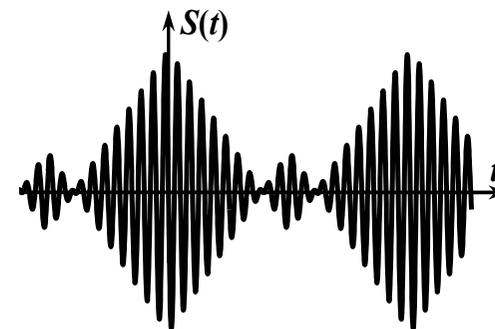


А.Б. Токарев А.В. Останков

**ХАРАКТЕРИСТИКИ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ
СИГНАЛОВ**

Учебное пособие



Воронеж 2007

ГОУВПО "Воронежский государственный
технический университет"

А.Б. Токарев А.В. Останков

ХАРАКТЕРИСТИКИ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ
СИГНАЛОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2007

Токарев А.Б. Характеристики радиотехнических сигналов: учеб. пособие / А.Б. Токарев, А.В. Останков. Воронеж: ГОУВПО "Воронеж. государственный техн. ун-т", 2007. 149 с.

В учебном пособии рассматривается широкий круг вопросов, связанных с радиотехническими сигналами и различными формами их функционального представления. Пособие предназначено служить дополнением к имеющейся учебной литературе и содержит многочисленные пояснения и комментарии физической направленности, призванные облегчить понимание математических выкладок и уяснить сущность их приложения к задачам радиотехники. Весь материал представлен в форме отдельных фундаментальных вопросов, для которых даны подробные ссылки на учебную литературу. Наиболее трудные и недостаточно освещенные в литературе вопросы изложены в пособии полностью. Каждый вопрос сопровождается перечнем контрольных вопросов и задач, разделенных по группам сложности, что должно способствовать правильному оцениванию читателем уровня приобретаемых знаний.

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 210300 "Радиотехника", специальности 210302 "Радиотехника", дисциплине "Радиотехнические цепи и сигналы".

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения.

Ил. 25. Библиогр.: 19 назв.

Научный редактор канд. техн. наук, доц. В.П. Дубыкин

Рецензенты: кафедра телекоммуникационных систем Воронежского института МВД России (нач. кафедры д-р техн. наук, проф. Н.С. Хохлов); канд. техн. наук, доц. В.А. Козьмин

© Токарев А.Б., Останков А.В., 2007

© Оформление. ГОУВПО

"Воронежский государственный
технический университет", 2007

ВВЕДЕНИЕ

Пособие посвящено описанию наиболее важных характеристик радиотехнических сигналов и способов их представления в различной математической форме. Научный уровень изложения материала соответствует учебной программе дисциплины "Радиотехнические цепи и сигналы", преподаваемой студентам специальности 210302 "Радиотехника". Материал преподнесен в форме отдельных вопросов, каждый из которых отражает соответствующую тему изучаемого материала. В совокупности эти вопросы можно рассматривать как базовые при подготовке к экзамену.

Цель пособия

Пособие преследует две цели. Первая – довести до читателя информацию о том, в каком из учебных источников можно прочесть об изучаемом вопросе и где, по мнению авторов, материал изложен лучше всего. Вторая – определяется следующими обстоятельствами. Не секрет, что из-за ограниченности печатной площади учебников, издаваемых центральными издательствами, материал в книгах излагается зачастую сухо, сжато, с явным превышением сложных математических выкладок над пояснениями физического характера, поэтому такие книги для студентов с обычной (не университетской) математической подготовкой оказываются трудно доступными. Другой же источник знаний – конспект лекций – пишется всегда студентом так, как воспринимается им лекция, т. е. не гарантированно правильно. В результате между обилием появляющихся в изучаемом материале неясностей и возможностью эти неясности устранить возникает большой разрыв. Поэтому вторая цель настоящего пособия – помочь уменьшить этот разрыв, т. е. выступить посредником между конспектом лекций и учебником.

Для кого пособие предназначено

Пособие предназначено для студентов, которые:

– хотели бы познать больше, чем может дать конспект лекций;

– согласны с тезисом "Знание – это то, что помнится!" (не претендуя на научную строгость толкования термина "знание", авторы глубоко убеждены в верности такого определения, ибо оно не единожды подтверждалось на практике);

– отдают себе отчет в том, что долговременную память, отвечающую за накопление знаний, надо привязывать не к конспекту лекций (ибо жизнь конспекта – недолгая, хорошо, если до окончания вуза), а к книге.

Как пособие написано

Пособие не подменяет собой ни конспект лекций, ни учебник: оно предназначено быть посредником между конспектом и учебником. В нем сравнительно мало математических формул и выкладок, приведены лишь те, которые, по мнению авторов, выпали из основной используемой студентами учебной литературы или требуют пояснения.

Весь изучаемый материал представлен в форме отдельных вопросов. Эти вопросы носят фундаментальный характер и могут рассматриваться студентами как экзаменационные. К каждому вопросу дано указание (для этого используется символ ) на то, в каком из учебных источников материал, по мнению авторов, изложен лучше всего.

Далее следует основной текст пособия, представляющий по сути пояснения к текстам и выкладкам учебников (для него используется символ ). Это текст, который, собственно, и призван облегчить переход от конспекта лекций к книге и обратно.

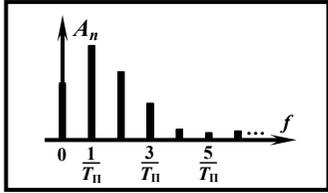
Для того чтобы читатель мог сам проверить себя, правильно ли он понял суть изучаемого вопроса, в тексте далее предлагаются вопросы для самопроверки. (Символом ? обо-

значены вопросы, принадлежащие авторам; символом ? – вопросы, взятые из книг.) К большинству вопросов, предложенных авторами, в конце пособия даны ответы.

С той же целью – дать возможность убедиться, что материал воспринят правильно, в конце текста изучаемого вопроса приведены задачи – авторские (обозначены символом ) и из типовых задачников (обозначены символом  ). По сложности эти задачи разделены условно на три категории: достаточно сложные (отмечены символом ...) и средние (используется символ ..) и легкие (символ .). Среди задач всех категорий имеются такие, к которым в задачах дано решение (такие задачи обозначены символом *); все авторские задачи сопровождаются решениями.

Как пособием пользоваться

Для начала надо ознакомиться с тем, как изучаемый вопрос изложен в конспекте лекций и выявить, что собственно не понятно. Затем, воспользовавшись предложенной в пособии ссылкой на учебные источники, попытаться снять хотя бы часть неясных вопросов с помощью учебника, после чего, в случае необходимости, вернуться к пособию и ознакомиться с комментариями к тексту учебников. Такое массированное (после конспекта лекций) воздействие на непонятные частности изучаемого материала должно дать положительный результат. Проверить это можно при помощи предложенных контрольных вопросов. При этом не следует, разумеется, читать сразу приведенные к вопросам ответы, попытайтесь сформулировать ответы сами. Аналогично поступите и с задачами. А в целях экономии времени беритесь прямо за трудные задачи. Решить не удастся? Попробуйте преодолеть задачи средней сложности. Тоже не получается? Возьмитесь за легкие! Получилось? Возвращайтесь назад к трудным... и далее по циклу. Ну а если не решаются и легкие задачи, значит осталась неясность в изучаемом вопросе по существу. Беритесь вновь за изучение теории или обращайтесь за консультацией к преподавателю.



Раздел 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

1.1. Гармонический анализ периодических сигналов. Гармонический и комплексный спектры периодического сигнала. Влияние параметров сигнала (формы импульсов, длительности и периода повторения) на спектр сигнала



Кратко и математически строго этот вопрос изложен в учебнике [1, с. 37-46] ([2, с. 20-27]), более полно и подробно в [3, с. 41-48]; в [19, с. 420-423] приведена обширная таблица представления периодических функций рядом Фурье. Более трудной, чем задача анализа (разложение периодической функции в ряд Фурье) является задача гармонического синтеза (выявление функции, соответствующей заданному ряду Фурье); этому вопросу посвящена монография [12].

О представлении периодических сигналов рядом Фурье можно прочитать также в [4, с. 38-43; 15, с. 324-338; 11, с. 8-11]; прекрасно с позиций физического толкования материал изложен в [10, с. 12-14]; математическая теория вопроса дана в [18, с. 143-156], следует лишь обратить внимание на то, что начальная фаза слагаемых в выражении, определяющем ряд Фурье в этих книгах (например, в формуле (2.7) в [4]), вводится со знаком "минус".



1.1.1. Зададимся вопросом: какое отношение имеет ряд Фурье к реальным радиотехническим сигналам? Для ответа на него представим, что некий наблюдатель анализирует сигнал лишь в некотором конечном интервале времени, значения же сигнала за пределами этого интервала его не интересуют. С позиций математики это означает, что сигнал за пределами указанного интервала можно про-

должить как угодно, например, периодически. Анализ показывает, что именно при периодическом продолжении значений сигнала математические выкладки, связанные с решением большинства задач радиотехники, оказываются наиболее простыми.

1.1.2. Почему выгодно периодическое колебание произвольной на периоде формы представлять в виде суммы колебаний косинусоидальной формы? Исследования показывают, что большинство радиотехнических задач, например, задачи о прохождении сигналов сложной формы через радиотехнические цепи (даже если эти цепи линейные) являются весьма трудными. Если же форма воздействующего колебания гармоническая, то та же задача решается проще: если, например, имеются в виду цепи линейные, то для нахождения отклика можно применить метод комплексных амплитуд. Но это значит, что для нахождения отклика линейной цепи на воздействие сигнала сложной формы целесообразно применить метод суперпозиции (наложения). Именно источник периодического сигнала сложной формы надо представить как бы состоящим из последовательного (параллельного) соединения источников напряжения (тока), генерирующих гармонические колебания определенной амплитуды, частоты и фазы, затем рассчитать отклики цепи на воздействие каждого гармонического колебания и все отклики сложить.

1.1.3. Ряд Фурье представляет собой, строго говоря, приближенное описание периодического сигнала $s_n(t)$ (именно это обстоятельство вложено в смысл слова "аппроксимация", которое упомянуто в сноске на с. 32 в [3]); в этом смысле ряд Фурье, т. е. функция, тождественно определяемая правой частью формул (2.4), (2.8) и (2.10) в [3], может рассматриваться всего лишь как среднеквадратическая копия заданного сигнала, т. е. копия, определяемая критерием среднеквадратического приближения; формулировка этого критерия дана в [1, с. 35] ([2, с. 18]) и [3, с. 33].

Вообще для понимания сути вопроса весьма полезно ознакомиться с рекомендуемыми в математике критериями приближения функций. Краткая характеристика этих критериев и обоснование предпочтительности критерия минимума среднеквадратической ошибки доходчиво приведены в [9, с. 113-116]. При этом не следует путать приближения, достигаемые аппроксимацией функций (именно этот вид приближения имеется в виду в теории рядов Фурье) и интерполяцией. Об отличии последнего способа приближения от первого говорится кратко в [9, с. 112-113 и 19, с. 502].

1.1.4. Из минимума среднеквадратической ошибки и даже равенства ее нулю не следует, что копия сигнала и сам сигнал должны тождественно, т.е. во все моменты времени, совпадать; на это обстоятельство указывается в [1, с. 36 и 43] ([2, с. 19, 24]). Даже если заданная периодическая функция и отвечает условиям Дирихле (формулировка этих условий приведена в [9, с. 122; 12, с. 325 и 19, с. 418]), но обладает разрывами первого рода, то попытки представить ее рядом Фурье неизбежно ведут к появлению так называемого эффекта Гиббса. Суть этого явления заключается в возникновении различия между копией и оригиналом по крайней мере в точках разрыва (при бесконечном числе слагаемых ряда) и даже волнообразному отличию во множестве точек в окрестности разрывов (при ограниченном числе слагаемых ряда); об этом подробно говорится в [9, с. 296-297]. Не считаться с этим эффектом нельзя. В радиотехнике он проявляется своей нежелательной стороной, например, при конструировании частотно-избирательных фильтров, близких по свойствам к идеальным.

1.1.5. Гармонический и комплексный спектры, определяемые в [1][▼] формулами (2.30), (2.31) и (2.20), а в [3] – формулами (2.8) и (2.10), представляют собой всего лишь

[▼] Номера формул в [1] и [2] полностью совпадают.

две математические формы представления одного и того же сигнала. Отличие их состоит в том, что формула (2.8) в [3] отражает собой спектр односторонний или, как еще говорят, физический: этому спектру соответствуют лишь положительные (физически реализуемые) частоты, а выражение (2.10) – двухсторонний или математический: присутствующие формально в этом спектре колебания с отрицательными частотами физического смысла не имеют [4, с. 42]. Понятие гармонического спектра используется в основном при экспериментальных исследованиях, понятие комплексного спектра более удобно при решении теоретических задач.

1.1.6. Важным для понимания сути вопроса является уяснение того факта, что спектральная составляющая гармонического спектра, определяемая согласно [3] формулой (2.8) или согласно [1] формулой (2.30), есть строго гармоническое колебание определенной частоты, амплитуды и фазы, длящееся бесконечно долго и не имеющее никаких разрывов даже в промежутках между импульсами исходного периодического сигнала (т.е. там, где значение сигнала тождественно равно нулю), то же относится и к понятию спектральной составляющей комплексного спектра. В этом смысле и гармонический, и комплексный спектры являются с практической точки зрения понятиями надуманными, ибо в природе не существуют источники, которые бы генерировали колебания бесконечно долго и были включены бесконечно давно.

1.1.7. Комплексный спектр реального сигнала $s_n(t)$, т.е. действительной функции s_n действительного аргумента t является комплексно-сопряженным, о чем говорит формула (2.12) в [3, с. 44]. Именно поэтому в области $\omega > 0$, где не равны нулю амплитуды и гармонического, и комплексного спектров, амплитуды первого из них вдвое больше амплитуд второго (за исключением постоянных составляющих, которые одинаковы), а спектры фаз совпадают. Это дает

возможность при расчете спектра амплитуд и спектра фаз обоих видов пользоваться, по-существу, одними и теми же формулами, а именно, (2.22) и (2.23) из [1] или (2.11) и (2.12) из [3]; если же исходная функция четная или нечетная, то для расчета разумнее пользоваться формулами (2.5) и (2.6) из [3].

Заметим кстати, что по смыслу определения коэффициенты \dot{C}_n в [1] (или [2]) и $\dot{A}_n/2$ в [3] связаны соотношением $\dot{A}_n = 2 \cdot \dot{C}_n$, это подчеркивается в [1, с. 40] ([2, с. 22]).

1.1.8. Остановимся, наконец, на особенностях спектра квазипериодических сигналов. К в а з и п е р и о д и ч е с к и м и называют сигналы, которые, не являясь в принципе периодическими, характеризуются тем не менее дискретным спектром [10, с. 18-19]. К таким сигналам относятся, например, модулированные колебания с некратными частотами несущей и модулирующего сигнала и другие сигналы, представляющие собой сумму гармонических колебаний с некратными частотами. Ввиду отсутствия периода у квазипериодических колебаний их не в о з м о ж н о представить рядом Фурье, т. е. суммой гармонических колебаний с к р а т н ы м и частотами, а значит для расчета спектра нельзя воспользоваться формулами (2.5), (2.6) или (2.11) из [3].

? **В.1.1.** Почему простая функция $\cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$ играет особую роль в радиотехнике?

В.1.2. Дайте определение понятия периодического сигнала. Назовите несколько физических процессов, для которых модель периодического сигнала является подходящим способом описания.

В.1.3. Что в радиотехнике понимают под гармоническим спектром периодического сигнала? Комплексным спектром?

В.1.4. Что представляют собой спектральные составляющие гармонического (комплексного) спектра? Напишите ана-

литическое выражение спектральной составляющей n -й гармоники обоих спектров.

В.1.5. В п. 1.1.6 утверждается, что спектральные составляющие периодического сигнала не имеют разрывов, т. е. существуют в промежутках между импульсами сигналов. Вместе с тем их сумма согласно ряду Фурье должна в этих промежутках быть равной нулю. Как такое может быть?

В.1.6. Отрицательная частота – это понятие абстрактное или физическое? С чем оно связано?

В.1.7. Как по известному гармоническому (комплексному) спектру можно определить временную форму сигнала (копии сигнала) в пределах одного периода?

?  4-6, 8 [3, с. 83].

•  **Р.1.1.** Напряжение некоторого источника изменяется по закону $u(t) = 8 \cdot \sin^2(10^6 \cdot t - \pi/6)$ В. Рассчитайте гармонический и комплексный спектры напряжения.

Р.1.2. Ток в некоторой ветви определяется выражением $i(t) = 20 \cdot [1 + 0.8 \cdot \cos(10^4 \cdot t)] \cdot \cos(\pi \cdot 10^4 \cdot t)$ мА. Чему равен период тока? Рассчитайте гармонический и комплексный спектры тока.

••  **Р.1.3.** По заданному аналитическому выражению для периодически изменяющегося тока в ветви цепи $i_n(t) = \begin{cases} -I_\Omega & \text{при } -T_n/2 \leq t \leq 0; \\ +I_\Omega & \text{при } 0 < t < T_n/2 \end{cases}$ рассчитайте его гармонический спектр (амплитуд и фаз).

•••  **Р.1.4.** Комплексные амплитуды спектральных составляющих периодического сигнала $s_n(t)$ описываются выражением $3 \cdot \text{sinc}(\pi \cdot n/3)$ В. Каково пиковое мгновенное значение сигнала?

- ...  2.6, 2.7 [6]; 2.1* [6]; 2.8*, 2.9* и 2.11* [7].
- ..  2.2 [6]; 1.19 [5]; 2.7* [7]; примеры [1, с. 41-45].
- ..  1.15-1.17 [5]; 1.4.4* [8].

1.2. Гармонический анализ непериодических сигналов. Спектральная плотность сигнала и ее физический смысл. Использование известной спектральной плотности одиночного импульса для расчета спектра периодической последовательности тех же импульсов

 Этот вопрос хорошо изложен в [1, с. 46-50; 2, с. 27-31; 3, с. 49-54], неплохо в [4, с. 47-51]. Материал по данному вопросу имеется также в [10, с. 15-20; 15, с. 391-394; 11, с. 11-15]; при этом в [10, с. 26-33] вводятся чрезвычайно ценные для применения на практике понятия текущего и мгновенного спектров; в [15, с. 395] вводятся понятия косинус- и синус-преобразований, что дает возможность применить к проблеме взятия интегралов (прямого и обратного преобразования Фурье) готовые табличные результаты, приведенные, например, в [19, с. 427-436]; наконец, в [16, с. 36-38] в увлекательной форме обсуждается важный для понимания физической сути вопрос: существуют ли реально спектральные составляющие?

 **1.2.1.** Задумаемся, как и в предыдущем случае, над тем, какое отношение к реальным сигналам имеет интеграл Фурье? Для выяснения этого вообразим, что некий наблюдатель анализирует сигнал во времени **б е с п р е р ы в н о**, т.е. его интересуют значения сигнала во **в с е** моменты времени, даже если в отдельные моменты или интервалы эти значения равны нулю. Ясно, что в этом случае видоизменять описывающую сигнал функцию в целях упрощения математических выкладок нельзя.

1.2.2. Понятие спектральной плотности $\dot{G}_s(\omega)$ вводится применительно к непериодическому сигналу $s(t)$ потому, что сами амплитуды всех спектральных составляющих ($d\dot{C}(\omega)$ в обозначениях [1] или $d(\dot{A}(\omega)/2)$ в обозначениях [3]) бесконечно малы, так что изобразить спектр этих амплитуд невозможно, это подчеркивается в [3, с. 50]. Но отношение бесконечно малой амплитуды $d\dot{C}(\omega)$ к бесконечно малому частотному интервалу $d\omega$ между соседними спектральными составляющими есть величина не бесконечно малая, так что график функции $\dot{G}_s(\omega) = 2\pi \cdot d\dot{C}(\omega)/d\omega$, или по-другому $\dot{G}_s(\omega) = d\dot{C}(f)/df$, рассчитать и построить можно. А это дает возможность по форме спектральной функции $\dot{G}_s(\omega)$ судить о форме собственно комплексного спектра $d\dot{C}(f)$, ибо в силу линейной связи между ними они, хотя и отличаются по масштабу и размерности, но по форме совпадают.

Подчеркнем, кстати, что размерность спектральной функции равна отношению размерности сигнала к одному г е р ц у независимо от того, какая частота выступает в качестве переменной: циклическая f (Гц) или круговая $\omega = 2\pi f$ (рад/с).

В понятии "спектральная плотность" нет ничего сверхъестественного; оно аналогично, например, таким известным понятиям как "удельный вес", "плотность раствора", "удельное сопротивление" и т. п.

Заметим, наконец, что выражение $d\dot{C}(f)/df = \dot{G}_s(f)$ нельзя рассматривать как производную, ибо в числителе стоит не приращение функции, а само ее значение; по этой причине выражение "спектральная плотность амплитуд", т.е. $|\dot{G}_s(f)|$, – имеет физический смысл, а фраза "спектральная плотность фаз", т.е. $\arg \dot{G}_s(f)$, – бессмысленна, так как фазы спектральных составляющих в комплексных амплитудах $d\dot{C}(f)$ по величине произвольны.

1.2.3. Спектральная плотность $\dot{G}_s(\omega)$ по определению – функция двусторонняя, она соответствует комплексному (не гармоническому) спектру периодического сигнала.

1.2.4. Как и ряд Фурье, интеграл Фурье, выражаемый формулой (2.49) в [1] или формулой (2.26) в [3], определяет собой не сам сигнал, а лишь его копию, которая может в принципе отличаться от оригинала (если в нем имеются разрывы) [19, с. 425], т. е. интегралу Фурье также присуще явление Гиббса [9, с. 296-297].

В качестве условия малой отличимости копии сигнала от оригинала (условия сходимости интеграла Фурье) выставляется обычно требование абсолютной интегрируемости функции, выраженное формулой (2.95) [1]. В [9, с. 159] отмечено, что в случае использования критерия среднеквадратического приближения это требование является чрезмерно жестким, достаточно, оказывается, чтобы сигнал $s(t)$ обладал конечной (усредненной за бесконечный интервал времени) мощностью, которая определяется формулой (1.5) в [9, с. 15] или же аналогичной формулой (2.17) в [1, с. 37]; именно критерий среднеквадратической ошибки позволяет представить интегралом Фурье многие не абсолютно интегрируемые функции, например, функцию Хэвисайда [3, с. 27].

1.2.5. В [11, с. 30-32], в [3] формулами (2.21) и (2.22), в [1] формулами (2.85) и (2.86) и, наконец, в [4] формулами (1.5)-(1.7) вводится чрезвычайно широко используемое в теоретической радиотехнике понятие δ (дельта)-функции. Обратим внимание на то, что по [3] δ -функция (как функция времени) оказывается размерной: ее размерность – $1/c$, а площадь под ней безразмерна и равна единице. Такое определение δ -функции представляется более разумным, чем определения, вводимые в [1, 4], в которых сама δ -функция полагается безразмерной, а площадь – размерной и равной одной секунде. Обоснованность этого суж-

дения можно подтвердить таким примером: в табл. 2.1 [1] указана комплексная спектральная плотность единичного скачка (функции Хэвисайда) $s(t)=1(t)=\{1 \text{ при } t>0; 0 \text{ при } t<0\}$; она выражается формулой $\dot{G}_s(\omega)=\pi\cdot\delta(\omega)+1/(j\omega)$; если в этой формуле δ -функцию считать безразмерной, то возникает ощущение несогласованности слагаемых по размерности; по [3] же ее размерность очевидна – $1/\Gamma$ ц. (На самом деле авторы книг [1, 4] никакой ошибки не допустили: по их определению надо мыслить, что перед $\delta(\omega)$ стоит множитель "1" с размерностью $1/c$, что далеко не очевидно). Заметим, что вопрос о размерности δ -функции обсуждается также в [9, с. 18-22].

Вообще для приобретения навыков спектрального анализа сигналов крайне полезно разобрать примеры, приведенные в п. 2.5 [3]. Эти примеры содержат спектры функций, обладающих какими-либо особенностями, например, функций недифференцируемых в обычном смысле (к таковым собственно и относится δ -функция), не отвечающих условию абсолютной интегрируемости и т. п.; определение таких функций дано в табл. 1.2 [3, с. 27], табл. 1.1 [9, с. 18] и табл. 2.1 [1, с. 75] ([2, с. 50]); спектральный анализ проведен в [3, с. 62-65] и, кроме того, в [1, с. 65-68, 79-81] и [4, с. 55-59]. Полученные результаты весьма поучительны, и соотношения (2.47), (2.48), (2.52) и (2.54)-(2.58), полученные в [3], следовало бы запомнить.

1.2.6. Для расчета спектральной функции $\dot{G}_s(\omega)$ сигнала $s(t)$ следует пользоваться формулой прямого преобразования Фурье, но можно также использовать связь, которая существует между преобразованиями Фурье и Лапласа [1, с. 87; 2, с. 59]). Именно для нахождения \mathcal{F} (фурье)-образа сигнала (так еще называют в математике спектральную функцию $\dot{G}_s(\omega)$) можно рассчитать вначале (например, с помощью таблиц, приведенных в [19, с. 439-440]) \mathcal{L} -образ сигнала (изображение по Лапласу), а затем, если \mathcal{L} -образ $\mathcal{L}(p)$ не имеет полюсов на оси $p = j\omega$,

сделать переход от $\mathcal{L}(p)$ к $\dot{G}_s(\omega)$ путем подстановки $p = j\omega$; если же в функции $\mathcal{L}(p)$ имеется дробно-рациональный множитель (с числителем равным единице), обладающий полюсом на мнимой оси в точке $p_0 = j\omega_0$, то при переходе к \mathcal{F} -образу надо к результату, полученному после замены p на $j\omega$, прибавить слагаемые вида $\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$, соответствующие всем полюсам на мнимой оси этого множителя. Примеры такого использования преобразования Лапласа приведены в [1, с. 87] ([2, с. 59]).

1.2.7. Серьезной вычислительной проблемой является выполнение обратного преобразования Фурье, т. е. нахождение по спектральной плотности самого сигнала (точнее его копии). Поскольку функция $\dot{G}_s(\omega)$ реального сигнала является комплексно-сопряженной, то наряду с формулой (2.26) [3], вводимой по определению, удобно также пользоваться формулой (2.29) [3], которая не требует выполнения операции интегрирования по отрицательным частотам, т. е. не требует проверки выполнения условия комплексной сопряженности функции $\dot{G}_s(\omega)$ в области $\omega < 0$ по отношению к области $\omega > 0$.

Для расчета копии сигнала можно также воспользоваться связью, существующей между преобразованиями Фурье и Лапласа. Для этого достаточно проделать операции, обратные тем, которые были указаны в предыдущем пункте. Важно подчеркнуть, что найденная таким образом копия сигнала будет соответствовать условию $S(t) = 0$ при $t < 0$.

1.2.8. Формула (2.56') в [1] или (2.15) в [2] является руководством о д н о н а п р а в л е н н о г о действия: с ее помощью н е л ь з я рассчитать спектральную функцию $\dot{G}_s(\omega)$ одиночного импульса по известному дискретному спектру периодической последовательности импульсов. Причина в том, что по дискретной функции нельзя в общем случае восстановить все значения функции непрерывной.

? **В.1.8.** Верно ли суждение: понятие "спектральная плотность" ввели для того, чтобы подчеркнуть, что спектральные составляющие непериодического сигнала располагаются на частотной оси очень "плотно", т. е. образуют спектр сплошной? Если да, то почему размерность спектральной плотности не совпадает с размерностью самого спектра сигнала?

В.1.9. Верно ли утверждение, что размерность комплексной спектральной плотности $\dot{G}_u(\omega)$ некоторого импульса напряжения $u(t)$ есть В/(рад/с)?

?  11-13 [3, с. 83-84]; 6 и 8 [4, с. 65].

..  Оцените решение следующих задач:

Р.1.5. В [3, табл. 2.2, позиция 11] показано, что спектральная плотность постоянного во времени напряжения $u(t) = U_0$ выражается формулой $\dot{G}_u(\omega) = U_0 \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega)$, т. е. бесконечно велика на частоте $\omega = 0$ и равна нулю на всех остальных частотах. Требуется рассчитать комплексный спектр $\dot{C}_u(\omega)$.

Предлагаемое решение. Так как по определению $\dot{G}_u(\omega) = 2\pi \cdot d\dot{C}_u/d\omega$, то $\dot{C}_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\omega} \dot{G}_u(\omega) d\omega$, и в нашем случае, согласно (1.25) [3] $\dot{C}_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\omega} U_0 \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega) d\omega = \{0 \text{ при } \omega < 0; \frac{U_0}{2} \text{ при } \omega = 0; U_0 \text{ при } \omega > 0\}$ (?!). Постоянное напряжение оказалось содержащим гармонические колебания всех частот! К тому же спектр оказался несимметричным относительно $\omega = 0$, что противоречит свойству комплексной сопряженности... Ясно, что решение не верно. В чем его ошибка?

Р.1.6. Спектральная функция $\dot{G}_u(\omega)$ некоторого реального сигнала $u(t)$ равномерна и равна G_0 на всех частотах вплоть

до частоты ω_M , на больших частотах она равна нулю. Как выглядит сигнал $u(t)$?

Предлагаемое решение. В соответствии с условием задачи сигнал $u(t)$ будем искать по формуле

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_M} G_0 \cdot e^{+j\omega t} d\omega.$$

Нетрудно убедиться в том, что интегрирование приводит к результату $u(t) = G_0 \cdot \{\sin(\omega_M \cdot t) + j \cdot [1 - \cos(\omega_M \cdot t)]\} / (2\pi \cdot t)$, т. е. сигнал оказался комплексным, а значит, нереальным. В чем заключается ошибочность предложенного решения?

...  **Р.1.7.** Два видеопульса характеризуются спектральными характеристиками $\dot{G}_{s1}(\omega) = 2 \cdot \sin(10^{-4} \cdot \omega) / \omega$ и $\dot{G}_{s2}(\omega) = 1 / (10^4 + j\omega)$, В/Гц. Определите протяженность интервала времени, в пределах которого мгновенные значения обоих импульсов отличны от нуля.

...   2.38 [6]; 1.44, 1.46 [5]; 2.23*, 2.35* [6]; 2.13*, 2.18* [5]; 2.4.4* [8].

...   2.22, 2.24 [6]; 1.42, 1.47, 2.30 [5]; 2.31* [7]; 2.4.1* [8]; примеры [1, с. 57-64].

•   1.29, 1.49 [5]; 2.21 [6]; 1, 2 [4, с. 134]; 2.15*, 2.19* [6]; 2.16* [7].

1.3. Энергетические характеристики спектров периодического и непериодического сигналов (распределение мощности по спектру периодического сигнала, спектральная плотность энергии непериодического сигнала); равенство Парсеваля. Практическая ширина спектра сигнала

 Этот вопрос хорошо изложен в [3, с. 36-37, 48-49 и 65-66] и в [4, с. 81-84], неплохо изложен также в [1,

с. 45-46; 56-57] ([2, с. 27, 36]). Для уяснения сути вопроса полезно ознакомиться также с материалом, изложенным в [11, с. 24-25, 27-30].



1.3.1. Если сигнал и его копия совпадают (в смысле равенства нулю среднеквадратической ошибки), то энергетические показатели сигнала и копии (средняя мощность, если речь идет о периодическом сигнале, и энергия, если – о непериодическом) одинаковы – в этом состоит смысл равенства Парсеваля, выражаемого формулами (2.41), (2.42) [1], (1.48) [3] и (2.66) [1], (2.19), (2.20) [3].

1.3.2. Вычислять энергетический показатель сигнала в целом, как сумму энергетических показателей его спектральных составляющих, можно лишь потому, что все эти составляющие являются взаимно ортогональными, т. е. интеграл за бесконечно большое время от их произведения равен нулю.

1.3.3. Практическая ширина спектра сигнала и его практическая длительность связаны взаимно обратной зависимостью (чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр). Оптимальным, с точки зрения концентрации энергии сигнала в узкой полосе спектра и вместе с тем в пределах малой его длительности, является колоколовидный (гауссовский) импульс; доказательство этого приведено в [1, с. 69-73] ([2, с. 46-49]) и [10, с. 73-83].

? **В.1.10.** В п. 1.1.6 утверждается, что спектральные составляющие гармонического спектра не имеют разрывов даже в промежутках между импульсами периодического сигнала. Как можно объяснить существование составляющих в этих промежутках с энергетических позиций?

В.1.11. Вообразим, что некоторый источник постоянного напряжения на короткое время подключается к некоей рези-

ственной нагрузке. Образовавшийся на нагрузке импульс напряжения следует со спектральных позиций считать состоящим из гармонических колебаний, существующих во все моменты времени, в том числе и до подключения источника. Как такое может быть?

?  20-21 [3, с. 84]; 6, 7, 10 [4, с. 66] и 4, 5 [4, с. 87].

..  **P.1.8.** Оцените энергию сигнала на выходе фильтра с амплитудно-частотной характеристикой, определяемой как $K(f) = \{1, f < 1/2 \text{ кГц}; 2 \cdot (10^3 - f), f \in [1/2, 1] \text{ кГц}; 0, f > 1 \text{ кГц}\}$, и постоянной времени 0.5 мс, если на его вход поступает одиночный видеоимпульс $S_{\Omega} \cdot \text{rect}(t/\tau)$, где $\tau = 1$ мс.

P.1.9. Определите энергию импульса, комплексная спектральная плотность которого $\dot{G}_s(\omega) = 2 \cdot 10^{-4} / (10^8 + \omega^2)$, А/Гц.

...   1.58, 1.59 [5]; 14 [4, с. 67]; 1.4.5* [8].

..   1.24 [5]; 4 [4, с. 66]; 4, 5 [4, с. 87]; 3.7* [6]; 2.14* [7]; 1.4.3, 2.4.1* [8].

•   1.23, 1.27 [5]; 3.11 [6]; 3 [4, с. 87]; 3.9* [6]; 1.3.6, 2.3.3 [8].

