_M}{S_M^2} \right); \\
 \Delta z' &= z_M - z_N + \frac{P_N}{\gamma}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь параллельное соединение нескольких трубопроводов, представленное на рис. 3.17.

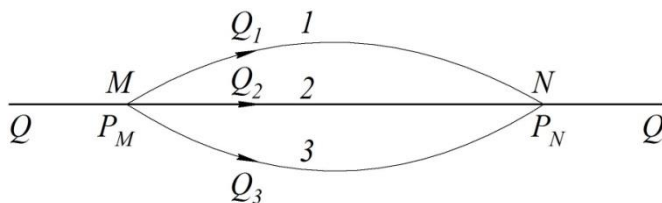


Рис. 3.17. Параллельное соединение трубопроводов

Введём обозначение: полные напоры в точках N соответственно H_M и H_N , расход в основной магистрали Q , а в параллельных трубопроводах Q_1 , Q_2 и Q_3 и потери в них Σh_1 , Σh_2 , и Σh_3 .

Тогда очевидно

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q.$$

Если выразить потери в каждом трубопроводе через полные напоры в точках M и N , то получим

$$\Sigma h_1 = H_M - H_N;$$

$$\Sigma h_2 = H_M - H_N;$$

$$\Sigma h_3 = H_M - H_N,$$

т.е. $\Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3$.

Потери в ветвях 1, 2 и 3 могут быть выражены ещё и следующим образом

$$\Sigma h_1 = k_1 Q_1^m; \quad \Sigma h_2 = k_2 Q_2^m; \quad \Sigma h_3 = k_3 Q_3^m.$$

k и m , как мы уже знаем, определяются режимом течения жидкости. В соответствии с $\Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3$, получаем ещё два уравнения

$$k_1 Q_1^m = k_2 Q_2^m; \quad k_2 Q_2^m = k_3 Q_3^m.$$

Данные уравнения позволяют решить следующую задачу: дан расход Q в основной магистрали и все геометрические параметры, необходимо найти расходы Q_1 , Q_2 и Q_3 .

Полученные соотношения определяют правило построения характеристики параллельного соединения нескольких трубопроводов, которое представлено на рис. 3.18.

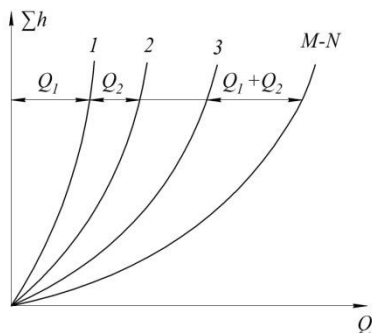


Рис. 3.18. Зависимость потерь давления от расхода

3.6.4. Разветвлённый трубопровод

Разветвлённый трубопровод – совокупность нескольких труб, имеющих одно сечение – место разветвления или место смыкания этих труб. Рассмотрим конкретный пример, представленный на рис. 3.19.

Определим связь между давлением P_M и расходами Q_1 , Q_2 и Q_3 , при этом направление течения в трубах считаем заданным как показано на рис. 3.19.

Здесь как и для параллельных трубопроводов очевидно

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Из уравнения Бернулли, пренебрегая разностью скоростных напоров, будем иметь

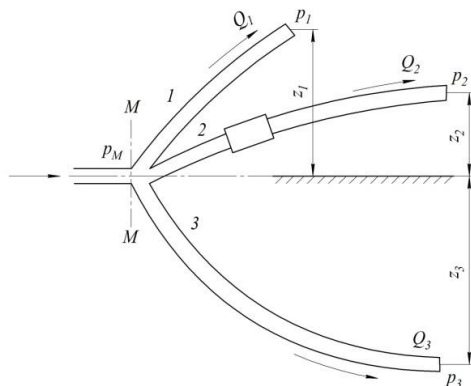


Рис. 3.19. Разветвленный трубопровод

$$\frac{P_M}{\gamma} = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \Sigma h_1; \quad \frac{P_M}{\gamma} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \Sigma h_2; \quad \frac{P_2}{\gamma} = z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \Sigma h_3;$$

$$\frac{P_M}{\gamma} = z'_1 + k_1 Q_1^m; \quad \frac{P_M}{\gamma} = z'_2 + k_2 Q_2^m; \quad \frac{P_M}{3} = z'_3 + k_3 Q_3^m.$$

Следовательно, получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, решение которой удобно проводить графически (Q_1, Q_2, Q_3, P_M)

Решение ведём следующим образом – строим для каждого трубопровода кривую потребного напора ($P_{M/\gamma} = f(Q)$), а затем выполняем их сложение так же, как это делаем с характеристиками параллельно соединённых труб, т.е. складываем абсциссы (Q) при одинаковых ординатах (рис. 3.20).

Полученная кривая ABCD представляет собой кривую потребного напора для разветвлённого трубопровода, позволяющую определить значение расходов по P_M и наоборот.

Рассмотренный выше разветвлённый трубопровод, также как и трубопровод, составленный из нескольких параллельных труб, есть разновидность сложного трубопровода. В общем случае сложный трубопровод может состоять из последовательно и

параллельно соединенных участков или разветвлений. Расчёт его производят графоаналитически, а именно – сложный трубопровод разбивается на ряд простых, для каждого из которых строятся кривые потребного напора, а затем производится сложение этих кривых. В том случае, когда $\Delta z' = \Delta z + P/\gamma = 0$, вместо кривых потребного напора строятся характеристики трубопроводов.

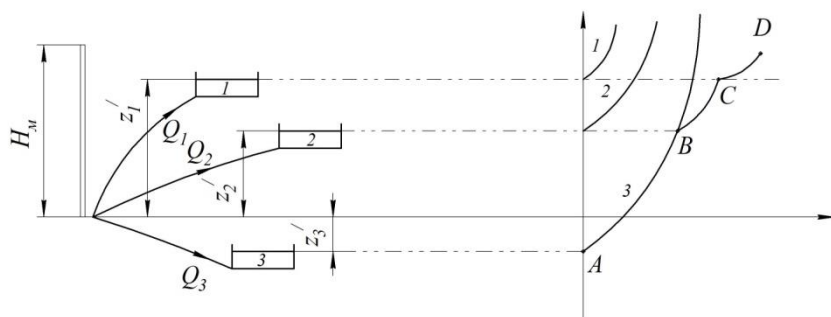


Рис. 3.20. Схема трубопровода и построение характеристики

3.6.5. Трубопровод с насосной подачей жидкости

Этот случай рассмотрим особо. Такой трубопровод может быть как разомкнутым (перекачка жидкости с одного места в другое), так и замкнутым. Рассмотрим первоначальный разомкнутый трубопровод, пример которого представлен на рис. 3.21.

Линия всасывания – трубопровод, по которому жидкость движется к насосу.

Напорный трубопровод – трубопровод, по которому жидкость движется от насоса.

Уравнение Бернулли для всасывающего трубопровода

$$\frac{P_0}{\gamma} = H_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + \Sigma h_{0-1}. \quad (3.86)$$

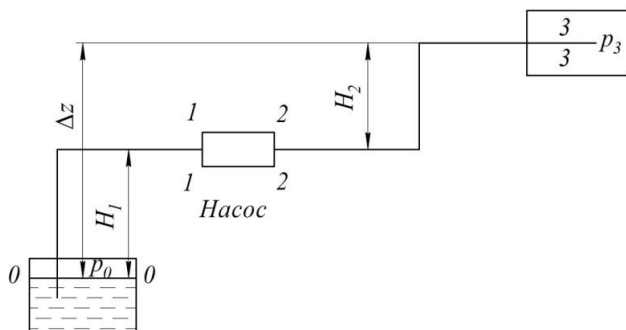


Рис. 3.21. Разомкнутый трубопровод: H_1 – геометрическая высота всасывания; H_2 – геометрическая высота нагнетания

Уравнение показывает, что процесс всасывания происходит за счёт использования с помощью насоса давления P_0 , использовать которое необходимо предельно аккуратно, чтобы перед входом в насос остался ещё некоторый запас давления P_1 , необходимый для бескавитационной работы.

Возможны следующие задачи на расчёт всасывающего трубопровода:

- даны все размеры и расход, при этом необходимо найти давление на входе в насос;

- дано $P_{1\min}$, т.е. минимально допустимое давление перед входом в насос. Необходимо найти одну из следующих предельно допустимых величин: $H_{1\max}$, Q_{\max} , d_{\min} , $P_{0\min}$.

А теперь запишем уравнение Бернулли для линии нагнетания, т.е. для сечений 2-2 и 3-3.

$$\frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} = H_2 + \frac{P_3}{\gamma} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2g} + \Sigma h_{2-3}, \quad (3.87)$$

где $\frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g}$ – удельная энергия жидкости на выходе из насоса;

$\frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_0}{\gamma} - H_1 - \Sigma h_{0-1}$ – удельная энергия жидкости на входе в насос.

Приращение удельной энергии жидкости при прохождении через насос (напор насоса) определится

$$H_{\text{нас}} = \left(\frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \right) = H_1 + H_2 + \frac{P_3 - P_0}{\gamma} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2g} + \Sigma h_{01} + \Sigma h_{2-3} = \Delta z + \frac{P_3 - P_0}{\gamma} + cQ^2 + kQ^m,$$

где Δz – полная геометрическая высота подъёма жидкости,

$$cQ^2 = \alpha_3 \frac{v_3^2}{2g} \text{ – скоростной напор в сечении 3-3;}$$

kQ^m – сумма гидравлических потерь во всасывающем и нагнетающем трубопроводе.

Если к Δz добавить ещё пьезометрическую разность $\frac{P_3 - P_0}{\gamma}$, т.е. $\Delta z' = \Delta z + \frac{P_3 - P_0}{\gamma}$, то выражение для напора насоса будет иметь вид

$$H_{\text{нас}} = \Delta z' + cQ^2 + kQ^m.$$

Получаем очевидный результат

$$H_{\text{нас}} = H_{\text{потр}}.$$

Выполнение этого равенства является необходимым условием для обеспечения устойчивой работы насоса. Выполнение этого условия обеспечивается обычно автоматически.

На этом равенстве основывается метод расчёта трубопроводов, питаемых насосом, который заключается в построении

на одном графике двух кривых: $H_{\text{нотр}} = f_1(Q)$ и $H_{\text{нас}} = f_2(Q)$ (рис. 3.22) и определении точки их пересечения, которая носит название рабочей точки, т.к. всегда реализуется режим работы, соответствующий именно этой точке, чтобы получить другую рабочую точку необходимо или изменить характеристику трубопровода или изменить число оборотов насоса.

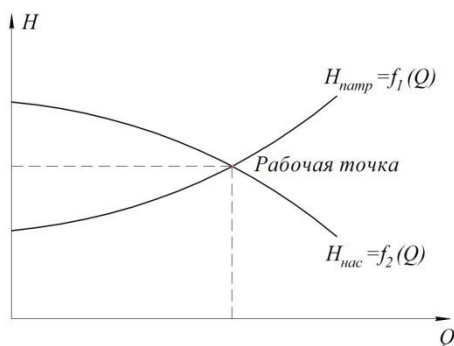


Рис. 3.22. Схема поиска рабочей точки

Рассмотренный приём определения положения рабочей точки применим в том случае, когда число оборотов насоса не зависит от мощности потребляемой насосом, т.е. нагрузки на валу насоса. Изложенный расчётный приём определения положения рабочей точки применим, когда число оборотов ротора насоса не зависит от нагрузки на валу насоса.

В противном случае необходимо строить кривые потребляемых и располагаемых мощностей по числам оборотов и по точке их пересечения определять рабочее число оборотов и мощности.

Для замкнутого трубопровода при насосной подаче будем иметь

$$H_{\text{нотр.}} = \Sigma h = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} = H_{\text{нас}}, \quad (3.88)$$

т.к. при этом в случае $v_1 = v_2$, $\Delta z = 0$.

Необходимо отметить, что замкнутый трубопровод должен иметь расширительный или компенсационный бачок, соединённый обычно с сечением у входа в насос, где абсолютное давление в трубопроводе будет неопределённым. В случае расширительного бачка оно вполне определённое и равно

$$P_1 = P_0 + H_0 \gamma, \quad (3.89)$$

где P_0 – давление в расширительном бачке,

H_0 – уровень жидкости в бачке по сравнению с сечением на входе.

3.7. Относительное и неустановившееся движение жидкости в трубах

3.7.1. Уравнение Бернулли для относительного движения

Ранее полученные формы уравнения Бернулли справедливы лишь в том случае, когда из числа массовых сил на жидкость действуют лишь только силы тяжести. В авиационной и ракетной технике зачастую приходится сталкиваться с течениями жидкости, при расчёте которых необходимо учитывать силы инерции переносного движения.

Если возникающая при этом сила инерции постоянна во времени, т.е. движение равноускоренное, то течение жидкости относительно стенок русла будет установившимся и для него можно получить уравнение Бернулли в следующей форме.

Берём одну из элементарных струек жидкости, составляющих поток, и с помощью сечений 1-1 и 2-2 выделяем участок этой струйки произвольной длины как показано на рис. 3.23.

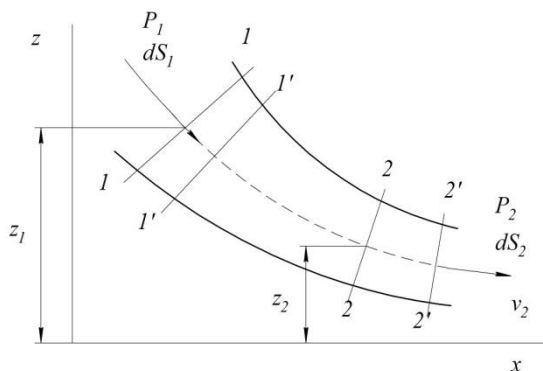


Рис. 3.23. Струйка жидкости, составляющей поток

Параметры в сечении 1-1 и 2-2 будут соответственно $dS_1; v_1; P_1; z_1$ и $dS_2; v_2; P_2; z_2$.

За некоторый отрезок времени dt выделенный участок струйки переместится в положение $1' - 2'$.

Применим к выделенному участку струйки теорему об изменении кинетической энергии, согласно которой работа сил, приложенных к телу, равна изменению кинетической энергии этого тела.

Таковыми силами в нашем случае будут:

- силы давления, действующие нормально к поверхности рассматриваемого участка струи, работа которых равна в сечениях 1-1 и 2-2 соответственно

$$P_1 dS_1 v_1 dt; -P_2 dS_2 v_2 dt;$$

- силы давления, которые действуют на боковых участках струи, работы не производят, т.к. они нормальны к направлению перемещения;

- работа силы тяжести будет равна изменению потенциальной энергии положения участка струи. Так как веса отрезков $1-1'$ и $2-2'$ согласно уравнению неразрывности равны между собой т.е.

$$\gamma v_1 dS_1 dt = \gamma v_2 dS_2 dt = \delta G,$$

то работа сил тяжести выразится как произведение разности высот участков на их вес

$$(z_1 - z_2) \delta G;$$

- удельную работу сил инерции, так называемый инерционный напор, обозначим в общем случае $\Delta H_{ин}$.

Чтобы подсчитать приращение кинетической энергии рассматриваемого участка струи за время dt , необходимо из кинетической энергии объёма 1-2 вычислить кинетическую энергию объёма 1' - 2'. В результате будем иметь

$$(v_2^2 - v_1^2) \frac{\delta G}{2g}.$$

Сложив удельную работу сил давления, сил тяжести и инерционных сил и приравняв эту сумму к приращению удельной кинетической энергии системы будем иметь

$$\Delta H_{ин} + \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \quad (3.90)$$

Для вязкой жидкости с учётом потерь и неравномерности распределения поля скоростей в сечении будем иметь

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma h + \Delta H_{ин}, \quad (3.91)$$

где α_1 и α_2 - безразмерные коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения скоростей в контрольных сечениях и равные

$$\alpha = \frac{\int v^3 dS}{v_{cp}^3 S}; \quad (3.92)$$

Σh - суммарные потери удельной энергии (напора) на участке между рассматриваемыми сечениями.

А теперь рассмотрим конкретные виды инерционного напора для следующих основных случаев относительного движения жидкости $\Delta H_{ин}$.

3.7.2. Прямолинейное равноускоренное движение русла

Если русло, по которому течёт жидкость, движется прямолинейно с постоянным ускорением a , м/с^2 , то на все частицы жидкости действует постоянная одинаковая во времени сила инерции переносного движения. Удельное значение этой силы, отнесенное к массе, будет равно ускорению и направлено в сторону, обратную ускорению. Соответственно на каждую единицу веса будет действовать сила инерции равная $\frac{1}{g}a$. Тогда ра-

бота этой силы будет равна $\Delta H_{ин} = \frac{a}{g}La$, где La – проекция рассматриваемого участка русла между сечениями на направление ускорения.

При этом необходимо пользоваться для $\Delta H_{ин}$ следующим правилом знаков, если ускорение направлено от 1 к 2, то сила инерции препятствует перемещению и должна входить в правую часть уравнения Бернулли со знаком \oplus , т.е. в этом случае инерционный напор будет оказывать действие на поток аналогично гидравлическим потерям, которые всегда имеют знак \oplus в правой части.

3.7.3. Вращение русла вокруг вертикальной оси

Пусть русло, по которому движется жидкость, вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω .

Тогда на жидкость будет действовать сила инерции вращательного движения, являющаяся функцией радиуса, а поэтому для подсчёта работы этой силы необходимо применить интегрирование.

На единицу веса будет действовать сила инерции $\frac{\omega^2}{g}r$. Работы этой силы при перемещении вдоль радиуса на расстоянии dr будет соответственно $\frac{\omega^2}{g}rdr$. После интегрирования соответственно в пределах r_1 и r_2 получим

$$\Delta H_{ин} = -\frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_2^2) = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}. \quad (3.93)$$

Знак инерционного напора, который получаем после интегрирования соответствует изложенному выше правилу знаков.

3.7.4. Движение жидкости в условиях невесомости

Это движение характерно тем, что результирующая массовых сил, действующих на каждую частицу жидкости, равна нулю, т.к. сила тяжести уравнивается инерционной силой переносного движения, следовательно, в исходном уравнении Бернулли, необходимо положить

$$z_1 - z_2 = \Delta H_{ин}. \quad (3.94)$$

Жидкость, которая находится в условиях невесомости, теряет способность образовывать сводную поверхность раздела с газообразной средой обычной формы. При этом в баке образуется двухфазная среда, возможен также случай, когда газ сосредотачивается в центре бака в виде ядра сферической формы, а жидкость обволакивает всю внутреннюю поверхность бака. Поэтому в условиях невесомости необходимо избегать непосредственного контакта между жидкостью и газом.

При отсутствии контакта между жидкостью и газом течение жидкости по трубопроводам под действием перепада давления в условиях невесомости будет отличаться от течения в

обычных условиях лишь отсутствием влияния разности нивелирных высот Δz_2 . В случае же больших перепадов давления и при течении в замкнутых трубопроводах никакого различия между течениями в условиях невесомости и в обычных условиях не будет.

Дополнительно отметим, что истечение жидкости через отверстия и насадки под достаточно большим напором в газовую среду при невесомости также не имеет каких-либо существенных особенностей, т.е. истечение жидкости через форсунку и распыливание её в камере сгорания ЖРД.

3.7.5. Неустановившееся течение жидкости в трубах

Рассмотрим два частных случая:

- неустановившееся движение жидкости в трубе постоянного сечения;
- неустановившееся течение жидкости в трубопроводе, составленном из ряда последовательно соединённых труб разных диаметров

Труба произвольно расположена в пространстве, параметры указаны на рис. 3.24.

Жидкость движется с ускорением, которое может быть переменным во времени и равным

$$j = \frac{dv}{dt}. \quad (3.95)$$

Очевидно, что в данный момент времени v и j одинаковы для всех сечений трубопровода.

Будем полагать, что распределение скоростей по сечениям равномерное, а потери на трение отсутствуют.

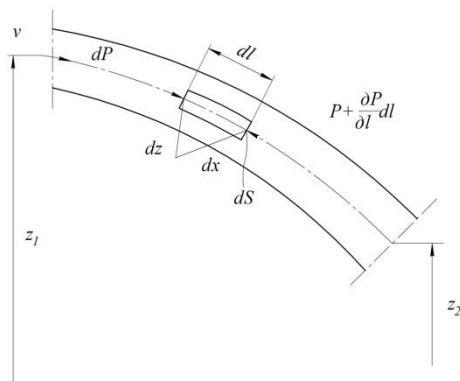


Рис. 3.24. Труба с произвольным расположением в пространстве

Выделим в жидкости элементарный контрольный объём и составим уравнение его движения

$$PdS - \left(P + \frac{\partial P}{\partial l} dl \right) dS + \gamma dS dl \cos \alpha = \frac{\gamma}{g} dS dl \frac{dv}{dt}, \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} dl + \gamma \cos \alpha dl = \frac{\gamma}{g} \frac{dv}{dt} dl, \quad (3.97)$$

а т.к. $\cos \alpha = -\frac{\partial z}{\partial l}$, $-\frac{\partial P}{\partial l} dl - \gamma \frac{\partial z}{\partial l} dl = \frac{\gamma}{g} j dl$, то после интегрирования будем иметь

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{j}{g} l \quad (3.98)$$

или

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + h_{ин}, \quad (3.99)$$

$$h_{ин} = \frac{j}{g} l, \quad (3.100)$$

где $h_{ин}$ – инерционный напор, обусловленный ускорением (торможением) жидкости в трубе.

При наличии гидравлических потерь они по аналогии с уравнением Бернулли записываются в правой части полученного уравнения.

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \Sigma h + h_{ин}. \quad (3.101)$$

Это уравнение справедливо для трубы с $d = const$. Если трубопровод состоит из нескольких участков с различными d , то $h_{ин}$ должен быть найден как сумма $\sum h_{ин}$ для различных участков, при этом ускорение определяется согласно выражению

$$\frac{dQ}{dt} = S_1 j_1 = S_2 j_2 = S_3 j_3 = \dots \quad (3.102)$$

Кроме того, в этом случае необходимо учитывать скоростные напоры в начальном и конечном сечениях трубопровода.

Таким образом, уравнение неустановившегося течения жидкости примет вид

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma h + \Sigma h_{ин}. \quad (3.103)$$

Уравнение в таком виде находит широкое применение в расчётах самолётных гидросистем и систем питания жидкостно-ракетных двигателей.

3.7.6. Гидравлический удар в трубах

Гидроудар есть колебательный процесс, возникающий в упругом трубопроводе с малосжимаемой жидкостью при внезапном изменении её скорости или давления. Процесс быстротечен и характерен чередованием резких повышений и понижений давления, которое связано с упругими деформациями жидкости и стенок трубопровода.

Опишем физику явления гидравлического удара, который чаще всего возникает в результате быстротечного закрывания или открывания крана другого устройства управления потоком.

Более подробное исследование этого явления было выполнено Н. Е. Жуковским [10].

На рис. 3.25 показан полный цикл гидравлического удара. В опытах Н.Е. Жуковского было зарегистрировано по 12 полных циклов с постепенным уменьшением ΔP_{y0} вследствие трения и ухода энергии в резервуар.

Действительная картина протекания процесса во времени несколько отлична от представленной на рис.3.25. Во-первых, давление нарастает хотя и очень быстро, но не мгновенно, а его амплитуда несколько падает вследствие рассеивания энергии: в точке А непосредственно у крана и в точке В, находящейся на середине трубы.

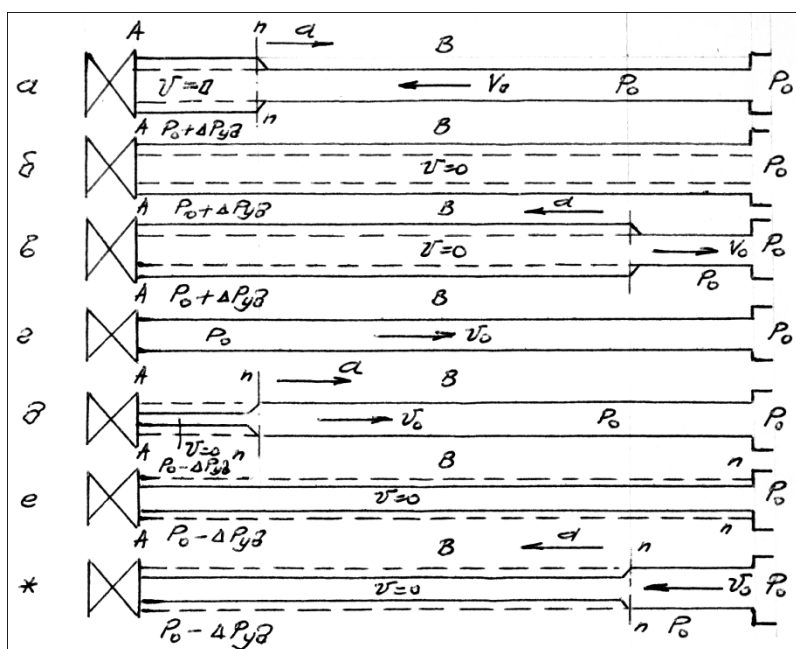


Рис. 3.25. Полный цикл гидравлического удара

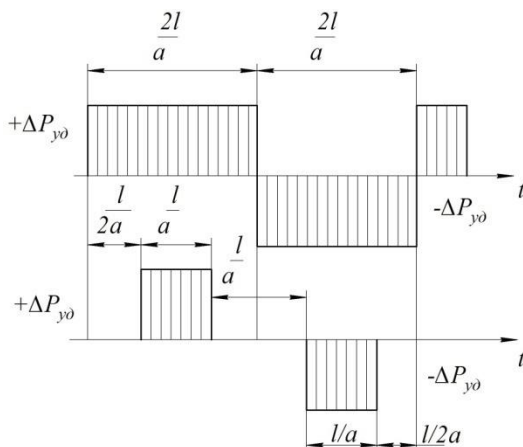


Рис. 3.26. Эпюры давлений

Величина ΔP_{y0} может быть найдена из условия, что кинетическая энергия жидкости переходит в работу деформации стенок трубы и деформацию жидкости.

Кинетическая энергия столба жидкости будет

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 l \rho v_0^2. \quad (3.104)$$

Работа деформации составляет 0,5 произведения силы на удлинение

$$\frac{1}{2} \Delta P_{y0} 2\pi R l \Delta R. \quad (3.105)$$

По закону Гука

$$\frac{\Delta R}{R} E = \sigma, \quad (3.106)$$

но

$$\sigma = \frac{\Delta P_{y0} R}{\delta}, \quad (3.107)$$

где δ – толщина стенок трубы.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta P_{y0} 2\pi R l \Delta R &= \frac{1}{2} \Delta P_{y0} 2\pi R l \frac{R\sigma}{\Delta R E} = \\ &= \frac{1}{2} \Delta P_{y0} 2\pi R l \frac{R\sigma}{\Delta R E} \frac{\Delta P_{y0} R}{\delta} = \frac{\Delta P_{y0}^2 \pi R^3 l}{E \delta}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Получили выражение для работы деформации стенок трубы. Работу сжатия жидкости соответственно определим

$$\frac{1}{2} S \Delta P_{y0} \Delta l = \frac{1}{2} \Delta P_{y0} \Delta W. \quad (3.109)$$

Относительное изменение объёма жидкости связано с давлением зависимостью

$$\frac{\Delta W}{W} K = \Delta P_{y0}, \quad (3.110)$$

где K – объёмный модуль упругости жидкости.

Тогда будем иметь для работы сжатия

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta P_{y0}^2 \pi R^2 l}{K}. \quad (3.111)$$

Следовательно, уравнение кинетической энергии будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \pi R^2 l \rho v_0^2 = \frac{\pi R^3 l \Delta P_{y0}^2}{\delta E} + \frac{\pi R^2 l \Delta P_{y0}^2}{2K}. \quad (3.112)$$

Откуда получаем формулу Н. Е. Жуковского

$$\Delta P_{y0} = \rho v_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho R}{\delta E}}}. \quad (3.113)$$

Выражение $\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho R}{\delta E}}}$ имеет размерность скорости и при

$E = \infty$, т.е. для абсолютно жёсткой трубы приобретает вид

$\sqrt{\frac{K}{\rho}}$, т.е. скорость звука в однородной упругой среде, которая для воды составляет 1435 м/с, бензина 1116 м/с, масла 1400 м/с.

В нашем случае $E \neq \infty$ и $\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho R}{\delta E}}} = a$ есть скорость рас-

пространения ударной волны в жидкости, которая заполняет упругий трубопровод. Это можно доказать, если рассмотреть элементарное перемещение ударной волны dx за время dt и применить теорему об изменении количества движения. Имеем

$$\left[(P_0 + \Delta P_{y\partial}) - P_0 \right] S dt = (v_0 - 0) \rho S dx.$$

Отсюда $a = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta P_{y\partial}}{\rho v_0}$ – скорость распространения ударной волны. $\Delta P_{y\partial} = \rho v_0 a$ т.е. получаем формулу аналогичную полученному выражению.

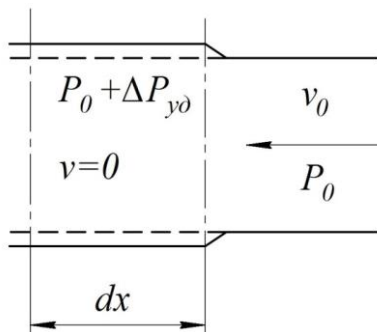


Рис. 3.27. Элементарное перемещение ударной волны

Если скорость в трубопроводе гасится не до 0, а до некоторой конечной величины v , то будет иметь место так называемый неполный гидравлический удар и формула Н. Е. Жуковского принимает вид

$$\Delta P_{y\partial} = \rho a (v_0 - v). \quad (3.114)$$

Эта формула справедлива, когда $t_{\text{закр}} < t_0 = 24a$, т.е. очень быстрое закрывание крана, где t_0 – фаза гидравлического удара. При этом происходит так называемая прямой гидравлический удар.

Если $t_{\text{закр}} > t_0$ возникает не прямой гидравлический удар, при этом ударная волна возвращается к запорному устройству раньше, чем оно полностью закроется и при этом $\Delta P'_{\text{уд}} < \Delta P_{\text{уд}}$

В линейном предположении

$$\frac{\Delta P'_{\text{уд}}}{\Delta P_{\text{уд}}} = \frac{t_0}{t_{\text{закр}}}, \quad (3.115)$$

$$\Delta P'_{\text{уд}} = \frac{t_0}{t_{\text{закр}}} \Delta P_{\text{уд}} = \frac{2l}{at_{\text{закр}}} \rho v_0 a = \frac{2l \rho v_0}{t_{\text{закр}}}, \quad (3.116)$$

где $\Delta P'_{\text{уд}}$ зависит от длины трубы и, в отличие от $\Delta P_{\text{уд}}$, не зависит от a .

Особо следует рассмотреть так называемый тупиковый трубопровод, в котором возможно увеличение ударного давления в два раза.

Действительно, это утверждение можно проиллюстрировать следующим примером, представленном на рис. 3.28.

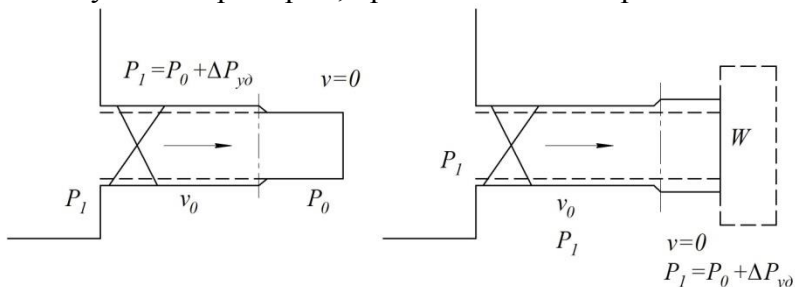


Рис. 3.28. Тупиковый трубопровод

При мгновенном открытии крана произойдет увеличение давления в трубопроводе на

$$\Delta P_{\text{уд}} = P_1 - P_0. \quad (3.117)$$

Возникавшая ударная волна, согласно формуле Н. Е. Жуковского, будет перемещаться со скоростью

$$v_0 = \frac{\Delta P_{y\partial}}{\rho a}. \quad (3.118)$$

В момент подхода к тупику давление во всём объёме жидкости возрастает на величину $\Delta P_{y\partial}$ и жидкость приобретает скорость v_0 , в результате гашения которой, давление ещё возрастает на $\Delta P_{y\partial} = \rho v_0 a$. В результате в конце трубопровода возникнет новая отражённая волна, за фронтом которой давление возрастёт на $2\Delta P_{y\partial}$.

Если в конце трубопровода имеется объём V , заполненный жидкостью, например, силовой гидроцилиндр, то этот объём будет оказывать демпферное влияние и давление повышается меньше, чем в 2 раза. При весьма большом объёме V отражение волны практически не происходит.