1.4. Основные соотношения между спектрами совокупности сигналов (спектры сигналов, отличающихся положением на временной оси, наличием гармонического множителя, уровнем, длительностью; спектры сигналов, связанных операциями суммирования, перемножения, дифференцирования, интегрирования, интегральной свертки и т. п.). Смысл соотношений и их назначение

 Наиболее полно этот вопрос изложен в [1, с. 51-56] ([2, с. 31-35]), в более сжатой форме – в [4, с. 51-55], в табличной форме – в [3, с. 52-53].

  **1.4.1.** При изучении этого вопроса следует иметь в виду, что свойства, верные для непериодических сигналов, справедливы и для сигналов периодических; в этом можно убедиться, воспользовавшись формулой (2.15) из [3, с. 46].

Теоретическая ценность свойств преобразований Фурье состоит в возможности упрощения выкладок при переходах от сигналов к спектрам и обратно.

?  15-19 [3, с. 84]; 10-12 [4, с. 66].

•  **P.1.10.** В учебном пособии [1, с. 62-63] показано, что спектральная плотность сигнала $s_0(t) = S_{\Omega} \cdot \text{sinc}(\omega_M \cdot t)$ определяется выражением $G_0(\omega) = S_{\Omega} \cdot \pi \cdot \text{rect}[\omega / (2\omega_M)] / \omega_M$, где $\text{rect} x = \{1 \text{ при } |x| \leq 0.5; 0 \text{ при } |x| > 0.5\}$. Какова спектральная плотность сигнала $s_k(t) = S_k \cdot \text{sinc}[\omega_M \cdot (t - k \cdot T)]$? (Предполагается, что k – целое число, S_k , ω_M и T – произвольные параметры сигнала).

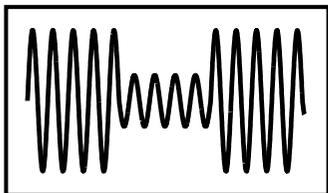
..  **P.1.11.** Воспользовавшись решением предыдущей задачи, рассчитайте спектральную плотность напряжения $u(t) = U_{\Omega} \cdot \text{sinc}^2[\omega_M \cdot (t - k \cdot T)]$.

P.1.12. Рассматривая сигнал $s(t) = \{S_{\Omega} \cdot t/\tau, 0 \leq t \leq \tau; S_{\Omega}, t > \tau\}$ как результат последовательных линейных преобразований δ -импульса ($s_{\delta}(t) = S_{\Omega} \cdot \tau \cdot \delta(t)$), обладающего комплексной спектральной плотностью $\dot{G}_{s_{\delta}}(\omega) = S_{\Omega} \cdot \tau$, определите на основе теорем о спектрах спектральную плотность амплитуд сигнала $s(t)$.

...   1.36, 1.37 [5]; 2.41 [6]; 2.18*, 2.40*, 2.46* [6]; 2.28* [7]; 2.4.2* [8].

..   2.30 [6]; 2.26 [7]; 2.29* [6]; 2.29* [7]; 2.3.5 [8]; 2.4.3* [8].

•   1.34, 1.35 [5]; пример 2.3 [4, с. 60]; 2.3.2, 2.3.4 [8].



Раздел 2. ВРЕМЕННОЕ, СПЕКТРАЛЬНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ОПИСАНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

2.1. Сущность амплитудной, частотной и фазовой модуляции. Временные диаграммы АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов при тональной модуляции и модуляции периодическим колебанием произвольной формы. Влияние параметров (амплитуды, частоты и фазы) модулируемого и модулирующего колебаний на временные диаграммы АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов

 Наиболее полно и последовательно этот вопрос изложен в [1, с. 106-109, 117-121] ([2, с. 74-75, 81-84]), [3, с. 85-86, 90, 94-97] и [4, с. 88-94, 96-98]. Имеется материал по этому вопросу также в [13, с. 18-19, 22-25], [11, с. 57-60, 62-66], [15, с. 552-557].

? **В.2.1.** Как по временной диаграмме АМ-колебания, соответствующей тональной модуляции, можно определить частоту несущей, частоту модулирующего колебания, коэффициент амплитудной модуляции?

В.2.2. Как по временной диаграмме ЧМ-колебания можно определить девиацию частоты, частоту несущей?

?  1, 2, 5, 8 и 9 [4, с. 110] и 1-3, 8-10 [3, с. 119].

 **Р.2.1.** Периодический информационный сигнал $S_{\text{и}}(t) = \{-S_{\Omega} \text{ при } -T_{\text{п}}/2 \leq t \leq 0; 0 \text{ при } 0 < t < T_{\text{п}}/2\}$ с параметрами $S_{\Omega} = 0.1 \text{ В}$ и $T_{\text{п}} = 10 \text{ мкс}$ используется в качестве модулирующего при формировании амплитудно-модулированного сигнала. Модулируемое колебание – $\cos(2\pi \cdot 10^6 \cdot t + 70^\circ)$ В.

Крутизна характеристики модулятора $K_{\text{АМ}} = 5$. Изобразите временную диаграмму сигнала на выходе модулятора и рассчитайте его коэффициент модуляции.

 **Р.2.2.** Набег фазы частотно-модулированного колебания изменяется по закону $10 \cdot \sin(10^3 \cdot t)$ рад. Найдите аналитическое выражение модулирующего сигнала, полагая, что крутизна модулятора составляет $10^4 \text{ рад}/(\text{с} \cdot \text{В})$. Определите девиацию частоты радиосигнала.

 **Р.2.3.** Девиация частоты радиосигнала на выходе идеального фазового модулятора составляет $4 \cdot 10^3 \text{ рад}/\text{с}$. Сигнал, воздействующий на управляющий вход модулятора, – $S_{\text{п}}(t) = \{3S_{\Omega} \cdot t/T_{\text{п}}, 0 \leq t \leq T_{\text{п}}/3; -S_{\Omega}, T_{\text{п}}/3 < t \leq T_{\text{п}}\}$, где $T_{\text{п}} = 1.2 \text{ мс}$. Изобразите осциллограмму ФМ-сигнала.

  2.11 [5]; 3 [4, с. 111]; 3.6* [7]; 3.4.3*, 4.4.3* [8].

  2.8, 2.9 [5]; 4.1, 4.14 [6]; 3.21 [6]; 4.2* [6]; пример 4.2 [4, с. 98]; 3.3.3, 4.3.1-4.3.4, 4.4.2* [8].

  4.6, 4.13 [6]; 3.21 [7]; 4.12* [6]; 3.3.1 [8].

2.2. Спектральный анализ АМ-сигналов при модуляции высокочастотного гармонического колебания периодическим (непериодическим) сигналом. Влияние параметров несущего колебания и модулирующего сигнала на спектры амплитуд и фаз АМ-сигнала

 Этот вопрос изложен в [3, с. 86-87, 89-92], [1, с. 109-116] ([2, с. 76-81]) и [4, с. 91-92]. Интересно и поучительно, с экскурсами в историю, он рассмотрен также в [16, с. 15-20], где обсуждается, в частности, вопрос о физическом существовании боковых спектральных составляющих; отмечено

но, что любая спектральная составляющая обретает физическую реальность лишь тогда, когда находится избирательная система, способная эту составляющую выделить. Вопрос о спектрах АМ-сигналов изложен также в [13, с. 17-21; 15, с. 558-560; 11, с. 60].

 **2.2.1.** АМ-сигналы относятся, вообще говоря, к классу квазипериодических (см. п. 1.1.8), поэтому рассчитывать их спектр по общим формулам, например, (2.4)-(2.9) [3] при модуляции периодическим сигналом с частотой модуляции Ω , некратной частоте несущего колебания ω_0 , нельзя. По этой причине спектральные свойства АМ-сигналов, соответствующих модуляции периодическим информационным сигналом, рассматриваются, как правило, с позиции односторонних (гармонических) спектров (о смысле одностороннего и двухстороннего спектров говорилось в п. 1.1.5), что подтверждается формулами (3.10), (3.11) и (2.8) [3]. Из этого не следует, однако, что в этом случае нельзя перейти от одностороннего спектра к двухстороннему (комплексному), для этого достаточно воспользоваться формулами, например, (3.11), (2.8), (2.10) и (2.12) [3].

Что же касается модуляции непериодическим сигналом, то в этом случае принято рассматривать спектр двухсторонний, поскольку рассчитывается при этом не сам спектр, а спектральная плотность; это подтверждается, в частности, формулами (3.14), (3.17) [3] или (3.9), (3.10) [1].

 5 [3, с. 119] и 4 [4, с. 110].

 **Р.2.4.** Периодическая последовательность знакопеременных пилообразных импульсов поступает на управляющий вход идеального амплитудного модулятора с крутизной K_{AM} . На второй вход модулятора подается несущее колебание $\cos(2\pi f_0 t)$. Рассчитать амплитуды гармоник в составе выходного АМ-колебания.

 2.4 [5]; 4.7 [6]; 3.7 и 3.8* [7].

 2.3 [5]; 4.8 [6]; 3.2* [7]; 3.4.1*, 3.3.4, 3.3.6 [8].

 2.1, 2.2 [5]; 3.1* [7]; пример 4.1 [4, с. 92]; 3.3.2 [8].

2.3. Спектральный анализ ЧМ- и ФМ-сигналов при тональной модуляции. Влияние параметров (амплитуды и частоты) модулирующего и модулируемого колебаний на спектр ЧМ- и ФМ-сигналов. Особенности спектра ЧМ- и ФМ-сигналов при модуляции периодическим сигналом произвольной формы

 Наиболее полно этот вопрос изложен в [4, с. 99-104] и [1, с. 121-127] ([2, с. 84-88]). Удовлетворительно он изложен также в [3, с. 98-100], однако на рис. 3.14 и 3.15 в обозначении функции Бесселя допущена опечатка: вместо символа $J_n(m)$ изображен символ $I_n(m)$, которым, как это принято в математике, обозначают модифицированную функцию Бесселя мнимого, а не действительного аргумента.

Вопрос о спектрах ЧМ- и ФМ-сигналов рассмотрен также в [13, с. 25-29; 15, с. 561-563 и 11, с. 66-68]. Математическое определение функций Бесселя дано в [19, с. 320], числовые значения функций приведены в [19, с. 65-67].

 **2.3.1.** Как и АМ-сигнал, сигналы с угловой модуляцией относятся к классу квазипериодических, поэтому для них справедливо все то, о чем говорилось ранее в п. 2.2.1.

2.3.2. Интервал изменения мгновенной частоты ЧМ-, ФМ-сигнала и ширина спектра сигнала – это не одно и то же, они могут существенно отличаться друг от друга. Объясняется это тем, что колебание, частота которого приняла в какой-то момент времени некоторое (например, наибольшее) значение,

нельзя рассматривать как спектральную составляющую, ибо у спектральной составляющей частота, согласно п. 1.1.6, во времени не изменяется. Неучет этого обстоятельства служит наиболее распространенной причиной ошибок, проникающих в рассуждения физического характера; об этом увлекательно рассказывается в [16, с. 20-27, 32-34].

2.3.3. При угловой модуляции периодическим информационным сигналом произвольной формы, т. е. не одним гармоническим колебанием, а совокупностью колебаний разных частот, спектр ЧМ-, ФМ-сигнала нельзя в отличие от АМ-сигнала рассчитывать как сумму спектров от модуляции каждой спектральной составляющей в отдельности; на самом деле он намного богаче, чем результат простого наложения спектров [4, с. 103-104 и 11, с. 68]. Тем не менее, полная ширина спектра такого ЧМ-, ФМ-сигнала определяется в большинстве своем только высшей частотой спектра модулирующего сигнала [11, с. 68].

? **В.2.3.** Можно ли утверждать, что:
 а) спектр ЧМ-сигнала (при тональной модуляции) – сплошной, на том основании, что при плавном изменении частоты модулирующего сигнала частота спектральной составляющей принимает все значения от $\omega_0 - \Omega_d$ до $\omega_0 + \Omega_d$?
 б) ширина спектра ЧМ-сигнала независимо от частоты модулирующего сигнала равна $2\Omega_d$ (на основании пункта а))?
 в) в пределах ширины спектра амплитуды всех спектральных составляющих равны, потому что при частотной модуляции амплитуда радиосигнала во времени не меняется?
 Если эти заключения верны, то как их совместить с результатами, полученными математически и изложенными, например, в [3, с. 98-100]?

В.2.4. Как по заданному спектру ЧМ-колебания можно определить частоту несущей, частоту модулирующего (тонального) сигнала, девиацию частоты?

В.2.5. Как по спектру ФМ-колебания определить частоту несущей, частоту модулирующего сигнала, индекс модуляции?

В.2.6. В чем должно выразиться изменение спектра амплитуд ЧМ-, ФМ-сигналов при изменении амплитуды модулирующего сигнала? В чем должно выразиться изменение тех же параметров при изменении частоты модулирующего сигнала?

В.2.7. Согласно рис. 3.3 [3, с. 87] и рис. 4.6,а [4, с. 99] спектры амплитуд АМ-сигнала при тональной модуляции и ЧМ-сигнала при тональной модуляции с малым индексом качественно совпадают. Можно ли из этого сделать вывод, что амплитудная модуляция и частотная модуляция с малым индексом – это одно и то же?

?  11-14 [3, с. 119] и 10-14 [4, с. 111].

...  **Р.2.5.** Периодическая последовательность скважности $q = 2$ биполярных прямоугольных импульсов единичной амплитуды поступает на управляющий вход идеально-го фазового модулятора с крутизной $K_{ФМ} = \pi/2$ рад/В. На второй вход модулятора подается несущее колебание $\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$. Рассчитать амплитуды гармоник в составе ФМ-колебания.

..  **Р.2.6.** Указать, как изменится ширина спектра сигнала на выходе частотного модулятора с крутизной 1 кГц/В, если постоянная составляющая информационного сигнала, которым является меандр с единичной амплитудой и периодом 1 мс, увеличится до 1 В.

...   2.18, 2.19 [5]; 11, 12 и 14 [4, с. 118]; 3.15* [7].

..   2.15, 2.16 [5]; 4.17 [6]; 3.14 [7]; 3.10, 3.12* [7]; пример 4.3 [4, с. 103]; 4.2.1 [8].

.   2.14 [5]; 4.15, 4.16 [6]; 3.11, 3.17 [7]; 3.16* [7]; пример 4.2 [4, с. 98]; 4.3.5 [8].

2.4. Векторное представление радиосигналов. Векторные диаграммы АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов при малых и больших значениях коэффициента модуляции, индекса модуляции. О целесообразности векторного представления радиосигналов

 Сведения по этому вопросу приведены в [3, с. 86-87, 98, 100], [1, с. 110-112, 119, 125-127] ([2, с. 76, 78, 82, 87-88]), [4, с. 93, 94, 99-100].

 **2.4.1.** Основное достоинство векторного представления сигналов состоит в наглядности представления квазигармонических колебаний, состоящих из нескольких близких или равных по частоте гармонических колебаний; подтверждением этого служит вопрос о биениях двух гармонических колебаний, изложенный в [13, с. 29-31]. При изучении этого вопроса надо обратить внимание на методику нахождения по векторной диаграмме амплитуды, частоты и фазы результирующего квазигармонического сигнала, а также на связь между векторной и временной диаграммами этого сигнала.

 4 и 11 [3, с. 119].

 2.11 [5]; 3.6* [7].

 2.3 [5]; 3.4 [7]; 10 [4, с. 111]; 3.3* [7].

 4.1 [6]; 8 [4, с. 111]; 3.12* [7].

2.5. Энергетические характеристики АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов. Сравнительный анализ видов модуляции по энергетическим показателям сигналов

 С материалом по этому вопросу можно ознакомиться в [3, с. 88, 101; 13, с. 21, 22, 25; 15, с. 554-555, 557].

 **2.5.1.** Среднюю (за большой промежуток времени) мощность модулированных сигналов в большинстве литературных источников, например, в [3, с. 88], рекомендуется рассчитывать как сумму мощностей спектральных составляющих. (Заметим, кстати, что такой способ расчета допустим только благодаря тому, что гармонические составляющие разных частот являются функциями ортогональными, об этом говорится в п. 1.3.2, на это же обращается внимание в [4, с. 91]). Однако при большом числе спектральных составляющих (при сложной форме модулирующего сигнала) подобный способ оказывается чрезмерно громоздким. Вместе с тем, если мгновенные значения анализируемого сигнала $s(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi(t))$ подставить в определяющую искомую мощность общую формулу, например, (1.5) [9]

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt,$$

где T – период модулирующего сигнала, привести затем полученное выражение к виду

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} 0.5 \cdot A^2(t) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} 0.5 \cdot A^2(t) \cdot \cos(2\omega_0 \cdot t + 2\psi(t)) dt,$$

и учесть после, что амплитуда $s(t)$ и начальная фаза $\psi(t)$ функции $A^2(t) \cdot \cos(2\omega_0 \cdot t + 2\psi(t))$ за период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ практически не изменяются, а значит, вторым слагаемым в представленной сумме можно при $T \gg T_0$ пренебречь, то значение P_{cp} можно рассчитывать по упрощенной формуле

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} 0.5 \cdot A^2(t) dt, \quad \text{при } T \gg 2\pi/\omega_0,$$

где $A(t)$ – закон изменения амплитуды модулированного сигнала (огбающая амплитуда радиосигнала).

? **В.2.8.** В [3, с. 101] утверждается, что радиостанция, предназначенная для передачи радиосигналов с угловой модуляцией, работает в режиме постоянной средней мощности независимо от того, пребывает ли она в данный момент в режиме молчания или же в режиме излучения модулированных сигналов. Как такое с позиции энергетики может быть? Ведь в режиме молчания радиостанция излучает только одну спектральную составляющую (несущую), а в режиме модуляции – бесконечное (в принципе) число составляющих! Откуда же черпается энергия на излучение боковых?

?  6 и 15 [3, с. 119] и 3 [4, с. 110].

..   2.6 [5]; 3.4, 3.18 [7]; 3.3* [7]; 3.3.6, 3.2.2 [8].

•   4.10, 4.11 [6]; 3.2 [7]; 3.4.2* [8].

2.6. Основные параметры АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов. Рекомендации по выбору значений этих параметров из соображений желательной ширины спектра модулированного сигнала и целесообразной энергетики при тональной модуляции

 С материалом по этому вопросу лучше всего ознакомиться в [3, с. 88-89, 99 и 101]. Частично материал изложен в [15, с. 565-566].

  **2.6.1.** Сущность вопроса сводится к выявлению условий (выводу соотношений), при которых одинаковой оказывается ширина спектров АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов, или мощность спектральных составляющих, несущих полезную информацию, или пиковая мощность сигнала и т. п.

?  6, 12, 15 [3, с. 119] и 13, 14 [4, с. 111].

..   2.5, 2.19 [5]; 4.2.1 (варианты 2,9,7,14) [8].

•   2.2 [5]; 4.16 [6].

2.7. Узкополосные АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналы. Особенности временных диаграмм узкополосных АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов

 Этот вопрос рассмотрен в [1, с. 105-106] ([2, с. 73-74]); однако текст нуждается в комментариях. Во-первых, в тексте имеется неочевидная фраза, что амплитуду $A(t)$ и фазу $\theta(t)$ узкополосного квазигармонического колебания $a(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \theta(t))$ можно считать медленными функциями времени. Но это-то и является предметом доказательства! Во-вторых, нигде в тексте не используется условие узкополосности сигнала $\Delta\omega \ll \omega_0$. И, в-третьих, неравенство (3.2), интерпретируемое как результат доказательства медленности изменения амплитуды, может, вообще говоря, не выполняться: например, при тональной модуляции $A(t) = A_0 \cdot [1 + M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)]$ и коэффициенте модуляции $M = 1$ в момент времени t_1 , когда $(\Omega \cdot t_1 + \theta) = \pi$, $\left| \frac{dA}{dt} \right| \cdot \frac{1}{A} \rightarrow \infty$.

  **2.7.1.** В случае амплитудной модуляции разумнее оценивать скорость изменения амплитуды $|dA/dt|$ по отношению не к абсолютному значению амплитуды A , а к скорости изменения мгновенного значения $|da/dt|$ в моменты времени t_0 , когда мгновенное значение сигнала становится равным нулю, т. е. выполняется условие $a(t_0) = 0$. Итак, пусть $a(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$. Тогда в моменты, когда $\cos(\omega_0 \cdot t_0) = 0$, $da/dt = -\omega_0 \cdot A(t)$. Пусть для простоты $A(t) = A_0 \cdot [1 + M \cdot \cos(\Omega \cdot t)]$. Тогда при $\Delta\omega \ll \omega_0$ в моменты, когда $\cos(\omega_0 \cdot t_0) = 0$,

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| \cdot \left| \frac{da(t_0)}{dt} \right| = \frac{M \cdot \Omega}{\omega_0} = 0.5 \cdot M \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1,$$

что и требовалось доказать.

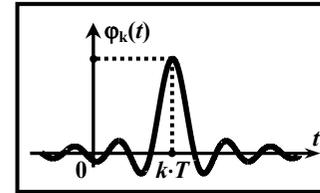
2.7.2. Обратимся к ЧМ- и ФМ-сигналам. При тональной модуляции

$$\theta(t) = \begin{cases} m \cdot \sin \Omega \cdot t & \text{при ЧМ,} \\ m \cdot \cos \Omega \cdot t & \text{при ФМ,} \end{cases}$$

т. е. $\max |d\theta/dt| = m \cdot \Omega$. Но из условия $3m\Omega = 2 \cdot (m+1) \cdot \Omega \ll \omega_0$ следует, что $|d\theta/dt| \ll \omega_0$. Это значит, что при $\Delta t = T_0$, где $T_0 = 2\pi/\omega_0$, $\Delta\theta \ll \omega_0 \cdot \Delta t = 2\pi$, т. е. при угловой модуляции набег фазы θ изменяется значительно медленнее, чем фаза $\omega_0 \cdot t$ несущего колебания.

? **В.2.9.** При каком условии на параметры несущего колебания сигналы, описанные в задачах 4.7 и 4.16 [6], можно считать узкополосными?

В.2.10. Можно ли сигналы, приведенные в задачах 2.3, 2.8 и 2.12 [5], считать узкополосными? Почему?



Раздел 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ОБОБЩЕННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ

3.1. Аппроксимация сигналов ортогональными функциями; практический критерий аппроксимации. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Обобщенный ряд Фурье; обобщенный спектр сигнала

 Обоснование целесообразности применения для описания сигналов сложной формы системы ортогональных функций, отличающихся от гармонических, приведено в [9, с. 3-8]. Сущность аппроксимации сигналов хорошо изложена в [9, с. 112-113, 116-118], там же, в [9, с. 114-116] рассмотрены и сопоставлены по целесообразности применения различные критерии аппроксимации; эти вопросы изложены также в [3, с. 32-37] и [1, с. 33-37] ([2, с. 17-19]). Понятия обобщенного ряда Фурье и обобщенного спектра сигнала введены в [9, с. 119-121; 3, с. 37-38 и 1, с. 34]. Краткое изложение вопроса приведено в [4, с. 29-34].

  **3.1.1.** В п. 1.1.2 отмечалось, что наибольшее распространение среди функций ортогональных базисов получили в теории сигналов функции вида $\exp(j \cdot n \cdot \Omega \cdot t)$, $\cos(n \cdot \Omega \cdot t)$, $\sin(n \cdot \Omega \cdot t)$. Функции $\exp(j \cdot n \cdot \Omega \cdot t)$ удобны тем, что при их интегрировании и дифференцировании они сохраняют свою функциональную форму, что дает возможность переводить связанные с этими функциями дифференциальные уравнения в алгебраические; функции $\cos(n \cdot \Omega \cdot t)$ и $\sin(n \cdot \Omega \cdot t)$ удобны помимо сказанного еще тем, что их технически несложно генерировать.

Вместе с тем в последнее время получили распространение ортогональные функции прямоугольного вида, например, функции Уолша, Хаара, Радемахера и другие. Сигналы, описы-

ваемые этими функциями, имеют несомненное преимущество в возможности их обработки с помощью цифровых ЭВМ.

Далее, теория распространения электромагнитных волн показывает, что для распространения сигналов вовсе не требуется, чтобы они были синусоидальными. Анализ волнового уравнения Даламбера, а также решение телеграфных уравнений, определяющих процессы в длинных линиях, показывают, что в качестве их решений могут выступать не только гармонические, но и многие другие функции. Иначе говоря, в принципе в эфир могут излучаться и передаваться на расстояние без искажений колебания и других, негармонических, форм. Существует, таким образом, много причин, обуславливающих предпочтительность разложения сигналов сложной формы в ряды по функциям негармонической формы.

3.1.2. Представить рядом из ортогональных функций можно лишь такие сигналы, которые исходно заданы на конечном интервале времени (при безразличном их значении в остальные моменты) или же на бесконечном, но являющиеся периодически. Также надо иметь в виду, что результат разложения заданного сигнала в ряд по ортогональным функциям представляет собой всего лишь приближенную копию этого сигнала. Об этом достаточно подробно уже говорилось в пунктах 1.1.2 и 1.1.3.

?  18-22 [3, с. 40]; 12, 13 [4, с. 35]; 3 [4, с. 134].

..   2.1 [7]; 2.2* [7].

3.2. Условия возможности представления сигнала обобщенным рядом Фурье. Требования к функциям ортогонального базиса. Примеры ортогональных базисов

 Требования, которым должна отвечать описывающая сигнал функция, чтобы его можно было пред-

ставить обобщенным рядом Фурье, изложены в [9, с. 121-123 и 159]; требования, которым должны отвечать функции самого ортогонального базиса, перечислены в [9, с. 54-56]. Используемые в радиотехнике для описания сигналов ортогональные базисы (включая базисы для описания непериодических сигналов) достаточно подробно и полно описаны в [1, с. 600-630] ([2, с. 423-444]), более сжато они представлены в [3, с. 74-83] и [9, с. 66-78]. Примеры отдельных базисов приведены в [9, с. 63-66; 11, с. 45-54; 4, с. 30-31, 116].

 **3.2.1.** При изучении требований, накладываемых на описывающие сигнал функции, обратите внимание на следующее. Если сигнал задан в конечном интервале времени, то для возможности представления его рядом Фурье, достаточно (применительно к критерию среднеквадратической ошибки), чтобы его энергия или же средняя мощность, определяемые соответственно формулами (2.1) и (2.2) [1], были конечны. Менее очевидно это условие, если интервал определения сигнала бесконечен: так условие сходимости копии сигнала к оригиналу по энергии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty$$

является более жестким, чем условие сходимости по мощности

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt < \infty.$$

Это означает, что два аппроксимирующих выражения, определяемые разными ортогональными функциями, могут оказаться одинаковыми в смысле приближения к заданному сигналу по мощности, но будут отличаться как между собой, так и от сигнала, по энергии.

При изучении требований, накладываемых на функции ортогонального базиса, следует обратить внимание, прежде все-

го, на условие их линейной независимости и упорядоченности, а также полноты базиса.

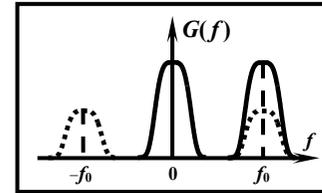
3.2.2. Среди большого числа ортогональных базисов, используемых в радиотехнике для описания сигналов, второе место (после комплексного экспоненциального и гармонического базисов) занимает в настоящее время базис Котельникова. Надо, однако, иметь в виду, что, во-первых, базис Котельникова в силу ограниченности спектра его функций [1, с. 88] является неполным и, следовательно, рядом Котельникова можно представить сигналы только с ограниченным спектром. Во-вторых, функции, составляющие этот базис, являются ортогональными только при условии $T = 1/(2 \cdot F_M)$, где T – сдвиг во времени между соседними базисными функциями, F_M – высшая частота спектра каждой из базисных функций. В-третьих, норма функций, согласно формуле (2.69) [3, с. 67], конечна, а значит, рядом Котельникова можно представить сигналы только с ограниченной энергией.

?  5, 6, 10 [3, с. 83]; 3 [4, с. 134].

...   1.65 [5]; 1.35, 1.36 [6].

..   1.63 [5]; пример 1.12 [4, с. 31].

•   1.64, 1.66, 1.69, 1.71 [5]; пример 5.2 [4, с. 118].



Раздел 4. КОМПЛЕКСНОЕ ОБОБЩЕНИЕ СИГНАЛОВ

4.1. Гильбертовское представление сигналов. Понятие комплексной огибающей гильбертовского сигнала. Связь спектров реального сигнала, гильбертовского сигнала и его комплексной огибающей. О целесообразности гильбертовского представления сигналов

 Этот вопрос относится к одному из наиболее трудных для понимания. Наиболее строго и последовательно он изложен в [1, с. 135-145] ([2, с. 93-101]) и [3, с. 106-110]; очень хорошо с акцентированием важных для понимания моментов он изложен также в [16, с. 41-44, 46-50], коротко, но строго, – в [11, с. 34-39].

  **4.1.1.** Гильбертовское представление сигнала является одним из возможных вариантов обобщения реального сигнала $a(t)$ до комплексного $\dot{a}(t)$. (Здесь и далее приняты обозначения, которые использованы в [1]). В чем привлекательность такого обобщения? Для ответа на этот вопрос образуем, что требуется рассчитать отклик некоторой сложной линейной цепи на воздействие гармонического колебания $a(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$. Попытка решить эту задачу путем составления дифференциального уравнения и подстановки в него непосредственно функции $a(t)$ приводит к безнадежно громоздким тригонометрическим выкладкам с функциями вида $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arcsin} y$, $\operatorname{arctg} y$... Поступим по-другому.

Поставим в соответствие заданному вещественному колебанию $a(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$ комплексное гармоническое колебание $\dot{a}(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0) + j \cdot A_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$. Такое обобщение

ние не может увести решение в сторону, ибо мнимая составляющая в конечном итоге не играет никакой роли, она отбрасывается при выполнении конечной операции $a(t) = \text{Re } \dot{a}(t)$. Более того, ее можно задавать в виде какой угодно функции, лишь бы это приводило к упрощению математических операций с комплексным сигналом $\dot{a}(t)$. Действительно, использование функции $\sin(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$ в качестве мнимой составляющей при условии, что в качестве действительной выступает функция $\cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$, приводит комплексное колебание к виду $\dot{a}(t) = \dot{A}_0 \cdot e^{j\omega_0 t}$, где $\dot{A}_0 = A_0 \cdot e^{j\psi_0}$ – привычное понятие комплексной амплитуды, т. е. приводит к возможности использования хорошо известного комплексного метода расчета отклика линейной цепи.

Усложним задачу. Пусть теперь форма колебания $a(t)$ – произвольная. Поставим вопрос: нельзя ли колебанию $a(t)$ поставить в соответствие такое комплексное колебание

$$\dot{a}(t) = a(t) + j \cdot \hat{a}(t), \quad (4.1)$$

которое тоже приводило бы к упрощению выкладок при решении соответствующей задачи? Оказывается можно. В самом деле, зададим сначала функцию $\hat{a}(t)$ совершенно произвольно и переведем алгебраическую форму записи комплексной функции $\dot{a}(t)$ в показательную:

$$\dot{a}(t) = A(t) \cdot e^{j\Psi(t)}, \quad (4.2)$$

$$\text{где } A(t) = \sqrt{a^2(t) + \hat{a}^2(t)}, \quad \Psi(t) = \text{arctg} \frac{\hat{a}(t)}{a(t)}. \quad (4.2')$$

Рассматривая функцию $\Psi(t)$ как полную фазу некоторого квазигармонического колебания, найдем формально его мгновенную частоту

$$\omega(t) = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{a(t) \cdot \hat{a}'(t) - \hat{a}(t) \cdot a'(t)}{a^2(t) + \hat{a}^2(t)}. \quad (4.3)$$

Выделив в найденной функции $\omega(t)$ постоянную частоту ω_0 произвольно или, например, с помощью формулы, предлагаемой в [16, с. 48 и 41]

$$\omega_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \omega(t) dt,$$

представим выражение для $\Psi(t)$ в виде $\omega_0 \cdot t + \psi(t)$. Это даст возможность представить колебание $\dot{a}(t)$ в форме

$$\dot{a}(t) = A(t) \cdot e^{j\psi(t)} \cdot e^{j\omega_0 t} = \dot{A}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}, \quad (4.4)$$

т. е. выйти на понятие комплексной огибающей $\dot{A}(t)$, представляющей собой обобщение понятия комплексной амплитуды \dot{A}_0 , а исходный вещественный сигнал $a(t)$ представить в виде квазигармонического колебания

$$a(t) = \text{Re } \dot{a}(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi(t)) = A(t) \cdot \cos\Psi(t). \quad (4.5)$$

Произвольность задания мнимой составляющей $\hat{a}(t)$ комплексной функции $\dot{a}(t)$ эквивалентна неоднозначности в выборе функций $A(t)$ и $\Psi(t)$. То, что для каждого сигнала $a(t)$ можно предложить много пар функций $A(t)$ и $\Psi(t)$, хорошо показано на примерах в [1, с. 135] ([2, с. 94]) и [3, с. 106-107]; об этом же говорится в [16, с. 39-44]. Как же можно устранить неоднозначность в выборе этих функций? Математические исследования показали, что для однозначного представления сигнала в виде совокупности модуля и аргумента следует применять преобразование Гильберта, определяемое формулами (3.62), (3.63) [1]; (3.69), (3.70) [3]; (5.45), (5.46) [4]. При этом мнимая составляющая комплексного сигнала $\hat{a}(t)$ должна вычисляться по формуле

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x)}{t-x} dx. \quad (4.6)$$

Комплексный сигнал $z_a(t) = a(t) + j \cdot \hat{a}(t)$, мнимая $\hat{a}(t)$ и действительная $a(t)$ части которого связаны преобразованием Гильберта, называют **г и л ь б е р т о в с к и м**.

В чем достоинство преобразования Гильберта?

Во-первых, его применение позволяет существенно упростить процедуру нахождения самого сигнала $a(t)$ по его спектру $\dot{G}_a(\omega)$, особенно радиосигнала близкого к узкополосному. В [1, с. 138], [3, с. 110, 111] и [11, с. 36-37] показано, что спектральные плотности реального сигнала $a(t)$, гильбертовского $z_a(t)$ и комплексной огибающей $\dot{A}(t)$ связаны простыми соотношениями

$$\dot{G}_z(\omega) = \begin{cases} 2\dot{G}_a(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0; \end{cases} \quad \dot{G}_A(\omega) = \dot{G}_z(\omega + \omega_0). \quad (4.7)$$

Так как сами временные функции связаны также простыми формулами

$$a(t) = \operatorname{Re} z_a(t); \quad z_a(t) = \dot{A}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}, \quad (4.8)$$

то для того, чтобы найти сигнал $a(t)$ по его спектру, достаточно рассчитать огибающую $\dot{A}(t)$ по ее спектру и воспользоваться затем формулой (4.8). Но эта задача решается гораздо проще, поскольку спектр огибающей приходится, как правило, на начало оси частот.

Во-вторых, использование понятия комплексной огибающей позволяет многие задачи, например, задачи анализа воздействия **м г н о в е н н о г о** значения сигнала $a(t)$ на электрическую цепь подменить задачами анализа воздействия **к о м п л е к с н о й о г и б а ю щ е й** $\dot{A}(t)$ на **н и з к о ч а с т о т н ы й э к в и в а л е н т** этой цепи. Такая замена оказывается разумной, когда речь идет об узкополосном радиосигнале и узкополосной избирательной цепи. Плодотворность такой замены проявляется особенно в том случае, когда сигнал оказывается модулированным, ибо при этом полезная информация заключена именно в комплексной огибающей, а не в мгновенных

значениях сигнала. Задача же об анализе воздействия комплексной огибающей на электрическую цепь много проще, чем задача о воздействии мгновенного значения, потому что, как доказывается в математике, смещение спектра колебания к началу частотной оси эквивалентно снижению порядка дифференциального уравнения, описывающего процессы в цепи, по крайней мере на единицу.

Кстати, применение преобразования Гильберта к строго гармоническому, т.е. бесконечно узкополосному колебанию $a(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$ приводит, как следует из (5.54), (5.55) [4], а также (3.75), (3.76) [3], к результату $\hat{a}(t) = A_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$, так что предложенное в начале этого пункта комплексное гармоническое колебание $\dot{a}(t)$ является, по-существу, гильбертовским. Выходит, **к о м п л е к с н ы й м е т о д р а с ч е т а** – это, фактически, **п р о д у к т г и л ь б е р т о в с к о г о о б о б щ е н и я** гармонического колебания!

4.1.2. Рекомендация – брать в качестве опорной частоты ω_0 только среднее значение функции $\omega(t)$, **н е о б я з а т е л ь н а**: можно взять любое значение $\omega_0 > 0$, от этого полученный комплексный сигнал $z_a(t)$ **н е п е р е с т а н е т** быть гильбертовским. В самом деле, достаточным для того, чтобы сигнал $z_a(t)$ можно было считать гильбертовским, является выполнение **л ю б о г о** из условий: 1) мнимая составляющая комплексного сигнала рассчитана по действительной составляющей через преобразование Гильберта, т.е. с помощью приведенной выше формулы (4.6) или (3.62) [1, с. 136]; 2) спектр комплексного сигнала в области **о т р и ц а т е л ь н ы х** частот тождественно равен нулю, т.е. определяется формулой (4.7) или (3.87) [1, с. 143]. Но и определение (3.62), и доказательство формулы (3.87) никак **н е с в я з а н ы** с величиной ω_0 . Поэтому ее надо выбирать лишь из соображений простоты расчета или наглядности комплексной огибающей, ибо произвольность выбора частоты ω_0 влечет в свою очередь про-

извольность функции $\hat{A}(t)$. Тем не менее, конечный результат $a(t)$ в любом случае будет однозначным, потому что при любом значении $\omega > 0$ компенсирующая произвольность возникнет также и в операторе $\exp(j \cdot \omega_0 \cdot t)$.

4.1.3. Математические исследования показывают, что чем сигналы узкополоснее, тем нагляднее они могут быть представлены в гильбертовской форме. Однако это не означает, что представление (3.57) [1] несправедливо для широкополосных сигналов (на это, кстати, обращается внимание в [1, с. 139]), просто для таких сигналов понятие огибающей перестает быть наглядным [4, с. 131; 16, с. 48-49].

Вместе с тем само понятие огибающей сигнала, определяемое выше формулой (4.4), остается физически оправданным даже в тех случаях, когда действительная и мнимая части комплексного сигнала связаны иным, нежели преобразование Гильберта, преобразованием; об этом говорится в [16, с. 45-46].

4.1.4. Сигнал, определяемый формулами (3.89) и (3.90) [1, с. 144] ([2, с. 100]) или формулами (3.77)-(3.82) [3, с. 109], часто называют аналитическим. В [9, с. 295-298] показана некорректность использования возможности бесконечное число раз дифференцировать некоторую функцию, т. е. ее аналитичности, в качестве определения гильбертовского сигнала. В самом деле, как доказывается в математике, функция, определяемая формулой (3.88) [1, с. 143], действительно является аналитической, если только входящая в нее спектральная плотность $\hat{G}_z(\omega)$ получена по заданной функции $a(t)$ с помощью прямого интегрального преобразования Фурье (на это обстоятельство обращается внимание помимо [7] в сноске [1, с. 143]). Но из этого не следует, что не существует другого какого-либо (не гильбертовского) преобразования, которым бы можно было связать $\hat{a}(t)$ и $a(t)$ и при котором бы обратное преобразование Фурье от функции $\hat{G}_z(\omega)$, определяемое фор-

мулой (3.86), было также аналитическим. Иначе говоря, среднеквадратическая копия сигнала, выражаемая обратным преобразованием Фурье, вполне может быть функцией аналитической и при другой интегральной связи между $\hat{a}(t)$ и $a(t)$. Поэтому комплексный сигнал, определяемый формулами (3.85) и (3.62), (3.63) [1] логичнее называть гильбертовским (точнее, среднеквадратической копией гильбертовского сигнала), а не аналитическим. Подробнее это замечание обсуждается в [16, с. 49].

? **В.4.1.** Как следует рассчитывать гильбертовский сигнал по известной временной функции реального сигнала? Как можно его рассчитать по известной спектральной функции реального сигнала?

В.4.2. Является ли преобразование Гильберта взаимнооднозначным? Подтвердите свой ответ конкретным примером.

В.4.3. Можно ли утверждать, что огибающая гильбертовского сигнала также относится к классу гильбертовских сигналов? Обоснуйте ответ примером.

В.4.4. Применимо ли преобразование Гильберта к сигналам периодическим? квазипериодическим? Приведите пример.

В.4.5. Применимо ли преобразование Гильберта к сигналам, содержащим постоянную составляющую?

В.4.6. Из определения гильбертовского сигнала следует, что он не содержит спектральных составляющих в области отрицательных частот; гармонический спектр периодического сигнала также приходится только на область положительных частот. Можно ли из этого сделать вывод, что все периодические сигналы являются гильбертовскими?

Если с ответом возникли затруднения, постарайтесь сначала ответить на вопросы В.4.7 и В.4.8.

В.4.7. Как из комплексного спектра вещественного периодического сигнала $s_n(t)$ (не содержащего постоянной составляющей) можно получить выражение спектра соответствующего гильбертовского сигнала?

В.4.8. Напишите аналитическое выражение спектральных составляющих гармонического спектра периодического сигнала $s_n(t)$ (не содержащего постоянной составляющей) и спектра гильбертовского сигнала, соответствующего исходному $s_n(t)$. Чем должны отличаться эти выражения?

 **Р.4.1.** Дано колебание $s(t) = S_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$. Получите аналитические выражения гармонического и комплексного спектров колебания, а также их спектральных составляющих. Получите аналитическое выражение для гильбертовского представления колебания и его огибающей.

...   2.30, 2.34 [5]; 5.13, 5.27 [6]; 3.27* [7];
пример 5.6 [4, с. 127]; пример в [1, с. 139].

..   2.22, 2.23 [5]; 5.8 [6]; 3.25* [7].

•   2.35 [5]; 5.20, 5.23 [6]; 5.11*, 5.18* [6].

4.2. Комплексное (негильбертовское) представление квазигармонических сигналов. Особенность комплексного представления узкополосных радиосигналов

 Материал по этому вопросу содержится, вообще говоря, в [1, с. 135-138] ([2, с. 93-96]), [3, с. 106-108], [4, с. 121-125], однако, вряд ли можно утверждать, что суть вопроса там изложена достаточно ясно.

  **4.2.1.** При всей изящности и разумности использования в теории сигналов преобразования Гильберта применять его к конкретным задачам оказывается весьма не-

просто. Причина в том, что вычисление функции, сопряженной по Гильберту заданной, т. е. взятие интеграла (3.62) [1] для большинства реальных сигналов превращается в настоящую проблему. Попытки выйти на гильбертовский сигнал $z_a(t)$ через спектральную плотность $\dot{G}_a(\omega)$ исходного вещественного сигнала $a(t)$ с помощью формулы (3.88) [1] или формулы (3.87) [3] из-за трудности взятия интеграла, как правило, также не приводят к успеху. Более того, для многих функций $a(t)$ функций, им сопряженных, просто не существует! Например, как это ни парадоксально, не существует сопряженной функции для постоянной составляющей $a(t) = a_0$.

Обратим внимание на то, что мнимую составляющую комплексного сигнала $z_a(t)$, определяемого формулой (3.77) [3, с. 109], не обязательно определять преобразованием Гильберта. В частном случае, когда речь идет о квазигармонических сигналах вида $a(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$, разумно при переходе к комплексному сигналу $\hat{a}(t) = a(t) + j \cdot \hat{a}(t)$ брать в качестве мнимой составляющей колебание вида $\hat{a}(t) = A(t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$. Такое колебание не совпадает, вообще говоря, с результатом применения к заданному сигналу $a(t)$ преобразования Гильберта, и потому комплексный сигнал $\hat{a}(t)$ не является гильбертовским. Как следствие этого, не выполняется и условие (3.87) [1], т. е. спектр комплексного сигнала не равен нулю в области отрицательных частот. Это означает, что при таком способе образования комплексного сигнала рассчитывать его по формуле (3.88) не л ь з я : надо пользоваться общей формулой обратного преобразование Фурье

$$z_a(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_z(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется частотно-модулированному колебанию $u(t) = U_0 \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + m \cdot \sin(\Omega \cdot t)]$ поставить в соответствие ком-

плексное ЧМ-колебание $\dot{u}(t) = u(t) + j \cdot \hat{u}(t)$. В соответствии с вы-
сказанной рекомендацией возьмем в качестве мнимой составля-
ющей функцию $\hat{u}(t) = U_0 \cdot \sin[\omega_0 \cdot t + m \cdot \sin(\Omega \cdot t)]$, тогда получим

$$\dot{u}(t) = U_0 \cdot e^{j \cdot m \cdot \sin \Omega t} \cdot e^{j \cdot \omega_0 t}.$$

Но согласно формуле (3.45) [3, с. 98] комплексный спектр та-
кого сигнала выражается формулой

$$\dot{U}_n(n\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_0 \cdot J_n(m) \cdot e^{j(\omega_0 + n\Omega)t},$$

т. е. простирается не только на область положительных, но и
отрицательных (при $n < -\omega_0/\Omega$) частот; это согласно (3.86) [3,
с. 110] означает, что сигнал $\dot{u}(t)$ не является гильбертовским.

4.2.2. Покажем, однако, что чем узкополоснее
сигнал $a(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$, тем ближе оказывается форми-
руемый рекомендуемым способом комплексный сигнал $\dot{a}(t)$ к
гильбертовскому. Итак, если $a(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$, то
 $\dot{a}(t) = A(t) \cdot \exp(j \cdot \omega_0 \cdot t)$, так что комплексная спектральная плот-
ность сигнала $a(t)$

$$\begin{aligned} \dot{G}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= 0.5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{a}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt + 0.5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{a}(t) \cdot e^{-j(\omega+2\omega_0)t} dt \end{aligned}$$

или, по-другому,

$$\dot{G}_a(\omega) = 0.5 \cdot \dot{G}_a(\omega) + 0.5 \cdot \dot{G}_a(\omega + 2 \cdot \omega_0).$$

Вместе с тем, согласно (3.14) [3, с. 90]

$$\dot{G}_a(\omega) = 0.5 \cdot \dot{G}_a(\omega - \omega_0) + 0.5 \cdot \dot{G}_a(\omega + \omega_0).$$

Сигнал считается узкополосным, если справедливо соотноше-
ние (3.17) [3, с. 92], т. е. выполняется условие $\dot{G}_A(\omega + \omega_0) \equiv 0$
при $\omega > 0$. Из того, что комплексный сигнал $\dot{a}(t)$ определяется
как $\dot{a}(t) = \dot{A}(t) \cdot \exp(j \cdot \omega_0 \cdot t)$, следует, что $\dot{G}_a(\omega) = \dot{G}_A(\omega - \omega_0)$ или
же $\dot{G}_a(\omega + 2\omega_0) = \dot{G}_A(\omega + \omega_0)$. Но так как для узкополосного
сигнала $a(t)$ $\dot{G}_A(\omega + \omega_0) \equiv 0$ при $\omega > 0$, т. е. $\dot{G}_a(\omega + 2\omega_0) \equiv 0$ при
 $\omega > 0$, то справедливо $\dot{G}_a(\omega) = 0.5 \cdot \dot{G}_a(\omega)$ при $\omega > 0$, а значит, вы-
полняется первая часть условия (3.86) [3, с. 110]. Далее, если на
положительных частотах справедливо $\dot{G}_a(\omega) = \dot{G}_A(\omega - \omega_0)$, то
на отрицательных – $\dot{G}_a(\omega) = \dot{G}_A(-|\omega| - \omega_0)$. Но комплексная
спектральная плотность действительной функции $A(t)$ отвечает
условию $\dot{G}_A(-|\omega| - \omega_0) = G_A^*(|\omega| + \omega_0)$, и поскольку модули всех
рассматриваемых функций совпадают, т. е.

$$|\dot{G}_A(-|\omega| - \omega_0)| = |G_A^*(|\omega| + \omega_0)| = |\dot{G}_A(|\omega| + \omega_0)|,$$

то из условия $\dot{G}_A(\omega + \omega_0) \equiv 0$ при $\omega > 0$ следует $\dot{G}_A(-|\omega| - \omega_0) \equiv 0$
при $\omega < 0$, т. е. $\dot{G}_a(\omega) \equiv 0$ при $\omega < 0$, и, следовательно, выполня-
ется вторая часть условия (3.86) [3, с. 110]. Формула же (3.86)
является согласно [3, с. 110] и [1, с. 143] условием принадлеж-
ности сигнала $\dot{a}(t)$ к гильбертовскому. Что и требовалось до-
казать. Таким образом, чем узкополоснее сигнал $a(t)$, тем бли-
же комплексный сигнал $\dot{a}(t)$, мнимая часть которого форми-
руется простой заменой функции "cos" на "sin" в выражении
 $a(t)$, к гильбертовскому.

Качественным подтверждением всего сказанного служит
тот факт, что при $A(t) = A_0$ (сигнал $a(t)$ – предельно узкополос-
ный) функция $\hat{a}(t) = A_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ является для $a(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$
сопряженной непосредственно по Гильберту.

4.2.3. Основным достоинством рассмотренного способа
образования комплексного сигнала $\dot{a}(t)$ по заданному реаль-

ному узкополосному сигналу $a(t)$ является простота получения его комплексной огибающей $\dot{A}(t)$. Именно, если $a(t) = A(t) \times \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$, то $\dot{A}(t) = A(t) \cdot e^{j\psi(t)}$. Разумеется, это верно лишь если в качестве частоты оператора вращения $e^{j\omega t}$ берется значение $\omega = \omega_0$. Впрочем, если берется иное значение частоты в операторе вращения, например, $\omega_1 \neq \omega_0$, то усложнение не слишком велико: $\dot{A}(t) = A(t) \cdot e^{j[\Delta\omega_0 t + \psi(t)]}$, где $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_1$ (предполагается, что $|\Delta\omega_0| \ll \omega_0 \approx \omega_1$).

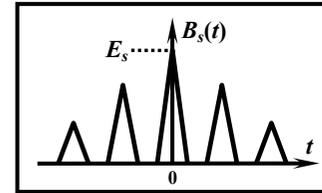
?  20-24 [3, с. 119].

..  **Р.4.2.** ЧМ-колебание с линейно нарастающим законом мгновенной частоты имеет амплитуду 10 В, несущую частоту 10 ГГц, длительность 2 мкс, девиацию частоты 0.1 ГГц. Найдите комплексную огибающую такого колебания.

...   2.27, 2.29 [5]; 3.22* [7].

..   2.21, 2.24, 2.28 [5]; 5.7, 5.12 [6]; 3.24* [7].

•   2.20 [5]; 7, 8, 9 [4, с.134]; 3.26* [7].



Раздел 5. ОПИСАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛОВ

5.1. Энергетические характеристики сигналов. Собственная и взаимная энергии непериодических сигналов; собственная и взаимная мощности периодических сигналов. Сигналы когерентные и ортогональные

 Материал по этому вопросу содержится в [3, с. 19-21; 4, с. 25-26 и 9, с. 14-17].

  **5.1.1.** Относительную трудность в восприятии этого материала вызывают понятия взаимной энергии (взаимной мощности) сигналов. Поясним суть этих понятий таким примером. Представим, что два соединенных последовательно источника напряжения, генерирующие соответственно сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$, подключены к активной нагрузке с сопротивлением R . Какую энергию они выделяют совместно в нагрузку за время T ? Ответ

$$E_3 = E_1 + E_2, \text{ где } E_1 = \frac{1}{R} \cdot \int_0^T u_1^2(t) dt \text{ и } E_2 = \frac{1}{R} \cdot \int_0^T u_2^2(t) dt,$$

будет слишком поспешен. В этом легко убедиться, рассмотрев, например, случай, когда оба напряжения, имея одинаковую форму, равные амплитуды, противоположны по знаку. Поэтому решим задачу строго. Так как напряжение на нагрузке $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, то

$$E = \frac{1}{R} \cdot \int_0^T u^2(t) dt = E_1 + 2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \int_0^T u_1(t) \cdot u_2(t) dt + E_2.$$

Среднее слагаемое $\frac{1}{R} \cdot \int_0^T u_1(t) \cdot u_2(t) dt = E_{12}$ и есть взаимная энергия двух сигналов, она учитывает взаимное влияние источни-

ков друг на друга. Заметим, что взаимная энергия (взаимная мощность) сигналов может быть как положительной, так и отрицательной, численное же значение зависит от интервала перекрытия этих сигналов.

?  1-4 [4, с. 39].

..   6, 7 [4, с. 36]; примеры 1.8 и 1.9 [4, с. 26].

5.2. Корреляционный анализ сигналов. Автокорреляционная функция периодических и непериодических сигналов. Основные свойства автокорреляционной функции и ее практическое значение

 Практическая ценность понятия автокорреляционной функции обоснована в [4, с. 73-74]; определение понятия приведено в [4, с. 74-77; 3, с. 22-24]; обобщение понятия – в [11, с. 75-76]; сухо и сжато вопрос изложен в [1, с. 97-102] ([2, с. 67-71]).

  **5.2.1.** При изучении этого вопроса следует обратить внимание на то, что максимальное значение автокорреляционной функции как периодического, так и непериодического сигналов, определяется лишь его мощностью (энергией), но не зависит от формы сигнала.

?  14, 15 [3, с. 40] и 6, 8 [4, с. 87].

...   1.55 [5]; 2.43, 2.45, 2.51 [7]; 3.16* [6].

..   3.15 [6]; примеры 3.4 и 3.5 [4, с. 76].

•   3.14 [6]; 2.46, 2.50 [7]; пример 3.3 [4, с. 75].

5.3. Спектральная и корреляционная характеристики сигналов; связь между ними. Энергетический спектр сигналов

 Содержание этого вопроса подробно изложено в [4, с. 77-79; 3, с. 54-55], сжато – в [1, с. 102-103] или [2, с. 71-72]).

  **5.3.1.** При изучении материала обратите внимание на то, что автокорреляционная функция сигнала содержит о нем меньшее количество информации, чем спектральная: в ней нет информации о спектре фаз.

?  20, 24-26 [3, с. 84]; 4-7 [4, с. 87].

...   1.57, 1.58 [5]; 2.48* [7].

..   1.53 [5]; 3.10 [6]; 2.47 [7]; 3.8* [6]; примеры 3.2 и 3.3 [4, с. 71].

•   1.56 [5]; 3.7 [6]; 2.49 [7]; 3.9* [6]; пример 3.6 [4, с. 78].

5.4. Взаимкорреляционная функция сигналов и ее практическое значение; взаимный спектр сигналов

 Материал по этому вопросу имеется в [4, с. 83-85; 3, с. 24-26, 55-56].

  **5.4.1.** Для того чтобы оценить практическую значимость понятия взаимкорреляционной функции, рассмотрим следующую ситуацию. На приемную сторону линии связи должен в некотором интервале времени поступить один из нескольких сигналов заведомо и з в е с т н о й формы; требуется с помощью набора специальных фильтров ре-

шить, какой же конкретно сигнал поступил. Критерием принятия решения может послужить реакция подобранного под соответствующий сигнал фильтра – резко выраженная на "свой" сигнал и малозаметная на "чужой". Этого можно добиться, если сделать реакцию фильтра пропорциональной взаимнокорреляционной функции воздействующего сигнала и сигнала, с которым этот фильтр согласован.

?  16, 17 [3, с. 40]; 1-3 [4, с. 86].

...   1.18 [5]; 3.21 [6].

..   1.60 [5]; 3.19, 3.20 [6]; 2.44* [7];
пример 3.7 [4, с. 83].

.   1.62 [5]; 2.52* [7].

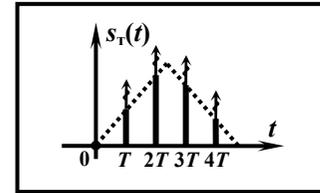
5.5. Автокорреляционная функция узкополосного радиосигнала. Методика расчета функции

 Лучше всего этот вопрос изложен в [1, с. 149-151] ([2, с. 103-106]) и [3, с. 113-116]; кратко ознакомиться с ним можно в [4, с. 76 и 109].

  **5.5.1.** При ознакомлении с методикой расчета автокорреляционной функции узкополосного радиосигнала обратите внимание на то, сколь удобным (с позиции быстроты достижения результата) оказывается применение комплексного обобщения реального сигнала.

?  25, 26 [3, с. 120].

.   пример 3.4 [4, с. 76].



Раздел 6. ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

6.1. Гармонический анализ непериодических дискретизированных сигналов. Особенности спектра дискретизированного сигнала по сравнению со спектром исходного непрерывного сигнала

 Изложение этого вопроса основано на распространении понятия спектральной плотности амплитуд непериодического сигнала на сигнал периодический. Результат этого распространения изложен в [11, с. 32-34] и [4, с. 58]; выражения, определяющие спектральную плотность дискретизированного непериодического сигнала получены в [1, с. 93-97] ([2, с. 64-67]), [4, с. 375-379], [3, с. 70-73] и [17, с. 16-17].

  **6.1.1.** Неожиданным в этом вопросе является возможность описания периодического сигнала спектральной плотностью. В самом деле, в п. 1.1.5 утверждалось, что периодический сигнал следует представлять гармоническим или комплексным спектром с а м и х амплитуд, а не их плотностью. Тем не менее, формула (15.8) [4] подтверждает, что представление периодического сигнала спектральной плотностью возможно. Особенностью такого представления является лишь то, что спектральная плотность амплитуд на частотах спектральных составляющих б е с к о н е ч н о велика: это неудивительно, ведь спектральная плотность в данном случае оказывается равной отношению конечной по величине амплитуды $\dot{C}_n(2\pi \cdot n/T_n)$ к бесконечно малому приращению частоты df .

6.1.2. Основное содержание вопроса заключается в доказательстве следующего положения. Пусть произвольный сигнал $s(t)$ (к которому не предъявляется никаких ограничений физического характера) заменяется дискретизированным

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot T \cdot \delta(t - k \cdot T) \quad (6.1)$$

с произвольным интервалом дискретизации T . Тогда спектральная плотность такого сигнала $\dot{G}_T(f)$ оказывается связанной со спектральной плотностью исходного сигнала $\dot{G}_S(f)$ формулой

$$\dot{G}_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{G}_S(f - n \cdot F), \quad (6.2)$$

где $F = 1/T$ – частота дискретизации сигнала $s(t)$. Эти выражения отличаются от аналогичных – (2.122) и (2.123), приведенных в [1, с. 96], наличием множителя T в первом из них и отсутствием множителя $1/T$ во втором. Объясняется это принятым в п. 1.2.5 условием, что функция $\delta(t)$ – есть функция размерная: ее размерность – $1/c$; множитель T введен в выражение $s_T(t)$ для того, чтобы сделать безразмерным произведение $T \cdot \delta(t - k \cdot T)$ и, тем самым, выровнять размерности левой и правой частей равенств (6.1) и (6.2). В этом смысле формула (2.123) в [1, с. 96] кажется, на первый взгляд, неверной: размерности левой и правой части, вроде бы, неодинаковы; на самом же деле принятое в [1] условие, что функция $\delta(t)$ – безразмерная, вынуждает воспринимать "единицу" в множителе $1/T$ формулы (2.123) как размерную, имеющую размерность – секунда.

6.1.3. Зададимся вопросом: для чего в математическом определении дискретизированного сигнала отсчеты исходного сигнала $s(k \cdot T)$ умножаются на δ -функцию, т. е. искусственно увеличиваются до бесконечной величины? Почему бы функ-

цию $s_T(t)$ не формировать из последовательности собственно отсчетов $s(k \cdot T)$? Чтобы уяснить это, вообразим, что энергия исходного сигнала $s(t)$ ограничена. Тогда энергия дискретизированного сигнала окажется нулевой, поскольку равна нулю энергия каждого отсчета, характеризуемого конечной амплитудой и нулевой продолжительностью во времени. Спектральная плотность сигнала с нулевой энергией равна нулю, так что построить ее график невозможно! Чтобы обойти это затруднение, и вводят удобный с позиции математики множитель $\delta(t - k \cdot T)$. При этом, к сожалению, возникает другая крайность: энергия каждого слагаемого $s(k \cdot T) \cdot T \cdot \delta(t - k \cdot T)$ ряда $s_T(t)$ оказывается бесконечной (ибо $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(t) dt = \infty$)! И тем более бесконечной оказывается энергия дискретизированного сигнала $s_T(t)$ в целом. Это значит, что сравнивать по энергии исходный сигнал $s(t)$ и дискретизированный $s_T(t)$ нельзя. (Впрочем, содержание рассматриваемого вопроса такую цель и не преследует).

6.1.4. Обратим внимание на то, что по принятой в теории сигналов классификации дискретизированный сигнал $s_T(t)$ является сигналом непрерывным. Он непрерывен в том смысле, что значения сигнала $s_T(t)$ однозначно определены во все моменты времени (либо равны нулю, либо $s(k \cdot T) \cdot T \cdot \delta(0)$ при $t = k \cdot T$). Ясно, что такое понятие непрерывности не совпадает с аналогичным понятием в математике.

6.1.5. Отметим, что с позиций математики, дискретизация – есть операция линейная параметрическая. В самом деле, дискретизатор можно рассматривать как устройство (ключ), коэффициент передачи которого изменяется во времени (равен нулю или единице). Непостоянство же во времени коэффициентов дифференциального уравнения, описывающего процессы в линейной цепи, является признаком параметричности выполняемой операции.

? **В.6.1.** Как связан спектр дискретизированного сигнала со спектром исходного непрерывного сигнала? Как зависит этот спектр от частоты отсчетов?

В.6.2. Чем со спектральной точки зрения можно подтвердить тот факт, что энергия дискретизированного сигнала $s_T(t)$ бесконечно велика?

В.6.3. Как можно экспериментально убедиться в том, что спектр дискретизированного сигнала периодический? Какой для этого сигнал достаточно продискретизировать? С помощью какого устройства выделить спектральные составляющие отдельных периодов? Чем эти составляющие измерить?

...   15.2* [6]; 2.38* [7]; 12.5* [7].

..   15.4, 15.5, 15.6* [6]; 12.6* [7].

.   11.6 [5]; 2.39, 2.40*, 2.41 [7].

6.2. Гармонический анализ периодических дискретизированных сигналов

 В явной форме этот вопрос ни в одном из источников, которые указаны в пособии, не изложен. Материал к нему можно получить как частный случай, если воспользоваться результатами, полученными при рассмотрении предыдущего вопроса.

  **6.2.1.** Получим формулы, определяющие комплексный спектр дискретизированного периодического сигнала. Пусть этот сигнал описывается в пределах одного периода T_n формулой

$$s_{пт}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_n(k \cdot T) \cdot T \cdot \delta(t - k \cdot T), \quad 0 \leq t < T_n,$$

где $N = T_n/T$ – число отсчетов на периоде, T – интервал между отсчетами. Заметим, что в силу дискретизованности и периодичности сигнала его спектр должен быть периодическим по частоте и дискретным, причем число спектральных составляющих на частотном периоде $F_n = 1/T_n$ равно также N , ибо $F/F_n = T_n/T$. Для расчета амплитуд спектральных составляющих \dot{C}_n комплексного спектра необходимо воспользоваться стандартной формулой (2.11) [3, с. 44]. Если после подстановки в указанную формулу выражения $s_{пт}(t)$ учесть фильтрующее свойство δ -функции [3, с. 27, табл. 1.2], а также то, что из неравенства $0 \leq t < T_n$ следует $0 \leq k \cdot T < N \cdot T$, т. е. $0 \leq k < N$, то нетрудно получить выражение

$$\dot{C}_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} s_n(k \cdot T) \cdot e^{-j \cdot 2\pi k \frac{n}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Запишем теперь формулу, определяющую в пределах периода T_n (с точностью до среднеквадратической ошибки) сам сигнал $s_{пт}(t)$ по его комплексному спектру \dot{C}_n . На основании (2.10) [3, с. 41] и того факта, что $\delta(t - k \cdot T) = 0$ при $t \neq k \cdot T$, можно утверждать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_n \cdot e^{j \frac{2\pi}{T_n} n t} = \begin{cases} s_n(k \cdot T) \cdot T \cdot \delta(t - k \cdot T) & \text{при } t = k \cdot T, \quad T = T_n / N, \\ 0 & \text{при } t \neq k \cdot T. \end{cases}$$

Полученные формулы представляют собой разложение дискретизированного периодического сигнала в ряд Фурье в комплексном экспоненциальном базисе.

6.2.2. Заметим, что для определения значения сигнала в момент времени $t = k \cdot T$ по заданному комплексному спектру, т. е. для вычисления отсчета $s_n(k \cdot T)$ (без учета ненужного коэффициента $T \cdot \delta(0)$) совсем не обязательно учитывать бесконечное число слагаемых в написанном выше ряде,

достаточно учесть лишь N произвольных, расположенных подряд коэффициентов \dot{C}_n . В самом деле, при $t = k \cdot T = k \cdot T_n / N$

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} \dot{C}_n \cdot e^{j \frac{2\pi}{T_n} n t} &= \sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} s_{\Pi}(m \cdot T) \cdot e^{-j 2\pi m \frac{n}{N}} \right) \cdot e^{j 2\pi k \frac{n}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} s_{\Pi}(m \cdot T) \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} \left(e^{j 2\pi (k-m) \frac{1}{N}} \right)^n = \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} s_{\Pi}(m \cdot T) \cdot \left(e^{j 2\pi (k-m) \frac{1}{N}} \right)^{n_1} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} \left(e^{j 2\pi (k-m) \frac{1}{N}} \right)^r. \end{aligned}$$

Но, в соответствии с суммой геометрической прогрессии

$$\sum_{r=0}^{N-1} \left(e^{j 2\pi (k-m) \frac{1}{N}} \right)^r = \frac{1 - (e^{j 2\pi (k-m) / N})^N}{1 - e^{j 2\pi (k-m) / N}} = \begin{cases} N & \text{при } m=k, \\ 0 & \text{при } m \neq k. \end{cases}$$

Следовательно, из всех слагаемых внешнего ряда, т. е. суммы по индексу "m", надо удерживать лишь одно: с $m = k$; тогда получим

$$\sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} \dot{C}_n \cdot e^{j \frac{2\pi}{T_n} n t} \Big|_{t=k \cdot T} = s_{\Pi}(k \cdot T).$$

Особенность, отличающая полученное выражение от исходной формулы (с бесконечным числом слагаемых), состоит в том, что при $t = k \cdot T$ все следующие друг за другом блоки из N слагаемых имеют одинаковый результат – $s_{\Pi}(k \cdot T)$; именно по этой причине сложение бесконечного числа блоков приводит к появлению коэффициента бесконечной величины $T \cdot \delta(0)$.

6.2.3. Для расчета значения сигнала в моменты $t \neq k \cdot T$, т. е. подтверждения того факта, что при $t \neq k \cdot T$ мгновенные значения периодического дискретизированного сигнала $s_{\Pi}(t)$ тождественно равны нулю, надо суммировать обязательно бес-

конечное число слагаемых. Такой расчет следует проводить, разумеется, лишь в ситуации, когда заведомо не известно, что речь идет о сигнале дискретизированном. В противном случае было бы просто неразумно проделывать сложные выкладки лишь для того, чтобы убедиться, что при $t \neq k \cdot T$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_n \cdot \exp(j \cdot \frac{2\pi}{T_n} \cdot n \cdot t) = 0.$$

? **В.6.4.** Из чего следует, что спектр дискретизированного периодического сигнала должен быть периодическим дискретным?

В.6.5. Можно ли дискретизированный периодический сигнал характеризовать спектральной плотностью амплитуд? Если да, то чем она должна отличаться от комплексного спектра самих амплитуд?

В.6.6. Если при вычислении временной функции сигнала соответственно моментам $t \neq k \cdot T$ (по известным комплексным амплитудам \dot{C}_n) ограничиться числом слагаемых ряда, равным N , то какой получится результат?

6.3. Гармонический анализ периодических дискретных сигналов. Основные свойства спектра дискретного сигнала. Дискретное преобразование Фурье и его практическое значение



Материал по этому вопросу хорошо изложен в [1, с. 511-515; 2, с. 358-360; 4, с. 381-385], представлен он также и в [3, с. 262-267; 9, с. 206-210].