Полученная формула для $\Delta P_{y\partial}$, несмотря на упрощающие допущения при её выводе, достаточно хорошо подтверждается экспериментом, это можно объяснить тем, что в случае внезапного торможения происходит интенсивный сдвиг слоёв жидкости и, как следствие, большая потеря энергии на внутреннее трение, которая и компенсирует избыток кинетической энергии за счёт неравномерности поля скоростей. Потеря энергии на трение и рассеивание энергии в процессе удара способствует затуханию колебаний.

Для борьбы с гидравлическим ударом предусмотрены следующие способы:

- увеличение времени срабатывания кранов для избежания прямого удара;
- установка компенсаторов в виде местных объёмов или гидроаккумуляторов;
- уменьшение скорости (увеличение d) и уменьшение длины трубопровода.

4. ДВИЖЕНИЕ ГАЗА БЕЗ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

Соотношения термодинамики. При больших скоростях течения газа, сравнимых со скоростью звука, изменение скорости приводит к изменению плотности. Особенности такого движения изучаются газовой динамикой.

Как известно из курса технической термодинамики, основные параметры состояния газа – давление p , плотность ρ и абсолютная температура T связаны для идеальных газов уравнением состояния

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (4.1)$$

где R – газовая постоянная, Дж/(кг·К). Для воздуха $R = 287,1$ Дж/(кг·К).

В большинстве задач, рассматриваемых газодинамикой, процессы изменения состояния газа можно считать адиабатными; из-за их быстротечности они осуществляются без теплообмена с окружающими телами. При адиабатном процессе давление и плотность связаны соотношением

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \text{ или } \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k, \quad (4.2)$$

где $k = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты; c_p и c_v – теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме.

Для воздуха и других двухатомных газов $k = 1,4$, для перегретого водяного пара $k = 1,33$.

Используя уравнение состояния, получим для адиабатного процесса формулы связи между давлением, плотностью и температурой

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (4.3)$$

В задаче о движении газа в длинной трубе без теплоизоляции стенок процесс изменения состояния принимается изотермическим: длительный контакт со стенками трубы приводит к тому, что температура газа не отличается от температуры стенки. Для изотермического процесса

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

4.1. Скорость звука. Число Маха

В пункте 3.7.6 получены общие формулы для скорости распространения малых возмущений в жидкости, а именно

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Процесс изменения параметров газа в звуковой волне, которая представляет собой распространяющиеся в газе слабые возмущения давления и плотности, следует считать адиабатным. Из уравнения (4.2) имеем

$$p = C\rho^k; \quad dp = kC\rho^{k-1}d\rho; \quad \frac{dp}{d\rho} = kC\rho^{k-1} = k\frac{p}{\rho}.$$

Подставляя последнее равенство в формулу для скорости звука, получаем

$$a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}}.$$

Используя уравнение состояния (4.1), введем в формулу для a температуру T

$$a = \sqrt{kRT}.$$

В частности, для воздуха, подставляя величины k и R , имеем

$$a = 20,1\sqrt{T}.$$

При температуре 15°C последняя формула дает $a = 340$ м/с.

Скорость звука – одна из важнейших механических характеристик газа. Законы его движения резко отличаются в зависимости от соотношения скорости газа v и скорости звука a .

Отношение

$$M = \frac{v}{a} \quad (4.4)$$

называется *числом Маха*. Течения, в которых $v < a$ и $M < 1$, называются *дозвуковыми*. Если $v > a$ и $M > 1$, течение *сверхзвуковое*.

4.2. Уравнение энергии

Рассмотрим установившееся одномерное движение газа. Если единственной внешней силой, действующей на газ, является сила тяжести, то такое течение описывается дифференциальным уравнением (2.14). Вследствие малой плотности газа допустимо пренебречь в этом уравнении членом, учитывающим изменение высоты струйки над плоскостью сравнения, так как для частицы газа сила веса пренебрежимо мала по сравнению с силами инерции и давления.

Уравнение (2.14) приобретает вид

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) представляет собой уравнение энергии для газа, записанное в дифференциальной форме.

Считая течение адиабатным, выразим в последнем уравнении дифференциал давления через изменение плотности с помощью уравнения адиабаты (4.2)

$$dp = kC\rho^{k-1}d\rho; \frac{dp}{\rho} = kC\rho^{k-2}d\rho.$$

Подставляя уравнение в (4.5) и интегрируя вдоль струйки, получим уравнение энергии в интегральной форме, или уравнение Бернулли-Сен-Венана (1839)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = const. \quad (4.6)$$

Уравнение Бернулли-Сен-Венана можно представить иначе. Разделив его члены на g , получим

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\gamma} = const. \quad (4.7)$$

Сравнивая выражение (4.7) с уравнения Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости (2.16), видим, что отличие состоит в множителе $\frac{k}{k-1}$ при пьезометрической высоте $\frac{p}{\gamma}$. Появление этого множителя, который для воздуха, например, равен $\frac{k}{k-1} = \frac{1,4}{1,4-1} = 3,5$, связано с тем, что в потенциальную энергию газа входит ещё и его внутренняя энергия. Иногда говорят, что в случае газа к пьезометрическому напору добавляется «температурный напор».

Выражая в уравнении энергии (4.6) отношение $\frac{p}{\rho}$ через уравнение состояния (4.1), получим

$$\frac{v^2}{2} + \frac{kRT}{k-1} = const. \quad (4.8)$$

Последнее равенство показывает, что при отсутствии теплообмена с внешней средой увеличение скорости вдоль струйки приводит к падению температуры газа и наоборот.

Используя формулу для скорости звука (4.5), уравнение энергии (4.6) можно представить в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = const, \quad (4.9)$$

откуда ясно, что скорость движения газа и скорость звука взаимосвязаны: увеличение скорости течения приводит к уменьшению скорости звука. Вследствие адиабатного охлаждения она меньше скорости звука, соответствующей начальному состоянию газа, когда скорость равна нулю и температура наибольшая.

Выражение (4.9) позволяет выяснить смысл постоянной в правой части уравнения энергии. Действительно, в покоящемся газе $v = 0$ и скорость звука достигает здесь своей наибольшей величины a_0 . Следовательно, $const = \frac{a_0^2}{k-1}$ и уравнение энергии может быть представлено в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}. \quad (4.10)$$

Наконец, если использовать понятие энтальпии, или тепло-содержания, газа i , рассматриваемое в термодинамике

$$i = c_p T = \frac{k}{k-1} RT,$$

то уравнение энергии (4.8) приобретает вид

$$\frac{v^2}{2} + i = const. \quad (4.11)$$

Таким образом, потенциальная энергия газа выражается в различных формах уравнения энергии (4.6)-(4.11) с помощью различных взаимосвязанных параметров – давления, темпера-

туры, скорости звука, энтальпии. Ниже показаны примеры применения уравнения энергии в различных формах записи для решения задач одномерного течения.

4.3. Связь скорости газа с сечением потока. Сопло Лавалья

Выясним зависимость скорости течения от площади поперечного сечения потока. Для газа уравнение неразрывности (2.7), или уравнение постоянства массового расхода при установившемся течении имеет вид

$$\rho v f = \text{const} . \quad (4.12)$$

Логарифмируя и дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{df}{f} = 0 , \quad (4.13)$$

откуда

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dv}{v} \left(1 + \frac{\rho}{\frac{dv}{v}} \right) . \quad (4.14)$$

Из уравнения энергии в дифференциальной форме (4.5) имеем

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{v^2} \frac{dp}{\rho} ,$$

что даёт после подстановки в уравнение (4.14)

$$\frac{dF}{F} = \frac{dv}{v} \left(v^2 \frac{d\rho}{dp} - 1 \right) .$$

Поскольку согласно ранее приведенной формуле $\frac{dp}{d\rho} = a^2$,

имеем

$$\frac{dF}{F} = \frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{dv}{v} (M^2 - 1). \quad (4.15)$$

Из уравнения (4.15) следует, что изменение скорости dv при изменении сечения dF происходит по-разному для дозвукового и сверхзвукового течения. В дозвуковом потоке ($v < a$, $M < 1$, рис. 4.1, а) знаки dv и dF в (4.15) противоположны: уменьшение сечения в конфузорном канале приводит к возрастанию скорости, а в диффузорном канале скорость по потоку уменьшается. При сверхзвуковом течении ($v > a$, $M > 1$, рис. 4.1, б) в конфузорном канале поток замедляется, в диффузорном — ускоряется.

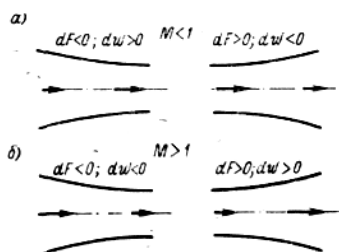


Рис. 4.1. Изменение скорости при разных числах Маха

Чтобы пояснить полученные результаты, которые для сверхзвукового течения кажутся неожиданными, сопоставим уравнения (4.15) и (4.14). Имеем

$$M^2 = - \frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\frac{dv}{v}}. \quad (4.16)$$

Поскольку левая часть равенства (4.16) всегда положительна, ясно, что знаки $d\rho$ и dv всегда противоположны: рост скорости приводит к уменьшению плотности. Но при дозвуковом течении ($M^2 < 1$) скорость изменяется более быстро, чем плотность

$$\frac{dv}{v} > \frac{d\rho}{\rho}.$$

При сверхзвуковом течении, наоборот, более быстро уменьшается плотность

$$\frac{dv}{v} < \frac{d\rho}{\rho}.$$

Для получения сверхзвуковых скоростей газа в технике используется сопло Лавалья (1889), схема которого приведена на рис. 4.2, принцип действия которого ясен из приведённых рассуждений. В дозвуковом потоке, поступающем в суживающуюся часть сопла Лавалья, скорость увеличивается. Если в наименьшем сечении сопла не достигается скорость, равная скорости звука, то в расширяющейся части происходит её уменьшение; скорость по длине сопла изменяется по кривой 1 (рис. 4.2). Если перепад давления достаточно велик, чтобы в наименьшем сечении скорость течения сравнялась со скоростью звука, то при дальнейшем расширении поток переходит в сверхзвуковой и скорость его изменяется по кривой 2.

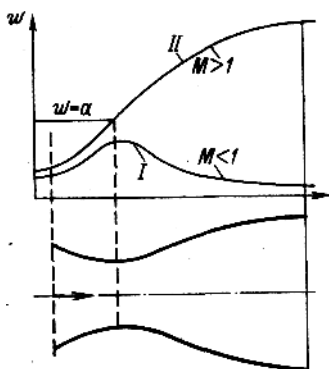


Рис. 4.2. Изменение скорости по длине сопла

Сопло Лавалья имеет широкое применение, являясь составной частью реактивных двигателей, сопловых аппаратов неко-

торых турбин (в которых рабочие лопатки обтекаются сверхзвуковым потоком), сверхзвуковых аэродинамических труб и т.д. Более полная теория сопла учитывает влияние трения на стенках и волновых явлений на выходе потока.

4.4. Параметры изоэнтропического торможения газа

При торможении газа его кинетическая энергия переходит в потенциальную, при этом давление, плотность и температура возрастают.

В случае полного торможения (остановки) потока, например в точке раздвоения струйки на передней поверхности обтекаемого тела, p, ρ, T достигают максимальных для данного потока величин – параметров торможения p_0, ρ_0, T_0 . Определим эти величины для адиабатного изоэнтропического процесса торможения, при котором давление и плотность газа связаны соотношением (4.2).

Применим уравнение (4.9) к сечениям струйки «на бесконечности», т.е. там, где на поток не сказывается искажающее влияние обтекаемого тела, и в точке торможения

$$\frac{v_{\infty}^2}{2} + \frac{a_{\infty}^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}.$$

Как и следовало ожидать, мы получили частный случай уравнения (4.10). Разделив последнее выражение на $\frac{a_{\infty}^2}{k-1}$, получаем

$$\frac{k-1}{2} \frac{v_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} + 1 = \frac{a_0^2}{a_{\infty}^2}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{v_\infty}{a_\infty} = M_\infty$, где M_∞ – число M для невозмущённого потока, и что согласно формуле $\frac{a_0^2}{a_\infty^2} = \frac{T_0}{T_\infty}$, имеем

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2. \quad (4.17)$$

Повышение температуры газа у поверхности тела, обтекаемого при больших числах M , называется аэродинамическим нагревом. Отметим, что термометр, помещённый в поток газа, показывает температуру, очень близкую к температуре торможения.

Используя зависимости (4.3), связывающие температуру адиабатного процесса с давлением и плотностью, получим

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho_0}{\rho_\infty} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (4.18)$$

Зависимость температуры, давления и плотности торможения от числа M_∞ представлена графически на рис. 4.3.

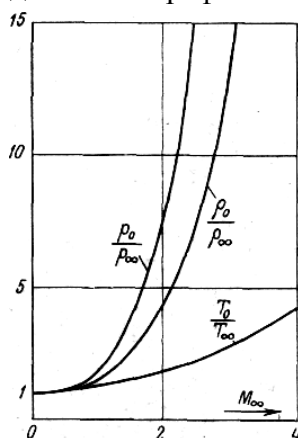


Рис. 4.3. Зависимость теплофизических параметров от числа Маха

Расчёт по формулам (4.17) и (4.18) показывает, что при $M = 0,2$ (для воздуха при $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ это соответствует скорости 68 м/с) сжимаемость газа приводит к поправкам в плотности торможения на 2% , в давлении и температуре – порядка 1% . Ввиду малости этих поправок ими пренебрегают, считая газ при малых скоростях несжимаемой жидкостью. В задачах, не требующих высокой точности решения, можно считать газ несжимаемым и при больших числах M (порядка $0,3$).

Выражения (4.17) и (4.18) являются ещё одной формой записи уравнения (4.6).

4.5. Истечение газа из резервуара. Максимальная и критическая скорости

Исследуем истечение газа из резервуара, где он находился под давлением p_0 , в среду с давлением p .

Применяя к сечениям струйки газа в резервуаре, где скорость близка к нулю, и в сжатом сечении уравнение энергии в форме (4.6), имеем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \right)}.$$

Выражая отношение $\frac{\rho_0}{\rho}$ через отношение $\frac{p}{p_0}$ с помощью уравнения адиабаты (4.2) и используя уравнение состояния, получим формулу Сен-Венана и Ванцеля (1839) для скорости адиабатного истечения газа

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot RT_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (4.19)$$

Если газ вытекает в пустоту ($p = 0$), то достигается максимальная скорость истечения

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k-1}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}. \quad (4.20)$$

В частности, если в пустоту вытекает воздух при температуре 15°C , то $v_{\max} = 760 \text{ м/с}$.

При постепенном уменьшении давления в среде, в которую вытекает газ, начиная от $p = p_0$, согласно формуле (4.20) растёт скорость истечения (рис. 4.4).

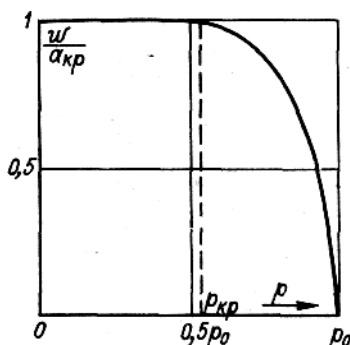


Рис. 4.4. Изменение линии скорости от внешнего давления

Возрастание скорости в соответствии с уравнением энергии в форме (4.9) приводит к уменьшению местной скорости звука a . Наконец, при достаточно малом давлении среды

$$p = p_{kp} = p_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (4.21)$$

называемого критическим давлением, скорость истечения достигает максимума, она сравнивается с местной скоростью звука, устанавливается критическая скорость потока $a_{кр}$. Плотность и температура газа при этом также достигает критических значений, определяемых формулами

$$\rho_{кр} = \rho_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}; T_{кр} = T_0 \frac{2}{k+1}. \quad (4.22)$$

Величину критической скорости легко определить из уравнения энергии в форме (4.9) или (4.10), если принять $v = a = a_{кр}$, то

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}. \quad (4.23)$$

В частности, для воздуха, имеющего температуру 15 °С, $a_{кр} = 0,91$ м/с, $a_0 = 310$ м/с. При дальнейшем уменьшении противодавления p скорость истечения остаётся неизменной и равной $a_{кр}$ (рис. 4.4).

Постоянство скорости (и расхода) при $p < p_{кр}$ можно объяснить следующим образом. Представим себе (рис. 4.5), что газ вытекает из резервуара 1 в вакуумную камеру 2 через трубу, давление в которой регулируется краном K . При $p > p_{кр}$ скорость $v < a_{кр}$ и при открытии крана волны разрежения от него, распространяясь навстречу струе, соответственно увеличивают скорость истечения. Если достигнута звуковая скорость истечения, то волны разрежения от крана уже не могут распространяться навстречу струе и понижение давления p не меняет скорость течения $v = a_{кр}$.

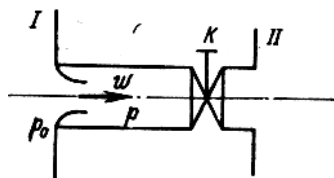


Рис. 4.5. Схема течения газа

Величина критической скорости $a_{кр}$ остаётся постоянной вдоль струйки. Поэтому удобно измерять скорость течения в долях этой величины; так вводится безразмерная скорость газа, иногда называемая коэффициентом скорости

$$\lambda = \frac{v}{a_{кр}}. \quad (4.24)$$

Здесь в знаменателе безразмерная скорость – величина постоянная вдоль струйки, тогда как в выражении (4.4) знаменатель является переменной величиной. При $v = a_{кр}$ имеем $\lambda = M = 1$. Связь между этими величинами очевидна из отношения

$$\frac{M}{\lambda} = \frac{a_{кр}}{a} = \frac{a_0}{a} \sqrt{\frac{2}{k+1}}.$$

Используя уравнение энергии в форме (4.10), получим

$$M = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \lambda^2}}.$$

Газодинамические функции для воздуха ($k=1,4$)

$$\tau = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2, \quad \pi = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad q = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \varepsilon(\lambda).$$

Переходя в формулах для параметров торможения газа (4.17) и (4.18) от числа M к λ , получим соотношения

$$\tau(\lambda) = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2; \pi(\lambda) = \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (4.25)$$

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Формулы (4.25) дают изменение параметров газа вдоль струйки в зависимости от скорости. Они носят название газодинамических функций. Их численные значения для различных k и λ (или M) сведены в таблицы и графики газодинамических функций. В частности, величины газодинамических функций для воздуха ($k=1,4$) даны в табл. 4.1. В таблицах газодинамических функций даются также значения приведённого расхода $q(\lambda)$ (отношение удельного расхода массы газа в произвольном сечении струйки к расходу в критическом сечении. Использование таблиц газодинамических функций облегчает расчёты.

Таблица 4.1

λ	τ	π	ε	q	M
1	2	3	4	5	6
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,9996	0,9986	0,9990	0,0788	0,0457
0,10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,0914
0,15	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	0,1372
0,20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,1830
0,25	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,2290
0,30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,2760
0,35	0,9796	0,9303	0,9497	0,5243	0,3228
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,3701
0,45	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,4179
0,50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,4663
0,55	0,9496	0,8344	0,8787	0,7623	0,5152
0,60	0,9400	0,8053	0,8567	0,8109	0,5649

Окончание табл. 4.1

1	2	3	4	5	6
0,65	0,9296	0,7745	0,8332	0,8543	0,6154
0,70	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	0,6668
0,75	0,9063	0,7086	0,7819	0,9250	0,7192
0,80	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	0,7727
0,85	0,8796	0,6382	0,7256	0,9729	0,8274
0,90	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	0,8833
0,95	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	0,9409
1,00	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,0000
1,05	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	1,0609
1,10	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	1,1239
1,15	0,7796	0,4184	0,5366	0,9735	1,1890
1,20	0,7600	0,3827	0,5035	0,9531	1,2566
1,25	0,7396	0,3479	0,4704	0,9275	1,3268
1,30	0,7183	0,3142	0,4374	0,8969	1,4002
1,35	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	1,4769
1,40	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	0,5575
1,45	0,6496	0,2209	0,3401	0,7778	1,6423
1,50	0,2250	0,1930	0,3088	0,3707	1,3721
1,55	0,5996	0,1669	0,2784	0,6807	1,8273
1,60	0,5733	0,1427	0,2489	0,6282	1,9290
1,65	0,5463	0,1205	0,2205	0,5740	2,0380
1,70	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	2,1555
1,75	0,4896	0,0821	0,1677	0,4630	2,2831
1,80	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	2,4227
1,85	0,4296	0,0520	0,1210	0,3530	2,5766
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	2,7481
1,95	0,3662	0,0297	0,0812	0,2497	2,9414
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	3,1622
2,05	0,2996	0,0147	0,0491	0,1588	3,4190
2,10	0,2650	0,0096	0,0361	0,1198	3,7240
2,15	0,2296	0,0058	0,0253	0,0857	4,0961
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	4,5674
2,25	0,1563	0,00151	0,00966	0,0343	5,1958
2,35	0,1183	0,00057	0,00482	0,0175	6,1033
2,40	0,0796	0,00014	0,00170	0,0063	7,6053
2,449	0,0400	$0,128 \cdot 10^{-4}$	0,00032	0,0012	10,957
	0	0	0	0	∞

4.6. Одномерное течение газа с трением

4.6.1. Изотермическое течение в трубах

В длинных газопроводах без тепловой изоляции температуру газа можно считать постоянной и равной температуре окружающей среды. Вдоль трубопровода давление и плотность уменьшаются, скорость возрастает.

Будем учитывать потери напора на трение вдоль трубы по формуле Дарси (3.2), тогда потери на участке трубы длиной dx составят

$$dh_l = \lambda_{mp} \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2g},$$

где λ_{mp} – гидравлический коэффициент трения.

Используя уравнение энергии в дифференциальной форме (4.5), составим дифференциальное уравнение баланса кинетической и потенциальной энергии с учетом потерь на участке dx

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + \lambda_{mp} \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2} = 0. \quad (4.26)$$

Из уравнения состояния (4.1) выразим плотность

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

а из уравнения постоянства массового расхода $\dot{m} = \rho v f = \text{const}$ определим скорость через давление

$$v = \frac{\dot{m}}{\rho f} = \frac{\dot{m} R T}{F p}. \quad (4.27)$$

Подставляя эти величины в равенство (4.26), имеем

$$\lambda_{mp} \frac{dx}{D} = 2 \frac{dp}{p} - \frac{2 F^2}{R T \dot{m}^2} p dp.$$

Обозначим давление в начальном сечении трубы через p_1 . Тогда давление p_2 в конечном сечении, расположенном на расстоянии l от начального, определится интегрированием последнего уравнения

$$\lambda_{mp} \frac{l}{D} = 2 \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{F^2}{RT \dot{m}^2} (p_1^2 - p_2^2). \quad (4.28)$$

Разрешив равенство (4.28) относительно \dot{m} , получим формулу для массового расхода газа при изотермическом течении

$$\dot{m} = F \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{RT \left(\lambda_{mp} \frac{l}{D} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right)}}. \quad (4.29)$$

Введем число Маха, которое с помощью выражений для скорости звука (4.4) и для скорости потока (4.27) можно представить в виде

$$M = \frac{v}{a} = \frac{\dot{m}}{Fp} \sqrt{\frac{RT}{k}}.$$

Очевидно, что отношение давлений обратно пропорционально отношению чисел Маха

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Равенство (4.28) может быть представлено в виде

$$\lambda_{mp} \frac{l}{D} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + 2 \ln \frac{M_1}{M_2}. \quad (4.30)$$

Из полученного уравнения следует, если во входном сечении трубы скорость газа дозвуковая ($M_1 < 1$), то в выходном сечении число M_2 возрастает и может достигнуть единицы.

Соответствующую критическую длину трубы $l_{кр}$ легко найти, принимая в равенстве (4.30) $M_2 = 1$. Если длина равна критической, то при понижении давления в конце трубы расход не увеличивается. Гидравлический коэффициент трения $\lambda_{тр}$, вообще говоря, является функцией чисел Re, M и относительной шероховатости трубы. Но число Рейнольдса при изотермическом течении вдоль трубы не меняется; действительно, если представить его в виде

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{\rho v D}{\mu},$$

где μ – динамический коэффициент вязкости, то видно, что и числитель, и знаменатель – постоянные величины ($\rho v = const$ по уравнению неразрывности; μ газов зависит только от температуры; при постоянной температуре изотермического течения $\mu = const$). Как показали опыты Фресселя, гидравлический коэффициент трения $\lambda_{тр}$ для газов при небольших числах Маха практически не зависит от M . Поэтому для изотермического течения газов $\lambda_{тр}$ не меняется по длине трубы и может определяться по формулам гидравлики.

4.6.2. Адиабатное течение в трубах

В случае короткого трубопровода, когда газ не успевает обмениваться теплом со стенками, или при наличии тепловой изоляции полная энергия газа по длине трубы остается постоянной; работа, расходуемая на трение, полностью переходит в теплоту, идущую на нагрев газа. Здесь удобно применить уравнение энергии в форме (4.11). Принимая во внимание, что энтальпия $i = c_p T$, запишем его в виде

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = const. \quad (4.31)$$

Как показывает уравнение (4.31), понижение температуры по сравнению с начальным сечением зависит только от скорости в данном сечении, а от сопротивления не зависит. Температура торможения вдоль трубы не меняется $T_0 = const$.

В дозвуковом потоке нагревание газа вследствие трения приводит к уменьшению плотности; из-за постоянства массового расхода скорость при этом возрастает. Это возрастание возможно вплоть до величины скорости звука $a_{кр}$, которая может иметь место в выходном сечении трубы при достаточно большой начальной скорости v_1 и достаточно малой длине трубы l . При этом в конце трубы наблюдается резкое падение давления. На рис. 4.6 показаны кривые изменения давления по длине трубы разной длины, полученные Фресселем экспериментально. Длина трубы отложена по оси абсцисс в долях $\frac{x}{D}$ (в «калрибрах»). Числа, проставленные у кривых, показывают расход в долях максимального расхода, который можно получить при том же перепаде давления в случае истечения через короткий насадок с диаметром, равным диаметру трубы.

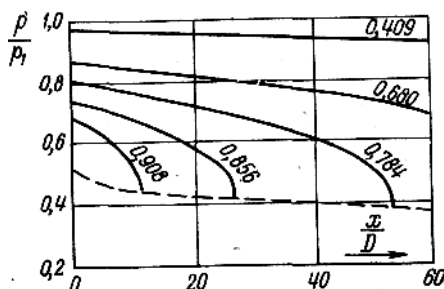


Рис. 4.6. Зависимость изменения давления по длине трубы

4.7. Возмущения в дозвуковом и сверхзвуковом потоках. Характеристики

4.7.1. Распространение возмущений

Выше было показано, что в неподвижной жидкости малые возмущения давления распространяются со скоростью звука. В потоке скорость возмущений давления относительно жидкости также равна скорости звука. Сферические волны давления сносятся потоком от источника возмущений. Относительно неподвижного обтекаемого тела возмущения распространяются вниз по потоку со скоростью $a + v$, а вверх со скоростью $a - v$.

Рассмотрим распространение в потоке возмущений от точечного источника A (например, от небольшого обтекаемого тела). При дозвуковой скорости потока ($v < a$, рис. 4.7, а) возмущения от препятствия распространяются во все стороны, в том числе и вверх по потоку. Волны давления, идущие вверх по течению, несут потоку информацию об источнике возмущений, «подготавливают» его к предстоящей встрече с препятствием. Линии тока в дозвуковом течении отклоняются еще до встречи с обтекаемым телом.

В сверхзвуковом потоке ($v > a$, рис. 4.7, б) возмущения давления вверх по течению не распространяются. Последовательные возмущения от источника A сносятся вниз по потоку; сферические волны возмущений заполняют конус с вершиной в точке A , расходящийся вниз по течению. До встречи с этим конусом возмущений поток не получает информации о препятствии, линии тока не искривлены.

Угол α при вершине конуса, называемый *углом возмущений* или *углом Маха*, легко определить из треугольника ABC . Если сферическая волна возмущения пробегает за время Δt путь CB , равный $a\Delta t$, то ее центр сносится потоком на расстояние AC , равное $v\Delta t$, откуда

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{v} = \frac{1}{M}, \quad (4.32)$$

где $M = \frac{v}{a}$ – число Маха.

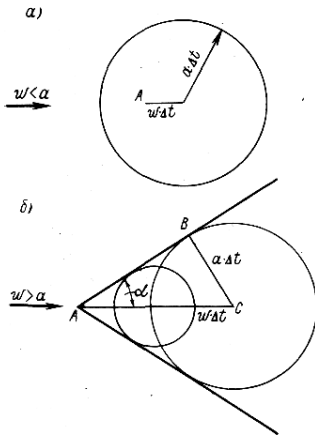


Рис. 4.7. Возмущения в потоке

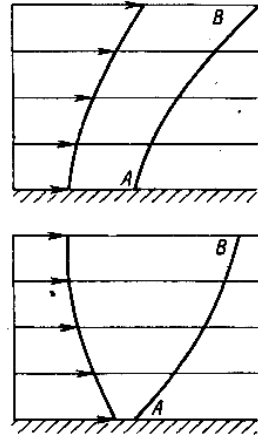


Рис. 4.8. Линии тока

4.7.2. Характеристики сверхзвукового потока

При сверхзвуковом течении газа вдоль стенки бугорки и впадины шероховатости являются источниками волн давления, которые сносятся вниз по течению под углом Маха. При изменении плотности газа в волнах давления меняется его коэффициент преломления для световых лучей. На этом основано применение оптических методов для исследования сверхзвуковых потоков. С их помощью удастся сделать видимой картину волн давления у обтекаемого тела.

Слабые волны возмущения называют характеристиками сверхзвукового потока. В равномерном потоке характеристики прямолинейны, угол их наклона тем меньше, чем больше ско-

рость; его величина определяется по формуле (4.32). Если в потоке имеется поперечная неравномерность скоростей, то характеристики искривляются. Форма характеристики AB для двух случаев поперечной неравномерности эпюры скоростей в плоском сверхзвуковом потоке показана на рис. 4.8. Возрастание скорости приводит согласно (4.32) к увеличению угла Маха и наклона характеристики.

4.7.3. Волны разрежения

Рассмотрим сверхзвуковое обтекание плоской стенки с внешним тупым углом (рис. 4.9, а). У точки A поток расширяется, поворачиваясь на угол θ .

В соответствии с выводами п. 4.7.2 скорость его увеличивается, давление, плотность и температура падают. Линия возмущения (характеристика) AB_1 для набегающего потока расположена под углом α_1 , причем в соответствии с формулой (4.32)

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{M_1}.$$

Для ускоренного и повернутого на угол θ потока линия возмущения от вершины угла A есть характеристика AB_2 , причем $\sin \alpha_2 = \frac{1}{M_2}$.

Внутри угла B_1AB_2 лежит волна разрежения, в которой линия тока C_1C_2 плавно поворачивает на угол θ . Параметры потока непрерывно изменяются внутри волны разрежения. Вдоль любой характеристики AB в пучке, размещенном между линиями AB_1 и AB_2 , параметры газа остаются постоянными, независимыми от удаления от вершины угла A . На характеристике

одинаковы также величина и направление скорости. Составляющая скорости нормальная к характеристике, равна скорости звука, соответствующей состоянию газа на этом месте.

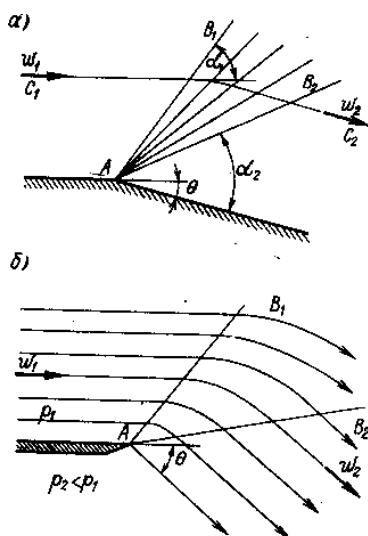


Рис. 4.9. Обтекание стенки

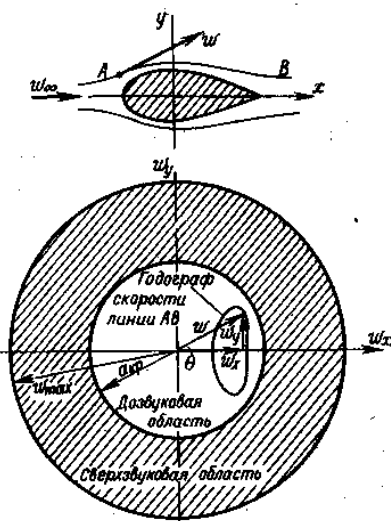


Рис. 4.10. Вид поперечного сечения

Подобная волна разрежения образуется и при сверхзвуковом истечении газа в среду с пониженным давлением $p_2 < p_1$ (рис. 4.9, б). В этом случае поток внутри волны B_1AB_2 отклоняется на угол θ . В предельном случае истечения в пустоту поток воздуха нормальных параметров может отклониться на максимально возможный угол, равный 129° , при этом достигается максимальная скорость v_{\max} , определяемая формулой (4.20).