6.3.1. Дискретный сигнал по определению характерен тем, что его значения в моменты времени $t \neq k \cdot T$ предполагаются неопределенными (не име-

ю щ и м и значения) или заведомо и з в е с т н ы м и (например, как у дискретизированного сигнала, равными нулю), но в любом случае не подлежащими вычислению по известному комплексному спектру $\dot{C}_n(n \cdot \Omega_n)$. Именно это обуславливает возможность характеризовать дискретный сигнал дискретной последовательностью чисел $s(k)$ (решетчатой функцией по терминам [9, с. 210]), у которой k – номер отсчета, соответствующий моменту $t = k \cdot T$, а s – безразмерное значение этого отсчета.

6.3.2. Формулы, определяющие прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ), вытекают непосредственно из материала п. 6.2. Именно положив $n_1 = 0$, получим

$$\dot{C}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_{\Pi}(k) \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{N}},$$

$$s_{\Pi}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{C}(n) \cdot e^{j2\pi n \frac{k}{N}}.$$

Эти формулы ничем не отличаются от аналогичных – (15.17) и (15.19), приведенных в [4]. Следует, однако, подчеркнуть, что они справедливы применительно лишь к периодическому. Молчаливо предполагается, что это условие выполняется во всех задачах, относящихся к ДПФ, а задаваемые в формулировках задач значения $\dot{C}(n)$ или $s(k)$ относятся лишь к одному периоду.

6.3.3. В чем состоит практическая ценность дискретного преобразования Фурье? Обратим внимание на то, что в обеих формулах ДПФ переменные n и k являются целыми числами, т.е. представляют собой счетное множество, причем ограниченного объема; ограничено также количество слагаемых в суммах обоих рядов. Это дает возможность при-

менять для расчета как комплексного спектра по заданному сигналу, так и отсчетов дискретного сигнала по известному спектру, цифровые ЭВМ. В этом и состоит практическая ценность ДПФ.

Вариантом этого преобразования, направленным на ускорение расчетов, является, так называемое, быстрое преобразование Фурье (БПФ); суть его изложена в [1, с. 549-562; 2, с. 386-395; 3, с. 267-270; 4, с. 386-387].

6.3.4. Формулы (12.14) [1, с. 514] и (15.17) [4, с. 381] отличаются наличием множителя $1/N$. В этом нет принципиальной ошибки, ибо тем же множителем, но уже в другую сторону отличаются формулы (12.15) [1, с. 514] и (15.19) [3, с. 383]. Представляется все же, что формулы, приведенные в [4] и в п. 6.3.2 настоящего пособия – более логичные, ибо при переходе от общепринятых формул, определяющих амплитуду комплексного спектра сигнала, а именно (2.22) [1, с. 38], (2.11) [3, с. 44], к прямому ДПФ множитель $1/T_n$ переходит в множитель $1/N$. Впрочем, если в математическом определении дискретизированного сигнала, указанном в п. 6.2.1, в качестве множителя к функции $\delta(t - k \cdot T)$ взять не коэффициент T , а коэффициент $T_n = N \cdot T$, то нетрудно показать, что после проведения определяемых пунктом 6.2.1 выкладок получатся формулы (12.14) и (12.15) [1].

6.3.5. При сравнении количества действительных чисел, которыми должен однозначно определяться дискретный периодический сигнал с позиций переменной k и переменной n , возникает ощущение нелепости: с позиций переменной k сигнал полностью определяется N действительными числами, а со спектральных позиций – N комплексными числами, а значит, $2 \cdot N$ действительными числами. Противоречие это – кажущееся, ибо согласно одному из свойств ДПФ спектральные составляющие номеров n и $(N - n)$

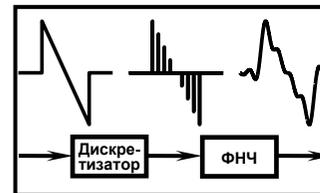
связаны формулой $\dot{C}(n) = \dot{C}^*(N-n)$, т. е. взаимно зависи м ы; так что число независимых действительных чисел, определяющих спектр дискретного сигнала в пределах периода, вдвое меньше и также равно N .

? **В.6.7.** Зависит ли результат прямого (обратного) дискретного преобразования Фурье от того, какой временной (частотный) отсчет берется за начало периода? Свой ответ подтвердите математическими выкладками.

...   11.13 [5]; пример 3 [4, с. 413]; 15.9* [6]; 12.7* [7].

..   11.12, 11.17 [5]; пример 4 [4, с. 413]; 15.8, 15.10* [6]; 12.8*, 12.12*, 12.13* [7].

•   11.10, 11.11, 11.16 [5]; 15.7, 15.12 [6]; пример 2 [4, с. 413]; пример 15.1 [4, с. 382]; 12.9* [7].



Раздел 7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ КОТЕЛЬНИКОВА

7.1. Представление видеосигналов с ограниченным гармоническим спектром в ортогональном базисе Котельникова. Теорема Котельникова и ее практическое значение

 Наиболее полно и строго этот вопрос изложен в [1, с. 87-91] ([2, с. 59-62]), с наличием некоторой некорректности он изложен также в [3, с. 66-68; 4, с. 116-118].

  **7.1.1.** Теорема Котельникова, несмотря на кажущуюся простоту ее формулировки, таит в себе немало неожиданностей. Невнимание к ним может привести при использовании ею к парадоксально неверным результатам. Первым примером в этом отношении может послужить попытка представить рядом Котельникова гармоническое колебание $s(t) = S_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$. Если в соответствии с формулировкой теоремы, данной в [3, с. 67; 4, с. 117; 11, с. 41 и 17, с. 13] взять в качестве интервала дискретизации величину $T = \pi / \omega_0$, то придется констатировать: теорема Котельникова не позволяет однозначно восстановить дискретизированный гармонический сигнал, ибо нетрудно убедиться в том, что через равные по модулю и чередующиеся по знаку отсчеты, следующие с интервалом $T = \pi / \omega_0$, можно провести сколько угодно гармонических функций частоты ω_0 , отличающихся амплитудой и начальной фазой. Более того, поскольку теорема не оговаривает абсолютные значения моментов отсчетов, то можно, выходя, взять отсчеты в моменты, когда функция $\cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$ проходит через ноль (!), т. е. взять отсчеты, равные нулю! О ка-

ком же восстановлении функции можно говорить в этом случае? Причина возникшего парадокса состоит в том, что в формулировках теоремы Котельникова, приведенных в [3, 4 и 11], не оговорено условие: функция, представляемая рядом Котельникова, должна быть интегрируема с квадратом, т. е. сигнал, описываемый этой функцией, должен обладать конечной энергией. Этому условию функция $s(t) = S_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$ не удовлетворяет! Важность этого обстоятельства подчеркивается в [14, с. 107-108 и 83]. В связи со сказанным те формулировки теоремы, которые приведены в [3, 4 и 11], нельзя признать корректными, как нельзя признать корректным и пример 1.14 в [11, с. 44]; пример же 5.1, приведенный в [4, с. 117], внутренне противоречив. Заметим, что в формулировке теоремы, приведенной в [1, с. 87], также отсутствует оговорка о необходимости интегрируемости функции с квадратом, однако в этой формулировке не допускается в качестве высшей частоты спектра частота, определяемая интервалом дискретизации $F_M = 1/(2 \cdot T)$, что, как можно показать, эквивалентно снятию требования интегрируемости функции с квадратом.

7.1.2. А можно ли все-таки функцию, неинтегрируемую с квадратом, например, сигнал, ограниченный не по энергии, а по средней мощности, представить рядом Котельникова? На этот вопрос положительный ответ дан в [14, с. 108]. В [14] показано, что интервал дискретизации в этом случае должен выбираться из соображения обеспечения жесткого неравенства $T < 1/(2 \cdot F_M)$, где F_M – максимальная частота спектра сигнала. Например, отсчеты гармонического колебания $s(t) = S_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$, следующие через интервал, меньший чем половина периода, оказываются, как нетрудно убедиться, несимметричными и через них можно провести только одну гармоническую функцию – с параметрами исходного колебания.

7.1.3. Л.М. Финк в своей книге [16, с. 64] указывает на еще одну распространенную ошибку в толковании теоремы Котельникова: "восстановить совершенно точно непрерывный сигнал по отдельным отсчетам оказывается возможным потому, что из-за ограниченности спектра линия, соединяющая вершины отсчетов, не может иметь резких перепадов...". Это умозаключение, как показано в [16, с. 66], неверно. Убедимся в этом. Пусть на некотором интервале времени намечено M произвольных (по интервалу между ними) точек t_1, t_2, \dots, t_M и в каждой точке указано произвольное (по величине и знаку) значение функции s_1, s_2, \dots, s_M . Покажем, что через эти точки можно провести кривую $s(t)$ такую, что она будет обладать сколь угодно узким спектром. Зададим искомую функцию выражением

$$s(t) = \sum_{i=1}^M x_i \cdot \frac{\sin(\omega_M \cdot t)}{\omega_M \cdot t},$$

где ω_M – произвольная, сколь угодно малая частота, x_i – неизвестные, подлежащие определению числа. Заметим, что согласно [1, с. 62-63] каждое слагаемое ряда характеризуется прямоугольной спектральной плотностью, не выходящей за пределы $[-\omega_M, +\omega_M]$, следовательно, функция $s(t)$ в целом ограничена по спектру частотой ω_M . Далее потребуем, чтобы для каждой намеченной точки t_k выполнялось условие $s_k = s(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, M$. Решение этой системы полностью определяет искомую функцию $s(t)$. Можно показать, что с расширением выделенного интервала и увеличением числа намеченных точек возможности в подборе разных функций (ограниченных по спектру) уменьшаются и в пределе (при бесконечном интервале и бесконечном количестве точек) все функции переходят в одну – определяемую теоремой Котельникова. Таким образом, представляемый в базисе Котельникова сигнал $s(t)$ определяется единственным образом не потому, что функция, ограниченная по спектру, не может на каком-то участке изменяться

сколь угодно быстро, а потому, что этот сигнал формируется бесконечным числом отсчетов, задаваемых в бесконечном интервале времени.

7.1.4. Частота среза интерполирующего (восстанавливающего) идеального фильтра F_C не обязательно должна совпадать с максимальной частотой спектра F_M : достаточно, чтобы удовлетворялось условие

$$F_M \leq F_C \leq F - F_M, \quad (7.1)$$

где $F = 1/T$ – частота дискретизации ограниченного по энергии сигнала. Из этого условия следует, что при $F_C > F_M$ интервал дискретизации должен выбираться из соотношения

$$T \leq 1/(F_C + F_M). \quad (7.2)$$

Покажем, что при этом ряд Котельникова определится формулой

$$s(t) = 2 \cdot F_C \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot \frac{\sin[\omega_C \cdot (t - k \cdot T)]}{\omega_C \cdot (t - k \cdot T)}. \quad (7.3)$$

В самом деле, пусть сигнал $s(t)$ заменен дискретизированным

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot T \cdot \delta(t - k \cdot T),$$

где $T \leq 1/(F_C + F_M)$. (О смысле множителя T перед δ -функцией говорилось в п. 6.1.2). Отклик линейной цепи на воздействие сигнала определяется согласно временному методу анализа интегральной сверткой

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_T(x) \cdot g(t-x) dx, \quad (7.4)$$

где $g(t)$ – импульсная характеристика цепи. В случае интерполирующего фильтра, комплексный коэффициент передачи которого выражается формулой

$$\dot{K}(\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } |\omega| \leq \omega_C, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_C, \end{cases} \quad (7.5)$$

импульсная характеристика согласно обратному преобразованию Фурье равна

$$g_{\text{иф}}(t) = \frac{K_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_C \cdot t)}{t}. \quad (7.6)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} s_{\text{иф}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot T \cdot \delta(x - k \cdot T) \cdot \frac{K_0}{\pi} \cdot \frac{\sin[\omega_C \cdot (t - x)]}{t - x} dx = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot T \cdot \frac{K_0}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[\omega_C \cdot (t - x)]}{t - x} \cdot \delta(x - k \cdot T) dx. \end{aligned}$$

Воспользовавшись фильтрующим свойством δ -функции, а именно, формулой (1.28) [3, с. 28], придем к выражению

$$s_{\text{иф}}(t) = K_0 \cdot 2F_C \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot \frac{\sin[\omega_C \cdot (t - k \cdot T)]}{\omega_C \cdot (t - k \cdot T)}. \quad (7.7)$$

Согласно частотному методу анализа спектральные плотности отклика линейной цепи $\dot{G}_{\text{иф}}(\omega)$ и воздействующего сигнала $\dot{G}_S(\omega)$ связаны соотношением

$$\dot{G}_{\text{иф}}(\omega) = \dot{K}(\omega) \cdot \dot{G}_S(\omega). \quad (7.8)$$

Из сопоставления (6.2), (7.5) и (7.8) следует, что при $K_0 = 1$ спектральные плотности $\dot{G}_{\text{иф}}(\omega)$ и $\dot{G}_S(\omega)$ не отличаются друг от друга, а значит, $s_{\text{иф}}(t) \equiv s(t)$. Но если тождественно равны левые части равенств (7.7) и (7.3), значит, совпадают и правые, что и требовалось доказать.

В частном случае при $F_C = F_M$ и $T = 1/(2 \cdot F_M)$ (7.3) переходит в широко распространенное выражение вида (2.114) [1] или (2.67) [3].

Заметим, что из наличия множителя T в (7.7) не следует, что с увеличением интервала дискретизации пропор-

ционально возрастают мгновенные значения отклика $s_{\text{иФ}}(t)$, ведь при этом уменьшается число энергетически значимых слагаемых ряда в любом конечном интервале времени.

7.1.5. Подчеркнем, что в случае неограниченности сигнала по энергии (но ограниченности по мощности) соответствие между параметрами F_C , F_M и F должно определяться только неравенством

$$F_M < F_C < F - F_M. \quad (7.9)$$

? **В.7.1.** В чем состоит сущность теоремы Котельникова? Для каких сигналов ее можно применять?

В.7.2. Как связан спектр дискретизированного сигнала со спектром исходного непрерывного сигнала? Как зависит этот спектр от частоты следования отсчетов?

В.7.3. Для чего при восстановлении непрерывного сигнала по дискретным отсчетам требуется фильтр? Из каких соображений следует выбирать его частоту среза? Почему, в случае когда частота среза интерполирующего фильтра превышает высшую частоту спектра дискретизируемого сигнала, интервал дискретизации нельзя выбирать из условия $T = 1/(2 \cdot F_M)$?

В.7.4. При любом ли соотношении между высшей частотой спектра и частотой дискретизации интерполирующий фильтр должен быть идеальным? В качестве примера рассмотрите случай, когда частотная характеристика фильтра имеет вид трапеции. Можно ли подобрать частоту дискретизации так, чтобы указанным фильтром можно было восстановить сигнал (с ограниченным спектром) без искажений?

?  30-32 [3, с. 84]; 1-4 [4, с. 134].

•  **Р.7.1.** Непрерывный импульсный сигнал $s(t)$, спектральная плотность амплитуд которого ограничена

частотой 8 кГц, подвергается дискретизации. Выберите минимально допустимое значение частоты дискретизации сигнала, а также частоту среза восстанавливающего идеального ФНЧ.

•  **Р.7.2.** Выяснить, можно ли периодический сигнал $s(t) = 4 \cdot \sin^2(2\pi \cdot 10^3 \cdot t) - 1$ В продискретизировать и затем восстановить без потери информации, используя в качестве восстанавливающего ИФНЧ с частотой среза 3 кГц?

•••   11.3, 11.4 [5]; 5 [4, с. 134]; 5.3* [6].

••   11.2 [5]; 4 [4, с. 134].

•   11.1 [5]; 5.2 [6]; 3 [4, с. 134].

7.2. Представление радиосигналов с ограниченным гармоническим спектром в базисе Котельникова. Теорема Котельникова применительно к дискретизации радиосигналов

 Материал по этому вопросу распределен в нескольких литературных источниках, а именно, в [1, с. 152-156; 2, с. 106-109; 3, с. 116-118]; имеется он и в [11, с. 41-42], однако при изложении допущены некоторые неточности.

•   **7.2.1.** В [1, с. 152-156; 2, с. 106-109 и 3, с. 116-118] показано, что если гармонический спектр радиосигнала сосредоточен в узкой полосе частот от ω_n до ω_v , т. е. **з а в е д о м о и з в е с т н о**, что в частотном интервале от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_n$ спектральных составляющих быть не может, то знание этого факта дает возможность подменить передачу **м г н о в е н н ы х** отсчетов радиосигнала передачей отсчетов его комплексной **о г и б а ю щ е й**, причем с частотой, определяемой всего лишь **ш и р и н о й** спектра сигнала, а не высшей частотой, как в случае отсчетов мгновен-

ных. При этом каждый комплексный отсчет должен содержать информацию о текущей амплитуде и текущей фазе радиосигнала. Полученный в [1 и 3] результат носит скорее теоретический характер, ибо практически неясно, как конкретно (с помощью каких импульсов) следует передавать информацию об отсчетах амплитуды и фазы сигнала и с помощью какого устройства (фильтра) непрерывный сигнал восстанавливать. Разумеется, существует способ, основанный на разложении функции $s(t)$, определяемой рядом (3.107) [3], на две так называемые квадратурные составляющие (путем представления вида $U_k \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_k) = u_{ck} \cdot \cos \omega_0 \cdot t - u_{sk} \cdot \sin \omega_0 \cdot t$, где $u_{ck} = U_k \cdot \cos \varphi_k$, $u_{sk} = U_k \cdot \sin \varphi_k$), однако техническая реализация этого способа достаточно сложна.

7.2.2. В [11, с. 41-42] доказано, что узкополосный радиосигнал можно восстановить, располагая отсчетами мгновенных значений, но только следовать эти отсчеты должны, по крайней мере, в два раза чаще, чем отсчеты комплексной огибающей.

Рассмотрим этот вариант подробнее. На рис. 7.1 качественно изображен вид спектральной плотности амплитуд $G_T(f)$ дискретизированного радиосигнала, определяемой рассмотренной ранее формулой (6.2) (см. также (15.9) [4]). Заштрихованные полосы – левая (она обозначена знаком "0л") и правая (обозначена знаком "0п") соответствуют фактически исходному (недискретизированному) радиосигналу с нижней и верхней частотами спектральных составляющих соответственно f_n и f_b и, следовательно, шириной спектра $\Delta f = f_b - f_n$; в (6.2) этим полосам соответствует индекс $n=0$. Значениям $n=+1, +2, \dots$ соответствуют копии полос исходного спектра, смещенные на частоту $+F, +2F, \dots$ (они обозначены знаками "+1л", "+2л"... и соответственно "+1п", "+2п"...); аналогичные по смыслу символы использованы для обозначения копий применительно к значениям $n=-1, -2, \dots$ и т. д.

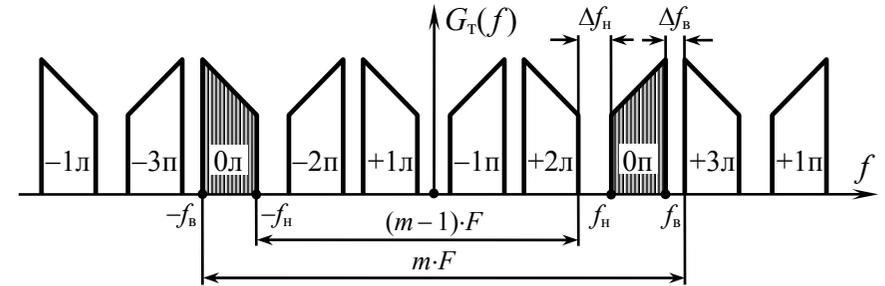


Рис. 7.1

Обозначим через m номер копии левой полосы, расположенной рядом с правой полосой спектра исходного сигнала выше ее по частоте (на рисунке – это копия, которая обозначена знаком "+3л", т. е. $m=3$). Тогда частотные зазоры между спектром исходного сигнала и его ближайшими копиями можно будет выразить формулами

$$\Delta f_b = m \cdot F - 2 \cdot f_b \quad \text{и} \quad \Delta f_n = 2 \cdot f_n - (m - 1) \cdot F.$$

При некоторых значениях частоты F зазоры либо Δf_n , либо Δf_b могут оказаться отрицательными, что будет соответствовать наложению полос спектра друг на друга, а значит, с позиции возможности восстановления сигнала неприемлемо. Спектр исходного непрерывного сигнала можно будет выделить из спектра дискретизированного сигнала, например, при помощи идеального полосового фильтра (с П-образной частотной характеристикой), только если будут выполняться условия $\Delta f_b \geq 0$ и $\Delta f_n \geq 0$. Тогда, развернув относительно F с учетом указанных условий написанное выше выражение, получим

$$\frac{2 \cdot f_b}{m} \leq F \leq \frac{2 \cdot f_n}{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \left[\frac{f_b}{\Delta f} \right], \quad f_b \geq 2 \cdot \Delta f. \quad (7.10)$$

Тот факт, что наибольшее значение m соответствует условию $m_{\max} = [f_b / \Delta f]$, вытекает из полученного неравенства: $2 \cdot f_b \cdot (m_{\max} - 1) \leq 2 \cdot f_n \cdot m_{\max}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно

сюда подставить $f_n = f_b - \Delta f$. Кстати, поскольку m не может принимать значение, меньшее единицы, то это значит, что дискретизировать колебание $s(t)$ как радиосигнал можно лишь при условии $f_b \geq 2 \cdot \Delta f$.

Обратим также внимание на то, что при $m = 1$ неравенство (7.10) переходит в то, которое определяет частоту дискретизации видеосигнала.

7.2.3. Убедимся теперь в том, что при частоте дискретизации радиосигнала, задаваемой из условия (7.10), ряд Котельникова приобретает вид

$$s(t) = 2 \cdot \Delta f \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot \text{sinc}[\pi \cdot \Delta f \cdot (t - k \cdot T)] \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t - k \cdot T)], \quad (7.11)$$

где $\omega_0 = 0.5 \cdot (\omega_b + \omega_n)$ – средняя частота спектра радиосигнала.

Пусть дискретизированный радиосигнал $s_T(t)$, определяемый по-прежнему общей формулой (6.1), подается на вход идеального полосового фильтра с коэффициентом передачи

$$K_{\text{инф}}(f) = \begin{cases} K_0 & \text{при } f_0 - 0.5 \cdot \Delta f \leq |f| \leq f_0 + 0.5 \cdot \Delta f, \\ 0 & \text{при } |f - f_0| > 0.5 \cdot \Delta f, \end{cases} \quad (7.12)$$

где Δf – полоса пропускания фильтра; f_0 – его средняя частота. Применяв обратное преобразование Фурье, можно показать, что импульсная характеристика такого фильтра выражается формулой

$$g_{\text{инф}}(t) = 2 \cdot K_0 \cdot \Delta f \cdot \text{sinc}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t). \quad (7.13)$$

Подставив (6.1) и (7.13) в (7.4), получим

$$s_{\text{инф}}(t) = 2 \cdot K_0 \cdot \Delta f \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot \text{sinc}[\pi \cdot \Delta f \cdot (t - k \cdot T)] \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t - k \cdot T)], \quad (7.14)$$

Если положить теперь $K_0 = 1$, а $\Delta f = \Delta f$, т. е. в соответствии с (7.8) уравнять спектральную плотность сигнала на выходе фильтра и спектральную плотность исходного непрерывного сигнала, то придем к (7.11).

7.2.4. Формула (7.10) в целом остается, очевидно, справедливой и для радиосигналов с безграничной энергией, но ограниченной мощностью, однако частоту дискретизации в этом случае надо выбирать исходя из строгого неравенства.

 28 [3, с. 120].

 **Р.7.3.** Требуется передать дискретно информацию о модулированном радиосигнале, спектр которого простирается до частоты 105 кГц. С какой частотой следует посылать отсчеты мгновенных значений сигнала?

 **Р.7.4.** Требуется передать дискретно информацию о колебании $u(t) = 4 \cdot [1 + 0.5 \cdot \cos(\pi \cdot 10^4 \cdot t)] \cdot \cos(2\pi \cdot 10^5 \cdot t)$ В. С какой частотой следует посылать отсчеты мгновенных значений?

Р.7.5. Укажите все допустимые значения частот среза АЧХ идеального полосового фильтра для восстановления непрерывного сигнала $s(t) = 8 \cdot \cos(6\pi \cdot 10^4 \cdot t) \cdot \cos(\pi \cdot 10^4 \cdot t)$ В по его дискретным отсчетам при частоте дискретизации 24 кГц.

7.3. Погрешности практического применения теоремы Котельникова

 Наиболее полно этот вопрос изложен в [17, с. 14-15, 19-22]; имеется материал по этому вопросу также в [3, с. 69-72 и 4, с. 378], однако в [3, с. 70-72] (как и в [1, с. 94-95]) в изложении допущены некорректности.

 **7.3.1.** Целесообразно выделить четыре причины невозможности точного восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчетам:

1. Безграничность ширины спектра реального, т. е. конечного по длительности, сигнала и, как следствие этого, пе-

рекрытие соседних частотных полос спектра дискретизированного сигнала. Суть и оценка возникающей при этом погрешности изложена в [4, с. 119].

2. Невозможность учета бесконечного количества отсчетов (реальная ограниченность числа слагаемых в ряде Котельникова). Об этом говорится в [3, с. 69-70].

3. Невозможность построения для восстановления сигналов идеального фильтра, т. е. фильтра с прямоугольной амплитудно-частотной и линейной фазочастотной характеристиками.

4. Невозможность практической реализации импульса (предназначенного для передачи информации о величине отсчета), совпадающего по форме с δ -функцией. Ненулевая в реальности длительность импульса служит причиной искажения формы спектра дискретизированного сигнала.

7.3.2. На последнем обстоятельстве остановимся подробнее, поскольку материал по этому поводу изложен в [1 и 3] некорректно. Пусть исходный сигнал описывается непрерывной функцией $s(t)$, такой, например, как показана на рис. 7.2.

Образуем из этого сигнала реальный дискретизированный сигнал $\tilde{s}_T(t)$ – последовательность прямоугольных импульсов длительности τ_n и амплитуды $s_k = s(k \cdot T)$. Воспользовавшись понятием прямоугольной функции

$$\text{rect } x = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq 0.5, \\ 0 & \text{при } |x| > 0.5 \end{cases}$$

можно дискретизированный сигнал $\tilde{s}_T(t)$ выразить следующим образом

$$\tilde{s}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot \text{rect} \left(\frac{t - k \cdot T}{\tau_n} \right). \quad (7.15)$$

Покажем вначале, что сигнал $\tilde{s}_T(t)$ можно представить как интегральную свертку идеального дискретизированного сигнала $s_T(t)$, определяемого формулой (6.1), и прямоугольного импульса $\text{rect}(t/\tau_n)$. В самом деле,

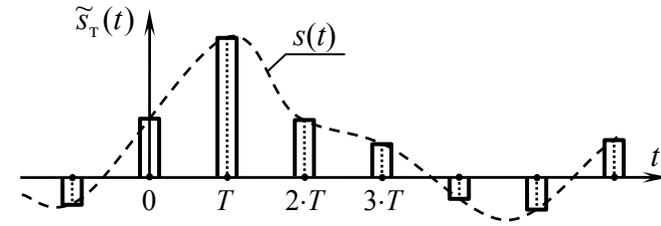


Рис. 7.2

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} s_T(x) \cdot \text{rect} \left(\frac{t-x}{\tau_n} \right) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t-x}{\tau_n} \right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot T \cdot \delta(x - k \cdot T) dx = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot T \cdot \text{rect} \left(\frac{t - k \cdot T}{\tau_n} \right) = T \cdot \tilde{s}_T(t). \end{aligned}$$

Но согласно (2.64) [1] интегральной свертке временных функций соответствует произведение их спектральных плотностей. Значит

$$\tilde{G}_T(f) = \frac{1}{T} \cdot \dot{G}_T(f) \cdot G_{\text{rect}}(f) = \frac{\tau_n}{T} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \tau_n) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{G}_S(f - n \cdot F). \quad (7.16)$$

Как видно, ненулевая продолжительность отсчетных импульсов приводит к появлению в спектре идеального дискретизированного сигнала поправочного частотного множителя $\text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \tau_n)$. Из рис. 7.3 видно, что появление этого множителя приводит к искажению восстанавливаемого по дискретным импульсам непрерывного сигнала, особенно, в области высоких частот.

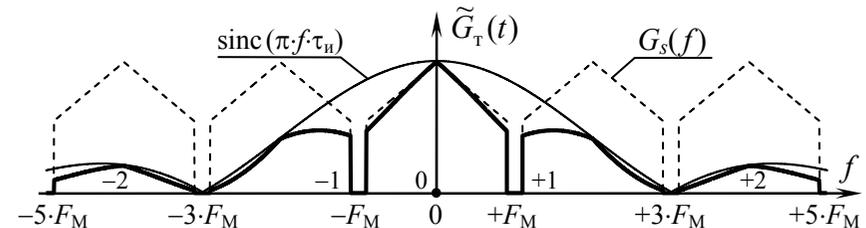


Рис. 7.3

? **В.7.5.** Изобразите спектры двух дискретизированных сигналов, характеризующихся одинаковой формой исходных непрерывных сигналов, равными интервалами между отсчетами, но существенно разной длительностью. Какой из дискретизированных сигналов будет восстановлен точнее, если эти сигналы подать на одинаковые по своим параметрам идеальные фильтры?

В.7.6. Изобразите спектры двух дискретизированных сигналов, характеризующихся одинаковой формой исходных непрерывных сигналов, равной длительностью, но существенно разными интервалами между отсчетами. Какой из дискретизированных сигналов будет восстанавливаться точнее, если эти сигналы подать на одинаковые идеальные фильтры?

В.7.7. При заданных параметрах интерполирующего фильтра требуется повысить точность восстановления сигнала. Что сделать лучше: уменьшить интервал между отсчетами, сохранив длительность сигнала, или увеличить длительность, сохранив частоту отсчетов?

В.7.8. Можно ли с помощью реального фильтра восстановить без какой-либо погрешности исходный сигнал, уменьшая сколь угодно интервал между отсчетами дискретизированного сигнала?

В.7.9. Можно ли с помощью реального фильтра восстановить без какой-либо погрешности исходный сигнал по его дискретным отсчетам, если предварительно пойти на сколь угодно большое увеличение его длительности?

В.7.10. Какой должна быть импульсная характеристика фильтра, чтобы форма восстанавливаемого сигнала (с ограниченным спектром) отличалась как можно меньше от исходной?

...  **Р.7.6.** В результате дискретизации треугольного колебания и последующего восстановления идеальным фильтром нижних частот был получен сигнал, показан-

ный на рис. 7.4. Определите использованную частоту дискретизации и параметры восстанавливающего фильтра. Можно ли улучшить форму восстанавливаемого сигнала? Если да, то как?

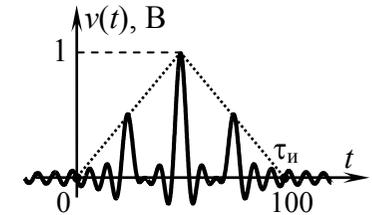


Рис. 7.4

...   11.9 [5]; 15.5 [6]; 15.6* [6]; 12.1* [7].

..   2.35 [7]; 15.4 [6]; 2.34* [7]; пример 5.3 [4, с. 119].

.   15.1 [6]; 11.8 [5].

7.4. Применение теоремы Котельникова для дискретизации спектральной плотности непериодического сигнала



Этот вопрос изложен в [3, с. 73-74] и [1, с. 91-93] ([2, с. 62-64]).



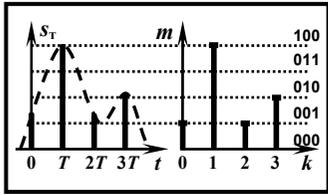
7.4.1. При изучении этого вопроса следует обратить внимание на неожиданный, поначалу, факт: дискретизация спектральной плотности непериодического сигнала эквивалентна переходу от спектральной функции к ряду Фурье! На временном языке это означает замену одиночного сигнала конечной длительности его периодическим повторением.

?  32 [3, с. 84].

...   1.4.6* [8].

..   2.37* [7].

.   2.36 [7].



Раздел 8. ЦИФРОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

8.1. Дискретизация и квантование непрерывных сигналов. Понятие цифрового сигнала



Сущность вопроса изложена кратко в [1, с. 24-25; 2, с. 10-11; 3, с. 252-253; 4, с. 14-16 и 392-394].



8.1.1. Термины "дискретизация" и "квантование" означают с позиций математики одно и то же: выделение определенных (дискретных) значений числовой оси и отбрасывание всех остальных. Первый термин принято относить ко времени (переменной t), а второй – к уровню сигнала (переменной s).

К в а н т о в а н и е (округление фактических значений сигнала до ближайших разрешенных) есть операция необратимая, поэтому погрешность, вносимая квантованием, аннулирована быть не может; однако величину погрешности можно задавать исходно, выбирая соответственно шаг квантования. Выгода от применения операции квантования состоит в том, что выдержать дискретные (разрешенные) значения сигнала при его хранении и передаче оказывается возможным с помощью дискретной техники гораздо точнее, нежели непрерывные (т. е. все) значения сигнала с использованием техники аналоговой. Поэтому в конечном итоге погрешность обработки непрерывного сигнала, подвергнутого квантованию, оказывается меньшей.

8.1.2. Из двух операций – дискретизации сигнала и его квантования – первой с теоретических позиций выполняется дискретизация, при этом шаг дискретизации T выбирается в

соответствии с теоремой Котельникова, исходя из заданной или принятой максимальной частоты спектра сигнала F_M (или ширины спектра радиосигнала $Ш_f$). Затем осуществляется квантование, при этом шаг квантования Δs выбирается исходя из заданной погрешности квантования. Погрешность квантования задается обычно как отношение шага квантования к перепаду наибольшего и наименьшего значений сигнала, т. е. погрешность квантования задается, по существу, числом разрешенных уровней M ; фактическое же квантованное значение сигнала отображается номером разрешенного уровня m ($0 \leq m \leq M-1$). Таким образом, непрерывный сигнал $s(t)$ превращается в дискретную функцию $m(k)$, в которой переменная k означает номер отсчета, а функция m – номер разрешенного уровня. Эту дискретную функцию и называют цифровым сигналом.

8.1.3. Конкретизируем, как от заданного непрерывного сигнала $S(t)$ следует переходить к цифровому сигналу $m(k)$.

Номер отсчета k должен определяться согласно теореме Котельникова моментом отсчета $t_k = k \cdot T \leq k / (2 \cdot F_M)$, где F_M – принятая высшая частота спектра сигнала (речь идет о видеосигнале). Приближенное (нецелое) значение разрешенного уровня μ_k следует, очевидно, рассчитывать по формуле

$$\mu_k = (M-1) \cdot \frac{s_k - s_{\min}}{s_{\max} - s_{\min}}, \quad (8.1)$$

где s_k – фактическое значение сигнала в k -й момент времени, s_{\max} и s_{\min} – наибольшее и наименьшее значение сигнала. Поскольку нецелое число μ_k надо округлять до ближайшего целого, то, выходит, значение текущего номера уровня m следует рассчитывать по формуле

$$m(k) = \begin{cases} [\mu_k] + 1 & \text{при } \mu_k - [\mu_k] \geq 0.5, \\ [\mu_k] & \text{при } \mu_k - [\mu_k] < 0.5, \end{cases} \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad (8.2)$$

где $[x]$ – целая часть числа x .

Нетрудно получить формулы и для обратной операции – перехода от цифрового сигнала $m(k)$ к непрерывному $\tilde{s}(t)$ (разумеется, отличающемуся от исходного $s(t)$). Для этого должны быть известны параметры цифро-аналогового преобразователя (ЦАП): шаг квантования Δs , число используемых уровней M (определяемое разрядностью ЦАП), частота работы тактового генератора $F = 1/T$, частота среза F_C восстанавливающего фильтра; должно быть также известно наименьшее значение восстанавливаемого сигнала s_{\min} (для восстановления постоянной составляющей). Тогда квантованное значение отсчета определится, очевидно, выражением

$$s_{\text{кв}}(k) = s_{\min} + \Delta s \cdot m(k), \quad (8.3)$$

а выражение $\tilde{s}(t)$ в целом – рядом Котельникова

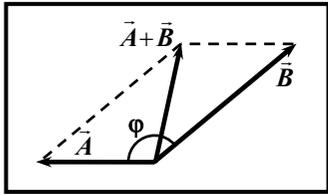
$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_{\text{кв}}(k) \cdot \text{sinc}[2\pi \cdot F_C \cdot (t - k \cdot T)]. \quad (8.4)$$

Мера отличия функции $\tilde{s}(t)$ от $s(t)$ будет определяться погрешностями, описанными в п. 7.3.1, и числом уровней квантования M .

? **В.8.1.** В чём с технических позиций состоит выгода представления цифрового сигнала в виде последовательности пар целых чисел m и k ?

•• **Р.8.1.** Экспоненциальный импульс $u(t) = U_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$ требуется представить в цифровой форме, приняв в качестве граничной частоту, на которой спектральная плотность импульса оказывается в сто раз меньше наибольшего значения, и удовлетворившись погрешностью квантования, соответствующей числу уровней $M = 32$. Определить общее число цифровых отсчетов сигнала.

• **Р.8.2.** Цифровой сигнал представляет собой последовательность отсчетов со значениями уровней $m(k) = \{0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, \dots\}$ и т. д., полученных в результате округления в соответствии с формулой (8.2) приближенных значений уровней $\mu_k = 0.4 \cdot k$; общее число отсчетов составляет $N = 36$. Цифро-аналоговый преобразователь характеризуется следующими параметрами: число разрешенных уровней $M = 16$, шаг квантования $\Delta u = 200$ мВ, тактовая частота $F = 100$ кГц, частота среза АЧХ восстанавливающего фильтра $F_C = 40$ кГц. Выяснить форму сигнала $\tilde{s}(t)$ на выходе ЦАП, если наименьшее значение сигнала s_{\min} равно нулю.



Раздел 9. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

9.1. Векторное представление сигналов. Основные характеристики сигналов в функциональном пространстве (расстояние между сигналами и началом координат пространства, расстояние между двумя сигналами и т. п.)

 В достаточном объеме этот вопрос изложен в [3, с. 30-32 и 4, с. 23-29], но наиболее полно и строго он изложен в [9, с. 89-97, 99-104].

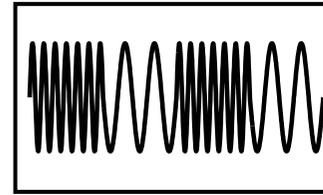
 **9.1.1.** При изучении этого вопроса обратите внимание на то, что квадрат удаления сигнала от начала координат векторного пространства или, по-другому, квадрат нормы этого сигнала есть, по смыслу, собственная энергия сигнала (или собственная мощность, если этот сигнал периодический); скалярное произведение двух разных сигналов есть взаимная энергия (взаимная мощность) этих сигналов (см. п. 5.1).

 2, 3 [3, с. 39].

 1.21 [6]; пример 1.8, 1.9 [4, с. 26].

 1.18, 1.16* [6]; пример 1.10 [4, с. 27].

 1.14, 1.13* [6]; пример 1.11 [4, с. 29].



Раздел 10. БАЗА СИГНАЛА. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЯ БАЗЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ

10.1. Функциональное пространство сигналов; размерность пространства. Понятие базы сигнала



Кратко этот вопрос затронут в [1, с. 91 и 156] ([2, с. 62 и 109]), более подробно он изложен в [9, с. 44-48].



10.1.1. Понятие базы в учебной литературе расплывчато. Уточним его. Заметим прежде, что термин "база" предопределяет представление ансамбля (набора) сигналов обобщенным рядом Фурье (см. п. 3.1). Поэтому понятие базы можно определить следующим образом.

База сигнала B – это число N взаимно независимых координат (коэффициентов C_k обобщенного ряда Фурье), однозначно определяющих сигнал $s(t)$ в заданном функциональном пространстве (в заданном ортогональном базисе $\{\eta_k\}$).

Взаимная независимость координат в этом определении подразумевает возможность независимого варьирования этими координатами (значениями коэффициентов C_k), а следовательно, получения целого набора (ансамбля) отличающихся по форме сигналов. Фактически, база – это число слагаемых в обобщенном ряде Фурье, используемых для описания всех входящих в ансамбль сигналов; это количество данных, позволяющих однозначно идентифицировать конкретный сигнал из рассматриваемого ансамбля. Проблема идентификации собственно и решается устранением неопределенности в числах C_0, C_1, \dots, C_{N-1} . Эти числа по смыслу играют роль степеней свободы сигнала. Поэтому база сигнала может иметь и такое толкование.

База сигнала – это число его степеней свободы.

Из сказанного следует, что укоренившийся в научной литературе термин "база сигнала", воспринимаемый так, как будто бы речь идет о единственном сигнале, очевидно, не корректен (у единственного сигнала нет никакой свободы!), правильное было бы говорить о базе ансамбля сигналов. Но... термин получил распространение и потому, говоря о базе сигнала, остается лишь подразумевать, что за конкретным сигналом стоит целый набор, используемый для передачи соответствующей информации.

10.1.2. Практическая ценность понятия "база сигнала (ансамбля сигналов)" состоит в том, что оно характеризует количество и разнообразие форм сигналов, которые можно получить, варьируя коэффициентами ряда Фурье. Чем больше база сигнала, т. е. чем больше степеней свободы, тем большее количество сигналов можно получить при заданном отличии формы этих сигналов или, наоборот, обеспечить большее отличие в форме сигналов при заданном их количестве. В первом случае это дает возможность передать большее количество информации, во втором – уменьшить ошибки, могущие возникнуть из-за возможного перепутывания сходных по форме сигналов. Если, например, база исходного сигнала $B = 1$ (пусть имеется в виду гармонический базис с размерностью $N = 1$ и сигналы вида $a(t) = a_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t)$), то никаким варьированием единственного коэффициента ряда Фурье C_1 (в рассматриваемом случае $C_1 = a_1$) невозможно получить сигнал другой (отличной от косинусоидальной) формы. И, наоборот, если $B = \infty$ (число слагаемых в обобщенном ряде Фурье не ограничено), то можно построить ансамбль из бесконечного количества отличающихся по форме сигналов.

10.1.3. Во многих литературных источниках, не только общепрофессиональной направленности, но и учебной, дается определение базы как произведения ширины спектра сиг-

нала на его длительность. Такое определение нельзя, строго говоря, признать корректным. Чему, например, по этому определению равна база бесконечно длительно гармонического колебания, ширина спектра которого равна, как известно, нулю?!... Определение же, данное выше, позволяет однозначно ответить на этот вопрос: база гармонического колебания заведомо известной частоты равна двум, ибо степенями свободы в нем выступают амплитуда колебания и начальная фаза.

? **В.10.1.** Можно ли утверждать, что число сигналов, образующих ансамбль, равно его базе?

•• **Р.10.1.** Ансамбль сигналов $u_n(t)$ порождается колебанием $u(t) = 8 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot t + \psi_n)$ путем варьирования начальной фазой ψ_n , причем угол между ближайшими значениями фазы не должен быть меньше 30° . Какова база порождаемого ансамбля? Сколько сигналов можно сформировать таким образом?

Р.10.2. Для формирования ансамбля сигналов используется единственная функциональная ось $\cos(5 \cdot \Omega \cdot t)$ из базиса $\{\cos(k \cdot \Omega \cdot t), \sin(k \cdot \Omega \cdot t)\}$, где $\Omega = 2\pi \cdot 10^4$ рад/с. Какова база формируемых сигналов? Сколько их всего можно сформировать?

10.2. База периодических и квазипериодических сигналов

 В источниках, которые перечислены в списке литературы настоящего учебного пособия, этот вопрос, по существу, не затронут.

• **Р.10.2.1.** Получим вначале формулы, определяющие базу периодических сигналов. Рассуждения проведем для гармонического базиса.

Основой гармонического представления периодического сигнала является, как известно, выражение

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} [a_n \cdot \cos(n \cdot \Omega_n \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \Omega_n \cdot t)],$$

в котором n_{\min} и n_{\max} – минимальный и максимальный номера гармоник, составляющих сигнал $s_n(t)$. Поскольку каждому n соответствует два коэффициента (a_n и b_n), то согласно определения базы (см. п. 10.1)

$$B = 1 + 2 \cdot (n_{\max} - n_{\min} + 1),$$

здесь $(n_{\max} - n_{\min} + 1)$ – общее число спектральных составляющих сигнала (без учета постоянной составляющей a_0). Полученное выражение справедливо при условии, что амплитуды и фазы всех составляющих взаимно независимы. Ясно, что в случае, например, модулированного сигнала (АМ, ЧМ или ФМ), у которого амплитуды и, соответственно, фазы верхних и нижних боковых составляющих спектра связаны, база меньше, нежели удвоенное количество спектральных составляющих.

10.2.2. Заметим, что величину базы сигнала можно выразить через период сигнала T_n и ширину его частотного спектра $\Delta f = (n_{\max} - n_{\min}) \cdot F_n$, где $F_n = 1/T_n$ – частотный интервал между соседними спектральными составляющими. Нетрудно видеть, что

$$B = 1 + 2 \cdot (\Delta f \cdot T_n + 1).$$

В случае радиосигнала постоянная составляющая отсутствует ($a_0 = 0$) и потому

$$B = 2 \cdot (\Delta f \cdot T_n + 1);$$

в случае видеосигнала $n_{\min} = 1$, так что

$$B = 1 + 2 \cdot F_M \cdot T_n,$$

где F_M – максимальная частота спектра видеосигнала.

10.2.3. Квазипериодический сигнал, как и сигнал периодический, характеризуется дискретным спектром, это подчеркивалось в п. 1.1.8. Поэтому формула, определяющая базу квазипериодического сигнала, по-смыслу та же, а именно,

$$B = 1 + 2 \cdot N,$$

где N – общее число спектральных составляющих (за исключением составляющей с $\omega = 0$).

Своеобразие квазипериодического сигнала состоит в том, что частотный интервал между составляющими спектра произволен (не одинаков), а потому выразить базу сигнала через его ширину спектра и длительность (которая формально равна бесконечности) невозможно.

? **В.10.2.** Накладывает ли какое-либо ограничение величина базы на значения амплитуд и фаз спектральных составляющих сигналов, образующих используемый для передачи информации ансамбль?

В.10.3. Чем ограничивается число возможных значений амплитуды и фазы спектральных составляющих сигналов, образующих ансамбль?

✎ **Р.10.3.** Для передачи символов некоего алфавита используются колебания вида $u_{nc}(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot F \cdot t)$ и $u_{ns}(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot F \cdot t)$, где $U_0 = 4$ В, $F = 1$ кГц, $1 \leq n \leq 32$. Какова база используемых сигналов?

✎ **Р.10.4.** Для передачи символов некоего алфавита используются колебания вида $u_n(t) = n \cdot U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot t)$, где $U_0 = 4$ В, $F = 1$ кГц, $1 \leq n \leq 32$. Какова база используемых сигналов?

Р.10.5. Для передачи букв русского алфавита используются колебания вида $u_n(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot F \cdot t)$, где $U_0 = 4$ В, $F = 1$ кГц, $1 \leq n \leq 32$. Какова база используемых сигналов?

...  **Р.10.6.** Можно ли без изменения базы увеличить число сигналов в ансамбле, описанном в предыдущей задаче, чтобы можно было передавать не только буквы, но и знаки препинания, цифры и другие текстовые символы? Какое максимальное количество сигналов можно сформировать из указанных сигналов при той же базе?

10.3. База непериодических сигналов. Приближенное значение базы непериодических сигналов

 В учебных источниках, которые перечислены в списке литературы настоящего пособия, этот вопрос практически не затронут.

 **10.3.1.** Непериодический сигнал своеобразен тем, что его спектр, как об этом говорилось в п. 1.2, сплошной. Поэтому, даже если он ограничен по частоте, то число спектральных составляющих бесконечно велико. Значит формально база непериодического сигнала $B = \infty$. Это справедливо как для видео-, так и для радиосигналов.

10.3.2. В реальности, однако, приходится иметь дело с сигналами, анализируемыми на конечном интервале времени. Но в п. 1.1.1 подчеркивалось, что с позиций математического анализа такие сигналы полезно рассматривать как периодические с периодом $T_n = T_C$, где T_C – время анализа (наблюдения) сигнала. Если учесть, что реальные сигналы принято считать по спектру тоже ограниченными, то для расчета их базы можно применить формулы, выведенные в п. 10.2.2; в них лишь следует символ T_n заменить на символ T_C . Таким образом, для общего случая (радиосигнала с постоянной составляющей) получим

$$B = 1 + 2 \cdot (Ш_f \cdot T_C + 1).$$

В случае если постоянная составляющая отсутствует, то

$$B = 2 \cdot (Ш_f \cdot T_C + 1).$$

Если речь идет о видеосигнале с постоянной составляющей, то

$$B = 1 + 2 \cdot F_M \cdot T_C,$$

а без постоянной составляющей

$$B = 2 \cdot F_M \cdot T_C.$$

10.3.3. Заметим, что для большинства используемых в технике связи сигналов выполняется условие $Ш_f \cdot T_C \gg 1$. Поэтому приближенно можно считать, что база радиосигналов (речь пока не идет о сигналах модулированных)

$$B \approx 2 \cdot F_M \cdot T_C.$$

Из полученного выражения следует, что то определение базы сигнала, которое укоренилось в научной литературе и о котором говорилось в п. 10.1.3, нельзя считать совсем неверным; точнее, его нельзя считать инвариантным, т. е. справедливым для сигналов произвольной длительности и ширины спектра.

? **В.10.4.** Можно ли формулы, полученные в п. 10.3.2, считать справедливыми для непериодических сигналов конечной длительности с ограниченным (приближенно) спектром?

 **Р.10.7.** Ансамбль сигналов формируется путем произвольного изменения формы импульса в интервале $0 \leq t \leq 0.4$ мс, но так, что спектр импульсов оказывается приближенно ограниченным частотой 2.5 кГц; импульсы каждого сигнала повторяются с периодом 2 мс. Какова база сигналов? Какое количество сигналов можно таким образом сформировать?

 **Р.10.8.** Ансамбль сигналов формируется путем произвольного изменения формы импульса в интервале

$0 \leq t \leq 0.4$ мс, но так, что спектр каждого импульса оказывается приближенно ограниченным частотой 2.5 кГц. В остальные моменты времени значения всех сигналов, хотя и неизвестны, но одинаковы. Какова база сигналов? Какое количество сигналов можно таким образом сформировать?

...  **Р.10.9.** Ансамбль сигналов формируется путем произвольного изменения амплитуды прямоугольного импульса длительностью 0.4 мс; импульсы повторяются с периодом 2 мс. Полагая верхнюю частоту спектра формируемых сигналов ограниченной частотой 2.5 кГц, рассчитайте базу сигналов. Из какого количества сигналов можно сформировать ансамбль?

10.4. База модулированных сигналов



Частично этот вопрос затронут в [1, с. 156; 2, с. 109].



10.4.1. Рассмотрим вначале случай, когда модуляция осуществляется, по предположению, видеосигналом с дискретным спектром (периодическим или квазипериодическим). Из теории модулированных сигналов известно, что амплитуды и соответственно фазы нижних и верхних боковых составляющих спектра между собой связаны, кроме того ясно, что несущее колебание полезной информации не содержит, а значит, учитывать ее не стоит. Следовательно, в соответствии с п. 10.2.1 база АМ-, ЧМ- или ФМ-сигнала

$$B = 2 \cdot N_6,$$

где N_6 – общее количество боковых (только верхних или только нижних) составляющих спектра.

10.4.2. Если модуляция осуществляется видеосигналом заведомо конечной длительности или же сигналом, анализи-

руемым на конечном интервале времени, то формулу для базы сигнала можно получить из п. 10.3.2; при этом надо учесть, что спектральные составляющие нижней и верхней боковых полос **з а в и с и м ы**, а значит, база АМ-, ЧМ- или ФМ-сигнала должна определяться формулой

$$B = \Delta f \cdot T_C.$$

Интересно, что то же, по существу, выражение, но после совершенно других рассуждений, получено в [1, с. 156].

? **В.10.5.** Могут ли коэффициент модуляции, частота и начальная фаза модулирующего колебания служить параметрами, определяющими базу сигнала, при тональной амплитудной модуляции колебанием заданной длительности? Какова эта база?

В.10.6. Могут ли девиация частоты, частота и фаза модулирующего колебания служить параметрами, определяющими базу сигнала, при тональной частотной модуляции колебанием известной длительности? Чему в этом случае равна база?



Р.10.10. Максимальная мгновенная частота ЧМ-колебания $f_{\max} = 20.1$ МГц, частота несущей $f_0 = 20$ МГц. Формы модулирующих импульсов таковы, что высшая частота спектра не превышает 1 кГц. Рассчитайте базу ЧМ-сигнала.



Р.10.11. Тональная частотная модуляция характеризуется параметрами: девиация частоты $F_d = 75$ кГц, частота модулирующего колебания $F = 5$ кГц, фаза заведомо не известна и определяет конкретный сигнал из всего ансамбля. Какова база ЧМ-сигнала?



Р.10.12. Частотная модуляция с заданной девиацией частоты F_d осуществляется колебанием сложной формы, заданным на интервале T_C . Спектральный состав модули-

рующего колебания: N гармоник с частотами от $f_1=0$ до $f_{N-1} = (N-1)/T_C$; этим гармоникам соответствуют парциальные индексы модуляции $m_1 > m_2 > \dots > m_{N-1}$, где $m_1 = F_d/F_1$, а $m_{N-1} = F_d/F_{N-1}$. Выразите базу ЧМ-сигнала через парциальные индексы модуляции.

 **P.10.13.** Частотная модуляция с девиацией частоты $F_d = 75$ кГц осуществляется колебанием сложной формы длительности $T_C = 2$ мс. Рассчитайте базу ЧМ-сигнала; рассчитайте величину наибольшего парциального индекса модуляции. Проверьте верность рассчитанного значения базы сигнала, воспользовавшись формулой, полученной в задаче P.10.12.

 **P.10.14.** В задаче P.10.11 индекс модуляции совпадает с рассчитанным в задаче P.10.13, а именно, $m = F_d/F = 15$. Казалось бы и базы, соответствующие условиям двух задач, должны быть одинаковы... Однако правильные ответы существенно отличаются. В чем причина этого отличия?

10.5. О независимости базы периодического и непериодического сигналов от вида ортогонального базиса (на примере сигналов, представленных в гармоническом базисе и базисе Котельникова)



Этот вопрос затронут в [9, с. 220-222].



10.5.1. Рассмотрим вначале случай периодического видеосигнала. Согласно теореме Котельникова (см. п. 7.1.1) периодический сигнал, т. е. сигнал, ограниченный по мощности, можно однозначно представить последовательностью отсчетов, следующих через интервал $T < 1/(2 \cdot F_M)$. Следовательно, для точного описания сигнала в пределах каждого периода требуется всего отсчетов T_p/T , что по крайней мере на один больше, чем $2 \cdot F_M \cdot T_p$, т. е. $2 \cdot F_M \cdot T_p + 1$. Но этим выражени-

ем и определяется согласно п. 10.2.2 база периодического видеосигнала в гармоническом базисе.

10.5.2. В случае периодического радиосигнала его согласно [1, с. 154] можно представить отсчетами комплексной огибающей, если эти отсчеты будут следовать через интервал времени $T < 1/Ш_f$. Следовательно, число отсчетов на периоде должно быть $T_p/T > T_p \cdot Ш_f$, т. е. хотя бы $T_p \cdot Ш_f + 1$. Но каждый отсчет должен содержать в себе два значения – величину амплитуды и величину фазы огибающей, значит, количество действительных чисел, однозначно определяющих сигнал, должно быть, как и в случае гармонического базиса (см. п. 10.2.2), равно $2 \cdot (T_p \cdot Ш_f + 1)$.

10.5.3. Что касается базы непериодического сигнала, то и с позиций представления сигнала в комплексном экспоненциальном базисе (см. п. 10.3.1), и с позиций представления в базисе Котельникова, она бесконечна. В самом деле, согласно теореме Котельникова (см. п. 7.1.3) для однозначного определения сигнала (даже ограниченного по спектру) по его отсчетам необходимо учесть их на всей временной оси, т. е. число отсчетов (а это и есть база сигнала) должно быть бесконечным.

Реально же как ширину спектра сигнала ($Ш_f$ в случае радиосигнала и F_M в случае видеосигнала), так и его длительность T_C принимают приближенно ограниченными. Это дает возможность рассматривать сигнал с позиций формальной математики как условно периодический с периодом $T_p = T_C$. А значит, для расчета базы можно применить формулы, полученные в п.п. 10.5.1 и 10.5.2. Но в этом случае формулы будут носить приближенный характер.



P.10.15. Полагая, что продолжительность речевого сигнала в задаче 5.2 [6] ограничена (например, вре-

менем $T_C = 5$ с), рассчитайте базу сигналов, которые можно было бы сформировать для передачи полезной информации.

••  **P.10.16.** Если бы возникла необходимость представить отрезок сигнала, о котором говорится в задаче 15.1 [6], в гармоническом базисе, то сколько бы спектральных составляющих для этого понадобилось? Какой величины пришлось бы для этого использовать базу?

•••  **P.10.17.** Сигналы некоторого ансамбля формируются путем линейной комбинации гармонических колебаний с частотами 1, 2, ... 5 кГц. На примере сигнала, образованного колебаниями указанных частот с фиксированными амплитудами и фазами, покажите, что тот же сигнал можно было бы сформировать, располагая величинами пяти (в пределах одного периода) мгновенных отсчетов.

10.6. Сигналы с линейной частотной модуляцией. Преимущество ЛЧМ-сигналов по сравнению с сигналами, немодулированными по частоте

 Этот вопрос изложен в [1, с. 128-131, 149-151], [2, с. 89-91, 103-106], [4, с. 104-110]; частично он затронут в [3, с. 104-106].

  **10.6.1.** В формулах (3.38) [1] и (4.50) [4], определяющих базу ЛЧМ-сигнала как произведение ширины спектра (удвоенной девиации частоты) на длительность, отсутствует коэффициент "2" (см. п. 10.3.3). Объясняется это тем, что "свобода" (возможность варьирования) на амплитуду у ЛЧМ-сигнала отсутствует.

10.6.2. Основное достоинство ЛЧМ-сигнала состоит в сжатии (в базу раз) центрального лепестка автокорреляцион-

ной функции по сравнению с шириной лепестка АКФ импульса с фиксированной частотой заполнения; о практической важности этого обстоятельства говорится в [4, с. 73-74 и 78].

? **V.10.7.** Как можно использовать значение базы ЛЧМ-сигнала для формирования при $B \gg 1$ большого количества разнообразных сигналов?

?  18, 19 [3, с. 119]; 18 [4, с. 111].

••   4.26 [6]; 13 [4, с. 112]; 4.25* [6]; 3.22* [7].

•   4.22, 4.23, 4.24 [6]; пример 4.4 [4, с. 108].

10.7. Простые и сложные сигналы. База простого и сложного сигналов. Преимущества и недостатки сложных сигналов по сравнению с простыми

 В литературных источниках, перечисленных в настоящем пособии, этот вопрос почти не затронут. Косвенное отношение к нему имеет материал, изложенный в [3, с. 113-116 и 4, с. 78 и 108].

  **10.7.1.** П р о с т ы м и принято называть сигналы, которые характеризуются малой базой ($B = 1...5$), с л о ж н ы м и – характеризующиеся большой базой ($B \geq 10$). Большая база достигается на практике за счет такого изменения формы сигнала, при котором существенно увеличивается ширина его спектра. Поэтому сложные сигналы называют еще широкополосными, шумоподобными, многомерными, псевдослучайными и т. п.

Покажем, что обыкновенная частотная модуляция может привести к образованию сложного сигнала. Пусть форма модулирующего сигнала такова, что высшая частота его спектра

соизмерима с величиной, обратной длительности сигнала ($F_M \geq 1/T_C$). Установим параметры частотного модулятора такими, чтобы девиация частоты существенно превышала высшую частоту спектра ($F_d \gg F_M$). Поскольку в этом случае ширина спектра ЧМ-сигнала согласно (3.34) [1] $\Delta f \approx 2 \cdot F_d$, то на основании п. 10.4.2 будем иметь

$$B = \Delta f \cdot T_C \approx 2 \cdot F_d \cdot T_C \gg F_M \cdot T_C \approx 1.$$

Разумеется, такой результат будет соответствовать не всем модулирующим сигналам, а только таким, спектр которых удовлетворяет условию $F_M \geq 1/T_C$.

10.7.2. Преимущество сложных сигналов перед простыми в кратком изложении состоит в следующем:

– поскольку сложный сигнал занимает широкую полосу частот, то его спектральная плотность энергии мала (энергия сигнала "размыта" по спектру), а значит, он обладает большой скрытностью;

– поскольку он шумоподобен, то его трудно подделать, т. е. он обладает высокой имитационной стойкостью;

– сложный сигнал "не боится" мощных узкополосных помех, ведь их можно с помощью узкополосного фильтра "вырезать"; исчезновение при этом малой доли энергии широкополосного сигнала практически не скажется на качестве его восстановления;

– подобрав ансамбль сигналов с существенно отличной формой, можно при заданной скорости пересылки данных обеспечить высокую помехозащищенность их передачи или, наоборот, значительно увеличив число сигналов в ансамбле, можно при допустимой помехозащищенности существенно повысить скорость передачи данных;

– сложные сигналы допускают перекрытие их спектров, ибо проблема разделения этих сигналов переходит в техниче-

скую проблему разделения пиков их автокорреляционных функций.

Все достоинства сложных сигналов, перечисленные здесь и те, о которых говорится в специальной литературе, сопряжены с необходимостью создания сигналов, обладающих хорошей автокорреляционной функцией, т. е. функцией с коротким (по сравнению с сигналом), но высоким центральным лепестком и крайне малыми боковыми выбросами. Проблема разработки и формирования ансамбля сигналов с хорошей АКФ является сложной, но актуальной задачей теоретической и практической радиотехники.

??? → !!!

Раздел 11. ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ

К РАЗДЕЛУ 1

В.1.1. Почему простая функция $\cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$ играет особую роль в радиотехнике?

Ответ. Технически такое колебание легко может быть получено путем вращения проволочной рамки в магнитном поле. О важности с теоретических позиций говорится, в частности, в п. 1.1.2 и в [1, с. 37].

В.1.2. Дайте определение понятия периодического сигнала. Назовите несколько физических процессов, для которых модель периодического сигнала является подходящим способом описания.

Ответ. Примеры физических процессов, описываемых моделью периодического сигнала: вращение диска электросчетчика при постоянной нагрузке; ежечасная подача сигналов точного времени и т. п.

В.1.5. В п. 1.1.6 утверждается, что спектральные составляющие периодического сигнала не имеют разрывов, т. е. существуют в промежутках между импульсами сигналов. Вместе с тем их сумма согласно ряду Фурье должна в этих промежутках быть равной нулю. Как такое может быть?

Ответ. При сложении мгновенные значения всех составляющих периодического сигнала в промежутках между импульсами компенсируются.

В.1.6. Отрицательная частота – это понятие абстрактное или физическое? С чем оно связано?

Ответ: абстрактное; связано с понятием комплексного спектра.

В.1.8. Верно ли суждение: понятие "спектральная плотность" ввели для того, чтобы подчеркнуть, что спектральные составляющие непериодического сигнала располагаются на частотной оси очень "плотно", т. е. образуют спектр сплошной? Если да, то почему размерность спектральной плотности не совпадает с размерностью самого спектра сигнала?

Ответ: неверно (см. п. 1.2.2).

В.1.9. Верно ли утверждение, что размерность комплексной спектральной плотности $\dot{G}_u(\omega)$ некоторого импульса напряжения $u(t)$ есть В/(рад/с)?

Ответ: неверно (см. п. 1.2.2).

В.1.10. В п. 1.1.6 утверждается, что спектральные составляющие гармонического спектра не имеют разрывов даже в промежутках между импульсами периодического сигнала. Как можно объяснить существование составляющих в этих промежутках с энергетических позиций?

Ответ. Приходящаяся на один период энергия сигнала, сосредоточенная фактически лишь в пределах импульса, оказывается при замене сигнала гармоническими составляющими распределенной на весь период за счет перехода части энергии на интервал, соответствующий промежутку между импульсами.

В.1.11. Вообразим, что некоторый источник постоянного напряжения на короткое время подключается к некоей резистивной нагрузке. Образовавшийся на нагрузке импульс напряжения следует со спектральных позиций считать состоящим из гармонических колебаний, существующих во все моменты времени, в том числе и до подключения источника. Как такое может быть?

Ответ. Объяснение аналогично предыдущему (В.1.10) с той лишь разницей, что в данном случае речь должна идти о

гармонических составляющих бесконечно малой амплитуды, действующих не в пределах периода, а на всей временной оси.

К РАЗДЕЛУ 2

В.2.3. Можно ли утверждать, что:

а) спектр ЧМ-сигнала (при тональной модуляции) – сплошной, на том основании, что при плавном изменении частоты модулирующего сигнала частота спектральной составляющей принимает все значения от $\omega_0 - \Omega_d$ до $\omega_0 + \Omega_d$?

б) ширина спектра ЧМ-сигнала независимо от частоты модулирующего сигнала равна $2\Omega_d$ (на основании пункта *а)*)?

в) в пределах ширины спектра амплитуды всех спектральных составляющих равны, потому что при частотной модуляции амплитуда радиосигнала во времени не меняется?

Если эти заключения верны, то как их совместить с результатами, полученными математически и изложенными, например, в [3, с. 98-100]?

Ответ. Все заключения неверны, ибо под понятие спектральной составляющей подведено колебание с изменяющейся во времени частотой (см. п. 2.3.2).

В.2.7. Согласно рис. 3.3 [3, с. 87] и рис. 4.6,*а* [4, с. 99] спектры амплитуд АМ-сигнала при тональной модуляции и ЧМ-сигнала при тональной модуляции с малым индексом качественно совпадают. Можно ли из этого сделать вывод, что амплитудная модуляция и частотная модуляция с малым индексом – это одно и то же?

Ответ: нельзя; фазы нижней боковой у АМ- и ЧМ-сигналов отличаются на 180° .

В.2.8. В [3, с. 101] утверждается, что радиостанция, предназначенная для передачи радиосигналов с угловой модуляцией, работает в режиме постоянной средней мощности незави-

симо от того, пребывает ли она в данный момент в режиме молчания или же в режиме излучения модулированных сигналов. Как такое с позиции энергетики может быть? Ведь в режиме молчания радиостанция излучает только одну спектральную составляющую (несущую), а в режиме модуляции – бесконечное (в принципе) число составляющих! Откуда же черпается энергия на излучение боковых?

Ответ. Амплитуды несущей сигнала с угловой модуляцией в режиме молчания и в режиме модуляции не одинаковы; конкретные значения определяются соответственно коэффициентами $J_0(0)$ и $J_0(m)$.

В.2.9. При каком условии на параметры несущего колебания сигналы, описанные в задачах 4.7 и 4.16 [6], можно считать узкополосными?

Ответ. Скорости передачи 300 знаков/мин в задаче 4.7 [6] соответствуют период следования знаков 200 мс, а длительность знаков – 100 мс. Из этого следует, что ширина спектра радиоимпульсов $Ш_f \approx 2/T_C = 20$ Гц. Для того чтобы сигнал считался узкополосным, достаточно, чтобы частота заполнения f_0 удовлетворяла условию $f_0 \gg 20$ Гц.

Практическая ширина спектра $Ш_f$ в задаче 4.16 [6] определяется выражением $Ш_f = 2 \cdot (m+1) \cdot F$, т. е. $Ш_f = 624$ кГц. Следовательно, чтобы ЧМ-сигнал был узкополосным, необходимо, чтобы частота несущей $f_0 \gg 624$ кГц.

В.2.10. Можно ли сигналы, приведенные в задачах 2.3, 2.8 и 2.12 [5], считать узкополосными? Почему?

Ответ: в задачах 2.3 и 2.8 [5] – да; в задаче 2.12 [5] – нет.