Процесс расширения газа в волне разрежения является изэнтропическим, механическая энергия потока не теряется, поэтому давление торможения p_{02} за волной равно исходному p_{01} . Изменение параметров потока после волны разрежения зависит от величин m_1 и θ ; аналитические зависимости для них

выглядят достаточно громоздко. Для практических расчетов используются составленные по ним графики и таблицы.

4.7.4. Диаграмма характеристик

При анализе плоских двухмерных сверхзвуковых потоков широкое распространение получил метод годографа скорости. Этот метод состоит в том, что поток изображается графически не в виде линий тока, построенных в системе координат x, y , а в системе координат v_x, v_y . Точка O – начало координат в этой системе – есть начало векторов скорости. Линии, проведенные в плоскости годографа, являются геометрическим местом точек – концов вектора скорости частицы, перемещающейся по некоторой линии тока. Например, если поток имеет невозмущенную скорость v_∞ , то при дозвуковом обтекании тела, изображенного на рис. 4.10, годографом скорости частицы, пробегающей по линии тока AB , является в плоскости v_x, v_y петлеобразная кривая, показанная в правой половине центрального круга.

Дозвуковые течения в плоскости v_x, v_y имеют область задания внутри круга радиусом $a_{кр}$. Сверхзвуковая область изображается на этой плоскости в виде кольца с внутренним радиусом $a_{кр}$ и внешним, равным v_{max} . Критическая скорость $a_{кр}$ при этом определяется по формуле (4.23), максимальная скорость v_{max} – по формуле (4.20).

Анализ показывает, что для изоэнтропического расширения в волне разрежения годографом скорости (т.е. геометрическим местом точек – концов вектора v_2) является эписиклоида. Если построить годограф для всех векторов скорости из общего центра O , то получим сетку из двух семейств эписиклоид, называемую диаграммой характеристик (рис. 4.11).

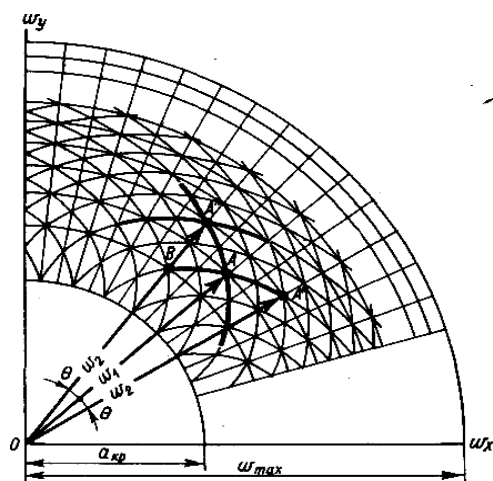


Рис. 4.11. Диаграмма характеристик

Пусть задана величина вектора скорости v_1 показанная на рис. 4.11 отрезком OA . После расширения, связанного с поворотом вправо на угол θ , конец вектора скорости переместится по кривой AA' ; величина вектора скорости v_2 равна (в масштабе) длине отрезка OA' . При повороте влево пришлось бы искать длину вектора v_2 на кривой AA'' . Характеристики в плоскости потока xu направлены по нормали к соответствующей эпициклоиде в плоскости годографа скорости, поэтому диаграмма характеристик, помимо величины вектора скорости v_2 , позволяет определить и угол α_2 .

С помощью диаграммы характеристик можно приближенно решать задачу об обтекании криволинейной стенки двумерным сверхзвуковым потоком. Этот метод, предложенный Прандтлем, получил название «метода характеристик».

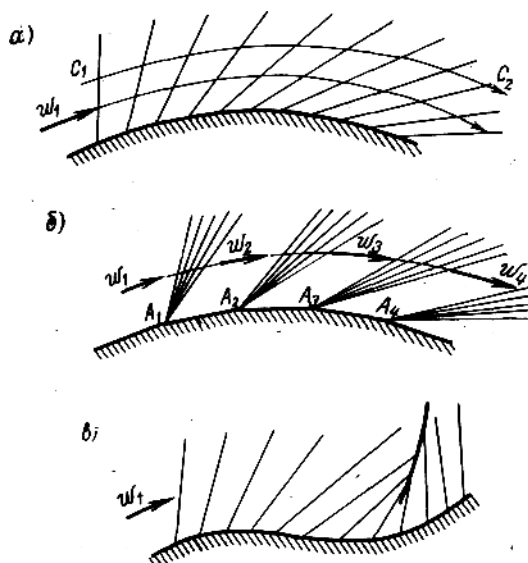


Рис. 4.12. Сверхзвуковой поток вдоль различных форм стенок

Рассмотрим сверхзвуковой поток около выпуклой стенки с заданной начальной скоростью v_1 (рис. 4.12, а). Каждая точка поверхности стенки является источником возмущения разрежения; линии возмущения (характеристики) наклонены к поверхности. Параметры газа изменяются вдоль линии тока C_1C_2 непрерывно. Заменим криволинейную поверхность ломаной (рис. 4.12, б), т.е. будем предполагать, что изменение параметров газа происходит прерывно и каждая из вершин углов A_1, A_2, \dots является источником волны возмущения. Эти волны разрежения показаны на рисунке пучками характеристик, выходящих из точек A_1, A_2, \dots . Обычно разбивку ломаной линии на поверхности тела делают так, чтобы у каждой вершины угла поток отклонялся на определенный угол, например 2° . После этого с помощью диаграммы характеристик легко определить скорости потока v_2, v_3, \dots и положение волн разрежения. Методом характеристик можно исследовать поток и около вогнутой стенки (рис. 4.12, в); в этом случае характеристиками являются линии

(волны) уплотнения. Величины вектора скорости для линии тока, пересекающей волны уплотнения, находят по диаграмме характеристик путем перемещения по эпициклоиде диаграммы характеристик в сторону меньших скоростей (отрезок AB на рис. 4.11). Следует иметь в виду, однако, что если несколько линий уплотнения пересекаются, то в этом месте параметры газа и скорость течения меняются прерывно – образуется скачок уплотнения, в котором процесс сжатия газа становится необратимым – механическая энергия теряется. При малой интенсивности скачка еще допустимо применение диаграммы характеристик для приближенного расчета скорости после волны уплотнения, но в случае сильных скачков ошибки становятся значительными.

5. СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

5.1. Прямой скачек

5.1.1. Возникновение скачка

Конечное по величине изменение давления можно рассматривать как сумму следующих друг за другом малых возмущений. Конечное возмущение сжатия в капельной жидкости рассмотрено в п. 3.7.6, посвященному гидравлическому удару.

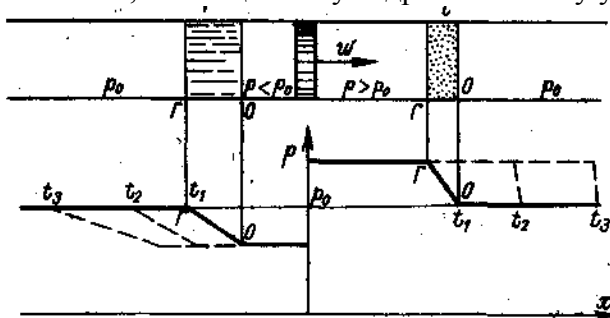


Рис. 5.1. Труба с неподвижным газом

Рассмотрим теперь процессы распространения конечных возмущений в газе.

Пусть в трубе с неподвижным газом (рис. 5.1) начинает ускоренно перемещаться поршень и по достижении скорости v продолжает двигаться равномерно. В отличие от вывода формулы для скорости звука считаем скорость v не малой по сравнению с a . Впереди поршня распространяется волна сжатия C , которая отделяет неподвижный невозмущенный газ от сжатого поршнем, область волны сжатия покрыта точками.

Основание, или «подножие», волны сжатия O движется вправо со скоростью, равной скорости звука в покоящемся газе a_0 . Гребень волны сжатия Γ движется быстрее: здесь больше скорость распространения возмущений, так как при сжатии газ нагревается. Кроме того, к этой скорости здесь добавляется скорость движения газа вместе с поршнем v . В результате гребень

догоняет основание, и в последовательные моменты времени t_1, t_2, t_3 возрастание давления в волне сжатия становится все более резким. Наконец, на некотором расстоянии от поршня возникает ударная волна – прерывное изменение давления, в котором параметры газа меняются очень резко на расстоянии порядка длины свободного пробега молекулы, т. е. при нормальных условиях — порядка микронов. Ударная волна движется в газе со скоростью v_1 , превышающей скорость звука.

Сзади поршня по трубе распространяется волна разрежения P . Скорость распространения гребня волны разрежения равна a_0 , тогда как скорость основания меньше — здесь сказывается охлаждение газа и его течение за поршнем. Поэтому волна разрежения делается все более полой; ударные волны возможны только в волнах уплотнения.

Прерывное изменение параметров газа и скорости течения наблюдается также и при обтекании неподвижного тела сверхзвуковым потоком. Если, например, обтекаемое тело имеет спереди затупленную форму, то торможение газа в лобовой части приводит к появлению здесь области дозвуковых скоростей. Волны повышения давления от тела распространяются в этой области дозвуковых скоростей и навстречу потоку, но на сравнительно небольшое расстояние — до скачка уплотнения, расположенного перед телом. В скачке уплотнения сверхзвуковая скорость потока прерывно переводится в дозвуковую. До перехода через скачок сверхзвуковой поток остается невозмущенным — волны давления от обтекаемого тела распространяются со скоростью звука, а скорость потока ее превышает.

Если система координат связывается с областью прерывного сжатия газа (или с обтекаемым телом, относительно которой она неподвижна), то эта область прерывного изменения параметров газа называется скачком уплотнения. Сквозь него протекает газ, имея сверхзвуковую скорость v_1 на входе и $v_2 = v_1 - v$ на выходе. Температура, давление и плотность в скачке мгновенно возрастают.

Если система координат связана с неподвижным газом, в котором распространяется со сверхзвуковой скоростью область прерывного сжатия, то эта область называется ударной волной. Физические процессы, происходящие в скачке уплотнения и в ударной волне, одинаковы, поэтому иногда оба эти названия применяют для одного и того же явления (например, скачок уплотнения перед затупленной передней частью тела называют «головной ударной волной».

5.1.2. Изменение параметров газа в прямом скачке

Прерывное уплотнение сжатия, которое расположено по нормали к вектору скорости (рис. 5.2) называется прямым скачком уплотнения.

Рассмотрим движение газа через прямой скачок уплотнения. Исходные уравнения:

- уравнение неразрывности имеющее в данном случае вид

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2; \quad (5.1)$$

- уравнение количества движения

$$\rho_1 v_1 (v_1 - v_2) = p_2 - p_1; \quad (5.2)$$

- уравнение энергии

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (5.3)$$

Если заданы три величины, например v_1, P_1, ρ_1 , то из приведенных уравнений могут быть определены три остальные: v_2, P_2, ρ_2 .

Приведем основные результаты совместного решения исходных уравнений.

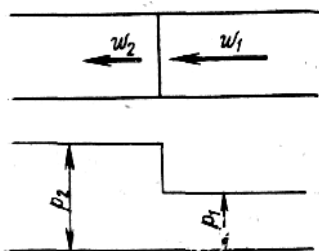


Рис. 5.2. Уплотнение сжатия

Представим уравнение энергии (5.3) с использованием (4.10) и (4.21) в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k+1}{2(k-1)} a_{кр}^2.$$

Выразим отсюда отношение $\frac{p_1}{\rho_1}$ (перед скачком) и $\frac{p_2}{\rho_2}$ (после скачка)

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2k} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2k} w_1^2; \quad \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2k} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2k} v_2^2.$$

Если теперь разделить уравнение (5.2) на (5.1)

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}$$

и подставить полученное ранее значение $\frac{p}{\rho}$, получим

$$v_1 - v_2 = \frac{k+1}{2k} \frac{a_{кр}^2}{v_1 v_2} (v_1 - v_2) + \frac{k-1}{2k} (v_1 - v_2).$$

Разделив это выражение на разность $v_1 - v_2$ (деление возможно, так как на скачке скорость изменяется, $v_1 \neq v_2$) и выполнив алгебраические преобразования, получим, что скорости v_1 и v_2 связаны между собой соотношением

$$v_1 v_2 = a_{кр}^2 \text{ или } \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (5.4)$$

Следовательно, в прямом скачке уплотнения сверхзвуковой поток ($\lambda > 1$) всегда переходит в дозвуковой ($\lambda < 1$).

Определим разность скоростей $v = v_1 - v_2$ (для ударной волны – это скорость, которую газ имеет за ударной волной; на рис. 5.1 – скорость движения газа вместе с поршнем). Из соотношения (5.4)

$$v = v_1 - v_2 = v_1 \left(1 - \frac{a_{кр}^2}{v_1^2} \right) = v_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right). \quad (5.5)$$

Возрастание давления в скачке $P_2 - P_1$ получим, подставляя разность скоростей $v_2 - v_1$ в уравнение (5.2)

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1 (v_1 - v_2) = \rho_1 v_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right). \quad (5.6)$$

Возрастание плотности $\rho_2 - \rho_1$ найдем из уравнения неразрывности и соотношения (5.4), т.к. $\rho_2 = \rho_1 \frac{v_1}{v_2}$, то

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho_1 \left(\frac{v_1^2}{a_{кр}^2} - 1 \right) = \rho_1 (\lambda_1^2 - 1). \quad (5.7)$$

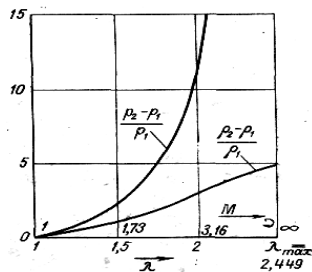


Рис. 5.3. Зависимость $(p_2 - p_1)/p_1$ и $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ от безразмерного отношения скоростей λ

Из равенств (5.4)-(5.7) следует, что изменение параметров на скачке тем резче, чем больше λ_1 , т.е. его интенсивность усиливается с ростом сверхзвуковой скорости на входе в скачок. На рис. 5.3 представлена зависимость величин $\frac{p_2 - p_1}{p_1}$ и $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$ от безразмерного отношения скоростей λ для воздуха ($k=1,4$); по оси абсцисс отложены также соответствующие значения чисел M .

5.1.3. Ударная адиабата. Рост энтропии и потеря давления в прямом скачке

Безразмерная скорость газа λ – величина ограниченная. Действительно,

$$\lambda_{max} = \frac{v_{max}}{a_{кр}},$$

или, с использованием соотношений (4.20) и (4.21)

$$\lambda_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}},$$

(для воздуха $\lambda_{max} = 2,449$; это значение соответствует $M = \infty$). Поэтому возрастание плотности в скачке уплотнения (5.7) оказывается ограниченным

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{max} = (\lambda_{1max})^2 = \frac{k+1}{k-1}.$$

Для воздуха ($k=1,4$) возможно максимальное уплотнение в скачке в 6 раз. В то же время известно, что при обратимом (изоэнтропическом) адиабатном сжатии

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k,$$

т.е. при возрастании давления плотность возрастает неограниченно.

Связь между давлением и плотностью в скачке может быть получена из совместного решения уравнений (5.5) и (5.6). Она называется ударной адиабатой или адиабатой Гюгонио (приведено без вывода)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1) \frac{p_2}{p_1} - (k-1)}{(k+1) - (k-1) \frac{p_2}{p_1}}. \quad (5.8)$$

На рис. 5.4 представлено изменение давления при изменении плотности воздуха для изоэнтропического сжатия и для сжатия в скачке уплотнения. Асимптота адиабаты Гюгонио показана пунктиром.

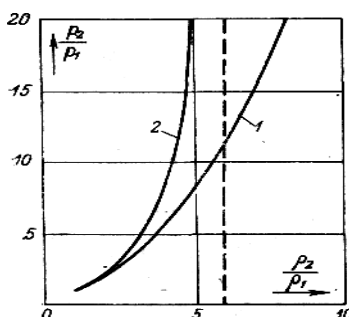


Рис. 5.4. Изменение давления при изменении плотности воздуха для изоэнтропического сжатия и для сжатия в скачке уплотнения

Как известно из термодинамики, при теплообмене между телами, входящими в систему, энтропия системы возрастает. При течении газа без скачков теплообмен между частицами пренебрежимо мал, движение изоэнтропическое. В то же время процесс сжатия газа в скачке уплотнения – не изоэнтропический, энтропия в скачке нарастает. Это происходит вследствие передачи тепла от уплотненного и нагретого объема газа к не-

возмущенному газу процессами теплопроводности; температура в скачке резко меняется на очень малом расстоянии толщины ударной волны, порядка микронов.

Доля кинетической энергии частицы газа единичной массы, Дж/кг, равная

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2},$$

переходит в тепловую энергию. Однако при расширении газа от давления P_2 снова до давления P_1 эта тепловая энергия не полностью преобразуется снова в кинетическую. Потери механической энергии характеризуются коэффициентом восстановления давления σ , равным отношению давлений торможения за скачком и до скачка

$$\sigma = \frac{P_{02}}{P_{01}}. \quad (5.9)$$

Коэффициент восстановления давления приходится вводить, например, при измерении скорости сверхзвукового потока трубкой Пито (рис. 2.7, б): в скачке уплотнения, который появляется перед трубкой, происходят потери давления. Отметим, что температура торможения, характеризующая полную энергию газа, одинакова для изэнтропического и скачкового сжатия. Действительно, при переходе через скачок уменьшается механическая энергия частиц газа и возрастает их внутренняя (тепловая) энергия. Полная же энергия, мерой которой является температура торможения, остается неизменной.

Параметры газа за прямым скачком и величины коэффициента восстановления давления приводятся в таблицах прямых скачков облегчающих решение задач.

Важное практическое значение имеют прямые скачки в расширяющейся части сопла Лаваля (рис. 5.5). Эти скачки появляются в случае нерасчетного истечения при достаточно большом противодавлении на выходе из сопла. В прямом скачке скорость

переходит в дозвуковую и резко растет давление; если, например, скачок занимает положение 1-1, давление в расширяющейся части сопла изменяется по линии $KABC$ (кривая 1). При дальнейшем возрастании противодавления скачок приближается к наименьшему сечению сопла, давление изменяется по кривым 2, 3, 4. Наконец, если противодавление достаточно велико, течение в сжатом сечении сопла становится дозвуковым, давление изменяется по кривой 5, скорость – по кривой 1.

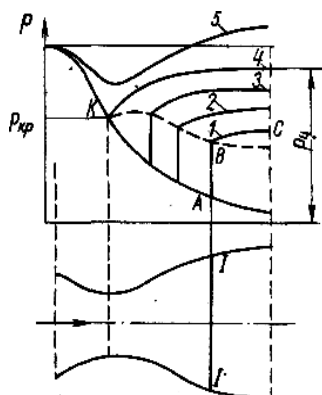


Рис. 5.5. Прямые скачки в расширяющейся части сопла Лаваля

5.2. Косые скачки уплотнения

5.2.1. Возникновение косых скачков

Исследуем обтекание сверхзвуковым потоком ($v_1 > a$, $M_1 > 1$) острого клина. При малом растворе клина θ (рис. 5.6, а) возмущение уплотнения, вносимое клином в поток, также невелико. В этом случае линия возмущения AB совпадает с характеристикой сверхзвукового потока, угол α может быть определен по формуле

$$\sin \alpha = \frac{1}{M_1}.$$

При обтекании клина с конечной величиной угла раствора θ (рис. 5.6, б) возмущение сжатия, которое он вносит в поток, также имеет конечную величину. Волна уплотнения располагается по линии AB и носит название *косого скачка уплотнения*.

При переходе через косой скачок возрастают давление, плотность и температура газа и уменьшается скорость течения ($v_2 < v_1$).

Угол косого скачка β больше угла слабой волны возмущения, наблюдаемой при той же величине числа Маха набегающего потока M_1 . При возрастании скорости набегающего потока v_1 (или, что то же, числа M_1) угол β уменьшается, при увеличении угла поворота θ он, наоборот, растёт.

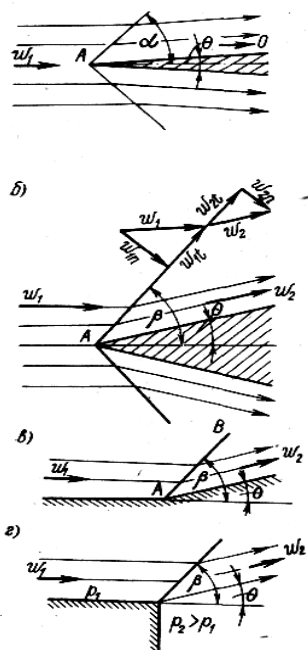


Рис. 5.6. Обтекание сверхзвуковым потоком различных геометрических фигур: а – острый клин; б – клин с конечной величиной угла раствора; в – внутренний тупой угол; г – истечение газа в среду с более высоким давлением

Кроме случая обтекания клина, косой скачок уплотнения наблюдается также при обтекании внутреннего тупого угла (рис. 5.6, в), когда сверхзвуковой поток, текущий вдоль плоской стенки, поворачивает вместе с ней на угол θ . Наконец, косой скачок появляется при сверхзвуковом истечении газа в среду с более высоким давлением (рис. 5.6, г). В этом случае угол отклонения потока θ определяется отношением давлений $\frac{p_2}{p_1}$.

5.2.2. Изменение параметров потока при переходе через косой скачок

Параметры газа на косом скачке, как и в случае прямого скачка уплотнения, меняются скачкообразно. Отличие от прямого скачка уплотнения состоит в том, что на косом скачке вектор скорости изменяется не только по величине, но и по направлению.

Обозначим нормальные к плоскости скачка составляющие скорости потока индексом n и касательные – индексом t (рис. 5.6). Запишем исходные уравнения для вывода зависимостей, связывающих параметры потока при переходе через прямой скачок:

- уравнение неразрывности в данном случае приводится к виду

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}; \quad (5.10)$$

- уравнение изменения количества движения в проекции на направление нормали

$$\rho_1 v_{1n}^2 + p_1 = \rho_2 v_{2n}^2 + p_2 \quad (5.11)$$

и в проекции на направление касательной

$$\rho_1 v_{1n} v_{1t} = \rho_2 v_{2n} v_{2t};$$

- уравнение энергии (4.6) имеет вид

$$\frac{v_{1n}^2 + v_{1t}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_{2n}^2 + v_{2t}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (5.12)$$

Сопоставляя уравнения неразрывности и изменения количества движения, видим, что $v_{1t} = v_{2t}$, т.е. касательная составляющая скорости не претерпевает разрыва при переходе через косой скачок. Уравнение энергии принимает форму

$$\frac{v_{1n}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_{2n}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (5.13)$$

Это обстоятельство приводит исходную систему уравнений (5.9)-(5.13) к такому же виду, как уравнения для прямого скачка (5.1)-(5.3). Разница состоит лишь в том, что вместо полной скорости в систему для косого скачка входит ее нормальная составляющая. Пользуясь решениями, выведенными для прямого скачка получим изменение параметров потока на косом скачке

$$\begin{aligned} \Delta v &= v_{1n} - v_{2n} = \frac{2v_{1n}}{k+1} \left(1 - \frac{1}{M_{1n}^2} \right), \\ \Delta p &= p_2 - p_1 = \frac{2\rho_1 v_{1n}^2}{k+1} \left(1 - \frac{1}{M_{1n}^2} \right), \\ \Delta \rho &= \rho_2 - \rho_1 = \rho_1 - (\lambda_{1n} - 1), \end{aligned}$$

где

$$M_{1n} = \frac{v_{1n}}{a_1}, \quad \lambda_{1n} = \frac{v_{1n}}{a_{кр}}.$$

Расчет параметров газа за косым скачком по формулам (5.13) оказывается трудоемким. Для его облегчения используются номограммы и таблицы косых скачков [6].

5.2.3. Ударная поляра. Отсоединенный скачок уплотнения

Анализ показывает, что годографом скорости при переходе через косой скачок (т.е. геометрическим местом точек – концов вектора скорости v_2) является петлеобразная кривая, изображенная на рис. 5.7 и называемая ударной полярой. Семейства ударных поляр для различных значений скорости сверхзвукового потока приводятся в литературе по газовой динамике, например [4].

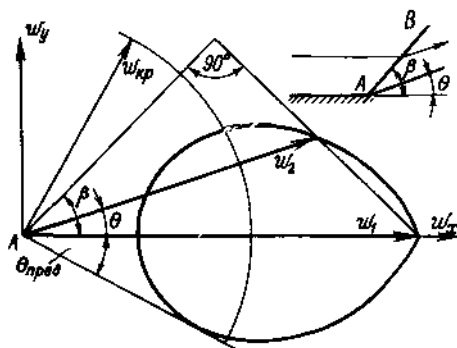


Рис. 5.7. Схема ударной поляры

Имея ударную поляру для заданной скорости v_1 , легко определить графически величину вектора скорости за скачком v_2 и угол скачка θ после поворота потока на заданный угол. Для этого откладывают угол θ от вектора v_1 ; величина v_2 равна (в масштабе) длине отрезка от точки A до пересечения с ударной полярой. Чтобы определить угол скачка, нужно провести прямую через концы векторов v_1 и v_2 и опустить на нее перпендикуляр из точки A . Угол, образованный этим перпендикуляром с осью v_x и есть угол скачка β .

Пользуясь ударной полярой, можно определить также предельный угол отклонения потока $\theta_{пред}$, при котором еще воз-

можно существование косого скачка. Этот предельный угол получается, если провести из точки A касательную к ударной поляре (она показана в нижней части рис. 5.7). Если то при данной скорости набегающего потока v_1 косой скачок невозможен: возмущение сжатия оказывается слишком сильным. В этом случае перед клином появляется отсоединенный скачок уплотнения (рис. 5.8). В отсоединенном скачке, или головной ударной волне, центральная часть есть прямой скачок, при переходе через него течение становится дозвуковым, линии тока здесь криволинейны. С удалением от оси симметрии клина отсоединенный скачок приближается к косому, скорость за ним может быть сверхзвуковой. Каждому значению скорости v_1 соответствует своя определенная величина предельного угла отклонения $\theta_{пред}$ но даже для $M_1 = \infty$ она не превосходит 46° .

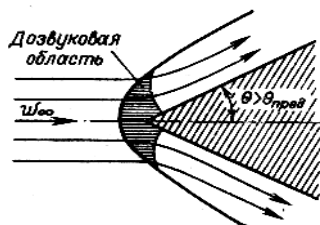


Рис. 5.8. Отсоединенный скачок уплотнения

5.2.4. Возрастание энтропии и потеря давления в косом скачке

Как и в случае прямого скачка, в косом скачке происходит возрастание энтропии, механическая энергия претерпевает необратимые потери. При этом коэффициент восстановления давления, определяемый по уравнению (5.9), зависит только от параметра $M_1 \sin \beta$, где β – угол скачка (рис. 5.7). С возрастанием $M_1 \sin \beta$ коэффициент убывает и соответственно возрастают потери механической энергии σ . Наибольшей величины они

достигают при $\beta = 90^\circ$, т.е. в прямом скачке. Поэтому для уменьшения потерь всегда стремятся заменить прямые скачки косыми. Например, крылья сверхзвуковых самолетов делают тонкими и заостренными спереди. Входные кромки турбинных лопаток, обтекаемых сверхзвуковым потоком, также заостряют. В этом случае прямые скачки заменяются косыми и потери энергии уменьшаются.

В случае слабого возмущения сжатия, когда коэффициент восстановления давления приближается к единице ($P_{01} \approx P_{02}$), косой скачок уплотнения вырождается в слабую волну возмущения (характеристику).

5.2.5. Конический скачок

При продольном обтекании конуса сверхзвуковым потоком (рис. 5.9, а) у его вершины образуется конический скачок уплотнения, который оказывается более слабым, чем косой скачок на клине такого же раствора.

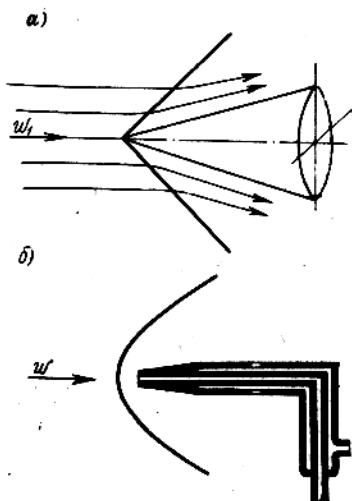


Рис. 5.9. Обтекание конуса сверхзвуковым потоком

В отличие от плоского косо́го скачка, за коническим скачком линии тока не прямолинейны: они искривлены и с удалением от вершины конуса приближаются к его поверхности. Как и в случае косо́го скачка, для каждого числа Маха M_1 существует свой предельный угол раствора; в случае больших углов раствора конуса скачок становится отсоединенным. Предельные углы конуса больше, чем предельные углы клина для тех же значений M_1 . Потери энергии для конуса оказываются меньшими, чем для клина того же раствора (при одинаковой скорости сверхзвукового потока).

При сверхзвуковом обтекании осесимметричных тел с затупленной носовой частью (таких, например, как трубка Пито-Прандтля, показанная на рис. 5.9, б) перед ними образуется скачок уплотнения криволинейной формы. В осевой части потока газовые струйки проходят через прямой скачок. Здесь наиболее велики потери механической энергии, которые необходимо учитывать при измерении скорости потока по давлению торможения P_{02} . При удалении от оси скачок уплотнения приближается к коническому и вдали от обтекаемого тела вырождается в слабую волну возмущения.

5.3. Взаимодействие сверхзвукового потока с ограничивающими поверхностями

5.3.1. Силы, действующие на обтекаемое тело со стороны сверхзвукового потока

Рассмотрим сверхзвуковое обтекание простейшего тела – тонкой пластинки, установленной в потоке под углом атаки α (рис. 5.10). Углом атаки в данном случае называют угол, образованный пластинкой с направлением набегающего невозмущенного потока. У входной кромки на нижней поверхности пластинки образуется косо́й скачок уплотнения AB , при переходе через который давление повышается до величины $P_n > P_1$. На

верхней поверхности появляется волна разрежения B_1AB_2 , в которой давление понижается до величины $P_e < P_1$.

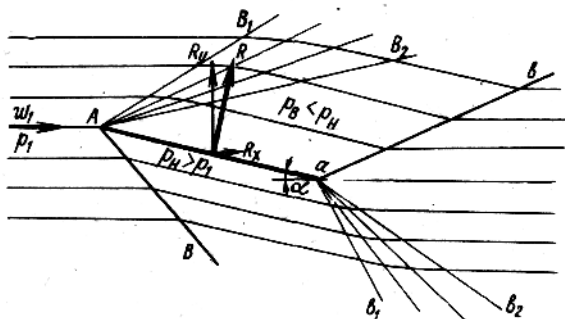


Рис.5.10. Сверхзвуковое обтекание тонкой пластинки, установленной в потоке под углом атаки

За выходной кромкой пластинки давление выравнивается; на верхней поверхности образуется косой скачок уплотнения ab , на нижней – волна разрежения b_1ab_2 . Потери механической энергии в скачках уплотнения AB и ab приводят к тому, что скорость потока за пластинкой не восстанавливается до величины v_1 – обтекаемым телом.

Из-за разности давлений на нижней и верхней сторонах пластинки на нее действует сила R , которая может быть разложена на подъемную силу R_y и силу лобового сопротивления R_x . Применяя общую формулу для определения аэродинамических сил запишем выражения для R_y и R_x в виде

$$R_y = C_y F \frac{\rho v^2}{2}; R_x = C_x F \frac{\rho v^2}{2}, \quad (5.14)$$

где $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамическое давление потока, Н/м²;

F – площадь пластинки, м²,

C_y и C_x – безразмерные коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления.

Величины C_y и C_x могут быть определены по формулам

$$C_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad C_x = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (5.15)$$

Величина лобового сопротивления R_x , появляющаяся из-за потерь механической энергии в скачках уплотнения, носит название волнового сопротивления. Работа силы R_x на некотором пути приводит к приращению энтропии газа на этом пути.

При сверхзвуковом обтекании других тел, имеющих заостренную переднюю кромку, поле течения также включает косые скачки уплотнения и волны разрежения. На рис. 5.11 показаны поля течения для продольного обтекания чечевицеобразного (а) и ромбовидного (б) крыльев. В сверхзвуковом потоке появляются системы скачков уплотнения: головных B_1AB_2 и хвостовых b_1ab_2 .

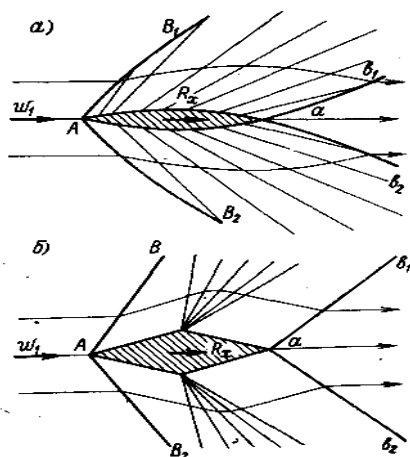


Рис. 5.11. Поле течения для продольного обтекания крыльев: а – чечевицеобразного; б – ромбовидного

Волны разрежения в случае двояковыпуклого профиля распределены непрерывно по его поверхности, а в случае ромбовидного профиля сосредоточены у углов поворота потока. Избыточные давления в носовой части положительны, а в хвостовой – отрицательны. Поэтому равнодействующая сил давления на поверхность профиля направлена по потоку – это сила волнового сопротивления R_x . Если обтекание таких профилей несимметрично (они установлены в потоке под некоторым углом атаки), то появляется еще и подъемная сила. При малой толщине профиля величину коэффициента подъемной силы для сверхзвукового обтекания допустимо определять по формуле (5.15) для пластинки. В случае значительной толщины необходимо учитывать форму его поверхности.

Сила лобового сопротивления при сверхзвуковом обтекании тел с затупленной носовой частью (таких, как на рис. 5.15, б) оказывается больше, чем для заостренных тел, вследствие того, что давление больше возрастает за прямым скачком. Поэтому для уменьшения силы лобового сопротивления выгодно придавать обтекаемому телу такую форму, чтобы заменить прямые скачки уплотнения на косые.

5.3.2. Отражение волн давления

При пересечении волн давления они проникают друг через друга без заметного взаимного влияния: характеристики и линии тока при этом лишь слегка искривляются. Иное дело – отражение волн давления от твердой стенки или от свободной границы струи.

Рассмотрим отражение волны разрежения, образовавшейся при обтекании внешнего тупого угла, от твердой стенки (рис. 5.12, а). Эта волна после отражения также является волной разрежения. Линия тока вторично искривляется в ней, возвращаясь к первоначальному направлению и еще больше увеличивая ско-

рость. Эффект ускорения потока может использоваться для получения высоких скоростей в многократно отраженных волнах разрежения.

При отражении от свободной газовой границы струн (рис. 5.12, б) волна разрежения превращается в волну уплотнения. Такое изменение знака воздействия на поток можно пояснить следующим рассуждением. Если сверхзвуковое истечение происходит в газовую среду с таким же давлением P , как и давление в струе, то за первичной волной разрежения B_1AB_2 давление понижено. Следовательно, на участке B_2D происходит рост давления снова до величины P , и волна, исходящая от участка B_2D , является волной уплотнения. При переходе через эту отраженную волну поток еще больше отклоняется, а скорость v_2 уменьшается и становится равной исходной скорости v_1 .

При отражении от твердой стенки косога скачка уплотнения, образовавшегося, например, в вершине внутреннего тупого угла (рис. 5.12, а), происходит его отражение также в виде скачка. Линия тока возвращается к исходному направлению, а величина вектора скорости вторично уменьшается. При значительных углах отклонения потока θ и небольшой сверхзвуковой скорости v_1 угол отклонения потока в отраженном скачке может превысить максимальный угол отклонения. В этом случае вблизи точки отражения B скачок переходит в прямой, скорость за ним оказывается дозвуковой. Лишь на некотором расстоянии от точки B этот прямой скачок переходит в косой. Система первичного косога скачка и отраженных – прямого и косога носит название λ -образного скачка.

В случае падения косога скачка на свободную границу струи, вытекающей в газовую среду того же давления (рис. 5.12, б), он отражается в виде волны разрежения B_1BB_2 . В этой волне линия тока плавно искривляется, еще больше отклоняясь от первоначального направления, а скорость возрастает.

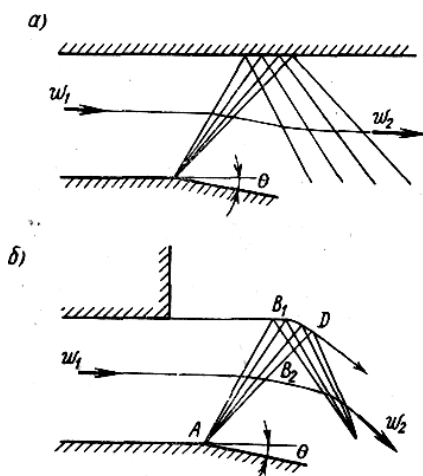


Рис. 5.12. Отражение волны разрежения: а – обтекание внешнего тупого угла; б – свободная газовая граница

Важный для практики случай отражения волн давления представляют явления, происходящие при нерасчетных режимах истечения из сопла Лавала. В частности, при истечении в газовую среду с противодавлением P , меньшим, чем давление на срезе сопла AA (рис. 5.13, а), происходит расширение струи в волнах AB . После их отражения в виде волн уплотнения BC образуются снова волны разрежения CD и т.д. В результате струя претерпевает последовательные расширения и сжатия.

При истечении в среду с повышенным противодавлением (рис. 5.14, б) появляются косые скачки AB . Их отражение от свободной границы струи также порождает систему волн разрежения и уплотнения. Рост противодавления приводит к тому, что косые скачки AB принимают форму мостообразного скачка, средняя часть которого представляет собой прямой скачок. При дальнейшем увеличении противодавления прямой скачок размещается внутри расширяющейся части сопла.

6. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

6.1. Кинематический анализ движения жидкости

6.1.1. Виды движения жидкой частицы

Кинематика жидкой среды существенно отличается от кинематики системы материальных точек или кинематики твердого тела. Движение твердого тела в общем случае складывается из поступательного перемещения вместе с полюсом (мгновенным центром вращения) и вращения относительно мгновенной оси, проходящей через полюс. Движение жидкости значительно сложнее, поскольку частица кроме указанных перемещений может деформироваться.

Изучим возможные формы движения жидкой частицы, рассматривая для начала плоское движение в плоскости xu . Будем обозначать составляющие вектора скорости в данной точке через v_x, v_y, v_z . Для рассматриваемого плоского течения $v_z = 0$. Пусть частица в форме квадрата с «полюсом» в точке A переместилась за некоторое время в соседнее положение A' , изображенное на рис. 6.1. Точка A при этом заняла положение A' . Очевидно, перемещение частиц складывается из следующих составляющих: а) перемещение полюса; б) вращение около полюса; в) деформация частицы.

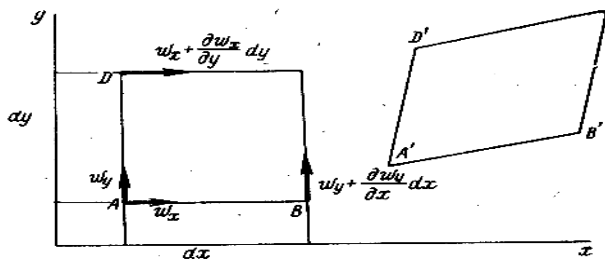


Рис. 6.1. Перемещение точки

Скорость поступательного движения полюса, как и в случае движения твердого тела, определяется компонентами вектора скорости v_x, v_y .

Вращательное движение жидкой частицы существенно отличается от вращения твердого тела. Действительно, вращение жидкой частицы нельзя охарактеризовать угловой скоростью какого-либо одного отрезка, выбранного в этой частице. Например, угловая скорость ω ребра AB может быть определена из разности скоростей изменения составляющих скорости в направлении оси y

$$\omega_{AB} = \frac{\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) - v_y}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Угловая скорость ребра AD равна

$$\omega_{AD} = \frac{\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) - v_x}{dy} = \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

По предложению Гельмгольца, за угловую скорость жидкой частицы принимается средняя алгебраическая величина из угловых скоростей сторон прямоугольника

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (6.1)$$

Индекс z в выражении (6.1) показывает, что определяется составляющая вектора угловой скорости относительно оси z , нормальной к плоскости xy . Угловая скорость считается положительной, если вращение происходит против часовой стрелки.

Деформация жидкой частицы может быть двоякого рода. Во-первых, это деформация растяжения-сжатия, характеризующаяся удлинением сторон исходной частицы. Очевидно, что такое удлинение определяется изменением соответствующих компонент скорости по координатным осям

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Во-вторых, возможна деформация скоса ребер жидкой частицы, т. е. заострение (или затупление) исходных углов. Такую деформацию можно охарактеризовать поперечной изменчивостью скорости течения, или средней арифметической из угловых скоростей вращения ребер

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right).$$

Приведенные соображения позволяют сформулировать теорему Гельмгольца: скорость жидкой частицы складывается из скорости полюса, скорости вращательного движения около оси, проходящей через полюс, и скорости деформационного движения, состоящего в свою очередь из линейной деформации растяжения-сжатия и угловой деформации скашивания ребер частицы.

Теорема Гельмгольца справедлива и для более общего случая пространственного движения. При этом появляются новые члены, характеризующие движение: деформация растяжения-сжатия в направлении оси z , т.е. $\frac{\partial v_z}{\partial z}$, и угловые скорости и деформации скоса относительно осей y и x . Приведем выражения для этих величин без вывода. Угловые скорости

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (6.2)$$

А деформации скоса

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{6.3}$$

Индексы x, y, z при ε в последних выражениях не следует понимать как символы проекции: они указывают лишь направление перпендикуляра к площадке, в которой происходит перекашивание грани. Вообще в отличие от угловой скорости ω , которая, как и в механике твердого тела, имеет векторный характер, деформация скоса ε является скаляром.

Вихревое и безвихревое движение. Если при движении жидкости ее частицы вращаются и составляющие угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ не равны нулю, движение называется вихревым. Наличие вращательных движений в двухмерном потоке может быть установлено таким простейшим экспериментом: в поток вводят поплавки со стрелкой-индикатором, причем его размер мал по сравнению с радиусом кривизны линий тока. Если при движении поплавок стрелка-индикатор не остается параллельной самой по себе, а изменяет свое направление с некоторой угловой скоростью ω , то движение – вихревое и угловая скорость поплавок совпадает с угловой скоростью жидкой частицы.

Необходимо отметить, что вихревым может быть течение и при прямолинейных траекториях частиц. Например, если частицы движутся параллельно оси x (рис. 6.2), причем скорости изменяются по закону $v_x = ay + b$, где a и b – постоянные, то угловая скорость равна

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} a \neq 0.$$

Мы имеем вихревое течение, и поплавков, помещенный в поток, будет вращаться по часовой стрелке. Течение вязкой жидкости в трубах постоянного сечения – также вихревое, причем угловая скорость вращения частиц нарастает с приближением к стенке трубы.

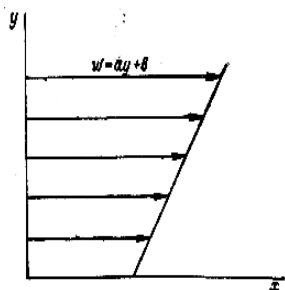


Рис. 6.2. Схема движения частиц

Рассмотрим один частный случай движения жидкости, когда вращение частиц отсутствует. В этом случае $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Такое движение называется *безвихревым*.

Важность этого частного случая движения определяется тем обстоятельством, что, как показывает опыт, при обтекании тела с плавными обводами вращение частиц наблюдается только в тонкой пристенной области и за кормой. Во всем остальном потоке движение осуществляется практически без вращаения частиц. Поэтому безвихревое движение имеет особое значение для теории удобообтекаемых тел (таких, как современные самолеты, ракеты, корабли, проточные части турбомашин). Особенно большое значение имеет теория безвихревого движения для решения задачи о распределении давлений на поверхность обтекаемого тела.

При плоском (двухмерном) течении равенство нулю угловой скорости вращения приводит к выражению

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Если обратиться к рис. 6.1, то угловая скорость ребра AB при этом будет $\omega_{AB} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$ и положительна (ребро AB вращается против часовой стрелки). Угловая скорость ребра AD будет $\omega_{AD} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$ и отрицательна (ребро AD вращается по часовой стрелке). Средняя скорость вращения

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

равная угловой скорости биссектрисы исходного прямого угла, в случае безвихревого движения равна нулю; частица перемещается без вращения, несмотря на наличие деформационного движения. В этом случае поплавков, опущенный в жидкость, будет перемещаться вместе с потоком таким образом, что стрелка-индикатор остается все время параллельной самой себе.

Безвихревое циркуляционное течение. Интересным и практически важным примером безвихревого движения является круговое течение, в котором скорость обратно пропорциональна расстоянию от оси вращения частиц (рис. 6.3)

$$v = \frac{const}{r}. \quad (6.4)$$

Хотя линии тока этого течения криволинейны, но поток является безвихревым – частицы деформируются, но не вращаются.

Течение, в котором скорость подчиняется закону (6.4), называют *безвихревым циркуляционным потоком* (иногда – менее точно – плоским вихрем).

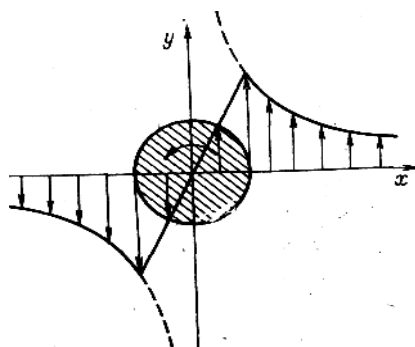


Рис. 6.3. Круговое течение

Рассмотрим безвихревое циркуляционное течение с непрерывно убывающим радиусом. Скорость течения и ее градиент вблизи оси вращения должны непрерывно нарастать и в пределе стать бесконечно большими (рис. 6.3). В реальной жидкости это невозможно из-за действия вязкости; опыт показывает, что центральная область вихря приходит во вращение и вращается как твердое тело с угловой скоростью ω . За пределами этого ядра вихря (заштрихованный круг на рис. 6.3) скорость изменяется по закону (6.4). Примерами подобных потоков являются круговые течения у отверстия стока воды в ванне, атмосферные смерчи и т.д. Возрастание скорости с приближением к оси потока приводит к понижению давления, поэтому свободная поверхность жидкости принимает воронкообразную форму. В свою очередь, и местное понижение давления в жидкости приводит через некоторое время к формированию такого поля скоростей, которое приближается к безвихревому циркуляционному течению.

Важным примером использования в технике безвихревого циркуляционного течения является движение газов в спиральной камере с тангенциальным подводом газа (рис. 6.4). Газовый поток вращается в камере; выход газов осуществляется через окна прорезанные в торцевых стенках камеры вблизи от ее оси. Хотя линии тока являются спиралями, но радиусы их кривизны

приближенно можно считать равными радиусу соответствующей окружности r , проведенному из оси камеры. Распределение скоростей оказывается близким к заданному формулой (6.4). Скорость сильно возрастает с приближением к оси камеры.

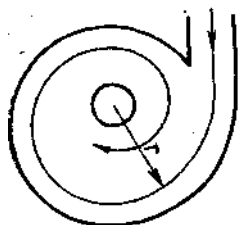


Рис. 6.4. Схема движения в спиральной камере

Возрастание скорости с приближением к оси спиральной камеры позволяет использовать ее в качестве циклонной установки для сепарации твердых частиц из газового потока – центробежные силы; действующие на частицы при движении с большой скоростью по криволинейным траекториям, отбрасывают их к стенкам камеры.

Другое применение спиральной камеры – так называемые рециркуляционные печи, используемые при термической обработке крупных поковок или отливок. Обработываемое изделие (садка) размещается у оси камеры. За счет большой скорости газов, обтекающих поверхность садки, происходит интенсивный теплообмен между потоком и поверхностью, что позволяет сократить сроки термообработки.

6.2. Функция тока и потенциал скорости

Уравнение линии тока. Вектор скорости частицы v направлен по касательной к линии тока s . Для плоского течения это показано на рис. 6.5. Пусть v_x, v_y – проекции вектора скорости на координатные оси. Из рис. 6.5 следует, что

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{dx}{ds}, \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{dy}{ds},$$

где ds – элемент дуги линии тока.

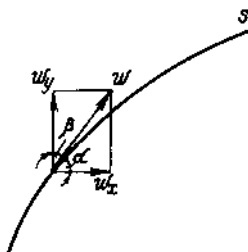


Рис. 6.5. Линия тока при плоском течении

Составим производные пропорции

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{ds}{v}, \frac{dy}{v_y} = \frac{ds}{v},$$

откуда

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (6.5)$$

Мы получили уравнение линии тока для плоского течения. В случае трехмерного (пространственного) потока уравнения линии тока выводятся аналогично и имеют вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (6.6)$$

6.2.1. Функция тока для двухмерного течения

Дифференциальное уравнение линии тока плоского течения (6.5) может быть представлено в виде

$$v_y dx - v_x dy = 0. \quad (6.7)$$

Введем такую «функцию тока» $\psi(x, y)$, полный дифференциал которой равен левой части выражения (6.7)

$$d\psi = v_y dx - v_x dy. \quad (6.8)$$

Поскольку на линии тока согласно формуле (6.7) $d\psi = 0$, очевидно, что функция тока сохраняет вдоль линии тока постоянное значение.

Полный дифференциал функции двух переменных ψ имеет вид

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy.$$

Сравнивая это выражение с формулой (6.8), получаем, что производные функции тока определяются зависимостями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x. \quad (6.9)$$

Сама функция тока может быть определена интегрированием выражения (6.9).

Контур поверхности тела, обтекаемого потоком идеальной жидкости, сам является линией тока: в некоторой «критической» точке набегающий поток раздваивается и огибает тело. Следовательно, на обтекаемой поверхности функция тока постоянна. Но можно, наоборот, рассматривать любую линию тока как контур сечения твердого тела. Действительно, если заменить область, ограниченную линией тока твердым телом, то остальные линии тока не изменятся (так как жидкость мы считаем идеальной, трение отсутствует). Они дают картину обтекания такого тела. В этом состоит принцип отвердения линий тока, широко применяемый в гидродинамике идеальной жидкости. Если, например, считать отвердевшими линии тока, показанные на рис. 6.6 по координатным осям x, y , то получится картина течения внутри прямого угла.

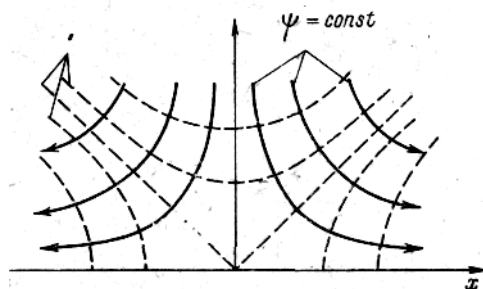


Рис. 6.6. Линии тока

6.2.2. Потенциал скорости

Функцией скоростного потенциала или сокращенно – потенциалом скорости $\varphi(x, y, z)$ называется такая функция, частные производные которой равны составляющим вектора скорости по соответствующим координатным осям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z. \quad (6.10)$$

Полный дифференциал функции φ равен

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad (6.11)$$

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Сама функция скоростного потенциала определяется интегрированием выражения (6.11).

Введение потенциала скорости позволяет заменить векторное поле скорости течения (для изучения которого нужно знать три компоненты по координатным осям) распределением в пространстве одной скалярной функции φ , что значительно упрощает исследование. В механике твердого тела вводится аналогичное понятие «потенциала силы»; это скалярная функция,

производные от которой равны составляющим силы по координатным осям. Такую же природу имеет в электротехнике понятие потенциала электрического поля: вместо задания в пространстве векторной величины напряженности поля вводится скалярная функция потенциала V , производные от которой по координатным осям равны соответствующим компонентам вектора напряженности.

Придавая функции φ определенные значения, получим уравнения поверхностей равного потенциала, или эквипотенциальных поверхностей (в случае двумерного течения – линий равного потенциала, или эквипотенциалей).

Рассмотрим связь потенциала скорости и функции тока. В случае плоского (двухмерного) течения $v_z = 0$; дифференциал функции тока выражается формулой (6.8), дифференциал функции скоростного потенциала, из равенства (6.11), формулой

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy.$$

Пусть линия тока $\psi = \text{const}$ такого течения представлена на рис. 6.7 сплошной линией, эквипотенциаль $\varphi = \text{const}$ – пунктирной линией.

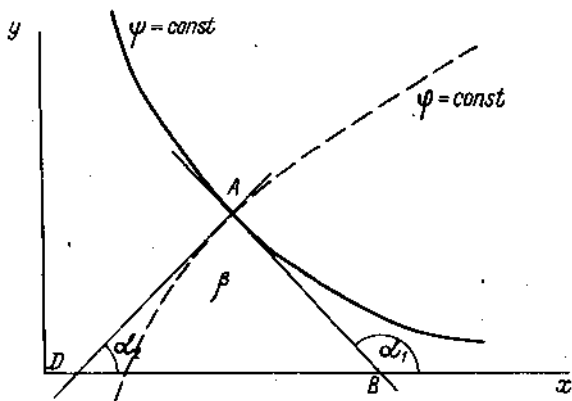


Рис. 6.7. Линия тока

Проведем к этим линиям касательные в точке их пересечения A . Угол наклона прямой AB к оси абсцисс определится согласно уравнению (6.7) выражением

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x},$$

угол наклона прямой AD выражением

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{dx}{dy} = -\frac{v_x}{v_y}.$$

Очевидно, что $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$ и угол β между касательными равен 90° .

Таким образом, функция тока ψ и потенциал скорости φ взаимно ортогональны; линии тока и эквипотенциали пересекаются всегда под прямым углом. Это позволяет по известным эквипотенциалам строить линии тока и наоборот. Семейства линий $\psi(x, y) = \text{const}$ и $\varphi(x, y) = \text{const}$, нанесенные на один чертеж, называются гидродинамической сеткой течения. Пример такой сетки приведен на рис. 6.6.

Сравнивая выражения для составляющих скорости плоского течения v_x и v_y через функцию тока ψ (6.9) и функцию скоростного потенциала φ (6.10), видим, что функции ψ и φ связаны условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (6.12)$$

В математике эти условия называются условиями Коши-Римана. При их соблюдении оказывается возможным использовать для исследования функций ψ и φ математический аппарат теории функций комплексной переменной, который широко применяется в теории потенциального обтекания геометрически правильных тел.

Угловая скорость вращения жидкой частицы в плоском потоке определяется формулами (6.2). Если течение потенциально, т.е. существует некоторая функция скоростного потенциала φ , производные которой равны соответствующим компонентам вектора скорости, то используя (6.10) имеем

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

Равенство нулю угловой скорости вращения свидетельствует о том, что потенциальное течение – безвихревое, т.е. вращение частиц в нем отсутствует. Как будет показано в дальнейшем, у твердых поверхностей, ограничивающих поток, вследствие вязкости всегда формируются зоны вращательных движений, поэтому вблизи стенок теория потенциального обтекания неприменима. Однако для изучения внешнего потока теория потенциала используется с большим успехом.

Применим к потенциальному течению несжимаемой жидкости уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Подставляя в него выражения для компонентов скорости через функцию скоростного потенциала (6.10), получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (6.13)$$

Это уравнение известно в математической физике под названием уравнения Лапласа. Таким образом, для нахождения функции φ , полностью определяющей кинематику потенциального потока, необходимо решить уравнение Лапласа.

Дифференциальное уравнение в частных производных (6.13) имеет бесчисленное множество решений, поэтому должны быть заданы дополнительные (граничные) условия для данной конкретной задачи. К таким условиям относятся задание

скорости в удалении от обтекаемого тела v_∞ и условие равенства нулю на поверхности тела нормальной составляющей скорости. При этом предполагается, что жидкость обтекает тело без отрывов. У поверхности тела скорость направлена по касательной (имеет место «скольжение» жидкости).

В силу того, что сумма любого числа частных решений уравнения Лапласа является также его решением, оказывается возможным суммировать потенциалы скорости простейших течений для получения картины сложного течения. В этом состоит идея метода наложения потенциальных потоков.

6.3. Вихревое движение жидкости

6.3.1. Интенсивность вихря

Угловая скорость вращения жидкого элемента выражается через производные скорости течения формулами (6.2). Угловой скорости при этом приписывается векторный смысл: по определению, это – вектор, нормальный к плоскости вращения частицы и ориентированный таким образом, что из его конца вращение кажется происходящим против часовой стрелки. Величина этого вектора равна геометрической сумме его компонентов $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (6.14)$$

Как и всякий вектор, вектор угловой скорости имеет некоторое распределение в пространстве – «вихревое поле». Отметим, что в некоторых курсах гидромеханики удвоенную величину угловой скорости вращения называют «вихрем скорости» или «ротором скорости»; в частности, в случае плоского течения

$$\text{rot}_z v = 2\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Точно так же, как была определена линия тока, можно ввести понятие вихревой линии – это такая линия, в каждой точке которой вектор угловой скорости направлен по касательной к ней. Очевидно, вихревая линия представляет собой мгновенную ось вращения частиц жидкости, располагающихся на ней. Дифференциальные уравнения вихревых линий подобны уравнениям линии тока (6.6)

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} . \quad (6.15)$$

Вихревые линии, проведенные через все точки замкнутого элементарного контура, взятого в потоке (рис. 6.9), образуют вихревую трубку (аналог элементарной струйки, поверхность которой составлена из линий тока). Обозначим площадь нормального сечения вихревой трубки через dF , и будем считать угловую скорость вращения ω постоянной по ее сечению.

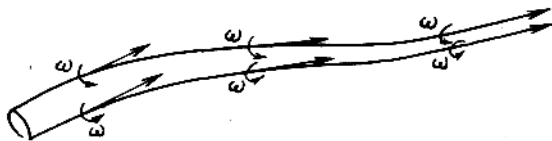


Рис. 6.9. Вихревая трубка

Интенсивностью dJ элементарной вихревой трубки называется удвоенное произведение угловой скорости вращения на площадь сечения

$$dJ = 2\omega dF . \quad (6.16)$$

Интенсивность вихревой трубки конечных размеров, для которой нельзя пренебрегать изменением угловой скорости по сечению, равна

$$J = \int_F dJ = 2 \int_F \omega dF = 2\omega_{\text{ср}} F ,$$

где $\omega_{\text{ср}}$ – средняя величина угловой скорости по сечению F вихревой трубки.

6.3.2. Циркуляция скорости. Теорема Стокса

Выделим в движущейся жидкости произвольный контур l , в некоторой точке которого вектор скорости равен v , а его проекция на касательную к контуру равна v_l (рис. 6.10). Произведение этой проекции на длину элемента контура называется элементарной циркуляцией $d\Gamma$

$$d\Gamma = v_l dl = v \cos(\nu, l) \cdot dl.$$

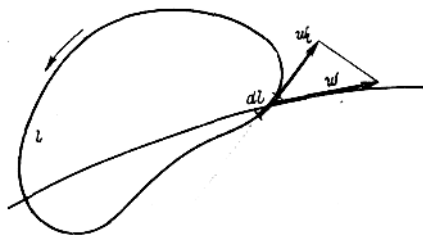


Рис. 6.10. Произвольный контур

Циркуляцией Γ по всему контуру l называется интеграл

$$\Gamma = \oint_l d\Gamma = \oint_l v_l dl. \quad (6.17)$$

Знак циркуляции, вычисленной по замкнутому контуру, зависит от направления его обхода. Положительным направлением обхода контура считают такое, когда ограниченная им область остается слева. Размерность циркуляции $\text{м}^2/\text{с}$.

Понятие циркуляции в гидромеханике аналогично понятию работы в физике, только вместо вектора скорости в работу входит вектор силы. Действительно, работа силы f на элементарном пути dl равна произведению касательной составляющей силы на путь $f_l dl$. Работа на некотором конечном пути получается интегрированием, как и для формулы (6.17).

Циркуляция скорости по контуру непосредственно связана с интенсивностью вихревой трубки, натянутой на этот контур. Пусть, например, контур в плоском потоке представляет собой

прямоугольник с элементарными сторонами dx, dy площадью $dF = dxdy$. Вычислим циркуляцию по этому элементарному контуру. Она складывается из четырех частей

$$d\Gamma = v_x dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dx - \\ - v_y dy = dxdy \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 2\omega_z dF = dJ.$$

Таким образом, циркуляция оказалась равна интенсивности вихря для вихревой трубки, натянутой на элементарный контур. Для контура, охватывающего вихревую трубку конечного сечения, циркуляция скорости определится аналогично

$$\Gamma = \oint_l \omega dF = J. \quad (6.18)$$

Нами получено доказательство теоремы Стокса: циркуляция по произвольному контуру равна сумме интенсивностей вихревых трубок, пронизывающих поверхность F , натянутую на этот контур. Таким образом, в безвихревом (потенциальном) течении циркуляция скорости по любому контуру равна нулю. Только при появлении вращательного движения в жидкости циркуляция становится отличной от нуля.

6.3.3. Теоремы о вихрях

Для вихревого движения идеальной жидкости справедливы следующие теоремы.

Кинематическая теорема Гельмгольца: интенсивность вихря не меняется по длине вихревой трубки.

Выберем на вихревой трубке конечных размеров произвольные сечения 1 и 2 (рис. 6.11). Проведем замкнутый контур $ABCDEF$ по поверхности вихревой трубки. Очевидно, что циркуляция по этому контуру равна нулю, так как он вихревыми линиями не пронизывается, т.е. $\Gamma_{ABCDEF} = 0$.

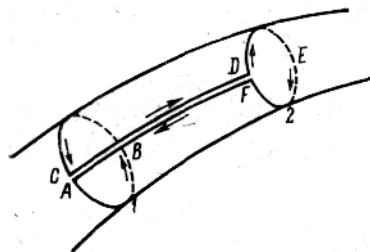


Рис. 6.11. Сечения в вихревой трубке

$$\Gamma_{ABCDEFA} = \Gamma_{ABC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DEF} + \Gamma_{FA} = 0. \quad (6.19)$$

Сближая кривые AF и CD , получим в пределе $\Gamma_{CD} + \Gamma_{FA} = 0$, так как направления обхода по этим линиям противоположны. Следовательно, из равенства (6.19): $\Gamma_{ABC} = -\Gamma_{DEF}$. Применяя теорему Стокса и приняв во внимание, что направления обхода контуров ABC и DEF противоположны, получаем

$$\Gamma_{ABCDEFA} = J_1 - J_2 = 0 \text{ и } J_1 = J_2 = J = const. \quad (6.20)$$

Из этой теоремы следует, что вихревая трубка не может закончиться в жидкости. Действительно, если $F \rightarrow 0$, то для выполнения условия $J = 2\omega F = const$, необходимо, чтобы $\omega \rightarrow \infty$, однако, бесконечное увеличение угловой скорости вращения частиц невозможно вследствие действия вязкости. Поэтому вихревая трубка должна быть либо замкнута сама на себя, образуя вихревое кольцо (рис. 6.12, а), либо упираться концами в свободную поверхность жидкости или твердую стенку (рис. 6.12, б, в).

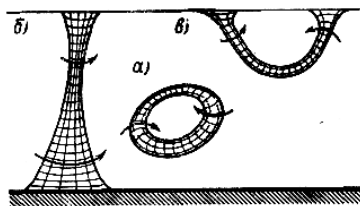


Рис. 6.12. Различные типы вихревых трубок

Приведем теперь без вывода основную теорему о вихрях в идеальной жидкости.

Теорема Томсона: циркуляция по замкнутому жидкому контуру в идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в поле действия силы тяжести, не меняется со временем.

Из теоремы Томсона следует, что в идеальной жидкости вихри не могут возникать и не могут уничтожаться; если в некоторый начальный момент времени движение было безвихревым, то оно останется безвихревым и в дальнейшем. В реальной жидкости вихри размываются с течением времени вследствие вязкости. Однако во многих практически важных случаях, например, при определении подъемной силы крыла влиянием вязкости можно пренебречь.

6.3.4. Поле скоростей, вызываемое вихревыми трубками

В ряде применений гидромеханики приходится сталкиваться с задачей определения скоростей движения жидкости, вызванного заданной системой вихрей. До сих пор мы решали обратную задачу: по известному полю скоростей находили вектор угловой скорости частиц потока (формулы (6.2) и (6.4).

Каждый из элементарных вихрей, составляющих вихревую систему, создает около себя поле скоростей, распространяющееся на весь поток, в том числе и на другие элементарные вихри системы. Выясним, какую скорость вызывает в произвольной точке потока одиночная вихревая трубка.