К РАЗДЕЛУ 4

В.4.2. Является ли преобразование Гильберта взаимнооднозначным? Подтвердите свой ответ конкретным примером.

Ответ: да.

В.4.3. Можно ли утверждать, что огибающая гильбертовского сигнала также относится к классу гильбертовских сигналов? Обоснуйте ответ примером.

Ответ: нет; например, комплексная огибающая модулированного сигнала не может считаться гильбертовской, если в качестве опорной частоты использована частота несущей, поскольку в этом случае нижняя боковая полоса спектра сигнала оказывается в области отрицательных частот.

В.4.4. Применимо ли преобразование Гильберта к сигналам периодическим? квазипериодическим? Приведите пример.

Ответ: да.

В.4.5. Применимо ли преобразование Гильберта к сигналам, содержащим постоянную составляющую?

Ответ: нет; причина та же, что и в случае вопроса В.4.3.

В.4.6. Из определения гильбертовского сигнала следует, что он не содержит спектральных составляющих в области отрицательных частот; гармонический спектр периодического сигнала также приходится только на область положительных частот. Можно ли из этого сделать вывод, что все периодические сигналы являются гильбертовскими?

Ответ: нет, так как фактом, определяющим то, является ли сигнал гильбертовским, выступает вид спектра комплексного, а не гармонического.

В.4.7. Как из комплексного спектра вещественного периодического сигнала $s_n(t)$ (не содержащего постоянной составляющей) можно получить выражение спектра соответствующего гильбертовского сигнала?

Ответ. Надо воспользоваться формулой (3.86) [3], заменив символы спектральной плотности на символы амплитуд комплексного спектра.

В.4.8. Напишите аналитическое выражение спектральных составляющих гармонического спектра периодического сигнала $s_n(t)$ (не содержащего постоянной составляющей) и спектра гильбертовского сигнала, соответствующего исходному $s_n(t)$. Чем должны отличаться эти выражения?

Ответ:

$$s_n(t) = S_n \cdot \cos(n \cdot \Omega \cdot t + \psi_n) \text{ и } \dot{s}_n(t) = S_n \cdot \exp[j \cdot (n \cdot \Omega \cdot t + \psi_n)].$$

К РАЗДЕЛУ 6

В.6.2. Чем со спектральной точки зрения можно подтвердить тот факт, что энергия дискретизированного сигнала $s_T(t)$ бесконечно велика?

Ответ. Поскольку спектральная плотность $\dot{G}_T(\omega)$ дискретизированного сигнала периодична по частоте, то интеграл $\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} |\dot{G}_T(\omega)|^2 d\omega$, определяющий в соответствии с равенством Парсеваля энергию сигнала, должен быть равен бесконечности.

В.6.3. Как можно экспериментально убедиться в том, что спектр дискретизированного сигнала периодический? Какой для этого сигнал достаточно продискретизировать? С помощью какого устройства выделить спектральные составляющие отдельных периодов? Чем эти составляющие измерить?

Ответ. Достаточно продискретизировать гармоническое колебание $U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$ с интервалом $T < 1/(2 \cdot f_0)$ и с помощью узкополосного резонансного контура убедиться в наличии спектральных составляющих с частотами $f_0 + n/T$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и $f_0 - n/T$, $n = 1, 2, \dots$, причем одинаковой амплитуды.

В.6.5. Можно ли дискретизированный периодический сигнал характеризовать спектральной плотностью амплитуд? Если да, то чем она должна отличаться от комплексного спектра самих амплитуд?

Ответ: можно; отличаться она будет тем, что ее значения на частотах спектральных составляющих будут бесконечно велики.

В.6.6. Если при вычислении временной функции сигнала соответственно моментам $t \neq k \cdot T$ (по известным комплексным амплитудам \dot{C}_n) ограничиться числом слагаемых ряда, равным N , то какой получится результат?

Ответ: произвольный; конкретное значение будет зависеть от того, какая спектральная составляющая принята за начало частотного периода.

В.6.7. Зависит ли результат прямого (обратного) дискретного преобразования Фурье от того, какой временной (частотный) отсчет берется за начало периода? Свой ответ подтвердите математическими выкладками.

Ответ: не зависит.

К РАЗДЕЛУ 7

В.7.3. Для чего при восстановлении непрерывного сигнала по дискретным отсчетам требуется фильтр? Из каких соображений следует выбирать его частоту среза? Почему, в случае

когда частота среза интерполирующего фильтра превышает высшую частоту спектра дискретизируемого сигнала, интервал дискретизации нельзя выбирать из условия $T = 1/(2 \cdot F_M)$?

Ответ. Если при условии $F_C > F_M$ частоту дискретизации F взять равной частоте среза фильтра F_C , то при восстановлении сигнала сквозь фильтр будут проходить не только нужные составляющие центральной полосы (копии) периодического спектра, но и искажающие сигнал составляющие соседних полос (копий) спектра.

В.7.4. При любом ли соотношении между высшей частотой спектра и частотой дискретизации интерполирующий фильтр должен быть идеальным? В качестве примера рассмотрите случай, когда частотная характеристика фильтра имеет вид трапеции. Можно ли подобрать частоту дискретизации так, чтобы указанным фильтром можно было восстановить сигнал (с ограниченным спектром) без искажений?

Ответ: можно, если в пределах полосы прозрачности фильтра иных спектральных составляющих, кроме как соответствующих центральной полосе периодического спектра, наблюдаться не будет.

В.7.5. Изобразите спектры двух дискретизированных сигналов, характеризующихся одинаковой формой исходных непрерывных сигналов, равными интервалами между отсчетами, но существенно разной длительностью. Какой из дискретизированных сигналов будет восстановлен точнее, если эти сигналы подать на одинаковые по своим параметрам идеальные фильтры?

Ответ: тот, у которого длительность больше.

В.7.6. Изобразите спектры двух дискретизированных сигналов, характеризующихся одинаковой формой исходных непрерывных сигналов, равной длительностью, но существенно

разными интервалами между отсчетами. Какой из дискретизированных сигналов будет восстанавливаться точнее, если эти сигналы подать на одинаковые идеальные фильтры?

Ответ: тот, у которого частота дискретизации больше.

В.7.8. Можно ли с помощью реального фильтра восстановить без какой-либо погрешности исходный сигнал, уменьшая сколь угодно интервал между отсчетами дискретизированного сигнала?

Ответ: нет, ибо не упразднится погрешность, определяемая прохождением недискретизированного сигнала через реальный фильтр.

В.7.9. Можно ли с помощью реального фильтра восстановить без какой-либо погрешности исходный сигнал по его дискретным отсчетам, если предварительно пойти на сколь угодно большое увеличение его длительности?

Ответ: нет, ибо сохранится проникновение через фильтр спектральных составляющих соседних полос (хотя последние и станут бесконечно узкими).

К РАЗДЕЛУ 10

В.10.1. Можно ли утверждать, что число сигналов, образующих ансамбль, равно его базе?

Ответ: нет.

В.10.2. Накладывает ли какое-либо ограничение величина базы на значения амплитуд и фаз спектральных составляющих сигналов, образующих используемый для передачи информации ансамбль?

Ответ: нет.

В.10.3. Чем ограничивается число возможных значений амплитуды и фазы спектральных составляющих сигналов, образующих ансамбль?

Ответ: количеством сигналов, используемых для передачи информации.

В.10.4. Можно ли формулы, полученные в п. 10.3.2, считать справедливыми для непериодических сигналов конечной длительности с ограниченным (приближенно) спектром?

Ответ: строго говоря, нет, ибо спектр таких сигналов сплошной. Но если время анализа сигналов заведомо ограничено продолжительностью T_C , то можно.

В.10.5. Могут ли коэффициент модуляции, частота и начальная фаза модулирующего колебания служить параметрами, определяющими базу сигнала, при тональной амплитудной модуляции колебанием заданной длительности? Какова эта база?

Ответ: при тональной могут, ибо независимой оказывается лишь одна спектральная составляющая – верхняя или нижняя боковая; $B = 3$.

В.10.6. Могут ли девиация частоты, частота и фаза модулирующего колебания служить параметрами, определяющими базу сигнала, при тональной частотной модуляции колебанием известной длительности? Чему в этом случае равна база?

Ответ: при тональной могут, ибо хотя число боковых составляющих при частотной модуляции может быть велико, все они оказываются связанными коэффициентами $J_n(m)$; $B = 3$.



Раздел 12. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

К РАЗДЕЛУ 1

Р.1.1. Напряжение некоторого источника изменяется по закону $u(t) = 8 \cdot \sin^2(10^6 \cdot t - \pi/6)$ В. Рассчитайте гармонический и комплексный спектры напряжения.

Решение. Используя известные тригонометрические преобразования, представим заданную в условии функцию в виде $u(t) = 4 - 4 \cdot \cos(2 \cdot 10^6 \cdot t - \pi/3) = 4 + 4 \cdot \cos(2 \cdot 10^6 \cdot t + 2\pi/3)$ В. Из этого выражения следует, что гармонический спектр рассматриваемого напряжения содержит постоянную составляющую величины 4 В и гармоническое колебание частоты $2 \cdot 10^6$ рад/с, амплитуды 4 В и начальной фазы $2\pi/3$ рад.

Комплексный спектр можно получить, применив к полученному выражению $u(t)$ формулу Эйлера, из которой, в частности, следует, что $\cos(x) = [\exp(j \cdot x) + \exp(-j \cdot x)]/2$. Тогда $u(t) = 4 + 2 \cdot \exp(j \cdot 2\pi/3) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot t) + 2 \cdot \exp(-j \cdot 2\pi/3) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot t)$ В. Это выражение показывает, что комплексный спектр напряжения состоит из постоянной составляющей той же величины (4 В) и двух комплексных спектральных составляющих с частотами $2 \cdot 10^6$ и "минус" $2 \cdot 10^6$ рад/с и комплексными амплитудами, соответственно, $2 \cdot \exp(j \cdot 2\pi/3)$ В и $2 \cdot \exp(-j \cdot 2\pi/3)$ В.

Таким образом, путь к спектру периодического сигнала совсем не обязательно лежит через интегрирование заданной функции в соответствии, например, с выражением (2.22) [1] (или [2]); пригодны любые математические преобразования (в рассмотренном примере – тригонометрические), которые приводят заданную периодическую функцию к сумме косинусоидальных колебаний или комплексных экспоненциальных колебаний отличающихся частот.

Р.1.2. Ток в некоторой ветви определяется выражением $i(t) = 20 \cdot [1 + 0.8 \cdot \cos(10^4 \cdot t)] \cdot \cos(\pi \cdot 10^4 \cdot t)$ мА. Чему равен период тока? Рассчитайте гармонический и комплексный спектры тока.

Гармонический спектр тока $i(t)$ содержит три спектральные составляющие с частотами $(\pi - 1) \cdot 10^4$ рад/с, $\pi \cdot 10^4$ рад/с и $(\pi + 1) \cdot 10^4$ рад/с. Период колебания отсутствует, потому что сигнал относится к классу квазипериодических (частоты составляющих по отношению друг к другу не кратны).

Р.1.3. По заданному аналитическому выражению для периодически изменяющегося тока в ветви некоей цепи $i_n(t) = \{-I_\Omega$ при $-T_n/2 \leq t \leq 0$; I_Ω при $0 < t < T_n/2\}$ рассчитайте его гармонический спектр (амплитуд и фаз).

Решение. Постоянная составляющая тока (среднее значение за период), как видно из рис. 12.1, равна нулю. Коэффициенты \dot{C}_n ряда Фурье в комплексной форме определяются выражением:

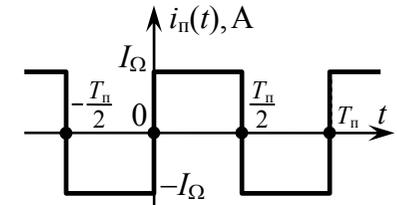


Рис. 12.1

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T_n} \cdot \int_{-T_n/2}^0 (-I_\Omega) \cdot \exp(-j \cdot n \Omega_n \cdot t) dt + \int_0^{T_n/2} I_\Omega \cdot \exp(-j \cdot n \Omega_n \cdot t) dt = \\ &= \frac{I_\Omega}{-j \cdot n \Omega_n T_n} \cdot (-1 + \exp(j \cdot n \Omega_n \cdot \frac{T_n}{2})) + \exp(-j \cdot n \Omega_n \cdot \frac{T_n}{2}) - 1. \end{aligned}$$

Используя формулу Эйлера ($\exp(\pm jx) = \cos x \pm j \sin x$), соотношение между основной частотой Ω_n сигнала и его периодом T_n ($\Omega_n = 2\pi/T_n$), а также известное тригонометрическое преобразование ($1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$), легко получить

$$\dot{C}_n = \frac{2I_\Omega}{j \cdot \pi \cdot n} \cdot \sin^2(\pi \cdot n/2) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } n, \\ 2I_\Omega / (\pi \cdot n) \cdot \exp(-j \cdot \pi/2) & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Поскольку амплитуды гармоник, имеющих в составе периодического сигнала, определяются удвоенным значением модулей комплексных коэффициентов \dot{C}_n , а начальные фазы в точности соответствуют аргументу \dot{C}_n (см. п. 1.1.7), тогда

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0 \text{ и четных } n, \\ 4I_\Omega/(\pi \cdot n) & \text{при нечетных } n; \end{cases} \quad \Psi_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0 \text{ и четных } n, \\ -\pi/2 & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Гармонический спектр тока приведен на рис. 12.2.

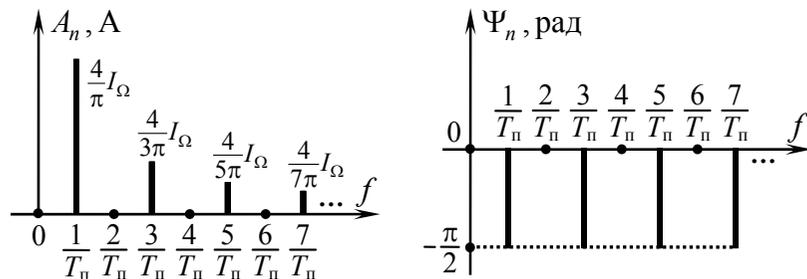


Рис. 12.2

Р.1.4. Комплексные амплитуды спектральных составляющих периодического сигнала $s_n(t)$ описываются выражением $3 \cdot \text{sinc}(\pi \cdot n/3)$ В. Каково пиковое мгновенное значение сигнала?

Решение. Для ответа на поставленный вопрос следует преобразовать сигнал во временную область. Если использовать для этого непосредственно ряд Фурье в комплексной форме

$$s_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_n \cdot \exp(j2\pi \cdot n \cdot t/T_n),$$

то для преобразования потребуется использовать табличный ряд. В частности, используя обозначения $\alpha = \pi/3$, $x = 2\pi \cdot t/T_n$ и табличное значение ряда [12]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\sin(n \cdot \alpha)/n) \cdot e^{jn \cdot x} = \pi, \text{ где } |x| \leq \alpha,$$

ряд Фурье для рассматриваемого сигнала можно свести к замкнутому виду: $s_n(t) = \pi \cdot 3/\alpha = 9$ В, где $-T_n/6 \leq t \leq T_n/6$. Итак, сигнал имеет вид симметричного относительно оси ординат прямоугольного импульса длительностью $T_n/3$, бесконечно повторяющегося с периодом T_n (рис. 12.3,а). Используя функцию $\text{rect}(\cdot)$ ($\text{rect}(t/\tau) = \{1, |t| \leq \tau/2; 0, |t| > \tau/2\}$, рис. 12.3,б), этот сигнал на периоде можно описать так: $s_n(t) = 9 \cdot \text{rect}[t/(T_n/3)]$, В. Таким образом, пиковое мгновенное значение сигнала составляет 9 В.

В заключение отметим, что функция $\text{sinc}(\cdot)$ при любых спектральных преобразованиях приводит к некоторой функции $\text{rect}(\cdot)$.

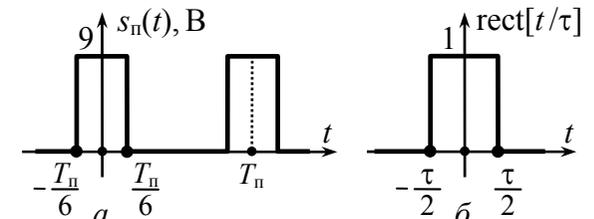


Рис. 12.3

Р.1.5. В [3, табл. 2.2, позиция 11] показано, что спектральная плотность постоянного во времени напряжения $u(t) = U_0$ выражается формулой $\dot{G}_u(\omega) = U_0 \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega)$, т. е. бесконечно велика на частоте $\omega = 0$ и равна нулю на всех остальных частотах. Требуется рассчитать комплексный спектр $\dot{C}_u(\omega)$.

Решение. В предложенном на с. 17 решении подразумевалось, что спектральная плотность есть производная $\dot{C}_u(\omega)$ по ω , что неверно (см. п. 1.2.2).

Р.1.6. Спектральная функция $\dot{G}_u(\omega)$ некоторого реального сигнала $u(t)$ равномерна и равна G_0 на всех частотах вплоть до частоты ω_M , на больших частотах она равна нулю. Как выглядит сигнал $u(t)$?

Решение. В предложенном на с. 17 решении неверно указан нижний предел интеграла. При таком пределе спек-

тральная плотность не является комплексно-сопряженной. Надо было либо в качестве нижнего предела взять частоту "минус" ω_M , либо от полученного в предложенном решении результата оставить удвоенную реальную часть (см. п 1.2.7).

Р.1.7. Два видеоимпульса характеризуются спектральными характеристиками

$$\dot{G}_{s1}(\omega) = 2 \cdot \sin(10^{-4} \cdot \omega) / \omega \text{ и } \dot{G}_{s2}(\omega) = 1 / (10^4 + j\omega), \text{ В/Гц.}$$

Определите протяженность интервала времени, в пределах которого мгновенные значения обоих импульсов отличны от нуля.

Решение. Для ответа на вопрос, сформулированный в задаче, следует преобразовать анализируемые сигналы во временную область. Если использовать для этого непосредственно обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_s(\omega) \cdot \exp(+j\omega \cdot t) d\omega,$$

то для преобразования потребуется использовать ряд табличных интегралов. В частности, используя обозначение $\tau = 10^{-4}$ с, для первого сигнала обратное преобразование Фурье можно представить в виде

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(\tau\omega)}{\omega} \cdot e^{+j\omega t} d\omega = \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\tau\omega)}{\omega} \cdot e^{j\omega t} d\omega \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\tau\omega)\cos(\omega t)}{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\sin[(t+\tau)\omega]}{\omega} d\omega - \int_0^{+\infty} \frac{\sin[(t-\tau)\omega]}{\omega} d\omega \right\}. \end{aligned}$$

Но в соответствии с таблицей определенных интегралов [19]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\xi\omega)}{\omega} d\omega = 0.5 \cdot \pi \cdot \operatorname{sign}(\xi),$$

где $\operatorname{sign}(\cdot)$ – функция взятия знака числа, поэтому при $t \leq -\tau$ и при $t \geq \tau$ два образующих сигнал $s_1(t)$ интеграла компенсируют

друг друга, а при $t \in (-\tau; \tau)$ знаки интегралов противоположны, и вместо компенсации наблюдается удвоение:

$$s_1(t) = \frac{1}{\pi} \cdot [0.5\pi \cdot \operatorname{sign}(t+\tau) - 0.5\pi \cdot \operatorname{sign}(t-\tau)] = \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)] = 1 \text{ В.}$$

Итак, сигнал $s_1(t)$ представляет собой прямоугольный импульс, определенный на интервале времени $[-\tau; \tau]$ (рис. 12.4,а). Используя функцию $\operatorname{rect}(\cdot)$, этот сигнал можно записать аналитически $s_1(t) = 1 \cdot \operatorname{rect}[t/(2\tau)]$, В.

Функция $\operatorname{sinc}(\cdot)$ при любых спектральных преобразованиях приводит к некоторой функции $\operatorname{rect}(\cdot)$, причем если размерность горизонтальных осей функций – герц и секунда, а координата первого нуля функции $\operatorname{sinc}(x)$ равна x_0 , то высота получаемого прямоугольника составляет x_0 , а ширина – $1/x_0$. В соответствии с этим правилом модуль спектральной плотности, равному $2\tau \cdot \operatorname{sinc}(\tau \cdot \omega)$ и обращающемуся в ноль на частоте $f_0 = 1/(2\tau)$ соответствует во временной области прямоугольный импульс длительности $1/f_0 = 2\tau$, принимающий на этом временном интервале значение $S_\Omega = 2\tau \cdot f_0 = 1$. Таким образом, искомым сигнал действительно определяется как $1 \cdot \operatorname{rect}[t/(2\tau)]$, однако в последнем случае для получения результата не потребовалось осуществлять никакого интегрирования.

Для преобразования во временную область спектральной плотности $\dot{G}_{s2}(\omega)$ можно аналогично воспользоваться математическим справочником, содержащим таблицу интегралов, но если такой справочник недоступен, то целесообразно от преобразования Фурье перейти к преобразованию Лапласа. Комплексной функции $\dot{G}_{s2}(\omega)$ можно поставить в соответствие изображение по Лапласу

$\mathcal{L}_{s2}(p) = 1/(a+p)$, где $a = 10^4$ рад/с, и, следовательно, сигнал $s_2(t)$ определяется обратным преобразова-

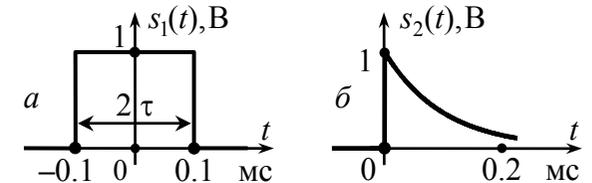


Рис. 12.4

нием Лапласа для $\mathcal{L}_{s_2}(p)$. Поскольку оригинал изображения $1/(\alpha+p)$ есть $\exp(-\alpha \cdot t)$, аналитическое выражение сигнала $s_2(t) = \exp(-\alpha \cdot t)$ при $t \geq 0$ (рис. 12.4, б).

Из сопоставления рис. 12.4, а и 12.4, б видно, что сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ перекрываются на интервале $[0; \tau = 0.1 \text{ мс}]$.

Р.1.8. Оцените энергию сигнала на выходе фильтра с амплитудно-частотной характеристикой, определяемой как $K(f) = \{1, f < 1/2 \text{ кГц}; 2 \cdot (10^3 - f), f \in [1/2, 1] \text{ кГц}; 0, f > 1 \text{ кГц}\}$, и постоянной времени 0.5 мс, если на его вход поступает одиночный видеоимпульс $S_{\Omega} \cdot \text{rect}(t/\tau)$, где $\tau = 1 \text{ мс}$.

Решение. Сигнал $s_1(t)$, воздействующий на фильтр, является непериодическим. Если продлить сигнал $s_1(t)$ в $\pm\infty$ периодически, взяв достаточно большой период T_n , то сигнал на выходе фильтра, взятый в пределах периода, будет практически точно соответствовать отклику цепи на одиночный видеоимпульс, в том числе и по величине энергии. Такой подход к решению задачи прохождения одиночного импульса через линейную цепь называется периодизацией воздействия. Условием обеспечения малой погрешности метода является выполнение неравенства $T_n \gg \tau_c$, τ_c – постоянная времени цепи, характеризующая длительность переходных процессов на ее выходе. В нашем случае $\tau_c = 0.5 \text{ мс}$, и период сигнала T_n целесообразно выбрать хотя бы в десять раз большим τ_c : $T_n = 5 \text{ мс}$.

Постоянная составляющая полученного после периодизации сигнала $s_{1n}(t)$ –

$$S_{1n-} = S_{\Omega} \cdot \tau / T_n,$$

амплитуды гармоник –

$$A_{1nn} = 2 \cdot |\dot{C}_n| = \frac{2}{T_n} \cdot \left| \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S_{\Omega} \cdot e^{-j2\pi n t / T_n} dt \right| = \frac{2S_{\Omega}}{T_n} \cdot \left| \frac{e^{-j\pi n \tau / T_n} - e^{+j\pi n \tau / T_n}}{-j\pi \cdot n / T_n} \right| = \frac{2S_{\Omega}}{T_n} \cdot \left| \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot \tau / T_n)}{\pi \cdot n / T_n} \right| = \frac{2S_{\Omega} \tau}{T_n} \cdot |\text{sinc}(\pi \cdot n \cdot \tau / T_n)|,$$

где $\text{sinc}(x)$ – функция "синк": $\text{sinc}(x) = \{1, x=0; \sin x/x, x \neq 0\}$.

Частоты гармоник в составе $s_{1n}(t)$, как известно, кратны основной его частоте $1/T_n = 0.2 \text{ кГц}$. Это означает, что на выходе рассматриваемого фильтра помимо постоянной составляющей $S_{2n-} = S_{1n-} \cdot K(0) = 0.2 \cdot S_{\Omega}$ будет присутствовать только ограниченное число гармоник, обладающих номерами $n = 1, 2, 3$ и 4 (рис. 12.5). Их амплитуды –

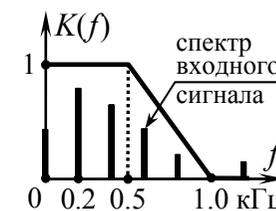


Рис. 12.5

$$A_{2n1} = A_{1n1} \cdot K(1/T_n) = 2S_{\Omega} \tau / T_n \cdot |\text{sinc}(\pi \cdot \tau / T_n)| \cdot 1 \approx 0.374 S_{\Omega};$$

$$A_{2n2} = A_{1n2} \cdot K(2/T_n) = 2S_{\Omega} \tau / T_n \cdot |\text{sinc}(2\pi \cdot \tau / T_n)| \cdot 1 \approx 0.303 S_{\Omega};$$

$$A_{2n3} = A_{1n3} \cdot K(3/T_n) = 2S_{\Omega} \tau / T_n \cdot |\text{sinc}(3\pi \cdot \tau / T_n)| \cdot 0.8 \approx 0.161 S_{\Omega};$$

$$A_{2n4} = A_{1n4} \cdot K(4/T_n) = 2S_{\Omega} \tau / T_n \cdot |\text{sinc}(4\pi \cdot \tau / T_n)| \cdot 0.4 \approx 0.037 S_{\Omega}.$$

Суммарная мощность спектральных составляющих гармонического спектра выходного сигнала составляет

$$P_{S2} = S_{2n-}^2 + \sum_{n=1}^4 A_{2nn}^2 / 2 = [0.2^2 + (0.374^2 + 0.303^2 + 0.161^2 + 0.037^2) / 2] \cdot S_{\Omega}^2 \approx 0.169 S_{\Omega}^2 \text{ В}^2.$$

Энергия выходного сигнала фильтра (в расчете на единичное сопротивление), сосредоточенная в пределах его периода, –

$$E_s = P_{S2} \cdot T_n = 0.845 S_{\Omega}^2 \text{ В}^2 \cdot \text{мс}.$$

Именно этой величиной и следует оценивать искомую энергию. Более точный расчет, выполненный другим способом и с использованием ЭВМ, дает практически то же самое значение – $0.853 S_{\Omega}^2 \text{ В}^2 \cdot \text{мс}$. Наличие погрешности в данном случае связано с процедурой дискретизации спектральной функции выходного сигнала, длительность которого из-за инерционности фильтра не ограничена и теоретически бесконечно велика.

Р.1.9. Определите энергию импульса, комплексная спектральная плотность которого $\dot{G}_S(\omega) = 2 \cdot 10^{-4} / (10^8 + \omega^2)$, А/Гц.

Решение. Судя по размерности спектральной плотности анализируемый сигнал является импульсом тока. Его форма неизвестна, поэтому воспользоваться непосредственно стандартным временным способом расчета энергии невозможно. Более того, для получения аналитического выражения сигнала, соответствующего функции $\dot{G}_S(\omega)$, оказывается необходимым переходить к преобразованию Лапласа или использовать справочные таблицы интегралов. Однако если (как следует из условия) необходимо определить лишь энергию сигнала, то реальной потребности в указанных действиях нет; ведь энергию можно найти и по спектральному представлению сигнала в соответствии с равенством Парсеваля. Действительно,

$$E_S = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^8 + \omega^2} \right)^2 d\omega = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + (\omega/10^4)^2} \right)^2 d\omega.$$

Вводя новую переменную x , изменяющуюся от "минус" $\pi/2$ до "плюс" $\pi/2$, используя замену $\omega/10^4 = \operatorname{tg} x$ и учитывая, что при этом $d\omega = 10^4 dx / \cos^2 x$, записываем энергию E_S в виде

$$\begin{aligned} E_S &= \frac{4 \cdot 10^{-4}}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 x dx = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 + \cos(2x)] dx = 10^{-4} \text{ А}^2 \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Р.1.10. В учебном пособии [1, с. 62-63] показано, что комплексная спектральная плотность сигнала $s_0(t) = S_\Omega \cdot \operatorname{sinc}(\omega_M \cdot t)$ определяется выражением $G_0(\omega) = S_\Omega \cdot (\pi/\omega_M) \cdot \operatorname{rect}[\omega/(2\omega_M)]$, где $\operatorname{rect} x = \{1 \text{ при } |x| \leq 0.5; 0 \text{ при } |x| > 0.5\}$. Какова спектральная плотность сигнала $s_k(t) = S_k \cdot \operatorname{sinc}[\omega_M \cdot (t - k \cdot T)]$? (Предполагается, что k – целое число, S_k , ω_M и T – произвольные параметры сигнала).

Решение. Обратим внимание на то, что сигнал $s_k(t)$ смещен во времени относительно сигнала $s_0(t)$ на время $k \cdot T$, т. е. справедливо соотношение $s_k(t) = S_k \cdot S_0(t - k \cdot T) / S_\Omega$. Из этого на основании (2.26) [4] и (2.57) [1] следует

$$\dot{G}_k(\omega) = S_k \cdot (\pi/\omega_M) \cdot \operatorname{rect}[\omega/(2\omega_M)] \cdot \exp(-j\omega \cdot k \cdot T).$$

Р.1.11. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, рассчитайте спектральную плотность напряжения $u(t) = U_\Omega \times \operatorname{sinc}^2[\omega_M \cdot (t - k \cdot T)]$.

Решение. Казалось бы, решать задачу надо, используя формулу прямого преобразования Фурье (2.48) из [1]. Нетрудно, однако, убедиться, что попытка взять интеграл от заданной функции известными методами не приводит к успеху.

Обратим внимание на то, что эту функцию можно представить в виде произведения других (в данном случае одинаковых) функций вида $s_1(t) = s_2(t) = \sqrt{U_0} \cdot \operatorname{sinc}[\omega_M \cdot (t - k \cdot T)]$. Это дает возможность воспользоваться для решения поставленной задачи формулой (2.62) [1], именно

$$\dot{G}_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_1(x) \cdot \dot{G}_2(\omega - x) dx.$$

В данном случае по аналогии с предыдущей задачей

$$\dot{G}_1(x) = (\pi/\omega_M) \cdot \sqrt{U_0} \cdot \operatorname{rect}[x/(2\omega_M)] \cdot e^{-jxkT},$$

$$\dot{G}_2(\omega - x) = (\pi/\omega_M) \cdot \sqrt{U_0} \cdot \operatorname{rect}[(\omega - x)/(2\omega_M)] \cdot e^{-j(\omega - x)kT}.$$

Заметим, что интеграл от произведения этих функций не равен нулю лишь в области их перекрытия (по переменной x), а перекрываются они в виду их прямоугольности (в случае $\omega \geq 0$) лишь при условии $(-\omega_M) \leq (\omega - \omega_M) \leq \omega_M$, т. е. при $0 \leq \omega \leq 2 \cdot \omega_M$. Следовательно,

$$\dot{G}_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_M + \omega}^{\omega_M} U_0 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_M}\right)^2 \cdot e^{-j\omega k T} dx = \begin{cases} \frac{U_0 \pi}{\omega_M} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{2\omega_M}\right) \cdot e^{-j\omega k T}, & 0 \leq \omega \leq 2\omega_M, \\ 0, & \omega > 2\omega_M. \end{cases}$$

На область $\omega \leq 0$ решение можно распространить, имея в виду, что действительной функции u действительного переменного t соответствует функция $\dot{G}_u(\omega)$ комплексно-сопряженная, т. е. $\dot{G}_u(-\omega) = \dot{G}_u^*(\omega)$. Следовательно,

$$\dot{G}_u(\omega) = \begin{cases} \frac{U_0 \pi}{\omega_M} \cdot [1 - |\omega|/(2\omega_M)] \cdot e^{-j\omega k T} & \text{при } |\omega| \leq 2\omega_M, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 2\omega_M, \end{cases}$$

т. е. модуль спектральной плотности имеет вид треугольника с высотой $U_0 \pi / \omega_M$ и основанием, опирающимся на частоты $\pm 2 \cdot \omega_M$.

Р.1.12. Рассматривая сигнал $s(t) = \{S_\Omega \cdot t / \tau, 0 \leq t \leq \tau; S_\Omega, t > \tau\}$ как результат последовательных линейных преобразований δ -импульса ($s_\delta(t) = S_\Omega \cdot \tau \cdot \delta(t)$), обладающего комплексной спектральной плотностью $\dot{G}_{s\delta}(\omega) = S_\Omega \cdot \tau$, определите на основе теорем о спектрах спектральную плотность амплитуд сигнала $s(t)$.

Решение. Сигнал $s(t)$ может быть рассмотрен как результат интегрирования прямоугольного импульса $s'''(t)$ длительности τ , который, в свою очередь, получен алгебраическим суммированием сигналов $s'(t)$ и $s''(t)$, описываемых единичной функцией. Если импульс $s'(t)$ представляет собой стандартную единичную функцию с коэффициентом S_Ω , то функция, определяющая $s''(t)$, запаздывает на время τ и имеет отрицательный весовой коэффициент – "минус" S_Ω . Единичная же функция может быть получена в результате интегрирования исходного δ -импульса. Полная цепь преобразований δ -импульса, порождающая сигнал $s(t)$, приведена на рис. 12.6.