Пусть dl – элемент вихревой трубки; Γ – циркуляция скорости по контуру, охватывающему эту трубку; α – угол между касательной к элементу и радиусом-вектором r , проведенным в точку M , в которой определяется скорость (рис. 6.13). Скорость течения, вызываемая в этой точке элементом вихревой трубки, определяется формулой Био-Савара, которую приводим без вывода

$$dv = \frac{\Gamma dl}{4\pi r^2} \sin \alpha. \quad (6.21)$$

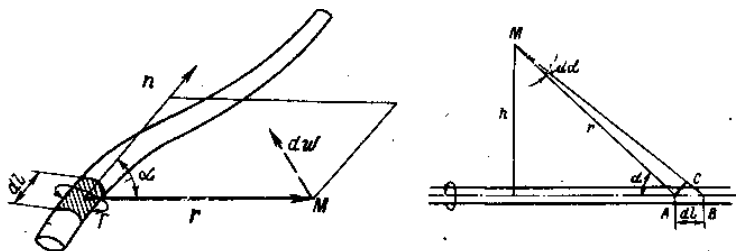


Рис. 6.13. Схема для определения поля скоростей

В теоретической электротехнике закон Био-Савара определяет действие элемента проводника, по которому течет ток, на единичный магнитный полюс, помещенный в точку M . При этом сила тока в проводнике является аналогом циркуляции Γ , а сила воздействия на магнитный полюс – аналогом индуцируемой скорости. Индуцируемая скорость dv направлена перпендикулярно плоскости, содержащей отрезки dl и r , в сторону циркуляции.

Применим формулу Био-Савара для вычисления скорости, индуцируемой в некоторой точке M (рис. 6.13) бесконечной вихревой трубкой с прямолинейной осью, отстоящей от точки M на расстоянии h . Очевидно, что $r = \frac{h}{\sin \alpha}$. Выделим эле-

ментарный отрезок AB длиной dl . Из треугольника ABC

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}.$$

Подставляя это значение dl в формулу (6.21), имеем

$$dv = \frac{\Gamma dl}{4\pi r^2} \sin \alpha = \frac{\Gamma}{4\pi r} d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h} \sin \alpha d\alpha.$$

Скорость, вызываемая в точке M всей вихревой трубкой определится интегрированием полученного выражения в пределах от $\alpha = 0$ до $\alpha = \pi$

$$v = \int_0^\pi dv = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi h}. \quad (6.22)$$

В двухмерном безвихревом циркуляционном течении распределение скоростей определяется формулой (6.4): $v = \frac{const}{r}$.

Сравнивая это выражение с равенством (6.22), убеждаемся, что одиночная вихревая трубка порождает в окружающей жидкости поле скоростей, характерное для безвихревого циркуляционного течения. При этом константа в равенстве (6.4) может быть

представлена через циркуляцию: $const = \frac{\Gamma}{2\pi}$. Это обстоятельство

позволяет определять величину циркуляции Γ в плоском циркуляционном течении (или около одиночной вихревой трубки). Действительно, если задана скорость v_l на одной из концентрических линий тока, расположенной на расстоянии r от оси вихревой трубки, то циркуляция

$$\Gamma = \oint v_l dl = v_l \oint dl = 2\pi r v_l.$$

6.4. Обтекание тел идеальной жидкостью

6.4.1. Распределение давления по поверхности обтекаемого тела

Исследуем обтекание тела произвольной формы равномерным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Пусть вдали от тела, где поток можно считать невозмущенным, скорость течения равна v_∞ , давление p_∞ . Будем рассматривать плоский горизонтальный поток, что избавит нас от необходимости учитывать распределение скоростей и давлений по координате z .

Применим уравнение Бернулли к струйке, проходящей по поверхности обтекаемого тела (рис. 6.14). Выберем сечение

этой струйки «на бесконечности», где не сказывается искажающее влияние на поток обтекаемого тела, и в некоторой точке на поверхности тела, где скорость равна v , а давление p . Имеем

$$\frac{\rho v_{\infty}^2}{2} + p_{\infty} = \frac{\rho v^2}{2} + p.$$

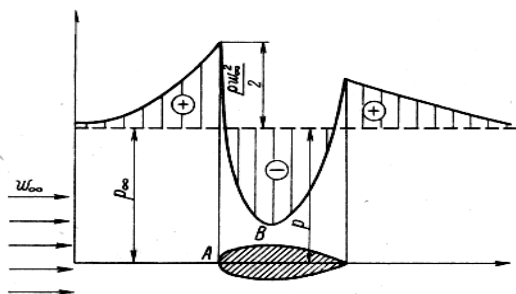


Рис. 6.14. Схема для определения давления

Из уравнения Бернулли непосредственно следует

$$p - p_{\infty} = \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{v_{\infty}^2} \right). \quad (6.23)$$

Величина $\frac{\rho v_{\infty}^2}{2}$ называется *динамическим давлением потока*. Безразмерное отношение

$$\bar{p} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho v_{\infty}^2}{2}} = 1 - \frac{v^2}{v_{\infty}^2}$$

носит название коэффициента давления.

На поверхности обтекаемого тела величина коэффициента давления определяется скоростью течения в данной точке, т.е. тем возмущающим действием, которое оказывает на поток помещенное в него твердое тело (рис. 6.14). В передней «критической» точке А, где раздваивается набегающий поток, скорость

равна нулю, и вся кинетическая энергия потока идет на повышение давления. Давление здесь превышает p_∞ на величину динамического давления $\frac{\rho v_\infty^2}{2}$.

В области утолщения обтекаемого тела (у «миделя»), где скорость вследствие поджатия потока превышает v_∞ , коэффициент давления отрицателен, и $p < p_\infty$. В случае особенно резкого падения давления в точке B могут даже возникнуть разрывы потока. В несжимаемой жидкости при падении p до давления парообразования может начаться процесс кавитации.

Возрастание давления в кормовой области, связанное с уменьшением скорости течения, полностью компенсирует избыток давления в носовой части. Поэтому при обтекании тела идеальной жидкостью равнодействующая сил давления в направлении потока равна нулю (парадокс Даламбера). В вязкой жидкости имеет место сила сопротивления, обусловленная касательными напряжениями по поверхности обтекаемого тела и недостаточным возрастанием давления в кормовой области вследствие образования там вихревой зоны.

6.4.2. Теорема Жуковского

Мы установили, что при обтекании тела идеальной жидкостью сила сопротивления, направленная по потоку, равна нулю. Однако в этом случае возможно существование сил, перпендикулярных направлению течения.

Предположим, что в плоскопараллельный поток со скоростью v_∞ помещено тело произвольных очертаний, например в форме одиночного крылового профиля (рис. 6.15). Вблизи тела течение окажется заметно возмущенным; появятся добавки к скорости v_∞ , которые мы обозначим через v'_x, v'_y . Скорость результирующего течения оказывается равной

$$v = \sqrt{(v_\infty + v'_x)^2 + v'^2_y}.$$

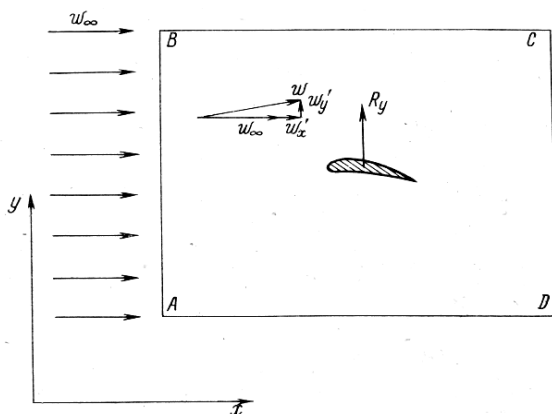


Рис. 6.15. Крыловой профиль в плоскопараллельном потоке

По мере удаления от тела величина добавочных составляющих v'_x, v'_y уменьшается.

Определим с помощью уравнения количества движения, чему равна сила R_y .

Выберем контрольную поверхность $ABCD$, расположенную достаточно далеко от тела, чтобы добавки v'_x, v'_y были на ней малы по сравнению с v_∞ . При таком выборе можно пренебречь количеством движения жидкости, передаваемым через поверхности BC и AD , вследствие малости v'_y . Подсчитав разность между количеством движения в направлении оси y , поступающим через AB и уходящим через CD , мы сможем определить сумму всех сил, действующих в направлении оси y на поверхность $ABCD$. Эта сумма складывается из сил давления на AD и BC , которые мы обозначим через P , и из силы R_y , действующей на тело.

Поступающий через AB в слое единичной толщины элемент жидкости шириной dy несет в направлении оси y количество движения, равное $\rho(v_\infty + v'_x)v_y dy$. Следовательно, все количество движения, входящее через AB , равно

$$\rho \int_A^B (v_\infty + v'_x) v'_y dy,$$

(мы считаем $\rho = \text{const}$), а разность количеств движения на AB и CD составляет

$$-\rho \int_A^B (v_\infty + v'_x) v'_y dy + \rho \int_C^D (v_\infty + v'_x) v'_y dy.$$

Для подсчета силы давления

$$P = \int_A^D p dx - \int_B^C p dx$$

воспользуемся зависимостью между давлениями и скоростями (уравнением Бернулли)

$$p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Квадрат скорости v можно представить в виде

$$v^2 = (v_\infty + v'_x)^2 + v'^2_y \approx (v_\infty + v'_x)^2 \approx v_\infty^2 + 2v_\infty v'_x.$$

Так как v'_x и v'_y малы по сравнению с v_∞ , то величинами v'^2_x и v'^2_y можно пренебречь по сравнению с v_∞^2 . Следовательно, имеем

$$p - p_\infty \approx \frac{\rho}{2} (v_\infty^2 - v^2 - 2v_\infty v'_x) = -\rho v_\infty v'_x.$$

Будем считать давление вдали от тела равным нулю, так как оно все равно дает на замкнутой поверхности результирующую, равную нулю. Сила R_y , равная разности приращения количества движения и силы давления P , определяется выражением

$$R_y = -\rho \int_A^B (v_\infty + v'_x) v'_y dy + \rho \int_D^C (v_\infty + v'_x) v'_y dy + \\ + \rho \int_A^D v_\infty v'_x dx - \rho \int_B^C v_\infty v'_x dx.$$

При подсчете членами вида $\rho \int v'_x v'_y dy$ можно снова пренебречь, так как $v'_x v'_y$ мало по сравнению с $v_\infty v'_x$. Тогда имеем

$$R_y = \rho v_\infty \left(-\int_A^B v'_y dy - \int_C^D v'_y dy - \int_D^A v'_x dx - \int_B^C v'_x dx \right).$$

Сумма интегралов, стоящих в круглых скобках, представляет собой не что иное, как циркуляцию добавочной скорости по контуру $ABCD$.

Таким образом, при циркуляционном обтекании тела слоем жидкости единичной толщины сила, действующая на тело, будет равна

$$R_y = \rho v_\infty \Gamma. \quad (6.24)$$

Нами доказана теорема Н. Е. Жуковского (1906): поперечная сила, действующая на тело, пропорциональна плотности, скорости набегающего потока и циркуляции по контуру, охватывающему тело.

Формула (6.24) выведена для слоя единичной толщины и определяет силу, действующую на элемент обтекаемого тела, поперечный размер которого равен единице длины. В случае обтекания тела заданной длины величина этой силы определяется выражением

$$R_y = \rho v_\infty \Gamma l, \quad (6.25)$$

где l – размер тела в направлении, перпендикулярном плоскости контура (в случае обтекания крыла это длина крыла).

Циркуляция скорости Γ может быть отличной от нуля только в случае вихревого движения. Поэтому подъемная сила

R_y , перпендикулярная направлению течения, возникает лишь в тех случаях, когда на набегающий поток накладывается вихрь.

6.4.3. Постулат Чаплыгина-Жуковского

Теорема Н. Е. Жуковского имеет основополагающее значение для теории крыла. Отметим, что крылом в гидромеханике называют не только несущую плоскость самолета или судна на подводных крыльях, но и лопасть пропеллера или судового винта, лопатку турбины, компрессора или насоса и вообще тело с плавными обводами и заостренной задней кромкой, обтекаемое продольно или под небольшими «углами атаки». Чтобы нагляднее показать природу возникновения поперечной силы, действующей на крыло, полезно использовать аналогию между обтеканием крыла и цилиндра.

На рис. 6.16 схематически показана картина линий тока при обтекании кругового цилиндра идеальной жидкостью без циркуляции (а), чисто циркуляционное течение вокруг него (б) и комбинация этих течений (в). Эта картина может быть получена методами гидродинамики идеальной жидкости, в результате наложения потенциальных потоков, отвечающих равномерному поступательному течению, обтеканию цилиндра и безвихревому циркуляционному течению. В третьем случае появляется поперечная или подъемная сила. Действительно, над цилиндром линии тока сгущаются, в этой области скорость возрастает, а давление в соответствии с уравнением Бернулли понижается. Под цилиндром имеет место обратная картина. Равнодействующая сил давления и представляет собой подъемную силу.

Появление поперечной силы при обтекании вращающегося тела носит название эффекта Магнуса по фамилии ученого, впервые объяснившего это явление (1852). До изобретения нарезных артиллерийских орудий шаровые снаряды после вылета из ствола часто отклонялись в сторону от расчетной траектории. Магнус показал, что это происходило из-за вращения

ядра вокруг вертикальной оси, происходящего вследствие случайных причин. Такую же природу имеет поперечная сила, действующая на «резаный» футбольный или теннисный мяч; эта сила всегда направлена к той стороне тела, где направления вращения и обтекающего потока совпадают.

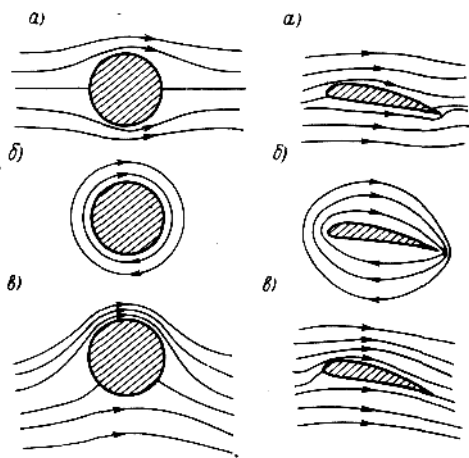


Рис. 6.16. Обтекание цилиндра

Рис. 6.17. Обтекание крылового профиля

При обтекании крылового профиля с заостренной задней кромкой форма его сечения такова, что необходимый для появления циркуляции вихрь возникает здесь самопроизвольно. Как показывает опыт, в начале процесса обтекания картина линий тока соответствует рис. 6.17, а. Подъемная сила пока еще отсутствует. Струйки сходят с поверхности профиля на его спинке, у задней острой кромки образуется область больших скоростей (теоретически – бесконечных) и больших градиентов скорости.

Если около крыла появится циркуляционное течение, показанное на рис. 6.17, б, то в результате наложения обоих течений при соответствующем выборе величины циркуляции получится течение, показанное на рис. 6.17, в, или безотрывное обтекание профиля.

Возникновение циркуляционного вихря около крыла можно пояснить следующими соображениями. У острой задней кромки, в соответствии с рис. 6.17, а, в начальной стадии обтекания скорость течения резко возрастает. В реальной жидкости такое возрастание скоростей лимитируется вязкостью. У кромки формируется поверхность разрыва скоростей. Эта поверхность свертывается в вихрь, увлекаемый течением (рис. 6.18) во внешний поток, где силы трения не оказывают существенного влияния. По теореме Томсона, суммарная циркуляция не должна изменяться по сравнению с начальным моментом, т.е. должна оставаться равной нулю. Это равенство, в частности, должно иметь место и для области, ограниченной линией A . Поэтому при отходе вихря определенной интенсивности около профиля должен сохраниться вихрь, равный по интенсивности, но противоположный по направлению вращения. В итоге картина линий тока принимает вид, изображенный на рис. 6.17, в.

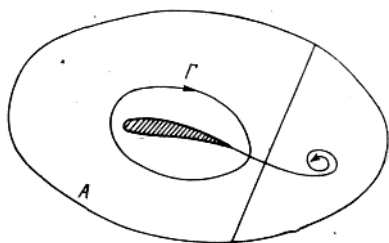


Рис. 6.18. Свёртывание в вихрь

В этом состоит суть постулата, сформулированного С. А. Чаплыгиным и Н. Е. Жуковским: при безотрывном обтекании профиля вокруг него формируется такая циркуляция Γ , которая обеспечивает сход струек, с задней кромки вдоль средней линии профиля.

Таким образом, с чисто гидродинамической точки зрения крыло можно рассматривать как несущую вихревую линию. Так как скорости, обусловленные вихревой линией, убывают обратно пропорционально расстоянию от оси вихря, то и возмущение набегающего потока, вызванное наличием крыла, также

убывает пропорционально $\frac{1}{r}$, т.е. $v' = \frac{\Gamma}{2\pi r}$. На достаточном удалении от профиля картина течения оказывается такой же, как если бы крыло заменить единичным вихрем. При этом считают, что ядро вихря, т. е. его внутренняя область, где жидкость должна вращаться как твердое тело, размещается внутри крыла.

7. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

7.1. Уравнения движения вязкой жидкости

7.1.1. Уравнения Навье-Стокса

При обтекании тела реальной (вязкой) жидкостью на его поверхности появляются касательные напряжения, связанные с действием вязкости. Такие же напряжения имеют место и при относительном движении слоев жидкости. По закону Ньютона для вязкого трения, касательная сила f , действующая между слоями жидкости при их относительном движении, определяется формулой

$$f = -\mu F \frac{dv}{dn}. \quad (7.1)$$

Действие вязкости учитывается введением в дифференциальные уравнения движения членов, описывающих внутреннее трение. В итоге уравнения оказываются более сложными, чем уравнения гидродинамики идеальной жидкости Эйлера.

Как и при выводе уравнений Эйлера применим второй закон Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = \sum f \quad (7.2)$$

к жидкой частице в форме параллелепипеда с малыми ребрами dx, dy, dz . Рассмотрим силы, действующие на жидкую частицу в направлении оси x . Будем считать жидкость несжимаемой, т.е. $\rho = \text{const}$. Кроме силы давления $-dx dy dz$ и объемной силы $X \rho dx dy dz$ в вязкой жидкости действует еще разность сил трения на верхней и нижней гранях частицы

$$\left(\mu dx dy \frac{dv_x}{dz} \right)_{\text{верх}} - \left(\mu dx dy \frac{dv_x}{dz} \right)_{\text{нижн}}.$$

Если предположить для простоты вывода, что в данном потоке жидкости скорость меняется только в направлении оси z , то

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} \neq 0.$$

В этом случае уравнение второго закона Ньютона запишется в виде:

$$\rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt} = -dp dx dy + X \rho dx dy dz + \\ + \mu dx dy \left[\left(\frac{dv_x}{dz} \right)_{\text{верх}} - \left(\frac{dv_x}{dz} \right)_{\text{нижн}} \right].$$

Разделив последнее равенство на $\rho dx dy dz$ и принимая во внимание, что $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематический коэффициент вязкости, а предел отношения

$$\frac{\left(\frac{dv_x}{dz} \right)_{\text{верх}} - \left(\frac{dv_x}{dz} \right)_{\text{нижн}}}{dz}$$

равен второй производной $\frac{d^2 v_x}{dz^2}$, получим

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu \frac{d^2 v_x}{dz^2}.$$

Учитывая возможность изменения вектора скорости также в направлении осей y и z и применив аналогичные рассуждения для проекций сил на эти оси, запишем уравнения движения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu \left(\frac{d^2 v_x}{dx^2} + \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \frac{d^2 v_x}{dz^2} \right); \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu \left(\frac{d^2 v_y}{dx^2} + \frac{d^2 v_y}{dy^2} + \frac{d^2 v_y}{dz^2} \right); \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \nu \left(\frac{d^2 v_z}{dx^2} + \frac{d^2 v_z}{dy^2} + \frac{d^2 v_z}{dz^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

В отличие от уравнений Эйлера полученные дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости учитывают влияние на ускорение частицы (левые части уравнений (7.3)) сил вязкого трения (последние слагаемые правых частей). Они носят название уравнений Навье-Стокса.

Система (7.3) получена для несжимаемой вязкой жидкости. В случае сжимаемой жидкости (газа) уравнения Навье-Стокса имеют более сложный вид.

7.1.2. Граничные условия

Уравнения Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности образуют для несжимаемой жидкости замкнутую систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: v_x, v_y, v_z, ρ . При решении этой системы для какого-либо конкретного случая движения необходимо задать начальные и граничные условия.

Начальные условия формулируются для задач о движении вязкой жидкости так же, как и для идеальной. Они сводятся к тому, что для некоторого момента времени, принимаемого за начальный, задаются скорости и давления как функции координат. При установившемся движении начальные условия не задаются.

Существенные отличия от идеальной жидкости имеют место при формулировке граничных условий. В динамике идеаль-

ной жидкости допускается, что жидкость скользит по поверхности обтекаемого тела с конечной скоростью. При обтекании тела вязкой жидкостью, как показывают опытные данные, частицы жидкости прилипают к поверхности тела. Следовательно, здесь оказываются равными нулю не только нормальные v_n , но и касательные v_t составляющие скорости течения.

Последнее граничное условие ($v_t = 0$) весьма усложняет решение задач, относящихся к движению вязкой жидкости. Вследствие математических трудностей, связанных с интегрированием нелинейных уравнений Навье-Стокса при этих граничных условиях до сих пор получено небольшое количество точных решений. Поэтому для решения конкретных задач прибегают к упрощению уравнений Навье-Стокса, чтобы сделать возможным их интегрирование.

Один из способов такого упрощения состоит в пренебрежении инерционными (конвективными) членами в уравнениях движения (левые части уравнений (7.3)). Это приближение оправдано только в случае доминирующего влияния вязкости

или при очень малых числах Рейнольдса $Re = \frac{vL}{\nu}$ (здесь L – ха-

рактерный линейный размер для рассматриваемой задачи, например – диаметр трубы или поперечный размер обтекаемого тела). Примером такого упрощения является решение для ламинарного течения в круглой трубе – задача Пуазейля.

Другой способ упрощения уравнений Навье-Стокса, предложенный Прандтлем, основывается на предположении, что при движении маловязкой жидкости вдоль поверхности обтекаемого тела частицы затормаживаются только в тонком пристенном слое, где велики поперечные градиенты скорости и пропорциональные им силы вязкого трения.

Пределы применимости этих способов упрощения уравнений движения могут быть установлены только эксперимен-

тально. Более сложные задачи – например, определение силового взаимодействия потока с телом произвольной формы – приходится решать опытным путем.

7.2. Моделирование в гидромеханике и газодинамике

7.2.1. Принципы динамического подобия

Натурные объекты, с которыми имеет дело гидрогазодинамика, – гидромашины, корабли, гидротехнические сооружения для несжимаемой жидкости, а также паровые и газовые турбины, компрессоры, самолеты, ракеты – слишком велики по размерам, сложны и дороги, чтобы их можно было испытывать только в натуральных условиях. Модели различных вариантов этих объектов испытываются обычно в стадии их проектирования и расчета. Поэтому большое значение приобрела теория моделирования, разрабатывающая правила и условия проведения экспериментов и переноса результатов эксперимента с модели на натуру.

Движением жидкости управляют силы тяжести, инерции, давления и трения. Они различны по своему происхождению и природе, и каждая из них изменяется при изменении скоростей, размеров потока и других условий по своим особым законам. Однако во многих задачах, приходится рассматривать совместное действие этих сил и определять величину отношения одной из них к другой. Исследованием этих вопросов занимается теория механического подобия потоков.

При моделировании в гидрогазодинамике недостаточно добиться геометрического подобия модели и натуре, т.е. пропорциональности их сходственных размеров. Должно быть обеспечено еще динамическое подобие. Основные требования динамического подобия:

- в натурном и модельном потоках должны действовать силы одинаковой физической природы;

- в сходственных точках натурального и модельного потока действующие силы должны находиться в постоянном соотношении. Так, если на некоторой поверхности натурального объекта действует сила давления P и сила трения T , а на модели эти же силы равны соответственно P_m и T_m , то условие динамического подобия для этих сил записывается в виде

$$\frac{P}{T} = \frac{P_m}{T_m} \text{ или } \frac{P}{P_m} = \frac{T}{T_m} = const ;$$

- граничные и начальные условия для натурального и модельного потоков совпадают.

Подобие называется полным, если в натурном и модельном потоках одинаковы отношения любых действующих сил, например: силы трения к силе инерции, силы давления к силе инерции, силы тяжести к силе инерции. Вследствие разной природы этих сил они по-разному зависят от скорости и размеров потока, поэтому на уменьшенной модели часто не удастся добиться полного динамического подобия. В этом случае довольствуются соблюдением частичного подобия, т. е. тождественности для природы и модели лишь отношения каких-то двух сил, которые предполагаются определяющими для данного потока. По остальным силам в этом случае подобие не соблюдается, и поэтому данные модельного эксперимента при частичном подобии не могут в точности соответствовать натуре. Но в ряде случаев действие этих сил пренебрежимо мало либо может быть рассчитано теоретически; поэтому моделирование при частичном подобии получило широкое распространение.

7.2.2. Закон полного динамического подобия Ньютона

Рассмотрим два динамически подобных потока, обтекающих геометрически подобные объекты: модель и натуру. Будем обозначать величины, относящиеся к модельному потоку, индексом «м», а относящиеся к натурному потоку – без индекса.

Частица жидкости массой m под действием силы f приобретает ускорение $\frac{dv}{dt}$; согласно второму закону Ньютона

$$f = m \frac{dv}{dt}.$$

Если потоки динамически подобны, то согласно второму принципу динамического подобия

$$\frac{f}{f_m} = \frac{m \frac{dv}{dt}}{m_m \frac{dv_m}{dt_m}} = const. \quad (7.4)$$

Масса частицы m может быть представлена через ее плотность ρ и объем, который равен кубу некоторой характерной длины частицы l , т. е. $m = \rho l^3$. В качестве характерного размера частицы, имеющей, например, форму куба, естественно принять его ребро. Ускорение частицы $\frac{dv}{dt}$ выражается через приращение ее характерной скорости Δv и характерное время Δt , т. е.

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} \sim \frac{v}{t}$$

(мы предполагаем, что приращение скорости Δv пропорционально ее величине v). Подставляя эти величины в формулу (7.4), имеем

$$\frac{f}{f_m} = \frac{\rho l^3 v}{t} \bigg/ \frac{\rho_m l_m^3 v_m}{t_m} = const.$$

Принимая во внимание, что отношение характерной длины в потоке l к характерному времени t есть скорость v , т. е.

$$v = \frac{l}{t}, \text{ приведем последнее выражение к виду}$$

$$\frac{f}{f_m} = \frac{\rho l^2 v^2}{\rho_m l_m^2 v_m^2} = const. \quad (7.5)$$

Перепишем это равенство несколько иначе

$$\frac{f}{\rho l^2 v^2} = \frac{f_m}{\rho_m l_m^2 v_m^2} = Ne = const. \quad (7.6)$$

Отношение $\frac{f}{\rho l^2 v^2}$ называется *числом Ньютона*, а выражение (7.6) является записью закона динамического подобия Ньютона: потоки подобны, если числа Ньютона для модели и натуре тождественны.

7.2.3. Аэродинамические коэффициенты

Представим себе, что в результате аэродинамического эксперимента (например, при продувке модели в аэродинамической трубе) определена некоторая сила f_m (например, сила лобового сопротивления). При известных параметрах модели $\rho_m l_m v_m$ легко вычислить число Ньютона

$$Ne = \frac{f_m}{\rho_m l_m^2 v_m^2}.$$

Если эксперимент выполнен при соблюдении полного динамического подобия, то натурная аэродинамическая сила f может быть определена из выражения (7.6)

$$f = Ne \rho l^2 v^2.$$

Обозначая $l^2 = F$, где F – «характерная площадь» потока, и принимая во внимание, что $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамическое давление потока, приведем последнее равенство к виду

$$f = 2NeF \frac{\rho v^2}{2},$$

или, обозначив $2Ne = C$, получим

$$f = CF \frac{\rho v^2}{2}, \quad (7.7)$$

где C – аэродинамический коэффициент для данного потока

$$C = 2Ne = \frac{2R_m}{\rho_m F_m v_m^2}.$$

В частности, при определении подъемной силы крыла R_y аэродинамический коэффициент обозначают через C_y , в качестве характерной площади F берут площадь наибольшей проекции крыла. При определении силы лобового сопротивления некоторого тела R_x аэродинамический коэффициент обозначают через C_x , в качестве характерной площади берут площадь миделевого (наибольшего поперечного) сечения тела.

7.2.4. Экспериментальные установки в гидроаэродинамике

Исследование движения тела относительно покоящейся жидкости возможно двумя способами:

- протаскиванием модели в неподвижной жидкости;
- обтеканием неподвижной модели равномерным потоком жидкости.

Первый способ применяется, главным образом, при испытании моделей судов в специальных бассейнах.

Модель судна, выполненная в некотором масштабе геометрически подобной натурному судну, протаскивается специальным устройством с определенной скоростью вдоль канала, причем динамометры («гидродинамические весы») измеряют силу сопротивления. Присоединяя датчики давления к дренажным отверстиям, выполненным заподлицо с поверхностью модели,

можно выявить также распределение давления по обтекаемому днищу и бортам.

В аэродинамических исследованиях применяется преимущественно второй способ: модель обтекается потоком воздуха в аэродинамической трубе. Схема устройства аэродинамической трубы наиболее распространенного типа представлена на рис. 7.1.

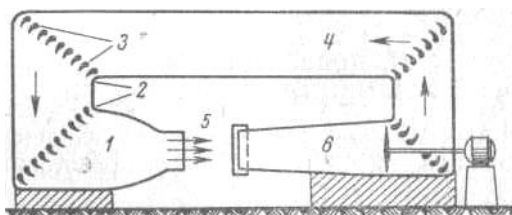


Рис. 7.1. Схема аэродинамической трубы

Поток воздуха, циркулирующий в трубе, получает энергию от вентилятора. Сужение потока в конфузторном коллекторе 1 позволяет получить в рабочей части 5 трубы, где устанавливаются модели исследуемых тел, более высокую скорость и большую равномерность потока, чем в остальных участках. Пройдя рабочую часть трубы, воздух возвращается к конфузору по обратному каналу 4. Направляющие лопатки 3 устанавливаются в поворотных коленах 2, чтобы уменьшить завихрения. Скорость потока определяется с помощью трубки Пито. Аэродинамические силы при продувке определяются с помощью аэродинамических весов, распределение давления по поверхности тел – с помощью пьезометров или микроманометров, присоединяемых к дренажным отверстиям. Современные большие аэродинамические трубы представляют собой весьма внушительные по размерам и энергоемкости сооружения.

В газодинамических трубах, применяемых для исследования обтекания при числах Маха больше единицы, сверхзвуковой поток получают с помощью сопла Лаваля. В этих опытах широко применяются оптические методы исследования, позволяющие сделать видимой систему скачков и волн разрежения у тела.

В таких задачах, как, например, исследование особенностей потоков в рабочем пространстве металлургических или технологических печей, течения в гидроузлах, искомым является не силовое взаимодействие потока с телом, а его скоростное поле величины и градиенты скорости, расположение вихревых и застойных зон и т. д. Подобные случаи исследуются преимущественно на гидравлических моделях, позволяющих наиболее просто выявить кинематические особенности течения.

7.3. Подобие потоков при действии различных сил

7.3.1. Гравитационное подобие

Пусть в потоке основной действующей силой является сила тяжести G . Ее можно представить для частицы массы m как

$$G = mg = \rho l^3 g,$$

где g – ускорение силы тяжести;

l – характерный размер частицы.

Согласно закону динамического подобия Ньютона отношение сил тяжести, действующих на сходственные частицы природы и модели, подчиняется равенству

$$\frac{G}{G_m} = \frac{\rho l^3 g}{\rho_m l_m^3 g_m} = \frac{\rho l^2 v^2}{\rho_m l_m^2 v_m^2}. \quad (7.7)$$

Из последнего выражения следует

$$\frac{v^2}{lg} = \frac{v_m^2}{l_m g_m} Fr = const. \quad (7.8)$$

Безразмерное число $\frac{v^2}{gl} = Fr$ носит название числа Фруда.

Таким образом, если в рассматриваемом потоке определяющей является сила тяжести, то на динамически подобной модели и в

натуре числа Фруда должны быть тождественными. Соблюдение постоянства Fr отвечает частичному подобию по действию силы тяжести.

Гравитационное моделирование широко применяется для исследования явлений, связанных с движением несжимаемых жидкостей под действием силы тяжести. В частности, при движении судна на поверхности воды образуются волны, давление которых составляет значительную часть лобового сопротивления. Эксперименты по определению силы сопротивления судна проводятся в специальных бассейнах. Поскольку в лабораторных условиях обычно $g = g_m$, то из уравнения (7.8) следует, что

$$v_m = v \sqrt{\frac{l_m}{l}}, \quad (7.9)$$

т.е. при гравитационном подобии масштаб скоростей пропорционален квадратному корню из масштаба длин. Например, если модель судна выполнена в масштабе 1/16 натуральной величины, то скорость ее протаскивания в бассейне должна составлять 1/4 скорости натурального судна.