Комплексная спектральная плотность импульса $s'(t)$ в соответствии с теоремами об интегрировании сигнала и подобия определяется как

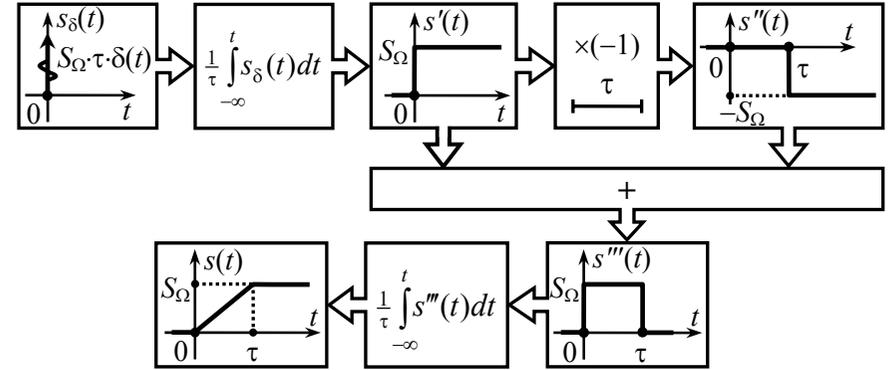


Рис. 12.6

$$\dot{G}_{s'}(\omega) = \frac{1}{\tau} \cdot [\dot{G}_{s\delta}(\omega) \cdot \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \dot{G}_{s\delta}(0) \cdot \delta(\omega)],$$

где $G_{s\delta}(0)$ – площадь интегрируемого δ -импульса: $G_{s\delta}(0) = S_\Omega \cdot \tau$. С учетом этого

$$\dot{G}_{s'}(\omega) = \frac{S_\Omega}{j\omega} + S_\Omega \cdot \pi \cdot \delta(\omega).$$

Плотность импульса $s''(t)$ определяется спектральной плотностью импульса $s'(t)$ с учетом теорем подобия и запаздывания:

$$\dot{G}_{s''}(\omega) = -\dot{G}_{s'}(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} = -\frac{S_\Omega}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau} - S_\Omega \cdot \pi \cdot \delta(\omega);$$

последнее слагаемое при умножении на $\exp(-j\omega \cdot \tau)$ не изменяется, так как существует только при $\omega = 0$, а $\exp(-j \cdot 0) = 1$.

Согласно цепи преобразований (рис. 12.6)

$$\begin{aligned} \dot{G}_{s'''}(\omega) &= \dot{G}_{s'}(\omega) + \dot{G}_{s''}(\omega) = \frac{S_\Omega}{j\omega} - \frac{S_\Omega}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau} = \frac{S_\Omega}{j\omega} \cdot (1 - e^{-j\omega\tau}) = \\ &= S_\Omega \cdot \tau \cdot e^{-j\omega\tau/2} \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \tau/2). \end{aligned}$$

Наконец, комплексная спектральная плотность сигнала $s(t)$

$$\begin{aligned} \dot{G}_s(\omega) &= \frac{1}{\tau} \cdot \left[\dot{G}_{s'''}(\omega) \cdot \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot G_{s'''}(0) \cdot \delta(\omega) \right] = \frac{1}{\tau} \cdot \left[S_\Omega \cdot \tau \cdot e^{-j\omega\tau/2} \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \tau/2) \cdot \frac{1}{j\omega} + \right. \\ &\left. + S_\Omega \cdot \tau \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \right] = S_\Omega \cdot \left[e^{-j\omega\tau/2} \cdot \frac{\text{sinc}(\omega\tau/2)}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega) \right]. \end{aligned}$$

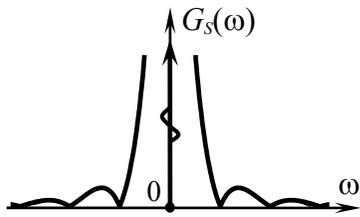


Рис. 12.7

Спектральная плотность амплитуд сигнала $s(t)$ (рис. 12.7)

$$G_S(\omega) = |\dot{G}_S(\omega)| = \begin{cases} S_\Omega \cdot \text{sinc}(\omega \cdot \tau/2) / |\omega|, & \omega \neq 0, \\ S_\Omega \cdot \pi \cdot \delta(\omega), & \omega = 0 \end{cases}$$

обладает на нулевой частоте особенностью типа δ -функции, поскольку площадь сигнала неограниченно велика.

К РАЗДЕЛУ 2

Р.2.1. Периодический информационный сигнал

$$s_{\text{и}}(t) = \begin{cases} -S_\Omega & \text{при } -T_{\text{п}}/2 \leq t \leq 0; \\ 0 & \text{при } 0 < t < T_{\text{п}}/2 \end{cases}$$

с параметрами $S_\Omega = 0.1$ В и $T_{\text{п}} = 10$ мкс используется в качестве модулирующего при формировании амплитудно-модулированного сигнала. Модулируемое колебание – $\cos(2\pi \cdot 10^6 \cdot t + 70^\circ)$ В. Крутизна характеристики модулятора $K_{\text{АМ}} = 5$. Изобразить временную диаграмму сигнала на выходе модулятора и рассчитать его коэффициент модуляции.

Решение. Огибающая амплитуд АМ-сигнала изменяется, как известно, пропорционально мгновенным значениям модулирующего (информационного) сигнала:

$$A(t) = S_0 + K_{\text{АМ}} \cdot s_{\text{и}}(t),$$

где S_0 – амплитуда модулируемого несущего колебания на входе модулятора. Для заданного $s_{\text{и}}(t)$

$$A(t) = \begin{cases} S_0 - K_{\text{АМ}} \cdot S_\Omega, & -T_{\text{п}}/2 \leq t \leq 0, \\ S_0, & 0 < t < T_{\text{п}}/2 \end{cases} = \begin{cases} 0.5 \text{ В}, & -T_{\text{п}}/2 \leq t \leq 0, \\ 1 \text{ В}, & 0 < t < T_{\text{п}}/2. \end{cases}$$

Соответствующий радиосигнал изображен на рис. 12.8 (для наглядности период высокочастотного несущего заполнения взят существенно больше заданного).

Коэффициент амплитудной модуляции сформированного радиосигнала определяется отношением максимального абсолютного отклонения огибающей амплитуд $A(t)$ радиосигнала от амплитуды S_0 , наблюдаемой в режиме молчания, к величине S_0

$$M_{\text{АМ}} = \max |A(t) - S_0| / S_0 = K_{\text{АМ}} \cdot \max |s_{\text{и}}(t)| / S_0.$$

Максимальное взятое по модулю отклонение огибающей амплитуд $A(t)$ от амплитуды S_0 в режиме молчания составляет $K_{\text{АМ}} \cdot S_\Omega$, следовательно, $M_{\text{АМ}} = K_{\text{АМ}} \cdot S_\Omega / S_0 = 0.5 / 1 = 0.5$.

Р.2.2. Набег фазы частотно-модулированного колебания изменяется по закону $10 \cdot \sin(10^3 \cdot t)$ рад. Найдите аналитическое выражение модулирующего сигнала, полагая, что крутизна модулятора составляет 10^4 рад/(с·В). Определите девиацию частоты радиосигнала.

Решение. При частотной модуляции пропорционально мгновенным значениям информационного (модулирующего) сигнала $s_{\text{и}}(t)$ изменяется мгновенная частота радиосигнала:

$$\omega(t) = \omega_0 + K_{\text{ЧМ}} \cdot s_{\text{и}}(t), \quad (12.1)$$

где ω_0 – частота радиосигнала в режиме молчания, $K_{\text{ЧМ}}$ – крутизна характеристики модулятора. Аналитическое выражение для информационного сигнала $s_{\text{и}}(t)$ может быть получено по известному закону изменения мгновенной частоты $\omega(t)$ радиосигнала, который, к сожалению, неизвестен.

Мгновенная частота радиосигнала $\omega(t)$ и его набег фазы $\varphi(t)$ жестко связаны между собой соотношением:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (12.2)$$

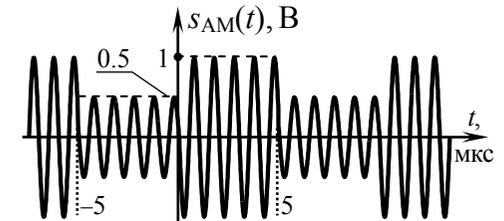


Рис. 12.8

По условию набег фазы колебания описывается выражением $\varphi(t) = 10 \cdot \sin(10^3 \cdot t)$ рад, тогда согласно (12.2) мгновенная частота радиосигнала определяется как $\omega(t) = \omega_0 + 10^4 \cdot \cos(10^3 \cdot t)$ рад/с. Наконец, из (12.1) следует, что $s_{н}(t) = [\omega(t) - \omega_0] / K_{\text{ФМ}} = \cos(10^3 t)$, В. Временная диаграмма модулирующего сигнала $s_{н}(t)$ изображена на рис. 12.9 пунктирной линией.

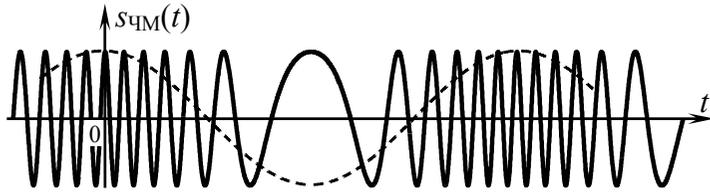


Рис. 12.9

Девияция частоты $\Omega_{\text{д}}$ соответствует максимальному абсолютному отклонению мгновенной частоты радиосигнала от ее значения в режиме "молчания":

$$\Omega_{\text{д}} = \max |\omega(t) - \omega_0|.$$

Исходя из найденного закона изменения мгновенной частоты радиосигнала, определяем $\Omega_{\text{д}} = 10^4$ рад/с.

Р.2.3. Девияция частоты радиосигнала на выходе идеального фазового модулятора составляет $4 \cdot 10^3$ рад/с. Сигнал, воздействующий на управляющий вход модулятора, – $s_{н}(t) = \{3S_{\Omega} \cdot t / T_{\text{п}}, 0 \leq t \leq T_{\text{п}}/3; -S_{\Omega}, T_{\text{п}}/3 < t \leq T_{\text{п}}\}$, где $T_{\text{п}} = 1.2$ мс. Изобразите осциллограмму ФМ-сигнала.

Решение. При фазовой модуляции пропорционально мгновенным значениям информационного колебания $s_{н}(t)$ изменяется набег фазы $\varphi(t)$ радиосигнала:

$$\varphi(t) = K_{\text{ФМ}} \cdot s_{н}(t),$$

где $K_{\text{ФМ}}$ – неизвестная крутизна модулятора, формирующего фазомодулированный сигнал.

Зная аналитическое выражение информационного сигнала, легко определить закон изменения $\varphi(t)$ на периоде модуляции:

$$\varphi(t) = K_{\text{ФМ}} \cdot \begin{cases} 3S_{\Omega} \cdot t / T_{\text{п}}, & 0 \leq t \leq T_{\text{п}}/3, \\ -S_{\Omega}, & T_{\text{п}}/3 < t \leq T_{\text{п}}. \end{cases}$$

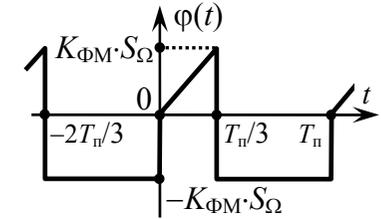


Рис. 12.10

Динамика набег фазы показана на рис. 12.10. Индекс модуляции m радиосигнала есть наибольшее абсолютное значение набег фазы:

$$m = \max |\varphi(t)|.$$

Из выражения для набег фазы радиосигнала и рис. 12.10 видно, что наибольшее значение $\varphi(t)$ на периоде наблюдается в момент времени $t = T_{\text{п}}/3$ и составляет $K_{\text{ФМ}} \cdot S_{\Omega}$, а наименьшее – на интервале $t \in (T_{\text{п}}/3, T_{\text{п}})$ и равно «минус» $K_{\text{ФМ}} \cdot S_{\Omega}$. Оба значения по абсолютной величине одинаковы, следовательно, в рассматриваемом случае $m = K_{\text{ФМ}} S_{\Omega}$.

Для облегчения построения временной диаграммы сигнала с угловой модуляцией следует выяснить конкретный закон изменения его мгновенной частоты; динамику именно этой физической величины наиболее просто отразить графически. Применив соотношение (12.2) или аналогичное ему соотношение для мгновенной частоты ФМ-колебания

$$\omega(t) = \omega_0 + K_{\text{ФМ}} \frac{ds_{н}(t)}{dt},$$

несложно получить

$$\omega(t) = \omega_0 + \begin{cases} 3K_{\text{ФМ}} S_{\Omega} / T_{\text{п}}, & 0 < t < T_{\text{п}}/3, \\ 0, & T_{\text{п}}/3 < t < T_{\text{п}}. \end{cases}$$

Из последнего выражения следует, что всюду на периоде модулирующего сигнала, кроме интервала $[0, T_{\text{п}}/3]$, частота ФМ-сигнала равна частоте ω_0 несущего колебания. В пределах интервала $[0, T_{\text{п}}/3]$ мгновенная частота сигнала также неизменна,

но больше частоты несущей на величину $3K_{\text{ФМ}} \cdot S_{\Omega} / T_{\text{п}}$. Очевидно, что указанное превышение частоты несущей соответствует девиации частоты ФМ-сигнала: $\Omega_{\text{д}} = 3K_{\text{ФМ}} \cdot S_{\Omega} / T_{\text{п}}$.

Девиация частоты ФМ-колебания зависит от величины основного (ведущего) параметра – индекса модуляции. Так как $m = K_{\text{ФМ}} S_{\Omega}$, то в данном случае $\Omega_{\text{д}} = 3m / T_{\text{п}}$. Располагая значением девиации $\Omega_{\text{д}}$, несложно рассчитать индекс модуляции сигнала: $m = \Omega_{\text{д}} \cdot T_{\text{п}} / 3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1.2 \cdot 10^{-3} / 3 = 1.6$ рад.

Временная диаграмма анализируемого ФМ-сигнала изображена на рис. 12.11. В пределах каждого из двух характерных интервалов на периоде модуляции отражено соответствующее поведение мгновенной частоты. В моменты времени $t = T_{\text{п}}/3 + k \cdot T_{\text{п}} = (0.4 + k \cdot 1.2)$ мс, $k = 0, \pm 1, \dots$ показаны "скачки" фазы колебания на "минус" $2K_{\text{ФМ}} \cdot S_{\Omega} = -2m = -3.2$ рад $\approx 180^\circ$ (согласно аналитическому выражению для $\varphi(t)$ и рис. 12.10). В моменты времени $t = k \cdot T_{\text{п}} = k \cdot 1.2$ мс имеющиеся на рис. 12.11 "скачки" фазы обладают вдвое меньшей абсолютной величиной и составляют "плюс" $m = +1.6$ рад $\approx 90^\circ$.

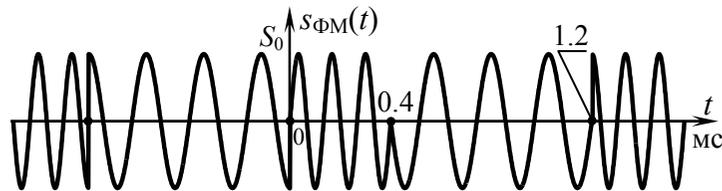


Рис. 12.11

Р.2.4. Периодическая последовательность знакопеременных пилообразных импульсов поступает на управляющий вход идеального амплитудного модулятора с крутизной $K_{\text{АМ}}$. На второй вход модулятора подается несущее колебание $\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$. Рассчитать амплитуды гармоник в составе выходного АМ-колебания.

Решение. На управляющий вход идеального амплитудного модулятора с крутизной $K_{\text{АМ}}$ подается последователь-

ность $s_{\text{и}}(t)$ знакопеременных пилообразных импульсов, приведенная на рис. 12.12,а (S_{Ω} – амплитуда, $T = 1/F_{\text{М}}$ – период ($F_{\text{М}}$ – частота) модуляции). На второй вход модулятора подается несущее колебание $S_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$ амплитуды S_0 и частоты f_0 . Огибающая амплитуд АМ-сигнала на выходе модулятора изменяется пропорционально мгновенным значениям информационного колебания: $A(t) = K_{\text{АМ}} \cdot s_{\text{и}}(t) + S_0$ (рис. 12.12,б, где $K_{\text{АМ}} \cdot S_{\Omega}$ – максимальное отклонение $A(t)$ от амплитуды в режиме молчания, равное $M \cdot S_0$, M – коэффициент амплитудной модуляции). Временная диаграмма соответствующего такой огибающей амплитуд модулированного сигнала $s_{\text{АМ}}(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$ показана на рис. 12.12,в.

Колебание $s_{\text{и}}(t)$, показанное на рис. 12.12,а, хорошо известно в теории радиотехнических цепей. Гармонический спектр амплитуд и фаз такого сигнала согласно, например, [1, с. 43] описываются выражениями

$$A_{n\text{и}} = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0, \\ \frac{2S_{\Omega}}{n\pi} & \text{при } n>0, \end{cases}$$

$$\Psi_{n\text{и}} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & n \text{ – нечетное,} \\ +\frac{\pi}{2}, & n \text{ – четное,} \end{cases}$$

где $f_n = n \cdot F_{\text{М}}$ – частота n -ой гармоники. Тогда комплексные амплитуды составляющих комплексного спектра информационного сигнала $s_{\text{и}}(t)$ –

$$\dot{C}_{n\text{и}} = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0; \\ \frac{S_{\Omega}}{n\pi} \cdot e^{\pm j\pi/2} & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

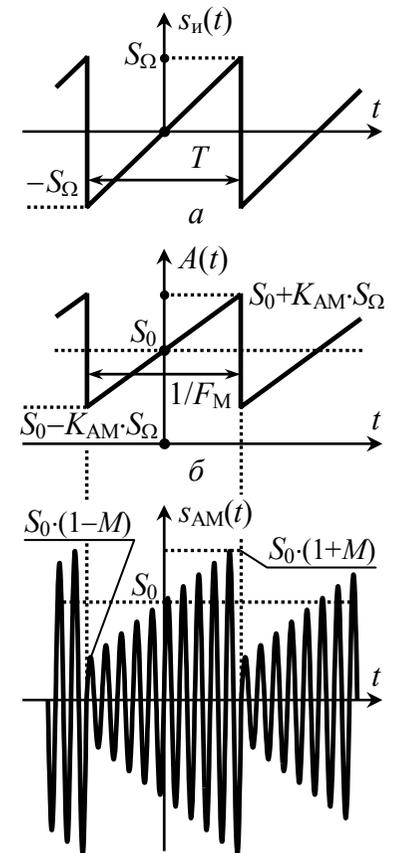


Рис. 12.12

Используя последнее выражение, можно найти амплитуды составляющих комплексного спектра огибающей амплитуд $A(t)$ формируемого модулятором АМ-колебания. Для этого следует учесть, что мгновенные значения $A(t)$ отличаются от соответствующих значений сигнала $s_{и}(t)$ в K_{AM} раз; кроме того в составе огибающей имеется постоянная составляющая величиной S_0 (рис. 12.12,б). Тогда

$$\dot{C}_{nA} = \begin{cases} S_0 & \text{при } n=0, \\ \frac{S_0 \cdot K_{AM}}{n\pi} \cdot e^{\pm j\pi/2} & \text{при } n \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} S_0 & \text{при } n=0, \\ \frac{S_0 \cdot M}{n\pi} \cdot e^{\pm j\pi/2} & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Комплексные амплитуды составляющих комплексного спектра АМ-сигнала могут быть определены на основе амплитуд комплексного спектра огибающей с использованием теоремы смещения спектра, в соответствии с которой

$$\dot{C}_{nAM} = \begin{cases} \frac{S_0}{2} & \text{при } n=0, \\ \frac{S_0 \cdot M}{2n\pi} \cdot e^{\pm j\pi/2} & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

причем составляющей спектра номера n теперь уже соответствует частота: $f_n = \pm f_0 + n \cdot F_M$. Считаем, что частота f_0 велика по сравнению с практической шириной спектра информационного сигнала, так что левая и правая полосы комплексного спектра радиосигнала между собой не перекрываются [1, с. 114; 3, с. 91].

При переходе к амплитудам гармоник получим

$$A_{nAM} = \begin{cases} S_0 & \text{при } n=0, \\ \frac{S_0 \cdot M}{n\pi} & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Р.2.5. Периодическая последовательность скважности $q=2$ биполярных прямоугольных импульсов единичной амплитуды поступает на управляющий вход идеального фазового модулятора с крутизной $K_{ФМ} = \pi/2$ рад/В. На второй вход модулятора подается несущее колебание $\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$. Рассчитать амплитуды гармоник в составе ФМ-колебания.

Решение. Рассмотрим сначала более общую задачу. Пусть на управляющий вход идеального фазового модулятора поступает периодическая последовательность биполярных прямоугольных импульсов длительности τ , показанная на рис. 12.13.

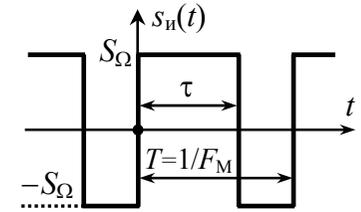


Рис. 12.13

При фазовой модуляции пропорционально мгновенным значениям информационного сигнала $s_{и}(t)$ изменяется набег фазы выходного сигнала модулятора: $\varphi(t) = K_{ФМ} \cdot s_{и}(t)$. Поскольку мгновенные значения $s_{и}(t)$ определяются заданными константами в пределах обоих интервалов $[0, \tau]$ и $[\tau, T-\tau]$ периода $s_{и}(t)$, следовательно, значения набег фазы ФМ-сигнала в пределах соответствующих интервалов постоянны (рис. 12.14,а); максимальное абсолютное значение набег фазы на периоде составляет $K_{ФМ} \cdot S_Omega$, что по определению есть индекс модуляции (m) ФМ-сигнала. По окончании интервалов постоянства $\varphi(t)$ происходит скачкообразное изменение набег фазы на удвоенное значение индекса модуляции $2m = 2K_{ФМ} \cdot S_Omega$. Поскольку по условию $K_{ФМ} = \pi/2$ рад/В, а $S_Omega = 1$ В, следовательно, индекс модуляции m составляет $\pi/2$ радиан, и тогда формируемое модулятором колебание в моменты времени $\tau \pm l \cdot T$ и $T \pm l \cdot T$ (l – целое число) скачком меняет фазу точно на π радиан. Мгновенная частота рассматриваемого ФМ-колебания в любой момент времени является постоянной величиной и равна частоте несущего колебания f_0 . Временная диаграмма ФМ-сигнала показана на рис. 12.14,б.

Формируемое модулятором ФМ-колебание можно рассматривать как сумму двух сигналов: $s_1(t)$ – последовательности радиоимпульсов длительности τ удвоенной амплитуды, по сравнению с исходной S_0 , и фазы, одинаковой с фазой исходного ФМ-сигнала в совпадающем интервале времени; $s_2(t)$ – немодулированного гармонического колебания с противоположной, по сравнению с первым сигналом $s_1(t)$, фазой.

Комплексные амплитуды составляющих комплексного спектра сигнала $s_1(t)$ могут быть записаны по аналогии с (3.14) [1, с. 116]:

$$\dot{C}_{n1} = S_0 \tau F_M \cdot \text{sinc}(\pi n \tau F_M) \cdot e^{-j\pi n \tau F_M},$$

где частота n -й составляющей равна $\pm f_0 + n \cdot F_M$, а n «пробегает» значения $0, \pm 1, \dots$. Для сигнала $s_2(t)$ –

$$\dot{C}_{n2} = 0.5 S_0 \cdot e^{-j\pi n},$$

причем составляющих в его комплексном спектре всего две – с частотами $\pm f_0$.

Спектр ФМ-колебания определяется суммой спектров сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, но поскольку описание второго сигнала в частотной области чрезвычайно простое, то спектральные составляющие ФМ-сигнала точно соответствуют составляющим спектра $s_1(t)$, за исключением колебания на частоте несущей:

$$\dot{C}_{n\text{ФМ}} = \begin{cases} S_0 \tau F_M - S_0/2, & n=0, \\ S_0 \tau F_M \cdot \text{sinc}(\pi n \tau F_M) \times \\ \quad \times e^{-j\pi n \tau F_M}, & n \neq 0. \end{cases}$$

При переходе к искомому гармоническому спектру амплитуд получим

$$A_{n\text{ФМ}} = \begin{cases} S_0 \cdot |(1 - 2\tau F_M)|, & n=0, \\ 2S_0 \tau F_M \cdot |\text{sinc}(\pi n \tau F_M)|, & n > 0, \end{cases}$$

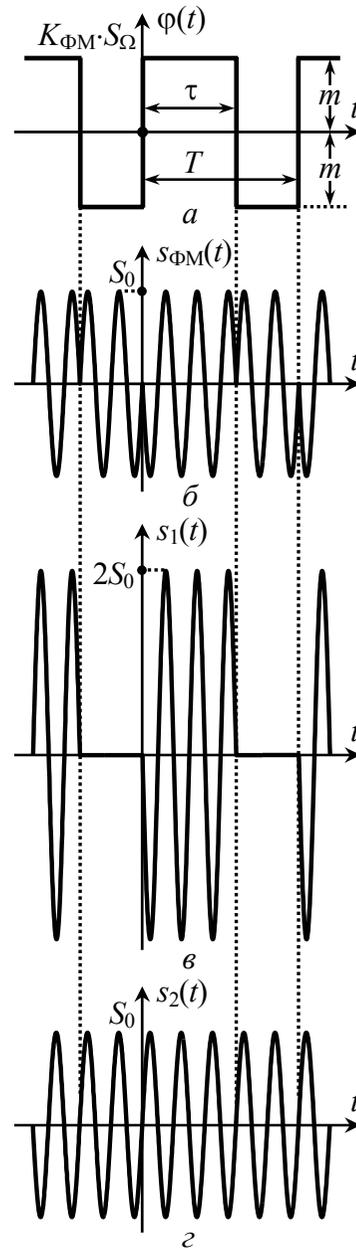


Рис. 12.14

а с учетом заданной скважности ($q=2: \tau \cdot F_M = 1/2$):

$$A_{n\text{ФМ}} = \begin{cases} 0, & n=0, \\ S_0 \cdot |\text{sinc}(\pi n/2)|, & n > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n=0, n \text{ – четные,} \\ \frac{2S_0}{\pi n}, & n \text{ – нечетные.} \end{cases}$$

Обратите внимание на то, что спектр амплитуд рассматриваемого ФМ-сигнала не зависит от величины индекса модуляции m , естественно, при условии, что $m = r \cdot \pi/2$ радиан, где r – натуральное нечетное число ($r = 1, 3, 5, \dots$).

Р.2.6. Указать, как изменится ширина спектра сигнала на выходе частотного модулятора с крутизной 1 кГц/В, если постоянная составляющая информационного сигнала, коим является меандр с единичной амплитудой и периодом 1 мс, увеличится до 1 В.

Решение. Основными параметрами, глобально характеризующими спектр радиосигнала, являются центральная частота $f_{ц}$ и практическая ширина Δf . Центральная частота спектра сигнала с угловой модуляцией, соответствующая положению на оси частот энергетического центра спектра, может заметно отличаться от частоты f_0 несущего колебания (частоты в режиме "молчания") как в большую, так и в меньшую сторону. Однако если среднее значение мгновенной частоты радиосигнала точно соответствует частоте несущей f_0 , что справедливо, например, при нечетной функции, описывающей информационный сигнал, то смещение энергетического центра спектра не наблюдается, а его практическая ширина может быть приближенно оценена как

$$\Delta f \approx 2 \cdot (m_{\text{ФМ}} + 1) \cdot F_{\text{max}} \approx 2 \cdot F_{\text{дЧМ}} + 2 \cdot F_{\text{max}}.$$

Первая половина представленного соотношения используется для оценки ширины спектра ФМ-колебания ($m_{\text{ФМ}}$ – индекс модуляции), вторая – ЧМ-сигнала ($F_{\text{дЧМ}}$ – девиация частоты); при этом необходимо располагать максимальной частотой F_{max} спектра модулирующего (информационного) сигнала.

Исходный информационный сигнал (рис. 12.15,а) порождает на выходе модулятора ЧМ-сигнал со средним значением мгновенной частоты равным частоте в режиме "молчания", так что центральная частота спектра ЧМ-сигнала $f_{ц} = f_0$. Максимальную частоту бесконечно протяженного спектра информационного сигнала указать точно невозможно, поэтому в качестве F_{\max} вполне подойдет практическая ширина спектра $s_{и}(t)$ (оцениваемая положением первого нуля амплитудного спектра прямоугольного импульса): $F_{\max} \approx 1/\tau = 1/(1/2 \cdot 10^{-3}) = 2$ кГц. Девияция частоты ЧМ-сигнала на выходе модулятора составляет $F_{д} = K_{\text{ЧМ}} \cdot \max|s_{и}(t)| = 10^3 \cdot 1 = 1$ кГц. Тогда практическая ширина спектра радиосигнала при наличии на управляющем входе модулятора исходного информационного сигнала –

$$\text{Ш}_f \approx 2 \cdot F_{д} + 2 \cdot F_{\max} \approx 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 \text{ кГц.}$$

При увеличении постоянной составляющей на 1 В исходный информационный сигнал принимает вид, показанный на рис. 12.15,б. Теперь мгновенная частота радиосигнала отклоняется от частоты f_0 несущей только в большую сторону, поэтому среднее значение мгновенной частоты сигнала $s'_{и}(t)$ отличается от f_0 и составляет $f_0 + F_{д}/2$, где девияция частоты $F_{д} = K_{\text{ЧМ}} \cdot \max|s'_{и}(t)| = 10^3 \cdot 2 = 2$ кГц. Таким образом, центр спектра сигнала $s'_{и}(t)$ оказывается смещенным: $f_{ц} = f_0 + 1$ кГц.

Оценка практической ширины спектра сигнала при модуляции однополярным информационным сигналом, каковым и является $s'_{и}(t)$, проводится по формуле

$$\text{Ш}_f \approx 2 \cdot (m_{\text{ФМ}} - \varphi_{\text{ср}} + 1) \cdot F_{\max} \approx 2 \cdot [F_{\text{дЧМ}} - |f_{\text{ср}} - f_0|] + 2 \cdot F_{\max},$$

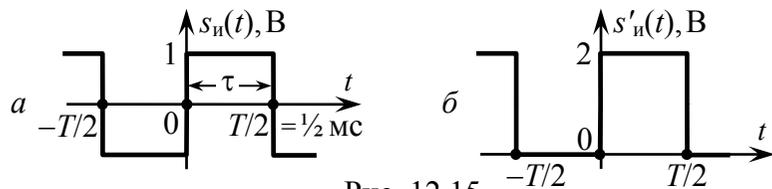


Рис. 12.15

где $\varphi_{\text{ср}}, f_{\text{ср}}$ – среднее значение набегса фазы и мгновенной частоты радиосигнала. В соответствии с последней формулой практическая ширина спектра радиосигнала $s'_{и}(t)$, порождаемого информационным сигналом $s'_{и}(t)$, составляет

$$\text{Ш}_f \approx 2 \cdot (F_{д} - 0.5F_{д}) + 2 \cdot F_{\max} \approx 2 + 2 \cdot 2 = 6 \text{ кГц.}$$

На рис. 12.16 изображены огибающие гармонических спектров амплитуд анализируемых ЧМ-сигналов ($s_{\text{ЧМ}}(t)$ и $s'_{\text{ЧМ}}(t)$), полученные численным расчетом в математическом пакете MathCad с использованием алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье ($f_0 = 20$ кГц). Из рисунка хорошо видно, что при изменении постоянной составляющей информационного сигнала форма спектра соответствующего ЧМ-сигнала сохраняется неизменной (в том числе и ширина спектра), что несложно доказать и теоретически.

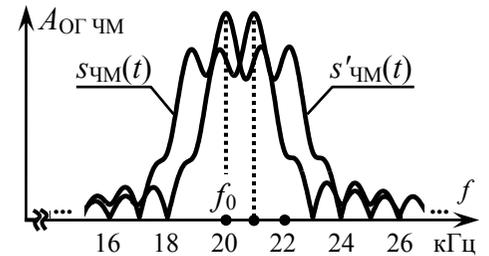


Рис. 12.16

К РАЗДЕЛУ 4

Р.4.1. Дано колебание $s(t) = S_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$. Получите аналитические выражения гармонического и комплексного спектров колебания, а также их спектральных составляющих. Получите аналитическое выражение для гильбертовского представления колебания и его огибающей.

Решение. Гармонический спектр колебания $s(t)$ состоит из одной спектральной составляющей, опирающейся на частоту ω_0 и характеризуемой амплитудой S_0 и начальной фазой ψ_0 ; аналитическое выражение этой составляющей совпадает с самим колебанием $s(t)$.

Комплексный спектр колебания на основании формулы Эйлера

$$s(t) = 0.5 \cdot S_0 \cdot e^{j\psi_0} \cdot e^{j\omega_0 t} + 0.5 \cdot S_0 \cdot e^{-j\psi_0} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

состоит из двух спектральных составляющих, опирающихся на частоты ω_0 и "минус" ω_0 и характеризуемых, соответственно, комплексными амплитудами $0.5 \cdot S_0 \cdot e^{j\psi_0}$ и $0.5 \cdot S_0 \cdot e^{-j\psi_0}$; аналитические выражения спектральных составляющих совпадают со слагаемыми написанного выше выражения.

Гильбертовский сигнал, соответствующий колебанию $s(t)$, был получен в п. 4.1.1: $z_s(t) = S_0 \cdot e^{j\psi_0} \cdot e^{j\omega_0 t}$. Спектр сигнала состоит из единственной спектральной составляющей частоты ω_0 , амплитуды S_0 (вдвое большей амплитуды комплексного спектра исходного сигнала в области $\omega > 0$) и фазы ψ_0 ; аналитическое выражение спектральной составляющей совпадает с самим колебанием $z_s(t)$.

Огибающая гильбертовского сигнала, соответствующего колебанию $s(t)$, определяется выражением $\dot{s}(t) = S_0 \cdot e^{j\psi_0}$. Ее спектр состоит из одной спектральной составляющей частоты $\omega = 0$ и амплитуды $S_0 \cdot e^{j\psi_0}$ (по смыслу – комплексной постоянной составляющей), он получен смещением к началу частотной оси на величину ω_0 спектральной составляющей самого сигнала $z_s(t)$.