7.3.2. Вязкостное подобие

Пусть в потоке основную роль играют силы вязкого трения T . Это справедливо для тех случаев, когда относительная роль силы веса мала по сравнению с силами вязкого трения. Силы вязкого трения определяются формулой Ньютона. Выражая площадь соприкосновения слоев F через квадрат характерного размера частицы l^2 , а градиент скорости $\frac{dv}{dn}$ через отношение характерной скорости к характерному размеру $\frac{v}{l}$, запишем выражение в виде

$$T = \mu l v.$$

С использованием закона динамического подобия Ньютона получаем

$$\frac{T}{T_m} = \frac{\mu l v}{\mu_m l_m v_m} = \frac{\rho l^2 v^2}{\rho_m l_m^2 v_m^2}.$$

Последнее равенство может быть представлено в виде

$$\frac{\rho l v}{\mu} = \frac{\rho_m l_m v_m}{\mu_m} = \text{Re} = \text{const}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{\mu}{\rho} = \nu$, ν – кинематический коэффициент вязкости, имеем

$$\frac{v l}{\nu} = \frac{v_m l_m}{\nu_m} = \text{Re} = \text{const}. \quad (7.10)$$

Отношение $\frac{v l}{\nu} = \text{Re}$ называется числом Рейнольдса.

Таким образом, если в рассматриваемом потоке определяющая – сила трения, то модель будет динамически подобна натуре, если вычисленные для них числа Рейнольдса одинаковы. Соблюдение постоянства числа Re отвечает частичному подобию по действию силы вязкого трения.

Вязкостное моделирование применяется главным образом при определении силы сопротивления. В частности, из гидравлики известно влияние числа $\text{Re} = \frac{v D}{\nu}$ на гидравлическое со-

противление трубы при ламинарном и турбулентном режимах (в данном случае в качестве характерного размера потока использовался диаметр трубы D). В качестве другого примера на рис. 7.2 представлена полученная в опытах зависимость коэффициента лобового сопротивления шара от числа $\text{Re} = \frac{v d}{\nu}$ (здесь d – диаметр шара).

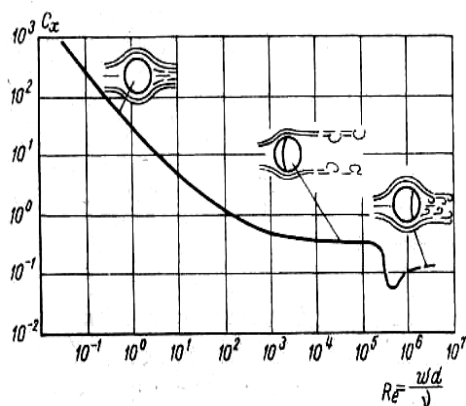


Рис. 7.2. Зависимость коэффициента лобового сопротивления шара от числа Re

Число Рейнольдса выражает в безразмерном виде соотношение между силами инерции и вязкости. Если Re мало, то в потоке преобладают силы вязкого трения. Если Re велико, то главную роль играют силы инерции. Для этих двух случаев законы сопротивления очень сильно отличаются друг от друга, в чем мы уже убедились при рассмотрении потерь напора по длине трубы.

Масштаб скоростей при вязкостном подобии может быть определен из уравнения (7.10)

$$v_m = v \frac{l}{l_m} \frac{\nu_m}{\nu}, \quad (7.11)$$

т.е. он обратно пропорционален масштабу длин и пропорционален масштабу коэффициентов вязкости. Если опыты (например, в аэродинамической трубе) проводятся с той же средой (воздухом), что и для натурального объекта, то согласно формуле (7.10) уменьшение масштаба модели $\frac{l_m}{l}$ должно вызывать пропорциональное увеличение скорости продувки модели v_m .

Если натурные скорости достаточно велики, то соответствующие модельные будут, во-первых, трудно достижимы, а, во-вторых, их осуществление привело бы в область сжимаемых потоков, в которых критерий подобия совсем иной. Поэтому при продувках в аэродинамической трубе часто приходится мириться с несоблюдением точного подобия сил трения.

7.3.3. Подобие движения сжимаемых сред

При движении сжимаемых жидкостей (газов) в области малых скоростей их можно рассматривать как несжимаемые. По мере возрастания скорости потока влияние сил упругости все возрастает и при скоростях, близких к скорости звука, становится преобладающим по сравнению с влиянием вязкости и весомости.

Если E – модуль объемной упругости газа (модуль Юнга), имеющий размерность Н/м², то сила давления вследствие сжимаемости среды ΔP на площадку площадью l^2 равна $\Delta P = El^2$

Скорость звука в сжимаемой среде выражается через модуль упругости и плотность формулой

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

откуда $E = \rho a^2$. Таким образом, $\Delta p = \rho a^2 l^2$.

Согласно закону динамического подобия Ньютона отношение сил избыточного давления вследствие упругости среды для модели и натуре равно

$$\frac{f}{f_m} = \frac{\Delta P}{\Delta P_m} = \frac{\rho a^2 l^2}{\rho_m a_m^2 l_m^2} = \frac{\rho l^2 v^2}{\rho_m l_m^2 v_m^2},$$

или

$$\frac{v}{a} = \frac{v_m}{a_m} = M = const, \quad (7.12)$$

где $\frac{v}{a} = M$ – число Маха.

Итак, чтобы два сравниваемых потока были подобны по действию сил, возникающих вследствие сжимаемости среды, необходимо, чтобы в опыте и в натурных условиях были одинаковыми числа M .

Число Маха сильно влияет на величину аэродинамических коэффициентов. На рис. 7.3 дана зависимость коэффициентов лобового сопротивления различных тел – цилиндра с продольной осью, направленной по течению, шара и снарядов разной формы – от числа M . Зависимость величины C_x от числа Маха связана с появлением скачков уплотнения.

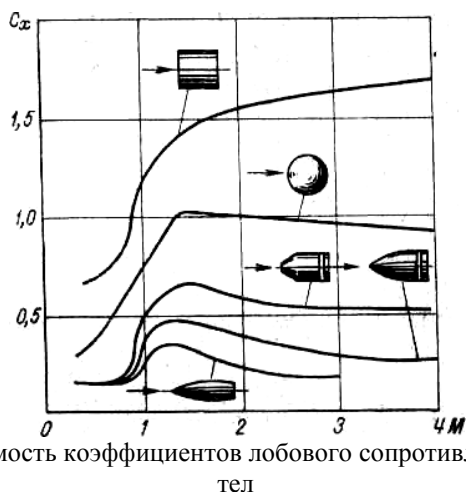


Рис. 7.3. Зависимость коэффициентов лобового сопротивления различных тел

7.3.4. Подобие колебательных движений в жидкости

На практике часто встречаются периодически повторяющиеся движения в потоке жидкости. Таковы, например, колебания турбинной лопатки или крыла самолета, вращение пропеллера. При движении в жидкости плохо обтекаемых тел (напри-

мер, поперечно поставленной пластинки или цилиндра) с их поверхности срываются вихри, сохраняющие в потоке шахматный порядок (так называемая дорожка Кармана, рис. 7.4).



Рис. 7.4. Дорожка Кармана

При экспериментальном исследовании периодически повторяющихся процессов необходимо соблюдать на модели кинематическое подобие с натурным процессом, состоящее в том, что частицы в сходственных точках модели и натуре проходят пути l в пропорциональные отрезки времени T . Следовательно, для кинематического подобия колебательного процесса необходимо, чтобы в натуре и на модели были постоянными отношения

$$\frac{vT}{L} = \frac{v_m T_m}{L_m} Sh = const. \quad (7.13)$$

Выражение $\frac{vT}{L} = Sh$ называется *числом Струхала*. Опыт показывает, в частности, что для широкого диапазона условий срыв вихрей с поверхности цилиндра диаметром D происходит при $Sh = \frac{vT}{D} = 0,2$, т. е. период схода вихрей равен $T = \frac{0,2D}{v}$.

7.3.5. Полное и частичное подобие

Изложенные условия динамического подобия являются основой для правильной постановки модельного эксперимента. Однако в натуре обычно основные силы действуют не порознь, а совместно. Поэтому основные характеристики потока оказываются зависящими не от какого-либо одного критерия подобия

– Fr, Re, M, Sh , а от их сочетания. В частности, коэффициент лобового сопротивления обтекаемого тела есть функция нескольких переменных $C_x = f(Fr, Re, M, Sh)$ и к тому же зависит от формы и расположения тела в потоке, степени турбулентности потока и, возможно, других факторов.

Осуществить полное подобие всех действующих сил на модели часто не удастся. Например, при обтекании корабля, наряду с сопротивлением волн, обусловленным силой тяжести, важную роль играет и сопоставление вязкого трения. Поэтому в модели необходимо было бы обеспечить как гравитационное, так и вязкостное подобие. Приравнивая для этого случая соответствующие выражения для масштабов скоростей получим

$$\sqrt{\frac{l_m}{l}} = \frac{l}{l_m} \frac{v_m}{v} \quad \text{или} \quad \frac{v}{v_m} = \left(\frac{l}{l_m} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, для одновременного осуществления на модели и в натуре тождественности критериев Фруда и Рейнольдса необходимо ставить опыты в жидкости, вязкость которой удовлетворяет последнему равенству. Для примера, рассмотренного в разделе о гравитационном подобии (протаскивание в бассейне модели судна в масштабе 1:16 натуральной величины), пришлось бы использовать жидкость с вязкостью, в 64 раза меньшей вязкости воды. Таких жидкостей в природе нет. Поэтому приходится удовлетворяться частичным подобием, воспроизводя на модели лишь сопротивление волн, а сопротивление вязкого трения рассчитывать аналитически с использованием теории пограничного слоя.

8. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

8.1. Общие понятия и дифференциальные уравнения пограничного слоя

8.1.1. Понятие пограничного слоя

Как уже отмечалось выше, при движении с большой скоростью в маловязких жидкостях или газах удобообтекаемых тел действие вязкости сосредоточено в тонком пристенном слое – пограничном слое. Поэтому при интегрировании уравнений движения вязкой жидкости нет необходимости распространять их на все пространство, занятое потоком, достаточно применить их лишь к области быстрого изменения скорости.

Опыт показывает, что толщина пограничного слоя весьма мала по сравнению с размерами обтекаемого тела. Так, например, при продольном обтекании пластинки потоком воздуха со скоростью 100 м/с на расстоянии 1 м от входной кромки скорость на поверхности пластинки равна нулю, а на расстоянии 15 мм от поверхности она практически равна 100 м/с и не изменяется при дальнейшем удалении. Из-за малых градиентов скорости во внешнем потоке силы вязкости там пренебрежимо малы; движение в этой области подчиняется законам динамики идеальной жидкости.

Исходя из этих соображений, при обтекании тел маловязкой жидкостью и при большой скорости потока v_∞ пространство, занятое потоком, можно условно разбить на три области, которые мы рассмотрим применительно к обтеканию крыла (рис. 8.1).

Первую область занимает пограничный слой, в котором скорость течения меняется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока на границе слоя. Для наглядности на рис. 8.1 масштаб для поперечных размеров выбран более крупным, чем для продольных; в действительности погранич-

ный слой имеет меньшую толщину. Вторая область – аэродинамический след, или спутная струя, – содержит частицы пограничного слоя, унесенные потоком. Третья область – это оставшее пространство, занятое потоком, в котором жидкость можно считать идеальной, а движение – происходящим без вращения частиц, т. е. потенциальным.

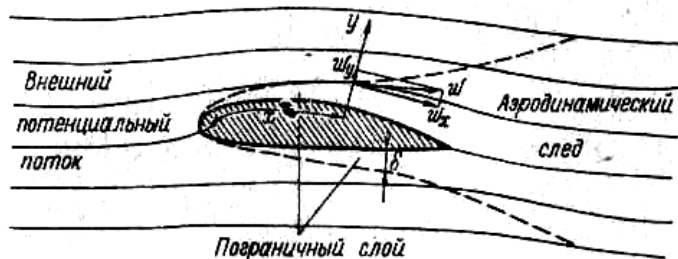


Рис. 8.1. Обтекание крыла

8.1.2. Уравнения Прандтля

При выводе дифференциальных уравнений пограничного слоя выберем систему координат, как показано на рис. 8.1: ось x направлена вдоль обтекаемой поверхности, ось y всюду к ней перпендикулярна. Начало координат – в передней критической точке, где раздваивается набегающий поток. В силу малой толщины пограничного слоя δ , по сравнению с размерами обтекаемого тела, можно пренебречь кривизной поверхности и рассматривать выбранную систему координат как обычную декартову.

Будем считать жидкость несжимаемой, а движение – установившимся. Для плоского (двухмерного) потока система уравнений Навье-Стокса (7.3) имеет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right).$$

В силу сделанных предположений внутри пограничного слоя значительны градиенты только продольной составляющей скорости v_x , поэтому второе из записанных уравнений принимает вид

$$\frac{dp}{dy} = 0.$$

Из него следует, что давление внешнего потока передается через пограничный слой без изменений. Легко показать также, что в первом уравнении член $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ пренебрежимо мал по сравнению с членом $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$. В итоге первое уравнение и записанное совместно с ним уравнение неразрывности образуют систему

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Отметим, что полная производная скорости $v_x(x, y, t)$ по времени, стоящая в левой части первого уравнения системы (8.1), по правилу дифференцирования функции нескольких переменных равна

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

(так как $\frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \frac{\partial y}{\partial t} = v_y$) Поэтому при установившемся движении $\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0\right)$ система (8.1) может быть представлена в виде системы уравнений Прандтля

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Уравнения Прандтля значительно проще, чем исходные уравнения Навье-Стокса (7.3). Вместе с тем, они достаточно хорошо соответствуют действительности, и результаты их интегрирования весьма точно совпадают с данными эксперимента.

Продольное изменение давления $\left(-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}\right)$ в уравнениях Прандтля может быть выражено через распределение скоростей во внешнем неискаженном потоке. Действительно, если скорость внешнего потока у данной точки обтекаемого тела равна U , то согласно уравнению Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Дифференцируя последнее равенство по x , получаем

$$U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

или

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx},$$

и система (8.2) приобретает вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Распределение скоростей во внешнем потоке, входящее в первое уравнение системы, может быть получено в результате решения задачи об обтекании тела потоком идеальной жидкости, например численным методом с использованием программных комплексов Ansys или Comsol. Таким образом, осуществляется «стыковка» двух основных теоретических разделов гидроаэромеханики – динамики идеальной и вязкой жидкости.

8.1.3. Граничные условия

Одно из граничных условий решения системы (8.1) требует равенства нулю вектора скорости на поверхности обтекаемого тела

$$v_x|_{y=0} = v_y|_{y=0} = 0. \quad (8.3)$$

Второе условие предусматривает отсутствие торможения на внешней границе пограничного слоя. Оно может задаваться двояким образом. Строго говоря, влияние пристенного торможения должно сказываться на любом расстоянии от стенки, поэтому при строгой постановке задачи второе условие задается в виде

$$v_x|_{y \rightarrow \infty} = U. \quad (8.4)$$

Решение этой задачи позволяет определить параметры «асимптотического» пограничного слоя, в котором распределение скоростей в пограничном слое асимптотически переходит в распределение скоростей во внешнем потоке. Более часто второе граничное условие задается для пограничного слоя конеч-

ной толщины, под которым понимают слой, где полное изменение скорости происходит на расстоянии конечной толщины пограничного слоя δ , от нуля на стенке до $v_x = U$ на внешней границе, т.е. второе граничное условие имеет вид

$$v_x|_{y=\delta} = U, \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0. \quad (8.5)$$

В качестве δ можно, например, принимать расстояние от стенки, на котором скорость отличается на 1 % от скорости невозмущенного потока. Хотя такое задание граничного условия является менее строгим, тем не менее математическое решение оказывается более простым, а результаты почти совпадают с решением более строгой задачи.

8.1.4. Турбулизация пограничного слоя

Опыт показывает, что слоистое, ламинарное течение жидкости в пограничном слое наблюдается лишь на начальном участке обтекаемой поверхности. При достаточно больших размерах обтекаемого тела на некотором расстоянии от передней критической точки наблюдается перестроение ламинарного течения в турбулентное, в котором движение носит неустановившийся пульсационный характер. Критическая точка на поверхности тела, где начинается переход ламинарного течения внутри пограничного слоя в турбулентное, называется точкой перехода. Схема обтекания крыла с двумя видами пограничного слоя на нем представлена на рис. 8.2.

Область 1 соответствует ламинарному пограничному слою, область 2 – турбулентному; точки T_g и T_n соответствуют началу перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на верхней и нижней поверхностях крыла, в точке S происходит отрыв пограничного слоя. Область 3 – аэродинамический след за телом, область 4 – внешний невозмущенный поток.

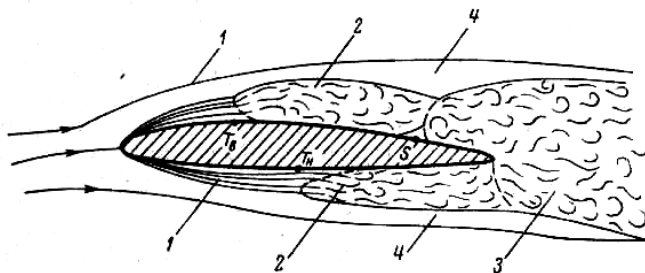


Рис. 8.2. Схема обтекания крыла с двумя видами пограничного слоя

Обычно предполагают, что в непосредственной близости от обтекаемой поверхности пульсации скорости сдерживаются этой поверхностью и движение здесь ламинарное. Это – так называемый ламинарный подслой, аналогичный подслою при движении жидкости в трубах в области гидравлически гладкого сопротивления. Но толщина этого подслоя настолько мала, что на рис. 8.2 он не показан. В случае достаточно крупных выступов шероховатости на обтекаемой поверхности ламинарный подслой вообще разрушается.

Перестроение режима течения в пограничном слое зависит от величины местного числа Рейнольдса

$$Re_x = \frac{vx}{\nu},$$

где x – расстояние от передней критической точки.

В частности, согласно экспериментальным данным при продольном обтекании пластинки точка перехода лежит при значениях $x_{кр}$, соответствующих в среднем критическому числу Рейнольдса

$$Re_{xкр} = \frac{v_{\infty} x_{кр}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5. \quad (8.6)$$

Уравнения Прандтля (8.1) выведены в предположении, что трение в пограничном слое происходит только за счет вязкости. Это предположение справедливо для ламинарного погранич-

ного слоя. При турбулентном течении обмен количеством движения между слоями происходит за счет взаимного проникновения вихревых частиц, размеры которых намного превышают размеры молекул. Поэтому обмен количеством движения резко возрастает и соответственно увеличивается сила трения. Механизм трения в турбулентном пограничном слое, как и в случае гидравлического сопротивления труб, зависит от величины числа Рейнольдса и шероховатости поверхности.

Дифференциальные уравнения Прандтля для решения задач турбулентного пограничного слоя применять невозможно. Для этого используется метод интегральных соотношений, предложенный Карманом; он более прост, чем интегрирование дифференциальных уравнений Прандтля, и поэтому применяется также и в задачах ламинарного пограничного слоя. Способ Кармана не позволяет определить поле скоростей в пограничном слое, однако он дает возможность вычислить толщину пограничного слоя и распределение сил трения по поверхности обтекаемого тела с достаточной для практики точностью, и гораздо проще, чем при интегрировании дифференциальных уравнений.

8.2. Интегральные соотношения и расчет пограничного слоя

8.2.1. Соотношение Кармана

Рассмотрим двухмерное установившееся движение жидкости в пограничном слое. Выберем два сечения пограничного слоя, проведенные нормально к обтекаемой поверхности на расстоянии Δx (рис. 8.3).

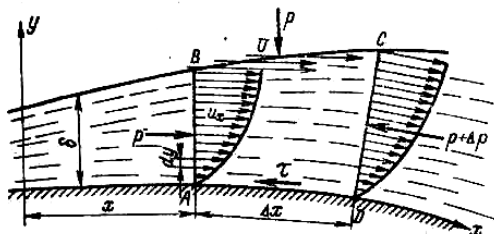


Рис. 8.3. Движение течения в пограничном слое

Применим теорему об изменении количества движения к объему жидкости, ограниченному контуром $ABCD$ и имеющему единичную толщину. Уравнение импульсов имеет вид

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = f, \quad (8.7)$$

или в проекции на ось x

$$\frac{\Delta(mv)_x}{\Delta t} = f_x, \quad (8.8)$$

где f — результирующая всех сил, приложенных к объему.

Жидкость втекает в выделенный неподвижный объем через левую и верхнюю грани и вытекает через правую, в результате чего устанавливается некоторый баланс в обмене количеством движения.

Вычислим количество движения, поступающее в выделенный объем через грань AB . Через элементарную полоску этой грани с основанием dy и высотой, равной единице, протекает за время Δt масса жидкости, равная $\rho v_x dy \Delta t$, через всю грань

AB поступает масса $\int_0^\delta \rho v_x dy \Delta t$. Элементарная масса $\rho v_x dy \Delta t$

несет количество движения, проекция которого на ось x равна $\rho v_x^2 dy \Delta t$. Интегрируя это выражение по y от $y=0$ до $y=\delta$, получаем

$$(mv_x)_{AB} = \Delta t \int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy.$$

Приращение количества движения от грани AB до грани CD составит

$$\begin{aligned} (mv_x)_{CD} - (mv_x)_{AB} &= \left(\Delta t \int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy \right)_{CD} - \left(\Delta t \int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy \right)_{AB} = \\ &= \Delta \left(\Delta t \int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy \right). \end{aligned}$$

Вычислим далее количество движения, поступающее в выбранный объем через верхнюю грань BC . Пусть скорость потока на верхней границе слоя равна U . Масса Δm жидкости, поступающей с этой скоростью в пограничный слой извне равна разности масс: поступившей внутрь объема $ABCD$ через грань AB и вытекшей через грань CD , т.е.

$$\Delta m = \left(\Delta t \int_0^{\delta} \rho v_x dy \right)_{CD} - \left(\Delta t \int_0^{\delta} \rho v_x dy \right)_{AB} = \Delta \left(\Delta t \int_0^{\delta} \rho v_x dy \right).$$

Количество движения, поступающего через грань BC , равно

$$(mv_x)_{BC} = U \Delta m = U \Delta \left(\Delta t \int_0^{\delta} \rho v_x dy \right)$$

и левая часть уравнения (8.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(mv_x)}{\Delta t} &= \frac{(mv_x)_{CD} - (mv_x)_{AB} - (mv_x)_{BC}}{\Delta t} = \\ &= \Delta \left(\int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy \right) - U \Delta \left(\int_0^{\delta} \rho v_x dy \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь силы, действующие на выделенный объем. Внешние объемные силы (например, силы тяжести) в пограничном слое намного слабее силы трения, поэтому будем ими пренебрегать. Чтобы определить проекцию действующих сил на ось x , нужно учесть: силу давления на грань AB , равную $p\delta$; силу давления на грань CD , равную $(p + \Delta p)(\delta + \Delta\delta)$, где Δp – приращение давления от грани AB до грани CD , а $\Delta\delta$ – приращение толщины пограничного слоя от грани AB до грани CD ; силу давления на грань BC , равную $p\Delta\delta$ и силу трения, равную $-\tau\Delta x$, где τ – сила трения на единицу площади обтекаемой поверхности. Суммирую эти силы, получим

$$f_x = p\delta - (p + \Delta p)(\delta + \Delta\delta) + p\Delta\delta - \tau\Delta x = -\delta\Delta p - \tau\Delta x.$$

Подставляя полученные величины в уравнение импульсов (8.8), разделив на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_x^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_x dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau. \quad (8.9)$$

Уравнение (8.9) называется уравнением импульсов или интегральным соотношением Кармана (1921) для плоского установившегося течения в пограничном слое.

Если выразить с помощью уравнения Бернулли продольный градиент давления $\frac{dp}{dx}$ через распределение скоростей U во внешнем невозмущенном потоке, т.е.

$$-\frac{dp}{dx} = \rho U \frac{dU}{dx},$$

то уравнение Кармана переписывается в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_x^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_x dy = \delta U \frac{dU}{dx} - \frac{\tau}{\rho}. \quad (8.10)$$

При выводе уравнения импульсов (8.9) мы не делали никаких предположений относительно природы касательного напряжения τ , поэтому оно в одинаковой степени применимо как к ламинарному, так и к турбулентному пограничному слою.

В уравнении импульсов предполагается известным распределение скоростей во внешнем потоке, т.е. величины U и $\frac{dU}{dx}$.

Они могут быть определены методами гидродинамики идеальной жидкости или опытным путем в результате измерения распределения давления на поверхности обтекаемого тела. Для определения наиболее важных для практики характеристик пограничного слоя – его толщины δ и касательного напряжения на стенке τ приходится задаваться распределением скоростей в слое. То обстоятельство, что скорость v_x внутри слоя входит в уравнение импульсов под знаком интеграла, уменьшает погрешность расчета и позволяет пользоваться приближенными законами распределения скорости.

8.2.2. Условные толщины пограничного слоя

Приведем еще одну форму записи уравнения импульсов, получаемую путем тождественных преобразований. Так как

$$\frac{d}{dx} \left(U \int_0^\delta v_x dy \right) = \frac{dU}{dx} \int_0^\delta v_x dy + U \frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x dy,$$

то уравнение (8.9) может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x^2 dy - \frac{d}{dx} \left(U \int_0^\delta v_x dy \right) + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta v_x dy - \delta U \frac{dU}{dx} = -\frac{\tau}{\rho}.$$

Объединяя в последнем выражении члены, содержащие производные от интегралов, получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta (U v_x - v_x^2) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta (U - v_x) dy = -\frac{\tau}{\rho}. \quad (8.11)$$

Интеграл во втором слагаемом левой части уравнения (8.11) представляет собой разность между расходами жидкости в пограничном слое, если бы скорость во всем его сечении не уменьшалась вследствие вязкости, а оставалась равной U , и действительным расходом (рис. 8.4). Таким образом, этот интеграл представляет собой уменьшение расхода в пограничном слое вследствие вязкости. Графически он изображен площадью с перекрестной штриховкой на рис. 8.4.

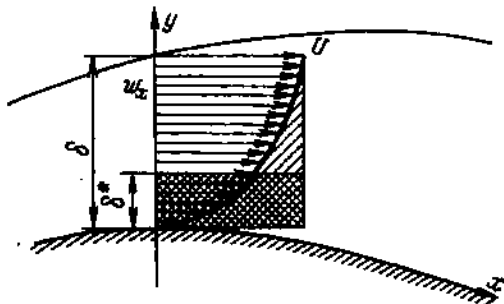


Рис. 8.4. Интеграл уравнения (8.11)

Разделив этот интеграл на величину скорости U , получим некоторый размер δ^* , равный толщине слоя, через который протекал бы недостающий расход

$$\delta^* = \frac{\int_0^{\delta} (U - v_x) dy}{U} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) dy.$$

На расстояние δ^* оттесняются от поверхности тела линии тока невозмущенного течения вследствие торможения в пограничном слое. Поэтому δ^* носит название толщины вытеснения.

Аналогично интеграл в первом слагаемом левой части уравнения (8.11) можно рассматривать как уменьшение количества движения жидкости, протекающей через пограничный

слой, или потерю импульса. Разделив этот интеграл на U^2 , получим линейную величину δ^{**} , называемую толщиной потери импульса

$$\delta^{**} = \frac{\int_0^{\delta} (Uv_x - v_x^2) dy}{U^2} = \int_0^{\delta} \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy.$$

Вводя величины δ^* и δ^{**} в уравнение (8.11), получим

$$\frac{d}{dx}(U^2 \delta^{**}) + U \frac{dU}{dx} \delta^* = \frac{\tau}{\rho}.$$

Или, выполнив дифференцирование и разделив на U^2 ,

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau}{\rho U^2}. \quad (8.12)$$

В этой форме записи уравнения импульсов неизвестными являются δ^* , δ^{**} и τ .

8.2.3. Ламинарный пограничный слой на плоской пластинке

При продольном обтекании тонкой плоской пластинки скорость внешнего потока не меняется по длине x члены $U \frac{dU}{dx}$ в уравнениях Прандтля (8.2) и $\delta U \frac{dU}{dx}$ в уравнении Кармана (8.10) равны нулю. Поэтому основные параметры пограничного слоя на плоской пластинке определяются наиболее просто. Результаты этого расчета часто используются для приблизительного определения параметров пограничного слоя различных удобообтекаемых тел – тонких крыльев и др.

Применим для расчета пограничного слоя на плоской пластинке уравнение импульсов (8.10). Будем считать жидкость несжимаемой. Если постоянная скорость внешнего потока равна v_∞ , то уравнение импульсов приобретает вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x^2 dy - v_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x dy = -\frac{\tau}{\rho} \quad (8.13)$$

или

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau}{\rho v_\infty^2}. \quad (8.14)$$

Наиболее простой способ задания скорости в ламинарном пограничном слое – это представление v_x в виде степенного ряда по степеням y

$$v_x = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \dots$$

Коэффициенты этого ряда $a_0(x), a_1(x), \dots$ можно определить из граничных условий (8.3)–(8.7), которым должна удовлетворять скорость v_x и ее производные на границах слоя. Эти условия таковы

$$v_x|_{y=0} = 0, v_x|_{y=\delta} = v_\infty, \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=\delta} = 0, \left. \frac{d^2 v_x}{dy^2} \right|_{y=\delta} = 0. \quad (8.15)$$

Для простоты ограничимся в разложении v_x первыми двумя членами, т.е. $v_x = a_0 + a_1 y$. Предположение о линейном распределении скоростей по толщине пограничного слоя является, конечно, очень грубым приближением, но мы убедимся ниже, что даже такое приближение дает удовлетворительные результаты. Используя первые два из граничных условий (8.15), получим

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{v_\infty}{\delta},$$

т.е.

$$v_x = \frac{v_\infty}{\delta} y.$$

Касательное напряжение τ на поверхности пластинки определяется по закону Ньютона, т.е.

$$\tau = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0}.$$

В данном случае имеем

$$\tau = \mu \frac{v_\infty}{\delta}.$$

Для определения толщины пограничного слоя δ подставим полученные величины в уравнение импульсов (8.13). Для этого вычислим входящие в него интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^\delta v_x^2 dy &= \left(\frac{v_\infty}{\delta} \right)^2 \int_0^\delta y^2 dy = \frac{1}{3} v_\infty^2 \delta, \\ \int_0^\delta v_x^2 dy &= \frac{v_\infty}{\delta} \int_0^\delta y dy = \frac{1}{2} v_\infty \delta. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в уравнение (8.13), имеем

$$\frac{1}{3} v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{1}{2} v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = -\frac{\mu}{\rho} \frac{v_\infty}{\delta}$$

или

$$\frac{1}{6} v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{\delta}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, запишем его в виде

$$\delta d\delta = \frac{6\nu}{v_\infty} dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\delta^2 = \frac{12\nu x}{v_\infty} + C.$$

Постоянную интегрирования находим из условия на передней кромке пластинки. Полагая, что при $x=0$ пограничный слой только начинает развиваться, т.е. $\delta|_{x=0}=0$, имеем $C=0$, следовательно

$$\delta = \sqrt{\frac{12\nu x}{v_\infty}} = 3,46 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} = \frac{3,46x}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

где $\text{Re}_x = \frac{v_\infty x}{\nu}$ К – местное число Рейнольдса.

Касательное напряжение τ получается равным

$$\tau = \frac{\mu v_\infty}{\delta} = 0,289 \sqrt{\frac{\mu \rho v_\infty^3}{x}} = \frac{0,289}{\sqrt{\text{Re}_x}} \rho v_\infty^2.$$

Полученные формулы для δ и τ отличаются от точных формул, являющихся результатом более сложного решения уравнений Прандтля (8.1), только числовыми коэффициентами. Точные решения имеют вид

$$\delta = \frac{4,90x}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad (8.16)$$

$$\tau = \frac{0,332}{\sqrt{\text{Re}_x}} \rho v_\infty^2 \quad (8.17)$$

(в точном решении за толщину пограничного слоя принималось такое расстояние, от стенки, где скорость отличается всего на 1 % от скорости невозмущенного потока). Величины δ и τ могут быть вычислены гораздо точнее, если не ограничиваться двумя слагаемыми в разложении v_x по степеням y , а взять три или четыре слагаемых; результаты решения в этом случае быстро сходятся к точным формулам (8.16) и (8.17).

Решение для пластинки показывает, что в ламинарном пограничном слое его толщина δ нарастает по длине пластинки по параболическому закону, а напряжения трения обратно пропорционально \sqrt{x} (рис. 8.5). Этот закон при $x=0$ дает $\tau = \infty$; в действительности напряжение трения у входной кромки не может возрастать безгранично, так как у реальной пластинки (а не бесконечно тонкой) происходит торможение у входной кромки из-за ее конечной толщины $v_x|_{x=0} = 0$. Следовательно, в передней критической точке и $\tau_x|_{x=0} = 0$. Поэтому действительное распределение касательных напряжений на поверхности пластинки будет таким, как показано на рис. 8.5 пунктирной линией. Величина участка, к которому не применима формула (8.17), зависит от степени заостренности входной кромки пластинки.

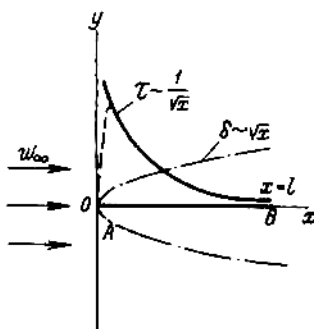


Рис. 8.5. Распределение касательных напряжений на поверхности пластинки

Определим полную силу трения на поверхности пластинки длиной l и шириной b при ламинарном обтекании. Используя выражение (8.17), получим, что сила трения на одной из сторон пластинки равна

$$R_{mp} = b \int_0^l \tau dx = 0,332b \sqrt{\mu \rho v_\infty^3} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0,664b \sqrt{\mu \rho v_\infty^3} l.$$

Сравниваем полученный результат с общей формулой для определения гидродинамических сил (8.7), которая для сил трения может быть записана в виде

$$R_{mp} = C_{mp} F \frac{\rho v_{\infty}^2}{2},$$

где C_{mp} – коэффициент трения;

$F = bl$ – площадь обтекаемой поверхности.

Для ламинарного пограничного слоя на пластинке получим

$$R_{mp} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} bl \frac{\rho v_{\infty}^2}{2},$$

где $Re_l = \frac{v_{\infty} l}{\nu}$ – местное число Рейнольдса для $x = l$.

Следовательно, коэффициент сопротивления C_{mp} для ламинарного слоя на пластинке равен

$$C_{mp.л.} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}}. \quad (8.18)$$

8.2.4. Турбулентный пограничный слой на плоской пластинке

Применим уравнение импульсов (8.13) для расчета турбулентного пограничного слоя на пластинке. Для этого, как уже отмечалось выше, требуется задать хотя бы приближенно закон распределения скоростей поперек слоя и характер зависимости τ от U и δ . Наиболее просто эти дополнительные условия задаются, если считать распределение скоростей в турбулентном пограничном слое таким же, как и распределение скоростей по радиусу цилиндрической трубы.

Согласно опытным данным в трубе при достаточно больших числах Рейнольдса осредненная скорость пропорциональна расстоянию от стенки в степени $1/7$. Поэтому будем считать, что

$$v_x = U \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (8.19)$$

Также из экспериментов с трубами следует, что зависимость касательного напряжения трения от U и δ имеет вид

$$\tau = 0,0450 \frac{\rho U^2}{2} \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (8.20)$$

Подставляя выражение (8.19) в уравнение импульсов на плоской пластинке (8.13), вычислим входящие в него интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} v_x^2 dy &= v_{\infty}^2 \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{2}{7}} dy = \frac{7}{9} v_{\infty}^2 \delta, \\ \int_0^{\delta} v_x dy &= v_{\infty} \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} dy = \frac{7}{8} v_{\infty} \delta. \end{aligned}$$

С использованием полученных выражений и формулы (8.20) уравнение (8.13) приводится к виду

$$\frac{7}{9} v_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{7}{8} v_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = -0,0450 \frac{v_{\infty}^2}{2} \left(\frac{\nu}{v_{\infty} \delta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

или

$$\frac{d\delta}{dx} = 0,2315 \left(\frac{\nu}{v_{\infty} \delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Интегрируя полученное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$\frac{4}{5} \delta^{4/5} = 0,2315 \left(\frac{\nu}{\nu_{\infty}} \right)^{\frac{1}{4}} x + C.$$

Постоянную интегрирования C можно определить, если принять, что в критическом сечении, где ламинарный слой переходит в турбулентный, их толщины одинаковы, т.е. $\delta|_{x=x_{кр}} = \delta_{кр}$. Тогда начальное значение толщины турбулентного слоя можно определить с использованием теории ламинарного слоя (8.16). Если же местные числа Рейнольдса $Re_l = \frac{\nu_{\infty} l}{\nu}$ очень велики (порядка 10^7 и больше), то ламинарный участок у входной кромки пластинки занимает относительно небольшую часть ее длины. В этом случае можно пренебречь его влиянием на толщину слоя и считать $\delta|_{x=0} = 0$, откуда следует $C = 0$; получаем формулу для расчета толщины турбулентного слоя на пластинке в виде

$$\delta = \frac{0,37}{\sqrt[5]{Re_x}}. \quad (8.21)$$

Отметим, что толщина турбулентного слоя пропорциональна $x^{4/5}$, т.е. она нарастает вдоль пластинки гораздо быстрее, чем в случае ламинарного пограничного слоя, где $\delta \sim x^{1/2}$. Это объясняется тем, что в турбулентном слое вследствие перемешивания частиц торможением охватываются более толстые слои внешнего потока, чем в случае ламинарного слоя.

Подставляя значение δ из (3.21) в формулу (8.20), получим выражение для τ в турбулентном слое пластинки

$$\tau = \frac{0,1156}{\sqrt[5]{Re_x}} \rho \nu_{\infty}^2. \quad (8.22)$$

Выражение (8.22) показывает, что в турбулентном слое τ убывает с удалением от входной кромки пропорционально $x^{-\frac{1}{5}}$, т.е. менее интенсивно, чем в случае ламинарного слоя, где $\tau \sim x^{-\frac{1}{2}}$. Распределение касательных напряжений τ по длине пластинки, на которой ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный при $x = x_{кр}$, представлено на рис. 8.6.

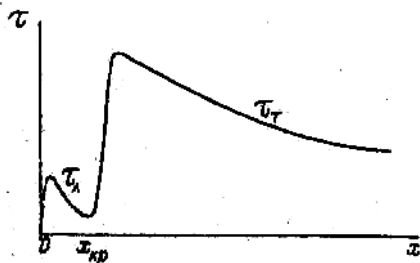


Рис. 8.6. Распределение касательных напряжений по длине пластинки

Определим полную силу трения для пластинки длиной l и шириной b . Сила трения на одной стороне пластинки равна

$$R_{mp} = b \int_0^l \tau dx = 0,1156 \rho v_\infty^2 \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} \int_0^l x^{-\frac{1}{5}} dx = 0,144 b \rho v_\infty^2 \left(\frac{v}{v_\infty l} \right)^{\frac{1}{5}},$$

отсюда коэффициент трения

$$C_{mp.m} = \frac{R_{mp}}{b l \frac{\rho v^2}{2}} = \frac{0,072}{\sqrt[5]{\frac{v_\infty l}{v}}}.$$

Или

$$C_{тр.т} = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_1}}. \quad (8.23)$$

При числах Рейнольдса до $2 \cdot 10^7$ формула (8.23) находится в хорошем согласии с экспериментальными данными. При больших значениях Re_l значения $C_{mp.m}$ получаются несколько заниженными.

Наряду со степенным заданием скорости в турбулентном слое (8.19) уравнение импульсов (8.13) интегрируется также при логарифмическом распределении скоростей в пограничном слое

$$U - v_x \sim \ln \frac{\delta}{y}.$$

Такой способ задания скорости является универсальным для более широких значений Re_l (от 10^6 до 10^9). Использование логарифмического закона приводит к следующей формуле

$$C_{mp.m.} = \frac{0,455}{(\lg Re_l)^{2,58}}.$$

При не слишком больших значениях Re_l последняя формула дает результаты, практически совпадающие с расчетом по (8.23).

8.2.5. Факторы, влияющие на турбулизацию пограничного слоя

Рассмотрим явление турбулизации пограничного слоя в аналогии с переходом течения в трубе из ламинарного в турбулентное. При равномерном течении в трубе в ее поперечном сечении, как и в пограничном слое, происходит нарастание скорости от стенки к оси. Поэтому толщину пограничного слоя можно считать аналогичной радиусу трубы $r = \frac{D}{2}$ и можно вычислять число Рейнольдса по толщине пограничного слоя

$$\text{Re}_\delta = \frac{v_\infty \delta}{\nu}.$$

Опыт показывает, что критическое число Рейнольдса $\text{Re}_{\delta_{\text{кр}}}$ на пластинке оказывается в среднем близким к $\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{\nu r}{\nu}$ для трубы. Это обстоятельство говорит о том, что потеря внутренней устойчивости ламинарного движения в трубе и в пограничном слое имеет одинаковую природу.

Имеются, однако, и существенные различия между этими явлениями.

В трубе величина $\text{Re}_{\text{кр}}$ практически не зависит от начальных возмущений, вносимых в поток на входном участке трубы; эти возмущения затухают в ламинарном течении, и только потеря внутренней устойчивости при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$ приводит к появлению пульсационных движений. В пограничном слое, наоборот, положение точки перехода существенно зависит от интенсивности турбулентных движений в набегающем потоке. Это связано с тем, что через внешнюю границу пограничного слоя в него непрерывно поступают возмущения из внешнего потока. При повышении степени возмущенности этого потока величина критического числа Рейнольдса уменьшается, точка перехода смещается навстречу течению. Таким образом, увеличение интенсивности пульсаций во внешнем потоке способствует ранней турбулизации пограничного слоя.

В трубе величина $\text{Re}_{\text{кр}}$ не зависит от степени шероховатости стенок: при ламинарном течении скорость вблизи стенки равна нулю, и выступы шероховатости лежат в застойной области. В случае пограничного слоя у входной кромки пограничный слой только начинает развиваться ($\delta|_{x=0} = 0$), и бугорки шероховатости высовываются из пограничного слоя, внося в него возмущения. Поэтому повышение степени шероховатости спо-

способствует ранней турбулизации пограничного слоя и увеличению сопротивления трения. Это явление особенно сильно сказывается при больших, скоростях обтекания, поэтому увеличение скоростей (в авиации, турбиностроении и т.д.) предъявляет повышенные требования к чистоте обработки обтекаемой поверхности, особенно вблизи входной кромки.

Величина критического числа Рейнольдса и связанная с ней координата точки перехода $x_{кр}$ зависит также от того, является ли течение конфузорным. Повышение скорости вниз по течению в конфузорном канале ($dU/dx > 0$) угнетает развитие пограничного слоя и способствует его ламинализации, величина критического числа Рейнольдса возрастает. Наоборот, переход к диффузорному течению ($dU/dx < 0$) способствует ранней турбулизации пограничного слоя. Например, на спинке крыла самолета или лопатки турбомашин имеется входной конфузорный участок, где скорость возрастает с координатой x ; здесь пограничный слой, как правило, ламинарный. В задней части крыла поток диффузорный и пограничный слой турбулентен. Точка перехода обычно очень близка к сечению, в котором $dU/dx < 0$. Величина продольного градиента скорости оказывает также существенное влияние на явление отрыва пограничного слоя, рассмотренное ниже.

8.3. Отрыв пограничного слоя и сопротивление при отрывном обтекании

8.3.1. Возникновение отрыва

Рассмотрим обтекание выпуклой поверхности потоком вязкой жидкости (рис. 8.7). За точкой минимума давления в кормовой части обтекаемого тела скорость вниз по течению падает, давление нарастает ($dp/dx > 0$). Жидкость в этой области дви-

жется против подтормаживающего действия перепада давления. Если бы она была идеальной, то запаса ее кинетической энергии, накопленного в результате возрастания скорости у выпуклой стенки (участок $(dp/dx < 0)$ на рис. 8.7), хватило для преодоления этого торможения и поток сомкнулся у задней критической точки.

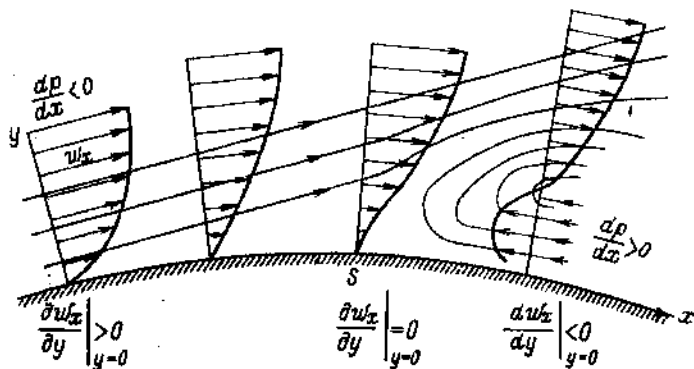


Рис. 8.7. Обтекание выпуклой поверхности потоком вязкой жидкости

В случае, когда жидкость вязкая, она теряет в пограничном слое свою механическую энергию на трение. Поэтому встречный перепад давления вызывает сначала остановку, а затем и попятное движение жидкости в пограничном слое (пограничный слой как бы выжимается навстречу основному потоку). При встрече прямого и попятного течения (точка S на рис. 8.7) линии тока отесняются от поверхности тела, толщина пограничного слоя резко увеличивается, а затем и происходит его отрыв от поверхности тела. Из рис. 8.7 следует, что в точке отрыва S продольная составляющая скорости v_x у поверхности обтекаемого тела не меняется с координатой y , поэтому условие отрыва записывается математически в виде

$$\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = 0.$$

Из приведенных соображений ясно, что основная причина отрыва пограничного слоя – возрастание давлений вниз по течению. В некоторых специальных случаях явление отрыва может вызываться также действием значительных по величине массовых сил, «отжимающих» поток от стенки (например, центробежной и кориолисовой сил инерции в межлопаточном канале турбомшины).

Появление отрыва резко меняет картину обтекания тела по сравнению с обтеканием идеальной жидкостью. За точкой отрыва линии тока, как в пограничном слое, так и во внешнем потоке уже не следуют вдоль контура обтекаемого тела. Частицы пограничного слоя в результате отрыва и закручивания значительными градиентами скорости, свойственными течению в пограничном слое, образуют вихри, которые поочередно отходят от поверхности тела и уносятся потоком, формируя за телом аэродинамический, или кильватерный, след (область 3 на рис. 8.7). Если в лобовой части обтекаемого тела распределение скоростей и давлений во внешнем потоке очень близко к соответствующему распределению при обтекании тела идеальной жидкостью, то в кормовой вследствие отрыва пограничного слоя и образования вихревого следа картина течения оказывается совершенно отличной от движения идеальной жидкости. В частности, картина течения при поперечном обтекании кругового цилиндра представлена на фотографиях различных последовательных стадий обтекания (рис. 8.8).

На рис. 8.8, а, соответствующем начальному моменту движения, пограничный слой еще не успел образоваться и линии тока такие же, как при потенциальном обтекании цилиндра. На рис. 8.8, б пограничный слой, образовавшийся у поверхности цилиндра, отрывается и начинается вихреобразование. Рис. 8.8, в демонстрирует окончательную стадию образования вихревого следа за цилиндром, симметрия вихрей нарушена, вихри поочередно отходят от поверхности цилиндра и сносятся потоком, вызывая пульсации скорости и давления в аэродинамическом следе и образование дорожки Кармана.

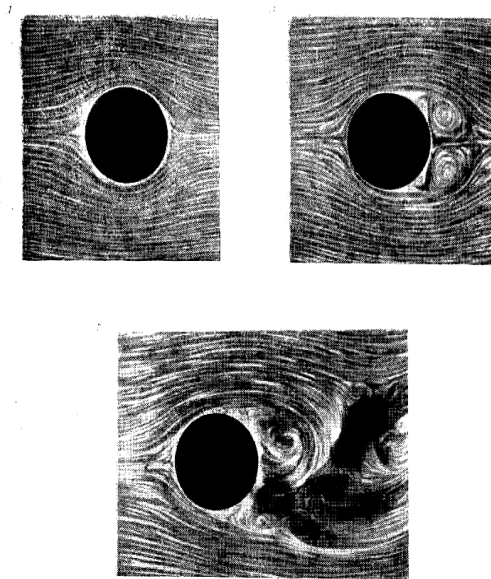


Рис. 8.8, а, б, в. Стадии обтекания

8.3.2. Силовое взаимодействие потока с телом при отрывном обтекании

Отрыв пограничного слоя и образование вихревого следа коренным образом меняют распределение давления по поверхности тела. Рассмотрим, например, поперечное обтекание круглого цилиндра (рис. 8.9, где 1 и 2 – экспериментальные, и 3 – теоретическая кривая). Симметрия коэффициентов давления

$$\bar{p} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho v_{\infty}^2}{2}}$$

относительно поперечного диаметра цилиндра, характерная для потенциального обтекания (кривая 3 на рис. 8.9), при отрывном обтекании нарушается.

В результате экспериментальных продувок моделей в аэродинамических трубах установлено, что в лобовой части цилиндра (при $\theta < 40^\circ$, где θ – центральный угол, отсчитываемый от передней критической точки) давление в реальной и идеальной жидкости распределено одинаково. У миделя цилиндра, т.е. при $\theta = 90^\circ$, минимум давления при отрывном обтекании оказывается менее глубоким, чем при потенциальном. В кормовой части цилиндра (при $\theta > 100^\circ$) давление остается практически постоянным; оно ниже давления в лобовой части цилиндра и даже ниже давления невозмущенного потока. Максимум давления у задней критической точки (при $\theta = 180^\circ$), характерный для потенциального обтекания, отсутствует. В итоге равнодействующая элементарных сил давления, приложенных к поверхности цилиндра, не равна нулю; она направлена по потоку. Парадокс Даламбера, состоящий в том, что при обтекании тела идеальной жидкостью сила сопротивления равна нулю, в случае реальной жидкости не выполняется.

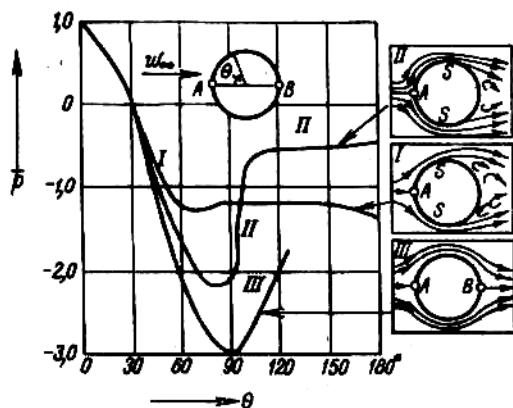


Рис. 8.9. Поперечное обтекание круглого цилиндра

Отрыв пограничного слоя и образование зоны пониженного давления в вихревом следе за кормовой частью приводит к появлению силы лобового сопротивления, величина которой определяется шириной аэродинамического следа и степенью понижения давления в нем. Эти факторы существенно зависят

от формы обтекаемого тела, поэтому сопротивление, от разности давлений иногда называют сопротивлением формы. Для плохо обтекаемых тел (таких, как шар, цилиндр, пластинка, поставленная поперечно к потоку) сопротивление от разности давлений обычно намного превышает, силу сопротивления, обусловленную трением в пограничном слое. Сопротивление формы R_x вычисляют по общей формуле для определения аэродинамических сил

$$R_x = C_x F \frac{\rho v_\infty^2}{2},$$

где в качестве характерной площади F принимают площадь миделевого сечения тела. Коэффициент сопротивления C_x , показывающий, какую долю динамического давления потока $\rho v_\infty^2 / 2$ составляет разность давлений на миделевую площадь F , определяется опытным путем, продувкой моделей тел в аэродинамических трубах. Ниже представлены значения коэффициентов лобового сопротивления C_x для ряда тел, которые остаются постоянными в широком диапазоне чисел Рейнольдса

$$Re = \frac{vD}{\nu}.$$

Шар.....	0,45
Круглая пластинка поперечно к потоку	1,11
Полая полусфера выпуклостью назад	1,36
Круглый цилиндр при продольном обтекании	0,91

Опыт показывает, что для одних и тех же тел распределение давления на поверхности и величина C_x при различных условиях не остаются постоянными. Например, при обтекании цилиндра сечение отрыва может лежать при $\theta = 83^\circ$; в этом случае аэродинамический след имеет большую ширину, разность давлений в лобовой и кормовой частях особенно велика (кривая 1

на рис. 8.9). В других условиях опыта сечение отрыва смещается до $\theta = 120^\circ$, аэродинамический след сужается, асимметрия давлений относительно Миделя уменьшается (кривая 2); цилиндр становится как бы «лучше обтекаемым».

Для объяснения этого явления, а также для выяснения общего характера изменения сопротивления тел при различных условиях опыта обратимся к экспериментам по исследованию обтекания шара. Зависимость C_x шара от числа Рейнольдса $Re = vD/\nu$, полученная на основании многочисленных опытных продувок, представлена на рис. 8.9.

При очень малых значениях Re (примерно до $Re = 10$) сопротивление обусловлено влиянием вязкости. Пограничного слоя в обычном понимании этого явления на шаре нет. Скорость медленно нарастает с удалением от поверхности; обтекание безотрывное. В этих условиях коэффициент сопротивления резко убывает с ростом Re .

При достаточно больших значениях числа Рейнольдса (порядка $Re = 10^3$) у поверхности шара развивается ламинарный пограничный слой, в области встречного перепада давления наблюдается отрыв слоя; за кормовой частью формируется вихревой след (рис. 8.8, в). Сопротивление от разности давлений преобладает над силой вихревого трения. Дальнейшее увеличение Re приводит к тому, что сопротивление трения становится исчезающе малым по сравнению с сопротивлением формы; этот участок зависимости $C_x = f(Re)$, вплоть до $Re \approx 5 \cdot 10^5$, называют областью автомоделного сопротивления (здесь $C_x = 0,45$ и не меняется с изменением Re).

При возрастании числа Рейнольдса до величины порядка $5 \cdot 10^5$ наблюдается резкое падение коэффициента сопротивления; это явление получило название *кризиса сопротивления*. Оно объясняется тем, что при достаточно больших значениях числа Re ламинарный пограничный слой на поверхности шара переходит в турбулентный. Появление турбулентных пульсации

в слое приводит к резкому увеличению обмена количеством движения между внешним потоком и пограничным слоем, в итоге внешний поток сжимает аэродинамический след, сечение отрыва смещается вниз по потоку; шар становится «лучше обтекаемым».

Приведенное объяснение кризиса обтекания может быть проиллюстрировано следующим простым опытом. Если при продувке шара в аэродинамической трубе, в области докризисного обтекания (например, при числе Рейнольдса около 10^5) на его лобовую часть надеть тонкое проволочное кольцо, турбулизирующее пограничный слой, то сечение отрыва смещается вниз по потоку и сила сопротивления резко уменьшается.

Явление кризиса обтекания характерно не только для шара, но и для других плохообтекаемых тел. В частности, на рис. 8.9 кривая 1 соответствует распределению давления при докризисном обтекании цилиндра, кривая 2 – при кризисном обтекании. Величины C_x , приведенные выше, даны для автомодельного сопротивления, когда силы вязкого трения уже не сказываются на сопротивлении, а кризис еще не наступил.

8.3.3. Влияние различных факторов на явление отрыва.

Управление пограничным слоем

Силы, приложенные к поверхности обтекаемого тела, можно разложить на касательные и нормальные. Проекция главного вектора касательных сил на направление невозмущенного потока называется сопротивлением трения; она определяется характеристиками пограничного слоя. Соответствующая проекция главного вектора сил давления называется сопротивлением давления.

Как показано выше, сопротивление давления из-за разности давлений в лобовой и кормовой частях появляется вследствие отрыва, т.е. опять-таки определяется характеристиками

пограничного слоя». Поэтому проблема управления пограничным слоем является одной из основных проблем в теории силового взаимодействия потока с обтекаемым телом.

Выше отмечалось, что для тел с затупленной кормовой частью (шар, цилиндр) сопротивление трения исчезающе мало по сравнению с сопротивлением давления. Поэтому наиболее перспективный путь решения задачи уменьшения полного лобового сопротивления – это уменьшение сопротивления давления. Задача решается приданием телу удобообтекаемой формы, при которой отрыва пограничного слоя нет или, в крайнем случае, сечение отрыва смещено по возможности ниже по потоку.

Основной фактор, способствующий предотвращению отрыва в широком диапазоне чисел Рейнольдса, – это уменьшение встречного перепада давления. Известно, что продольное обтекание тонкой пластинки равномерным потоком, когда $dp/dx = 0$, осуществляется без отрыва. Эксперимент показывает, что безотрывно могут обтекаться также тела сигарообразной формы с заостренной кормовой частью или крылья малой толщины при незначительной величине продольного градиента давления dp/dx у их задней кромки.

В случаях значительных продольных перепадов давления в диффузорной части потока за миделем обтекаемого тела сечение отрыва может быть смещено вниз по потоку, если понижать давление у стенки за счет отсоса некоторого количества жидкости. На рис. 8.10 представлены фотографии картины движения жидкости в канале, образованном изогнутыми стенками. В местах, показанных стрелками, пограничный слой может отсасываться внутрь обтекаемой поверхности.

На рис. 8.10, а приведен случай, когда отсос не производится: непосредственно за сечением минимума давления поток отрывается от стенок.

На рис. 8.10, б пограничный слой отсасывается у обеих стенок. В этом случае отрыв наступает за сечением отсоса, а количество жидкости, отсасываемой для предотвращения отрыва, оказывается сравнительно небольшим.

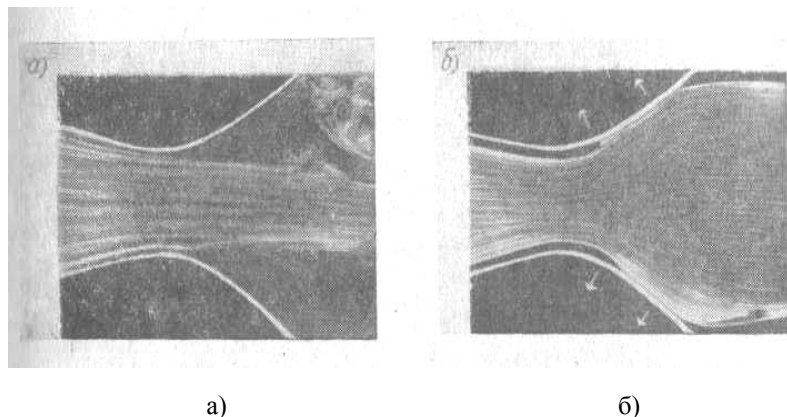


Рис. 8.10. Движение жидкости в канале: а – без отсоса; б – с отсосом у обеих стенок

Отсос пограничного слоя применяется не только для смещения вниз по потоку точки отрыва, но также и для затягивания явления перехода ламинарного слоя в турбулентный на удобообтекаемых телах с целью уменьшения сопротивления трения. Турбулизация пограничного слоя на крыле или лопатке турбомашины происходит обычно в начале диффузорного участка за точкой минимума давления. Если прорезать ниже этой точки щель, соединяющую поверхность канала с полостью, в которой поддерживается пониженное давление (рис. 8.11, а), то пограничный слой будет отсасываться внутрь крыла, диффузорный участок превращается в конфузорный, толщина пограничного слоя становится меньше критической и точка перехода сдвигается вниз по потоку.

Управление пограничным слоем возможно и другим способом. Так как причина отрыва – нарастание давления вниз по по-

току, для преодоления которого недостает кинетической энергии заторможенных частиц пограничного слоя, то искусственное увеличение скорости (т.е. увеличение кинетической энергии частиц) приведет к смещению сечения отрыва вниз по потоку. Такое сдувание пограничного слоя на верхней поверхности крыла показано на рис. 8.11, б.

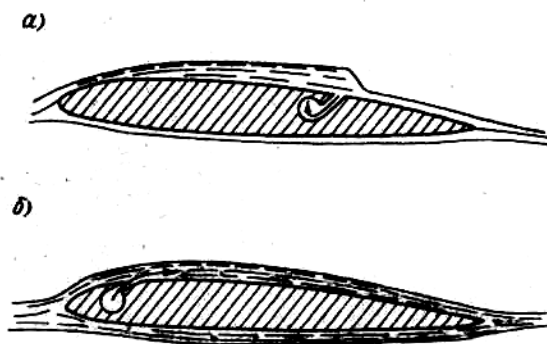


Рис. 8.11. Сдувание пограничного слоя: а – щель; б – смещение сечения отрыва вниз по потоку

В области значений числа Рейнольдса, близких к кризисным, коэффициент сопротивления C_x может быть уменьшен, если искусственно вызвать сдвигание сечения отрыва вниз по потоку турбулизацией пограничного слоя. Она может быть достигнута нанесением на обтекаемую поверхность дополнительной шероховатости или увеличением степени турбулентности набегающего потока. Это единственный случай в гидроаэромеханике, когда переход от ламинарного течения к турбулентному приводит к уменьшению сопротивления.

В некоторых специфических условиях на поток действуют очень значительные по величине поперечные силы (например, силы инерции в межлопаточном канале турбомшины или лоренцовы силы при движении электропроводной жидкости в магнитном поле). В этом случае точка отрыва смещается вниз по

потoku у той стенки канала, у которой массовая сила «прижимает» течение и, наоборот, приближается к входу в канал у стенки, от которой течение «отрывается» поперечной силой.

8.3.4. Взаимодействие пограничного слоя со скачками уплотнения

Рассмотрим взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем на твердой поверхности, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа (рис. 8.12).

Так как на обтекаемой поверхности скорость равна нулю (8.3), а на внешней границе пограничного слоя (при $y = \delta$) она сверхзвуковая, то пограничный слой можно разделить на две области – сверхзвуковую (внешнюю) I и дозвуковую 2. Граница раздела показана на рис. 8.12, а пунктиром. Скачок уплотнения AB , пересекая сверхзвуковую часть слоя, не продолжается в дозвуковую часть.

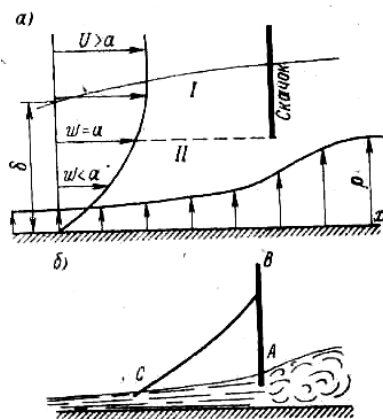


Рис. 8.12. Взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем

Вызванные скачком возмущения сжатия через дозвуковую часть пограничного слоя распространяются навстречу потоку на значительные расстояния от основания скачка. Таким обра-

зом, продольное нарастание давления осуществляется в пограничном слое уже не скачком, а постепенно. Эпюра давления показана на рис. 8.12 стрелками. Продольное нарастание давления влечет за собой утолщение пограничного слоя, а при достаточно большой величине dp/dx и его отрыв от обтекаемой поверхности.

Нарастание толщины пограничного слоя и толщины вытеснения δ^* приводит к оттеснению линий тока от поверхности тела, равносильному повороту стенки во внутреннем тупом угле. В потоке появляется помимо основного скачка AB слабый косой скачек BC ; система скачков принимает характерную λ -образную форму (рис. 8.12, б).

9. ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ДИФFUЗОРАХ И ЭЖЕКТОРАХ

9.1. Диффузоры

Диффузоры используются для постепенного уменьшения скорости потока; кинетическая энергия при этом преобразуется в потенциальную. Они используются в компрессорах, трубопроводах, аэродинамических трубах, выпускных патрубках паровых и газовых турбин, в вентиляционных установках и других машинах. Основное назначение диффузоров – восстанавливать давление при наименьших потерях.

При дозвуковых скоростях торможение потока осуществляется в расширяющейся трубе. Поэтому дозвуковые диффузоры имеют форму расширяющихся патрубков с плоскими, коническими или криволинейными стенками. В компрессорных машинах диффузорные каналы образуются лопаточным аппаратом. Важнейшим геометрическим параметром диффузора является его степень уширения n , равная отношению площади сечения на выходе F_2 к входной площади F_1

$$n = \frac{F_2}{F_1}.$$

Заданная степень уширения n может быть достигнута за счет надлежащего подбора угла раствора диффузора α или его длины L (рис. 9.1).

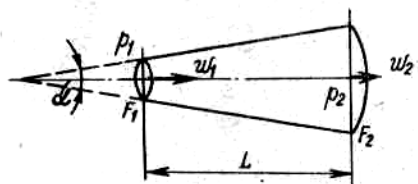


Рис. 9.1. Геометрические характеристики

Наращение давления вниз по потоку приводит к быстрому увеличению толщины пограничного слоя, а при достаточно

большом градиенте давления – и к его отрыву. Поэтому потери энергии в диффузорах значительно больше, чем в цилиндрических и конфузорных трубах той же длины. При отрывном течении в диффузоре заданное повышение давления не обеспечивается, эффективность его падает. Основная задача проектирования диффузора – определение его наилучшей формы, при которой течение безотрывно и потери энергии при заданных скоростях минимальны.