Р.4.2. ЧМ-колебание с линейно нарастающим законом мгновенной частоты имеет амплитуду 10 В, несущую частоту 10 ГГц, длительность 2 мкс, девиацию частоты 0.1 ГГц. Найдите комплексную огибающую такого колебания.

Решение. Аналитическое выражение рассматриваемого ЧМ-колебания – $s(t) = S_0 \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \varphi(t)]$, где S_0 – постоянная во времени амплитуда сигнала, равная по условию 10 В, ω_0 – частота несущей: $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot 10^{10}$ рад/с, $\varphi(t)$ – набег фазы колебания, связанный с мгновенной частотой известным соотношением:

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt - \omega_0 \cdot t.$$

Полагая, что частота колебания линейно нарастает в пределах длительности (τ) сигнала

$$\omega(t) = \omega_0 + a \cdot t,$$

с учетом известной девиации частоты ($\Omega_d = 2 \cdot \pi \cdot 10^8$ рад/с) легко уточнить значение коэффициента a : $a = \Omega_d / \tau = 2 \cdot \pi \cdot 10^8 / (2 \cdot 10^{-6}) = \pi \cdot 10^{14}$ рад/с². Тогда набег фазы ЧМ-сигнала –

$$\varphi(t) = \int_0^t (\omega_0 + \frac{\Omega_d}{\tau} \cdot t) dt - \omega_0 \cdot t = \frac{\Omega_d}{2\tau} \cdot t^2.$$

Таким образом, окончательное выражение заданного в условии сигнала выглядит следующим образом: $s(t) = S_0 \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \frac{\Omega_d}{2\tau} \cdot t^2]$.

Для определения комплексной огибающей предварительно сформируем комплексный сигнал $\dot{s}(t) = s(t) + j \cdot \hat{s}(t)$, соответствующий исходному, взяв в качестве мнимой составляющей колебание вида $\hat{s}(t) = S_0 \cdot \sin[\omega_0 \cdot t + \frac{\Omega_d}{2\tau} \cdot t^2]$, получаемое простой заменой функции "cos" на "sin" в выражении $s(t)$. Использование такого способа формирования мнимой составляющей комплексного сигнала оправдано тем, что рассматриваемый сигнал $s(t)$ является узкополосным. Действительно, грубая оценка ширины спектра колебания $s(t)$ как удвоенного значения девиации частоты дает $\Delta\omega \approx 2 \cdot \Omega_d = 4 \cdot \pi \cdot 10^8$ рад/с, что составляет лишь 50-ю (!) часть частоты несущей ω_0 . Итак

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= S_0 \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \frac{\Omega_d}{2\tau} \cdot t^2] + j \cdot S_0 \cdot \sin[\omega_0 \cdot t + \frac{\Omega_d}{2\tau} \cdot t^2] = \\ &= S_0 \cdot \exp[j \cdot (\omega_0 \cdot t + \frac{\Omega_d}{2\tau} \cdot t^2)] = S_0 \cdot \exp(j \cdot \frac{\Omega_d}{2\tau} \cdot t^2) \cdot \exp(j \cdot \omega_0 \cdot t), \end{aligned}$$

откуда видно, что комплексная огибающая колебания

$$\dot{A}(t) = S_0 \cdot \exp(j \cdot \frac{\Omega_d}{2\tau} \cdot t^2) = 10 \cdot e^{j \cdot 0.5\pi \cdot 10^{14} \cdot t^2} \text{ В.}$$

К РАЗДЕЛУ 7

Р.7.1. Непрерывный импульсный сигнал $s(t)$, спектральная плотность амплитуд которого ограничена частотой 8 кГц, подвергается дискретизации. Выберите минимально допустимое значение частоты дискретизации сигнала, а также частоту среза восстанавливающего идеального ФНЧ.

Решение. Наивысшая частота F_M спектра дискретизируемого сигнала составляет 8 кГц. Непрерывность спектра указывает на то, что сигнал $s(t)$ обладает конечной энергией. В соответствии с теоремой Котельникова такой сигнал полностью и однозначно определяется последовательностью своих мгновенных значений (отсчетов), считываемых через интервал времени $T \leq 1/(2 \cdot F_M)$. Частота дискретизации F – частота следования дискретных отсчетов – однозначно связана с интервалом дискретизации T ($F = 1/T$) и должна удовлетворять неравенству $F \geq 2 \cdot F_M$. Таким образом, допустимыми являются частоты дискретизации $F \geq 16$ кГц. Минимально допустимое значение составляет 16 кГц.

Спектр идеального (с нулевой длительностью отсчетных импульсов) дискретизированного сигнала $s_T(t)$ представляет собой периодическое наложение полос (копий), соответствующих спектру исходного непрерывного сигнала $s(t)$. Период, с которым повторяется спектр $G_T(f)$, равен частоте дискретизации сигнала F . Это означает, что для отыскания спектра сигнала на выходе дискретизатора достаточно заданный по условию задачи спектр "размножить" по оси частот так, чтобы каждая новая копия спектра $s(t)$ была сдвинута относительно соседней на частоту F , т.е. в нашем случае, на 16 кГц (рис. 12.17).

Правильный выбор частоты дискретизации (как в данном случае) приводит к тому, что соседние копии спектра исходного сигнала в составе спектра дискретизированного сигнала $s_T(t)$ не перекрываются. Из этого следует, что частотный фильтр, обладающий в полосе от 0 до $F_M = 8$ кГц равномерной

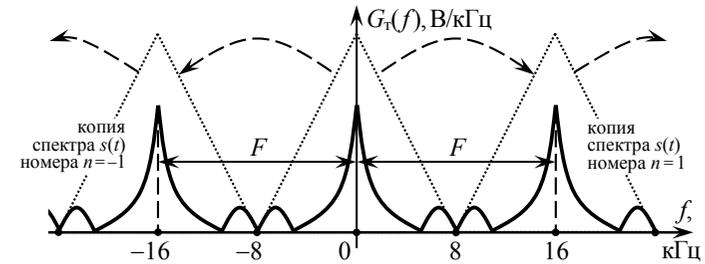


Рис. 12.17

АЧХ и линейной ФЧХ и полностью подавляющий спектральные составляющие сигнала $s_T(t)$ на частотах, превышающих $F - F_M = 8$ кГц, позволяет без искажения выделить из спектральной плотности амплитуд $G_T(f)$ дискретизированного сигнала все составляющие относящиеся к исходному (и только исходному!) сигналу, а значит без искажений восстановить сигнал $s(t)$ по его дискретным отсчетам. Итак, для восстановления сигнала следует использовать идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ) с частотой среза F_C , равной 8 кГц.

Р.7.2. Выяснить, можно ли периодический сигнал $s(t) = 4 \cdot \sin^2(2\pi \cdot 10^3 \cdot t) - 1$ В продискретизировать и затем восстановить без потери информации, используя в качестве восстанавливающего ИФНЧ с частотой среза 3 кГц?

Решение. Анализ большинства задач, связанных с применением теоремы Котельникова, полезно сопровождать построением комплексного спектра дискретизированного сигнала. Методика построения спектра дискретизированного сигнала $s_T(t)$ изложена в предыдущей задаче. Из нее следует, что предварительно необходимо отыскать спектр исходного непрерывного сигнала $s(t)$ и определиться с частотой дискретизации сигнала.

Гармонический спектр исходного сигнала может быть найден, если выражение для $s(t)$ представить в виде суммы гармоник (в данном случае – с помощью тригонометрических преобразований):

$$s(t) = 4 \cdot \sin^2(2\pi \cdot 10^3 \cdot t) - 1 = 1 - 2 \cdot \cos(4\pi \cdot 10^3 \cdot t),$$

откуда видно, что в составе исходного сигнала есть только постоянная составляющая и гармоника частоты 2 кГц. Комплексный (!) спектр амплитуд сигнала $s(t)$ показан на рис. 12.18,а. Обратите внимание на то, что для решения задачи используется комплексный, а не гармонический спектр сигнала.

В полосу пропускания восстанавливающего идеального фильтра (АЧХ фильтра изображена штрихом на рис. 12.18,а) должны попасть все спектральные составляющие исходного сигнала и ни одна из спектральных составляющих соседних копий спектра исходного сигнала, возникающих в спектре $s_T(t)$ при дискретизации. Поскольку сдвиг соседних копий в составе спектра дискретизированного сигнала $s_T(t)$ определяется частотой дискретизации, несложно определить допустимые значения последней: $F > F_M + F_C = 2 + 3 = 5$ кГц. Обратите внимание на строгость неравенства, которая обусловлена дискретностью спектра $s_T(t)$.

Таким образом, указанный в условии сигнал можно дискретизировать и затем восстановить без потери информации, используя в качестве восстанавливающего ИФНЧ с частотой среза 3 кГц, если взять частоту дискретизации не менее 5 кГц (например, 6 кГц). На рис. 12.18,б показан спектр дискретизированного сигнала, полученного из исходного непрерывного $s(t)$ при допустимой частоте дискретизации в 6 кГц.

Р.7.3. Требуется передать дискретно информацию о модулированном радиосигнале, спектр которого простирается до частоты 105 кГц. С какой частотой следует посылать отсчеты мгновенных значений сигнала?

Решение. Из условия задачи невозможно узнать, какова же фактическая ширина спектра сигнала. Поэтому с позиций теоремы Котельникова к этому сигналу следует подходить как к видеосигналу, т. е. определять частоту дискретизации из условия $F > 2 \cdot F_M$. Значит $F > 210$ кГц.

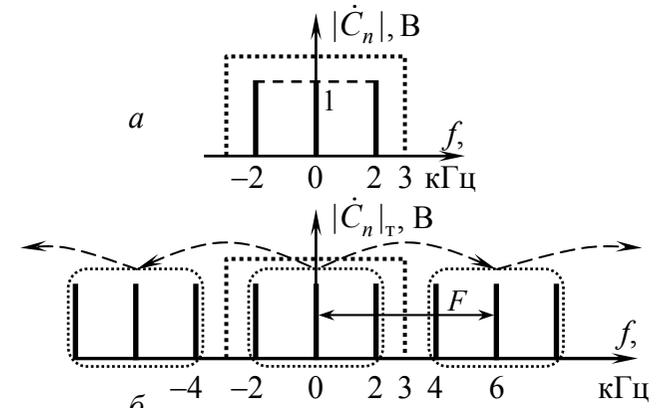


Рис. 12.18

Р.7.4. Требуется передать дискретно информацию о колебании $u(t) = 4 \cdot [1 + 0.5 \cdot \cos(\pi \cdot 10^4 \cdot t)] \cdot \cos(2\pi \cdot 10^5 \cdot t)$ В. С какой частотой следует посылать отсчеты мгновенных значений?

Решение. По условию речь идет об АМ-сигнале с частотой несущей $f_0 = 100$ кГц и тональной модуляцией частотой $F = 5$ кГц. Следовательно, высшая частота спектра исходного непрерывного сигнала $f_B = f_0 + F = 105$ кГц, низшая — $f_H = f_0 - F = 95$ кГц, а ширина спектра $\Delta f = 10$ кГц. На основании (7.10) наименьшая частота дискретизации соответствует числу $m_{\max} = \lceil 105/10 \rceil = 10$. Следовательно, наименьшее значение частоты дискретизации можно выбрать из условия $21 \text{ кГц} \leq F \leq 21.11 \text{ кГц}$; как видим, диапазон возможных значений не широк. Можно взять частоту F из большего интервала, но в более высокой области частот: например, (при $m = 5$) $42 \text{ кГц} \leq F \leq 47.5 \text{ кГц}$.

Р.7.5. Укажите все допустимые значения частот среза АЧХ идеального полосового фильтра для восстановления непрерывного сигнала $s(t) = 8 \cdot \cos(6\pi \cdot 10^4 \cdot t) \cdot \cos(\pi \cdot 10^4 \cdot t)$ В по его дискретным отсчетам при частоте дискретизации 24 кГц.

Решение. Для решения задачи достаточно построить комплексный спектр дискретизированного сигнала. Поскольку

исходный сигнал занимает своей правой полосой интервал частот от 25 кГц до 35 кГц включительно, а ближайшие к ней соседние копии спектра "+2л" – [13; 23] кГц, "+3л" – [37; 47] кГц, то нижнюю граничную частоту полосы пропускания идеального полосового фильтра следует взять исходя из строгого неравенства $23 \text{ кГц} < F_{\text{сн}} < 25 \text{ кГц}$, верхнюю – $35 \text{ кГц} < F_{\text{св}} < 37 \text{ кГц}$.

Р.7.6. В результате дискретизации треугольного колебания и последующего восстановления идеальным фильтром

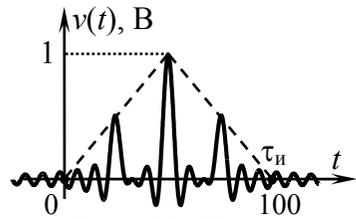


Рис. 12.19

нижних частот был получен сигнал, показанный на рис. 12.19. Определите использованную частоту дискретизации и параметры восстанавливающего фильтра. Можно ли улучшить форму восстанавливаемого сигнала? Если да, то как?

Решение. Сигнал на выходе восстанавливающего фильтра представляет собой сумму задержанных во времени на интервал $k \cdot T$ и взвешенных (усиленных) с коэффициентами $s(k \cdot T)$ импульсных характеристик фильтра нижних частот. Поскольку в качестве восстанавливающего фильтра использован идеальный ФНЧ, для которого $g_{\text{иф}}(t) = 2K_0 \cdot F_C \cdot \text{sinc}[2\pi \cdot F_C \cdot (t - t_3)]$ (график – рис. 12.20), то

$$v(t) = 2K_0 \cdot F_C \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot \text{sinc}[2\pi \cdot F_C \cdot (t - k \cdot T - t_3)],$$

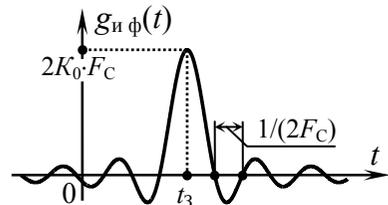


Рис. 12.20

где K_0, F_C, t_3 – соответственно коэффициент передачи, частота среза и время задержки отклика ИФНЧ.

Форма сигнала $v(t)$, показанного на рис. 12.19, однозначно указывает на то, что воздей-

ствующие на вход фильтра импульсы поступают недостаточно часто, так что создаваемые ими отклики (рис. 12.20) практически не перекрываются. В соответствии с интервалами между основными (тремя!) всплесками, наблюдаемыми на рис. 12.19, частота дискретизации составляет $F = 1/(\tau_n/4) = 4/\tau_n = 40 \text{ кГц}$. Интервал дискретизации при этом равен $T = 25 \text{ мкс}$.

Интервал между соседними нулями импульсной характеристики $g_{\text{иф}}(t)$ равен $t_0 = 1/(2F_C)$ (см. рис. 12.20), а из временной диаграммы сигнала $v(t)$ следует, что $t_0 = \tau_n/24$, таким образом, частота среза ФНЧ составляет $F_C = 1/(2 \cdot \tau_n/24) = 12/\tau_n = 120 \text{ кГц}$.

Из совпадения мгновенных значений сигналов $v(t)$ и $s(t)$ в момент времени $\tau_n/2$ следует, что $2K_0 \cdot F_C \cdot T \cdot S_0 = 1$, откуда $K_0 = 1/(2F_C \cdot T \cdot S_0) = 1/(6 \cdot S_0)$.

Итак, исходный непрерывный сигнал, изображенный на рис. 12.19 штриховой линией, дискретизируется с частотой $F = 40 \text{ кГц}$ и затем восстанавливается фильтром, имеющим частоту среза $F_C = 120 \text{ кГц}$. Таким образом, наблюдается соотношение $F_C = 3F$, что находится в явном противоречии с требованиями теоремы Котельникова. Исследуя спектр исходного сигнала, можно убедиться, что для снижения погрешности выгоднее всего значительно повысить частоту дискретизации. Поскольку спектр дискретизируемого сигнала весьма широк (формально, неограничен), то нулевой погрешности добиться таким образом невозможно, но форма получаемого сигнала станет гораздо ближе к исходной. На рис. 12.21,а представлен сигнал, восстановленный ИФНЧ по отсчетам $s(t)$ при частоте дискретизации $F = 2F_C = 240 \text{ кГц}$.

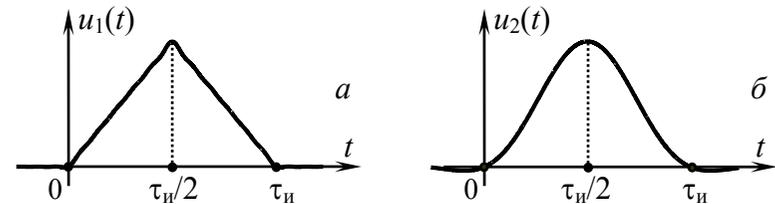


Рис. 12.21

Если нет возможности увеличить частоту дискретизации F , то для улучшения формы восстанавливаемого сигнала следует, по крайней мере, привести в соответствие друг с другом F и F_C – за счет уменьшения последней. В данном случае для этого следует взять частоту среза ИФНЧ в 6 раз ниже, а именно $F_C = 20$ кГц. Приближенный вид получаемого в результате сигнала на выходе идеального ФНЧ показан на рис. 12.21,б.

К РАЗДЕЛУ 8

Р.8.1. Экспоненциальный импульс $u(t) = U_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$ требуется представить в цифровой форме, приняв в качестве граничной частоты, на которой спектральная плотность импульса оказывается в сто раз меньше наибольшего значения, и удовлетворившись погрешностью квантования, соответствующей числу уровней $M = 32$. Определить общее число цифровых отсчетов сигнала.

Решение. Спектральная плотность экспоненциального импульса согласно [3, с. 58] определяется выражением $\dot{G}_u(\omega) = = U_0 / (\alpha + j\omega)$. Из условия $|\dot{G}_u(\omega_M)| = 0.01 \cdot |\dot{G}_u(0)|$, т. е. из равенства $1 / \sqrt{\alpha^2 + \omega_M^2} = 0.01 / \alpha$ находим граничную частоту спектра $\omega_M \approx 100 \cdot \alpha$. Приняв в соответствии с теоремой Котельникова интервал дискретизации равным $T = \pi / \omega_M$, находим $T \approx \pi / (100 \cdot \alpha)$. Таким образом, фактические отсчеты сигнала определяются выражением $u_k = U_0 \cdot \exp(-k \cdot \pi / 100)$, а приближенное значение номера уровня – выражением $\mu_k = (M - 1) \cdot u_k / U_0$.

Пусть, например, нас интересуют значения цифрового сигнала, соответствующие отсчетам $k = 40$ и 50 . Тогда для $k = 40$ имеем: $\mu_{40} = 31 \cdot \exp(-4\pi/10) = 8.82$; $\mu_{40} - [\mu_{40}] = 0.82$ и поэтому $m(40) = 9$. Для отсчета номера $k = 50$: $\mu_{50} = 6.44$; $\mu_{50} - [\mu_{50}] = 0.44$ и поэтому $m(50) = 6$.

Общее количество цифровых отсчетов N найдем из условия $\mu_{N-1} = 0.5$. Поскольку, с одной стороны, $u_{N-1} = U_0 \cdot \mu_{N-1} / (N - 1)$,

а с другой – $u_{N-1} = U_0 \cdot \exp(-(N-1) \cdot \pi / 100)$, то $N = 132$. Таким образом, цифровой импульс можно представить состоящим из 132-х отсчетов с крайними значениями $m(0) = 32$ и $m(131) = 1$. Для представления этого сигнала в двоичной форме достаточно будет применить пятиразрядный двоичный код.

Р.8.2. Цифровой сигнал представляет собой последовательность отсчетов со значениями уровней $m(k) = \{0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, \dots\}$ и т. д., полученных в результате округления в соответствии с формулой (8.2) приближенных значений уровней $\mu_k = 0.4 \cdot k$; общее число отсчетов составляет $N = 36$. Цифроаналоговый преобразователь характеризуется следующими параметрами: число разрешенных уровней $M = 16$, шаг квантования $\Delta u = 200$ мВ, тактовая частота $F = 100$ кГц, частота среза АЧХ восстанавливающего фильтра $F_C = 40$ кГц. Выяснить форму сигнала $\tilde{u}(t)$ на выходе ЦАП, если наименьшее значение сигнала s_{\min} равно нулю.

Решение. Фактические значения квантованного сигнала надо рассчитывать по формуле (8.3), т. е. $s_{\text{кв}}(k) = \{0, 0, 0.2, 0.2, 0.4, 0.4, 0.4, 0.6, \dots\}$ В. Сам сигнал, согласно (8.4)

$$\tilde{u}(t) = \sum_{k=0}^{35} s_{\text{кв}}(k) \cdot \frac{\sin [8\pi \cdot 10^4 \cdot (t - k \cdot 10^{-5})]}{8\pi \cdot 10^4 \cdot (t - k \cdot 10^{-5})} \text{ В.}$$

Конкретные значения функции $\tilde{u}(t)$ можно было бы рассчитать по указанной формуле с помощью цифровой ЭВМ.

К РАЗДЕЛУ 10

Р.10.1. Ансамбль сигналов $u_n(t)$ порождается колебанием $u(t) = 8 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot t + \psi_n)$ путем варьирования начальной фазой ψ_n , причем угол между ближайшими значениями фазы не должен быть меньше 30° . Какова база порождаемого ансамбля? Сколько сигналов можно сформировать таким образом?

Решение. Поскольку при формировании ансамбля сигналов используется одна степень свободы – фиксированное значение начальной фазы, то база $B = 1$.

Число сигналов в ансамбле равно числу возможных по условию задачи фазовых промежутков, т. е. $360^\circ/30^\circ = 12$.

Р.10.2. Для формирования ансамбля сигналов используется единственная функциональная ось $\cos(5 \cdot \Omega \cdot t)$ из базиса $\{\cos(k \cdot \Omega \cdot t), \sin(k \cdot \Omega \cdot t)\}$, где $\Omega = 2\pi \cdot 10^4$ рад/с. Какова база формируемых сигналов? Сколько их всего можно сформировать?

Решение: $B = 1$; произвольным выбором амплитуды колебания можно сформировать бесконечное количество сигналов.

Р.10.3. Для передачи символов некоего алфавита используются колебания вида $u_{nc}(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot F \cdot t)$ и $u_{ns}(t) = U_0 \times \sin(2\pi \cdot n \cdot F \cdot t)$, где $U_0 = 4$ В, $F = 1$ кГц, $1 \leq n \leq 32$. Какова база используемых сигналов?

Решение: $B = 64$.

Р.10.4. Для передачи символов некоего алфавита используются колебания вида $u_n(t) = n \cdot U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot t)$, где $U_0 = 4$ В, $F = 1$ кГц, $1 \leq n \leq 32$. Какова база используемых сигналов?

Решение: $B = 1$.

Р.10.5. Для передачи букв русского алфавита используются колебания вида $u_n(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot F \cdot t)$, где $U_0 = 4$ В, $F = 1$ кГц, $1 \leq n \leq 32$. Какова база используемых сигналов?

Решение: $B = 32$.

Р.10.6. Можно ли без изменения базы увеличить число сигналов в ансамбле, описанном в предыдущей задаче, чтобы можно было передавать не только буквы, но и знаки препина-

ния, цифры и другие текстовые символы? Какое максимальное количество сигналов можно сформировать из указанных сигналов при той же базе?

Решение: можно, если дополнительные сигналы сформировать путем линейной комбинации сигналов, указанных в задаче Р.10.5; количество сигналов, которые можно будет сформировать таким образом равно $C_{32}^1 + C_{32}^2 + C_{32}^3 + \dots + C_{32}^{32} = 2^{32} - 1$.

Р.10.7. Ансамбль сигналов формируется путем произвольного изменения формы импульса в интервале $0 \leq t \leq 0.4$ мс, но так, что спектр импульсов оказывается приблизительно ограниченным частотой 2.5 кГц; импульсы каждого сигнала повторяются с периодом 2 мс. Какова база сигналов? Какое количество сигналов можно таким образом сформировать?

Решение: $B = 11$; сформировать сигналов можно бесконечно много.

Р.10.8. Ансамбль сигналов формируется путем произвольного изменения формы импульса в интервале $0 \leq t \leq 0.4$ мс, но так, что спектр каждого импульса оказывается приблизительно ограниченным частотой 2.5 кГц. В остальные моменты времени значения всех сигналов, хотя и неизвестны, но одинаковы. Какова база сигналов? Какое количество сигналов можно таким образом сформировать?

Решение: $B = \infty$; возможное число сигналов бесконечно велико.

Р.10.9. Ансамбль сигналов формируется путем произвольного изменения амплитуды прямоугольного импульса длительностью 0.4 мс; импульсы повторяются с периодом 2 мс. Полагая верхнюю частоту спектра формируемых сигналов ограниченной частотой 2.5 кГц, рассчитайте базу сигналов. Из какого количества сигналов ансамбль можно сформировать?

Решение: $B = 1$; из бесконечно большого.

Р.10.10. Максимальная мгновенная частота ЧМ-колебания $f_{\max} = 20.1$ МГц, частота несущей $f_0 = 20$ МГц. Формы модулирующих импульсов таковы, что высшая частота спектра не превышает 1 кГц. Рассчитайте базу ЧМ-сигнала.

Решение: Девиация частоты $F_d = f_{\max} - f_0 = 0.1$ МГц; полагая, что длительность импульса $T_C \approx 1/F_M = 1$ мс, находим

$$B = \Delta f \cdot T_C \approx 2 \cdot F_d \cdot T_C = 200.$$

Р.10.11. Тональная частотная модуляция характеризуется параметрами: девиация частоты $F_d = 75$ кГц, частота модулирующего колебания $F = 5$ кГц, фаза заведомо не известна и определяет конкретный сигнал из всего ансамбля. Какова база ЧМ-сигнала?

Решение. Хотя число спектральных составляющих при данных условиях велико, но все их амплитуды связаны коэффициентами $J_n(m)$, а фазы (верхних боковых) соотношением $\psi_n = \psi_0 + n \cdot \Phi_1$. Поэтому $B = 1$.

Р.10.12. Частотная модуляция с заданной девиацией частоты F_d осуществляется колебанием сложной формы, заданным на интервале T_C . Спектральный состав модулирующего колебания: N гармоник с частотами от $f_1 = 0$ до $f_{N-1} = (N-1)/T_C$; этим гармоникам соответствуют парциальные индексы модуляции $m_1 > m_2 > \dots > m_{N-1}$, где $m_1 = F_d/F_1$, а $m_{N-1} = F_d/F_{N-1}$. Выразите базу ЧМ-сигнала через парциальные индексы модуляции.

Решение: $B = 2 \cdot F_d \cdot T_C = 2 \cdot F_d/F_1 = 2 \cdot m_1$.

Р.10.13. Частотная модуляция с девиацией частоты $F_d = 75$ кГц осуществляется колебанием сложной формы длительности $T_C = 2$ мс. Рассчитайте базу ЧМ-сигнала; рассчитай-

те величину наибольшего парциального индекса модуляции. Проверьте верность рассчитанного значения базы сигнала, воспользовавшись формулой, полученной в задаче Р.10.12.

Решение: $B = 30$; $m_{\max} = F_d \cdot T_C = 15$.

Р.10.14. В задаче Р.10.11 индекс модуляции совпадает с рассчитанным в задаче Р.10.13, а именно, $m = F_d/F = 15$. Казалось бы и базы, соответствующие условиям двух задач, должны быть одинаковы... Однако правильные ответы существенно отличаются. В чем причина этого отличия?

Решение. В задаче Р.10.11 предполагается тональная модуляция, а в задаче Р.10.13 – модуляция колебанием сложной формы, поэтому причина, объясняющее малое значение базы в задаче Р.10.11, к задаче Р.10.13 отношения не имеет.

Р.10.15. Полагая, что продолжительность речевого сигнала в задаче 5.2 [6] ограничена (например, временем $T_C = 5$ с), рассчитайте базу сигналов, которые можно было бы сформировать для передачи полезной информации.

Решение: $B = 120\,000$.

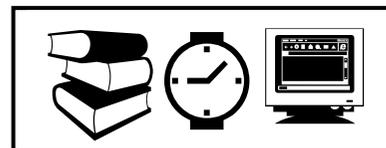
Р.10.16. Если бы возникла необходимость представить отрезок сигнала, о котором говорится в задаче 15.1 [6], в гармоническом базисе, то сколько бы спектральных составляющих для этого понадобилось? Какой величины пришлось бы для этого использовать базу?

Решение. Частотный интервал между гармониками спектра составил бы величину $F_n = 1/T_C$, так что общее число гармоник оказалось бы равным $F_M/F_n = F_n \cdot T_C$, а конкретно 450; база была бы вдвое больше, а именно 900.

Р.10.17. Сигналы некоторого ансамбля формируются путем линейной комбинации гармонических колебаний с частото-

тами 1, 2, ... 5 кГц. На примере сигнала, образованного колебаниями указанных частот с фиксированными амплитудами и фазами, покажите, что тот же сигнал можно было бы сформировать, располагая величинами пяти (в пределах одного периода) мгновенных отсчетов.

Решение. По сути условия речь идет о дискретизации по частоте спектральной плотности прямоугольной формы. Но такой плотности соответствует функция вида $\text{sinc}(2\pi \cdot F_M \cdot t)$, где $F_M = 5$ кГц. Дискретизация спектральной плотности эквивалентна повторению функции $\text{sinc}(2\pi \cdot F_M \cdot t)$ с периодом $T_n = 1/F_1$, а именно $T_n = 1$ мс. Следовательно, число отсчетов на периоде, а оно и будет составлять базу сигнала, определяется отношением $T_n/T = 2 \cdot F_M \cdot T_n$, т. е. равно 10. Это отсчеты $U_0, 0, 0, \dots$, следующие через интервал $T = 0.1$ мс.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. **Гоноровский И.С.** Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / И.С. Гоноровский. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Дрофа, 2006. – 719 с.

Дополнительный

2. **Гоноровский И.С.** Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов / И.С. Гоноровский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.

3. **Радиотехнические** цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / Д.В. Васильев, М.Р. Витоль, Ю.Н. Горшенков и др.; под ред. **К.А. Самойло**. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.

4. **Баскаков С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов по спец. "Радиотехника" / С.И. Баскаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.

5. **Жуков В.П.** Задачник по курсу "Радиотехнические цепи и сигналы": учеб. пособие для студентов вузов спец. "Радиотехника" / В.П. Жуков, В.Г. Карташев, А.М. Николаев. – М.: Высш. шк., 1986. – 159 с.

6. **Баскаков С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач: учеб. пособие для радиотехн. спец. вузов / С.И. Баскаков. – М.: Высш. шк., 1987. – 207 с.

7. **Радиотехнические** цепи и сигналы. Примеры и задачи: учеб. пособие для вузов / Г.Г. Галустов, И.С. Гоноровский, М.П. Демин и др.; под ред. **И.С. Гоноровского**. – М.: Радио и связь, 1989. – 248 с.

8. **Останков А.В.** Задачник по курсу "Радиотехнические цепи и сигналы": учеб. пособие / А.В. Останков. – 2-е изд., перераб. и доп. – Воронеж: ВГТУ, 2006. Ч. 1. – 165 с.

9. **Трахтман А.М.** Введение в обобщенную спектральную теорию / А.М. Трахтман. – М.: Советское радио, 1972. – 352 с.

10. **Харкевич А.А.** Спектры и анализ / А.А. Харкевич. – М.: Физматгиз, 1962. – 234 с.

11. **Зиновьев А.Л.** Введение в теорию сигналов и цепей: учеб. пособие для вузов / А.Л. Зиновьев, Л.И. Филиппов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1975. – 264 с.

12. **Заездный А.М.** Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи / А.М. Заездный. – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 536 с.

13. **Андреев В.С.** Теория нелинейных электрических цепей: учеб. пособие для вузов / В.С. Андреев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 280 с.

14. **Хургин Я.И.** Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике / Я.И. Хургин, В.П. Яковлев. – М.: Физматгиз, 1962. – 220 с.

15. **Зернов Н.В.** Теория радиотехнических цепей / Н.В. Зернов, В. Г. Карпов. – Л.: Госэнергоиздат, 1972. – 816 с.

16. **Финк Л.М.** Сигналы, помехи, ошибки... Заметки о некоторых неожиданностях, парадоксах и заблуждениях в теории связи / Л.М. Финк. – М.: Связь, 1978. – 272 с.

17. **Карташев В.Г.** Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: учеб. пособие для вузов / В.Г. Карташев. – М.: Высш. шк., 1982. – 118 с.

18. **Ефимов А.М.** Математический анализ (специальные разделы). Ч. 1: Общие функциональные ряды и их приложение / А.М. Ефимов. – М.: Высш. шк., 1980. – 279 с.

19. **Бронштейн И.Н.** Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Физматгиз, 1986. – 544 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Раздел 1. Представление непрерывных сигналов гармоническими функциями	6
Раздел 2. Временное, спектральное и векторное описание модулированных сигналов	22
Раздел 3. Представление периодических сигналов обобщенным рядом Фурье	33
Раздел 4. Комплексное обобщение сигналов	37
Раздел 5. Описание корреляционных характеристик сигналов.....	49
Раздел 6. Описание дискретизированных сигналов	53
Раздел 7. Представление сигналов в базисе Котельникова ..	63
Раздел 8. Цифровое представление сигналов.....	78
Раздел 9. Геометрическое представление сигналов	82
Раздел 10. База сигнала. Использование понятия базы для описания сигналов.....	83
Раздел 11. Ответы на вопросы	98
Раздел 12. Решения задач	108
Библиографический список	147

Учебное издание

Токарев Антон Борисович
Останков Александр Витальевич

ХАРАКТЕРИСТИКИ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В авторской редакции

Подписано в печать 7.05.2007.

Формат 60×84/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 6,8. Тираж 250 экз.

Заказ № .

ГОУВПО "Воронежский государственный технический
университет"

394026 Воронеж, Московский просп., 14