Пусть на входе в диффузор средняя скорость течения газа равна v , его удельная кинетическая энергия $v_1^2/2$. Если необратимые потери удельной энергии в диффузоре вследствие трения и вихреобразования составляют ΔE , то безразмерным коэффициентом внутренних потерь диффузора ζ_o называют отношение

$$\zeta_o = \frac{\Delta E}{\frac{v_1^2}{2}}. \quad (9.1)$$

Величину ζ_o иногда называют также коэффициентом гидравлического сопротивления диффузора.

Если кинетическая энергия выходящего из диффузора потока $v_2^2/2$ в дальнейшем не используется (т. е. после диффузора поток расширяется с полным торможением скорости), то целесообразно ввести коэффициент полных потерь диффузора ζ_n .

$$\zeta_n = \frac{\Delta E + \frac{v_2^2}{2}}{\frac{v_1^2}{2}}. \quad (9.2)$$

Очевидно, что $\zeta_n > \zeta_o$. Кинетическая энергия в выходном сечении тратится на обеспечение заданного расхода через диффузор.

Коэффициентом полезного действия диффузора η_o называется отношение действительного прироста потенциальной энергии к максимально возможному при изэнтропийном сжатии и заданной степени уширения в диффузоре. Для несжимаемой жидкости к. п. д. диффузора определяется давлениями на входе p_1 на выходе p_2 и определяемым из уравнения Бернулли теоретическим давлением на выходе p_{2T} .

$$\eta_o = \frac{p_2 - p_1}{p_{2T} - p_1}.$$

9.1.1. Потери энергии в дозвуковых диффузорах

Картина потока в диффузоре отличается значительной сложностью. Профили скорости непрерывно деформируются по его длине. Поэтому теоретический расчет потерь с использованием теории пограничного слоя затруднителен. Наиболее достоверные данные о потерях в диффузорах получены экспериментальным путем.

Опыт показывает, что при безотрывном обтекании стенок диффузора величина максимального угла раскрытия α зависит от степени уширения n . При $n=2$, $\alpha_{\max} = 24^\circ$, при $n=5$, $\alpha_{\max} = 9^\circ$.

Внутренние потери в диффузоре принято выражать в долях потерь, имеющих место в местном сопротивлении при резком расширении трубы (ступенчатый диффузор, рис. 9.1) с той же степенью уширения n . Потери напора при резком расширении определяются формулой Борда

$$h_{p.p} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (9.3)$$

Если относить потери напора к скоростному напору на входе в ступенчатый диффузор, то его коэффициент местного сопротивления равен

$$\zeta_{p.p} = \frac{h_{p.p}}{\frac{v_1^2}{2g}} = \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Коэффициент внутренних потерь ζ_o в диффузоре с плавно расширяющимися стенками меньше, чем $\zeta_{p.p}$. Его измеряют в долях последнего

$$\zeta_o = \varphi \zeta_{p.p} = \varphi \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Множитель $\varphi < 1$ называется коэффициентом смягчения удара. Его величина зависит от угла раствора диффузора α . Характер этой зависимости для конического диффузора представлен по осредненным экспериментальным данным на рис. 9.2. Из рисунка видно, что при малых углах раствора α внутренние потери диффузора невелики: они составляют величину порядка 0,15 от потерь ступенчатого диффузора. С ростом α потери увеличиваются и при растворе порядка 40° сравниваются с потерями при резком расширении.

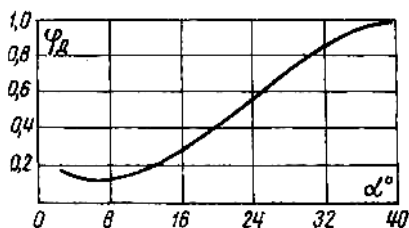


Рис. 9.2. Зависимость коэффициента смягчения удара от угла раствора диффузора

Опыт показывает, что при больших углах раствора внутренние потери могут быть уменьшены, если образующую стенки

диффузора выполнить не прямой, а криволинейной. В частности, диффузор, стенки которого спрофилированы так, чтобы продольный градиент давления был по его длине постоянным, дает уменьшение потерь примерно на 25 % по сравнению с коническим диффузором с углом раствора 40° . При малой длине и большой степени уширения n оказывается эффективным комбинированный диффузор: вначале давление повышается в обычном плавно расширяющемся канале, а затем имеется резкое (ступенчатое) расширение сечения.

На величину потерь в диффузоре оказывают влияние режимные параметры: числа Рейнольдса, Маха, степень турбулентности потока, а также форма эпюры скоростей на входе в сечение F_1 . Увеличение скорости у стенки смещает сечение отрыва струй вниз по потоку. Поэтому для улучшения характеристик диффузора оказываются эффективными отсос или сдув пограничного слоя.

9.1.2. Сверхзвуковые диффузоры

Сверхзвуковые диффузоры широко используются в воздухоборниках летательных аппаратов и в аэродинамических трубах. Ступенчатое торможение сверхзвукового потока можно осуществить в различных комбинациях скачков уплотнения, показанных на рис. 9.3.

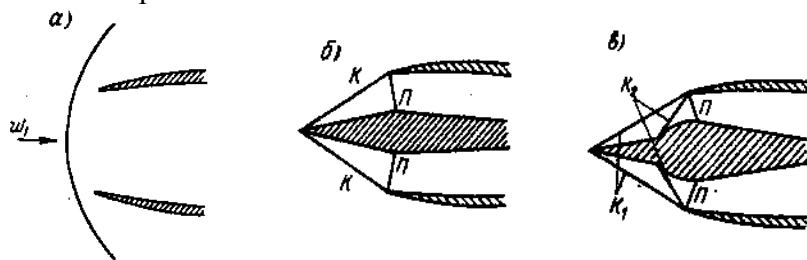


Рис. 9.3. Ступенчатое торможение сверхзвукового потока

Потери энергии в сверхзвуковых диффузорах связаны главным образом с нарастанием энтропии в скачках уплотнения. Потеря полного давления оценивается коэффициентом восстановления давления диффузора σ_o , который равен отношению давлений торможения на выходе из диффузора к входному

$$\sigma_o = \frac{p_{o2}}{p_{o1}}. \quad (9.4)$$

Волновые потери в прямом скачке растут с увеличением числа M_1 они существенно превышают потери в косых скачках. Поэтому для уменьшения потерь оказывается целесообразным понизить скорость газа в системе косых скачков и перевести сверхзвуковой поток в дозвуковой в слабом прямом скачке, завершающем эту систему. Расчет показывает, что преимущество системы «косой скачок + прямой скачок» (К и П, рис. 9.3, б) над одним прямым скачком становится заметным при $M_1 > 1,5$. При $M_1 = 3$ система из двух скачков при оптимальном выборе угла косога скачка дает полный коэффициент восстановления давления, равный 0,58, тогда как в прямом скачке $\sigma_o = 0,33$, т.е. система из двух скачков обеспечивает выигрыш в полном давлении почти вдвое.

При дальнейшем увеличении скорости набегающего потока преимущество двух скачков становится еще более значительным; дальнейшее повышение эффективности диффузора достигается системой «два косых скачка + прямой скачок» (K_1 , K_2 и П, рис. 9.3, в).

Системы косых скачков перед входным сечением диффузора получают за счет введения «центрального тела». На расчетном режиме работы диффузора косые скачки, отходящие от центрального тела, пересекаются на входной кромке обечайки. В этом случае система скачков не нарушает внешнего обтекания обечайки.

При проектировании сверхзвуковых диффузоров приходится учитывать взаимодействие скачков уплотнения с пограничным слоем и изменение положения системы скачков в нерасчетных режимах работы (при изменении числа Маха на входе).

9.2. Эжекторы

9.2.1. Рабочий процесс эжектора

Газовым эжектором называется устройство, в котором энергия «эжектируемого» газового потока увеличивается струей другого потока, имеющего больший напор. Простота конструкции и удобство регулирования рабочего процесса эжектора обуславливают его широкое применение в различных областях техники. В частности, в конденсационных системах паросиловых установок эжектор используется для понижения давления в конденсаторе: необходимый вакуум создается в конденсаторе за счет увлечения и уноса частиц пара и воздуха высоконапорной струей пара. В вакуумной технике аналогичные эжекторы, работающие на парах жидкостей с малым давлением насыщения, позволяют достигать глубоких разрежений (порядка миллионных долей атмосферы). При эксплуатации газовых месторождений низконапорные скважины подключают в газосборную сеть с помощью эжектора, в котором давление низконапорного газа повышается за счет энергии эжектирующего газа из высоконапорных скважин. Таким путем удастся одновременно увеличить производительность низконапорных скважин и повысить давление газа в сети. Эжекторы используются также вместо вентиляторов в аэродинамических трубах и т. д.

На рис. 9.4 показаны основные элементы эжектора: сопло высоконапорного (эжектирующего) газа C_1 сопло низконапорного (эжектируемого) газа C_2 смесительная камера К и диффузор Д.

Назначение сопел – подвести газы к смесительной камере с минимальными потерями. Важным геометрическим параметром эжектора является отношение площадей выходных сечений сопел F_1/F_2 . Если падение давления в сопле C_1 превышает критическое, то целесообразно применять для эжектирующего газа сопло Лавала. Но и при сверхкритических отношениях давления часто используют эжектор с обычным (суживающимся) соплом. Такой эжектор называется звуковым.

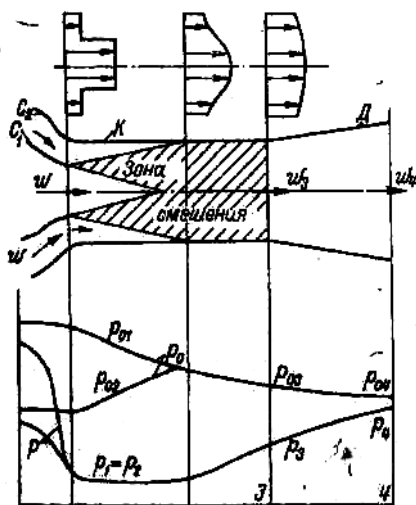


Рис. 9.4. Основные элементы эжектора

В камере смешения происходит обмен энергией между потоками в турбулентном пограничном слое, разделяющем их. Камера может быть цилиндрической или иметь переменное по длине сечение. В цилиндрической камере давление нарастает вниз по потоку, в то время как давление торможения (т. е. полная механическая энергия) уменьшается за счет потерь. Изменение статического давления p и давления торможения p_0 по длине дозвукового эжектора показано графически в нижней части рис.

9.4. При правильно выбранной длине камеры у ее выходного сечения процесс смешения потоков заканчивается, эпюра скоростей (показанная в верхней части рис. 9.4) выравнивается.

Назначение диффузора, устанавливаемого на выходе из камеры смешения, – повысить статическое давление выходящей из эжектора смеси газов или понизить давление в камере смешения. В некоторых случаях вместо диффузора на выходе из эжектора устанавливается суживающееся сопло или сопло Лаваля, если ставится задача получить высокие скорости смеси.

Статическое давление p_1 на срезе сопла C_1 , пониженное из-за ускорения потока эжектирующего газа, ниже полного давления эжектируемого газа p_{02} , который под действием этой разности давлений течет в камеру смешения. Обозначим массовый расход эжектирующего газа через G_1 эжектируемого – через G_2 . Отношение $G_2/G_1 = n$ называется *коэффициентом эжекции*. Его величина зависит от площадей сопел и давлений p_{01} и p_{02} .

Смешиваемые в эжекторе газы могут первоначально различаться по температуре и химическому составу. Поперечные пульсационные компоненты скорости в пограничном слое на границе потоков приводят к взаимному внедрению частиц; на выходе из камеры смешения (сечение 3 на рис. 9.4) состояние смеси близко к однородному.

Процесс смешения потоков сопровождается потерями энергии. Помимо потерь на трение о стенки камеры смешения имеют место потери, связанные с вихревой структурой потоков в турбулентном слое на границе струй. Они могут быть определены по разности кинетических энергий: суммарной энергии эжектирующего и эжектируемого потоков во входном сечении и энергии на выходе (в сечении 3). Потери увеличиваются с возрастанием разности скоростей смешивающихся потоков.

9.2.2. Расчет эжектора

Будем считать поток газа в выходном сечении камеры смешения 3 одномерным, т.е. считать завершенным процесс выравнивания параметров смеси. Применим уравнения неразрывности, энергии и количества движения. При заданных условиях на входе эти три уравнения позволяют определить три параметра газа на выходе, например температуру, давление и скорость. Параметры эжектирующего газа во входном сечении цилиндрической камеры смешения будем отмечать индексом 1, параметры эжектируемого газа – индексом 2, параметры смеси в выходном сечении – индексом 3. Параметры заторможенного потока отмечаем дополнительным индексом 0.

Уравнение неразрывности (постоянства расхода) имеет вид

$$G_3 = G_1 + G_2 \text{ или } \frac{G_3}{G_1} = n + 1. \quad (9.5)$$

Если в камере смешения тепло к газу не подводится и не отводится, а теплоемкости c_p смешиваемых газов равны, то уравнение энергии может быть применено к нашей задаче в виде

$$G_3 \left(i_3 + \frac{v_3^2}{2} \right) = G_1 \left(i_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + G_2 \left(i_2 + \frac{v_2^2}{2} \right)$$

или

$$G_3 \left(c_p T_3 + \frac{v_3^2}{2} \right) = G_1 \left(c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + G_2 \left(c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2} \right),$$

где i – энтальпия газа;

c_p – теплоемкость.

Переходя к температуре торможения T_0 характеризующей полную энергию газа, получим

$$G_3 T_{03} = G_1 T_{01} + G_2 T_{02}.$$

Разделив последнее уравнение на $G_1 T_{01}$ и подставив в него соотношение (9.5), имеем

$$(n+1) \frac{T_{03}}{T_{01}} = 1 + n \frac{T_{02}}{T_{01}},$$

откуда

$$\frac{T_{03}}{T_{01}} = \frac{n \frac{T_{02}}{T_{01}} + 1}{n+1}. \quad (9.6)$$

Таким образом, температура торможения в выходном сечении камеры смешения определена нами через параметры на входе.

Составим уравнение количества движения в проекции на ось камеры. Из внешних сил на объем газа внутри камеры смешения действует разность давлений на торцевых сечениях. В дозвуковом эжекторе, для которого $p_1 = p_2$, она равна $F_3 \cdot (p_1 - p_3)$, где F_3 – площадь сечения камеры. При сверхкритическом отношении давлений для эжектирующего газа, когда скорость истечения звуковая, давление p_1 на срезе сопла C_1 превышает давление p_2 , поэтому разность давлений на торцевые сечения камеры составляет

$$p_1 F_1 + p_2 F_2 - p_3 F_3.$$

Уравнение количества движения теперь может быть записано в виде

$$G_3 v_3 - G_1 v_1 - G_2 v_2 = p_1 F_1 + p_2 F_2 - p_3 F_3. \quad (9.7)$$

Совместное решение уравнений (9.7) и (9.6) позволяет определить скорость смеси в выходном сечении. Приведем результат, минуя промежуточные выкладки

$$\sqrt{(n+1)\left(n\frac{T_{02}}{T_{01}}+1\right)}\left(\lambda_3+\frac{1}{\lambda_3}\right)=\left(\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}\right)+n\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}\left(\lambda_2+\frac{1}{\lambda_2}\right), \quad (9.8)$$

где $\lambda = \frac{v}{a_{\text{кр}}}$ – безразмерная скорость газа;

$a_{\text{кр}}$ – критическая скорость.

Выражение (9.8) называют *основным уравнением эжекции*. Оно позволяет определить по известным входным параметрам газодинамическую функцию $\lambda_3 + 1/\lambda_3$ и по ней безразмерную λ_3 и размерную v_3 скорости на выходе из камеры смешения.

Совместное решение уравнений (9.7) и (9.5) дает возможность найти полное выходное давление p_{03} .

В уравнениях (9.6) и (9.8) мы считали заданным коэффициент эжекции $n = G_2/G_1$. Но скорости v_1 и v_2 , определяющие расходы, заранее неизвестны; они определяются статическими давлениями p_1 и p_2 во входном сечении, в свою очередь зависящими от режима работы камеры смешения и диффузора. Поэтому расчет эжектора приходится делать методом последовательных приближений: задаваться рядом значений скорости на входе и определять соответствующие им конечные параметры. Полученные решения позволяют выбрать оптимальный режим работы эжектора (например, такой, который обеспечивает получение заданного коэффициента эжекции при наивысшем полном давлении смеси).

Более полная теория эжектора учитывает силу трения о стенки камеры, влияние подвода тепла в камеру смешения извне или вследствие химических реакций в потоке, влияние физических свойств при смешении разнородных газов или переменной площади сечения камеры.

Критические режимы и запираание эжектора. При сверхкритическом отношении давлений струя эжектирующего газа на выходе из сопла имеет статическое давление, превышающее давление в эжектируемом газе. Поэтому она расширяется, скорость ее становится сверхзвуковой (рис. 9.5). Так же ведет себя сверхзвуковая струя, если в эжекторе применено сопло Лавалья с недорасширением. Дозвуковой поток эжектируемого газа между сечениями 1 и 1' движется в суживающемся канале между границами сверхзвуковой струи и стенками камеры, скорость в нем нарастает, а давление падает.

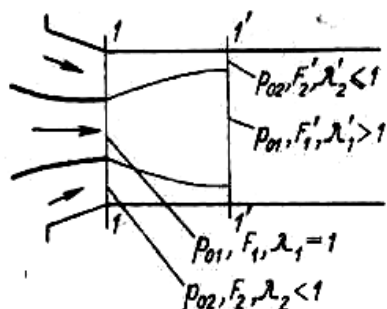


Рис. 9.5. Расширение струи

В сечении 1', называемом *сечением запираания*, достигается максимальная скорость эжектируемого потока и минимальное статическое давление. Здесь статические давления потоков сравниваются.

Скорость эжектируемого потока в сечении запираания не может превысить скорости звука. При этом наблюдается максимальный расход эжектируемого газа и максимально возможная величина коэффициента эжекции n . Дальнейшее понижение давления на выходе из эжектора не приводит к увеличению n и G_2 (явление, аналогичное работе сопла Лавалья, когда в его сжатом сечении достигнута звуковая скорость, при которой расход через сопло становится максимальным и не зависящим от давления на выходе из сопла). Такой режим работы эжектора называется критическим.

Параметры эжектора, при которых достигается максимальное значение коэффициента эжекции, определяют из условия $\lambda'_2 = 1$. Это условие позволяет определить соответствующие величины скорости λ'_1 и отношения полных давлений p_{01}/p_{02} . Дальнейшее возрастание перепада давлений приводит к увеличению скорости λ'_1 и площади сечения F'_1 . Если p_{01}/p_{02} достаточно велико, то расширяющаяся струя газа заполняет все сечения камеры смешения, а для прохода газа не остается места. Такое явление называется *запиранием эжектора*.

9.2.3. Характеристики эжектора

Если эжектор работает при различных соотношениях исходных параметров газов (например, при разных степенях сжатия эжектируемого газа p_{04}/p_{02} или разных отношениях полных давлений на входе p_{01}/p_{02}), то его расход G_4 и коэффициент эжекции n могут меняться. Зависимости между переменными параметрами эжектора называются его характеристиками.

На рис. 9.6 представлена сетка полученных экспериментально характеристик эжектора с суживающимся эжектирующим соплом и цилиндрической камерой смешения, для которого отношение площадей $F_1/F_2 = 0,725$ и температуры торможения смешиваемых потоков одинаковы.

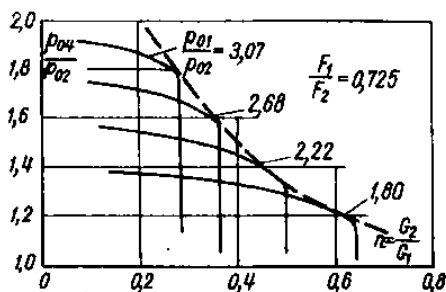


Рис. 9.6. Характеристики эжектора с суживающимся эжектирующим соплом и цилиндрической камерой смешения

Характеристики показывают зависимость степени сжатия эжектируемого газа p_{04}/p_{02} от коэффициента эжекции n при нескольких отношениях p_{01}/p_{02} . Опытные точки, по которым построены характеристики, получены при постоянных давлениях p_{01} и p_{02} последовательным понижением статического давления на выходе из диффузора p_4 . При этом уменьшается статическое давление во входном сечении камеры смешения и возрастают скорость и расход эжектируемого газа, тогда как расход эжектирующего газа изменяется незначительно при $\lambda_1 < 1$ или вовсе не меняется при $\lambda_1 = 1$. В результате увеличивается коэффициент эжекции n .

При критическом режиме, когда скорость эжектируемого газа в сечении запираания достигает скорости звука, коэффициент эжекции n становится максимальным (для данного отношения p_{01}/p_{02}) и не изменяется с дальнейшим понижением давления на выходе из эжектора.

На докритических режимах, некоторое уменьшение степени повышения давления p_{04}/p_{02} с увеличением коэффициента эжекции связано с ростом потерь в камере смешения и диффузоре при возрастании расхода. Увеличение p_{01}/p_{02} приводит к росту «напорности» эжектора, т.е. степени повышения давления p_{04}/p_{02} , но при этом уменьшаются предельные значения коэффициента эжекции, так как растет площадь сверхзвуковой эжектирующей струи в сечении запираания F_1' и уменьшается сечение эжектируемого потока.

Пунктирная линия на рис. 9.6 соединяющая предельные точки кривых $p_{01}/p_{02} = const$ сетки характеристик, ограничивает область реальных режимов эжектора. С увеличением полных давлений p_{01}/p_{02} она приближается к оси ординат и при

некотором значении $p_{01}/p_{02\max}$ пересекается с ней. Точка пересечения, в которой степень повышения давления p_{04}/p_{02} достигает максимума для данного эжектора, а коэффициент эжекции равен нулю, соответствует режиму запираания эжектора.

Иногда используются характеристики другого типа, например, отражающие зависимость коэффициента эжекции от полного давления эжектирующего газа p_{01} при постоянных величинах p_{02} и p_{04} .

Если ставится задача получения максимально возможной степени повышения давления эжектируемого газа p_{04}/p_{02} , то эффективным оказывается эжектор, в котором эжектирующий газ подается через сопло Лавалья. Следует отметить, что такие сверхзвуковые эжекторы целесообразно использовать при малых коэффициентах эжекции (до $n = 0,5 \dots 0,6$). Если отношение полных давлений p_{01}/p_{02} становится меньше критического, характеристики эжектора с соплом Лавалья значительно ухудшаются. Поэтому, если эжектор работает в широком диапазоне режимов, целесообразно использовать суживающееся сопло.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебное пособие содержит сведения об основах гидрогазодинамики. В пособии рассмотрены основные разделы, включающие в себя: гидростатику, гидродинамику и газовую динамику. Целью работы являлось изложение основ гидрогазодинамики: термины, основные понятия и выводы уравнений гидростатики и гидрогазодинамические физические величины, вопросы о потерях напора и гидравлических сопротивлений трубопроводов. Подробно описанные различные режимы течения жидкости, а также движение газов со скачками уплотнения и без него позволят правильно рассчитывать технические системы. Рассмотрены основы динамики идеальной жидкости несжимаемой жидкости на примерах вихревого движения жидкости и обтекания тел, а также пограничного слоя и законы течения газа в диффузорах и эжекторах, применяемых в теплотехнологических установках.

Список литературы

1. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
2. Лабейш, В. Г. Гидромеханика и газодинамика [Текст] / В. Г. Лабейш. – Л.: СЗЗПИ, 1973. – 154 с.
3. Емцев, В. Т. Техническая гидромеханика [Текст] / В. Т. Емцев. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
4. Повх, И. Л. Техническая гидромеханика [Текст] / И. Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1976. – 502 с.
5. Дейч, М. Е. Техническая газодинамика [Текст] / М. Е. Дейч. – М.: Энергия, 1974. – 589 с.
6. Абрамович, Г. Н. Прикладная газовая динамика [Текст] / Г. Н. Абрамович. – М.: Наука, 1976. – 540 с.
7. Гидравлические расчеты в теплоэнергетических системах [Текст]: учеб. пособие / В. В. Фалеев, И. Г. Дроздов, С. В. Фалеев. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2000. – 109 с.
8. Сборник задач по гидроаэромеханике [Текст]: учеб. пособие / Г. С. Самойлович, В. В. Нутисов. – М.: Машиностроение, 1986. – 152 с.
9. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям [Текст] / И. Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
10. Жуковский, Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах [Текст] / Н. Е. Жуковский. – Либроком, 2011. – 110 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ	4
1. ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ.....	11
1.1. Физические свойства и параметры жидкостей и газов.....	11
1.2. Основные понятия и уравнения гидростатики	24
1.2.1. Силы, действующие в жидкости	24
1.2.2. Гидростатическое давление в покоящейся жидкости.....	26
1.2.3. Равновесие жидкости	27
1.2.4. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости.....	29
1.2.5. Интегрирование дифференциальных уравнений гидростатики для несжимаемой жидкости	31
1.2.6. Интегрирование дифференциальных уравнений гидростатики для сжимаемой жидкости	33
1.2.7. Давление жидкости на плоские стенки	35
1.2.8. Давление жидкости на криволинейные стенки	37
1.2.9. Круглая труба, подверженная внутреннему гидростатическому давлению	44
1.2.10. Простейшие гидравлические машины.....	46
1.2.11. Равновесие плавающих тел.....	47
2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ.....	52
2.1. Определения кинематики жидкости	52
2.1.1. Поле скоростей	52
2.1.2. Установившееся движение и равномерное движение.....	54
2.1.3. Координатные системы, движущиеся с вращением или ускорением.....	55
2.1.4. Линии тока и траектории	57
2.1.5. Понятие расхода жидкости	58
2.2. Неразрывность потока.....	60

2.2.1. Уравнение неразрывности для одномерного течения.....	60
2.2.2. Уравнение неразрывности для трехмерного течения несжимаемой жидкости	61
2.2.3. Уравнения движения идеальной жидкости Эйлера	63
2.2.4. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости	67
2.2.5. Геометрическая и энергетическая интерпретация	69
2.2.6. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.....	73
2.2.7. Истечение жидкости через отверстия.....	79
2.2.8. Истечение жидкости через насадки. Расходомеры	82
2.2.9. Уравнение количества движения	86
2.2.10. Уравнение моментов количества движения	90
3. ПОТЕРИ НАПОРА И ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ	93
3.1. Потери напора. Формулы Вейсбаха и Дарси	93
3.2. Режимы течения вязкой жидкости. Число Рейнольдса.....	94
3.3. Некоторые частные случаи ламинарного течения жидкости	102
3.3.1. Ламинарное течение жидкости в круглой трубе	102
3.3.2. Начальный участок ламинарного течения	106
3.3.3. Ламинарное течение жидкости в зазорах.....	107
3.3.4. Течение с теплообменом.....	110
3.4. Турбулентное движение жидкости в трубах.....	112
3.5. Местные сопротивления и расчет трубопроводов.....	124
3.6. Расчет трубопроводов.....	127
3.6.1. Простой трубопровод постоянного сечения	127
3.6.2. Сифон.....	130
3.6.3. Последовательное и параллельное соединение труб ..	131
3.6.4. Разветвлённый трубопровод.....	134
3.6.5. Трубопровод с насосной подачей жидкости.....	136
3.7. Относительное и неустановившееся движение жидкости в трубах.....	140
3.7.1. Уравнение Бернулли для относительного движения ..	140

3.7.2.	Прямолинейное равноускоренное движение русла	143
3.7.3.	Вращение русла вокруг вертикальной оси.....	143
3.7.4.	Движение жидкости в условиях невесомости	144
3.7.5.	Неустановившееся течение жидкости в трубах.....	145
3.7.6.	Гидравлический удар в трубах	147
4.	ДВИЖЕНИЕ ГАЗА БЕЗ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ	154
4.1.	Скорость звука. Число Маха.....	155
4.2.	Уравнение энергии.....	156
4.3.	Связь скорости газа с сечением потока. Сопло Лавая.....	159
4.4.	Параметры изэнтропического торможения газа	162
4.5.	Истечение газа из резервуара. Максимальная и критическая скорости	164
4.6.	Одномерное течение газа с трением	170
4.6.1.	Изотермическое течение в трубах	170
4.6.2.	Адиабатное течение в трубах	172
4.7.	Возмущения в дозвуковом и сверхзвуковом потоках. Характеристики	174
4.7.1.	Распространение возмущений.....	174
4.7.2.	Характеристики сверхзвукового потока	175
4.7.3.	Волны разрежения	176
4.7.4.	Диаграмма характеристик.....	178
5.	СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ	182
5.1.	Прямой скачек	182
5.1.1.	Возникновение скачка.....	182
5.1.2.	Изменение параметров газа в прямом скачке	184
5.1.3.	Ударная адиабата. Рост энтропии и потеря давления в прямом скачке	187
5.2.	Косые скачки уплотнения	190
5.2.1.	Возникновение косых скачков	190
5.2.2.	Изменение параметров потока при переходе через косой скачок	192
5.2.3.	Ударная поляра. Отсоединенный скачок уплотнения	194

5.2.4. Возрастание энтропии и потеря давления в косом скачке	195
5.2.5. Конический скачок	196
5.3. Взаимодействие сверхзвукового потока с ограничивающими поверхностями	197
5.3.1. Силы, действующие на обтекаемое тело со стороны сверхзвукового потока	197
5.3.2. Отражение волн давления.....	200
6. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ	204
6.1. Кинематический анализ движения жидкости	204
6.1.1. Виды движения жидкой частицы.....	204
6.2. Функция тока и потенциал скорости	211
6.2.1. Функция тока для двухмерного течения	212
6.2.2. Потенциал скорости	214
6.3. Вихревое движение жидкости	218
6.3.1. Интенсивность вихря	218
6.3.2. Циркуляция скорости. Теорема Стокса.....	220
6.3.3. Теоремы о вихрях	221
6.3.4. Поле скоростей, вызываемое вихревыми трубками....	223
6.4. Обтекание тел идеальной жидкостью.....	225
6.4.1. Распределение давления по поверхности обтекаемого тела.....	225
6.4.2. Теорема Жуковского	227
6.4.3. Постулат Чаплыгина-Жуковского	231
7. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ	235
7.1. Уравнения движения вязкой жидкости	235
7.1.1. Уравнения Навье-Стокса	235
7.1.2. Граничные условия.....	237
7.2. Моделирование в гидромеханике и газодинамике	239
7.2.1. Принципы динамического подобия.....	239
7.2.2. Закон полного динамического подобия Ньютона	240
7.2.3. Аэродинамические коэффициенты.....	242
7.2.4. Экспериментальные установки в гидроаэродинамике	243

7.3.	Подобие потоков при действии различных сил.....	245
7.3.1.	Гравитационное подобие	245
7.3.2.	Вязкостное подобие.....	246
7.3.3.	Подобие движения сжимаемых сред	249
7.3.4.	Подобие колебательных движений в жидкости	250
7.3.5.	Полное и частичное подобие.....	251
8.	ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ	253
8.1.	Общие понятия и дифференциальные уравнения пограничного слоя	253
8.1.1.	Понятие пограничного слоя	253
8.1.2.	Уравнения Прандтля	254
8.1.3.	Граничные условия.....	257
8.1.4.	Турбулиизация пограничного слоя.....	258
8.2.	Интегральные соотношения и расчет пограничного слоя	260
8.2.1.	Соотношение Кармана	260
8.2.2.	Условные толщины пограничного слоя	264
8.2.3.	Ламинарный пограничный слой на плоской пластинке.....	266
8.2.4.	Турбулентный пограничный слой на плоской пластинке.....	271
8.2.5.	Факторы, влияющие на турбулиизацию пограничного слоя	275
8.3.	Отрыв пограничного слоя и сопротивление при отрывном обтекании.....	277
8.3.1.	Возникновение отрыва.....	277
8.3.2.	Силовое взаимодействие потока с телом при отрывном обтекании.....	280
8.3.3.	Влияние различных факторов на явление отрыва. Управление пограничным слоем.....	284
8.3.4.	Взаимодействие пограничного слоя со скачками уплотнения	288
9.	ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ДИФфуЗОРАХ И ЭЖЕКТОРАХ.....	290
9.1.	Диффузоры	290
9.1.1.	Потери энергии в дозвуковых диффузорах	292

9.1.2. Сверхзвуковые диффузоры.....	294
9.2. Эжекторы.....	296
9.2.1. Рабочий процесс эжектора.....	296
9.2.2. Расчет эжектора	299
9.2.3. Характеристики эжектора.....	303
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	306
Список литературы	307

Учебное издание

Муравьев Анатолий Викторович

Кожухов Николай Николаевич

Дроздов Игорь Геннадьевич

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

учебное пособие

Редактор Кулакова Н.В.

Компьютерный набор Н. Н. Кожухова, А. В. Муравьева

Подписано в печать 21.09.2018.

Формат 60×84/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж ____ экз.

Зак. №

Воронежский государственный технический университет

394026 Воронеж, Московский просп., 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ

394026 Воронеж, Московский просп., 14