

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий проектирования

**65 - 2022**

**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению лабораторных работ  
для студентов направления подготовки бакалавров  
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»  
очной и заочной форм обучения



Воронеж 2022

УДК 681.3.06(07)  
ББК 32.973

**Составитель:**  
*О.В. Собенина*

**Модели и методы анализа проектных решений:** методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине для студентов направления подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» очной и заочной форм обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: О.В. Собенина. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. - 35 с.

Методические указания содержат необходимые для выполнения лабораторных работ теоретические сведения, практические задания и варианты заданий.

Издание предназначено для студентов очной и заочной форм обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле «МУ Лабораторные работы МиМАПР (очное, заочное).pdf».

Библиогр.: 5 назв.

**УДК 681.3.06(07)**  
**ББК 32.973**

**Рецензент** - В.В. Горбунов, канд. физ-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики

*Издается по решению редакционно-издательского совета  
Воронежского государственного технического университета*

## ВВЕДЕНИЕ

Проектирование технического объекта связано с созданием, преобразованиями и представлением в принятой форме образа этого объекта. Образ объекта или его составных частей может создаваться в воображении человека в результате творческого процесса или генерироваться по некоторым алгоритмам в процессе взаимодействия человека и ЭВМ. В любом случае проектирование начинается при наличии задания на проектирование, которое отражает потребности общества в получении некоторого технического изделия. Это задание представляется в виде тех или иных документов и является исходным (первичным) описанием объекта. Результатом проектирования, как правило, служит полный комплект документации, содержащий достаточные сведения для изготовления объекта в заданных условиях. Эта документация представляет собой окончательное описание объекта.

Проектирование — процесс, заключающийся в преобразовании исходного описания объекта в окончательное описание на основе выполнения комплекса работ исследовательского, расчетного и конструкторского характера.

Современный инженер обязан представлять особую роль математических моделей и анализа проектных решений при проектировании технических объектов. Создание и сопровождение программно-методических комплексов проектирования невозможно без четкого осмысления методов и алгоритмов реализуемых в них.

Математическое обеспечение автоматизированного проектирования включает в себя математические модели объектов проектирования, методы и алгоритмы выполнения проектных процедур.

# Лабораторная работа № 1

## АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Цель работы: изучение аппроксимаций дифференциальных операторов, использование их при построении разностных схем для решения дифференциальных уравнений в частных производных.

### Теоретические сведения

Пусть непрерывная функция  $\varphi(x)$ , определенная на отрезке, описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} + A\varphi = 0, \quad (1)$$

где  $A$  — константа; задано также граничное условие  $\varphi(0) = 1$  и при дискретизации области была построена сетка с постоянным шагом  $h$ .

Заменим дифференциальный оператор  $L_\varphi = \frac{d\varphi}{dx}$  разностным:

$$L_{h+} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}, \quad (2)$$

где  $L_{h+}$  — правая разностная производная.

Подставив (2) в (1), получим разностное уравнение

$$[\varphi(x+h) - \varphi(x)]/h + A\varphi(x) = 0. \quad (3)$$

Умножив (3) на  $h$  и полагая последовательность  $x = 0, h, 2h, \dots$ , перейдем к системе алгебраических уравнений:

$$\varphi(h) + (Ah - 1)\varphi(0) = 0;$$

$$\varphi(2h) + (Ah - 1)\varphi(h) = 0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varphi(Nh) + (Ah - 1)\varphi(Nh-1) = 0; \quad (4)$$

Решая (4) относительно сеточной функции, найдем таблицу значений, аппроксимирующую решение краевой задачи (1). При уменьшении шага  $h$  сетка становится все «гуще», а таблица значений сеточной функции — все подробнее. При неограниченном стремлении шага к нулю можно было бы получить значение искомой функции в каждой точке области. Но, в реальных случаях степень приближения к точному решению ограничивается рядом факторов, важнейшим из которых является размерность результирующей системы уравнений (4).

Для аппроксимации дифференциального оператора разностным кроме (2) часто пользуются выражением:

$$L_{h-} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}, \quad (5)$$

где  $L_{h-}$  — левая разностная производная.

Для аппроксимации  $L_\varphi$  можно воспользоваться любой линейной комбинацией (2), (5), т.е.  $L_{h^\sigma} = \sigma L_{h^+} + (1-\sigma)L_{h^-}$ , где  $\sigma$  — любая вещественная константа. При  $\sigma=0,5$  дифференциальный оператор  $L_\varphi$  аппроксимируется центральной разностной производной.

$$L_{h^0} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (2), получим другой разностный аналог задачи (1):

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{(2h) + A\varphi(x)} = 0. \quad (7)$$

При переходе от дифференциальной краевой задачи к разностной необходимо также аппроксимировать граничные условия. В (1) граничные условия при использовании (2) можно аппроксимировать точно:

$$\varphi(0) = 1. \quad (8)$$

Совокупность разностного уравнения и разностных краевых условий называется *разностной схемой краевой задачи*. Уравнения (3) и (8) являются разностной схемой краевой задачи (1). На рис. 1 приведены примеры шаблонов, наиболее часто использующихся при аппроксимации дифференциальных операторов  $d\varphi/dx$  и  $d\varphi/dy$  для функции  $\varphi = \varphi(x, y)$  в двумерной области.

Шаблон типа «крест» (рис. 1, а) соответствует аппроксимации:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi(x+h_x, y) - \varphi(x-h_x, y)}{2h_x};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx \frac{\varphi(x, y+h_y) - \varphi(x, y-h_y)}{2h_y},$$

где  $h_x$  и  $h_y$  - шаги сетки в направлениях  $x$  и  $y$ .

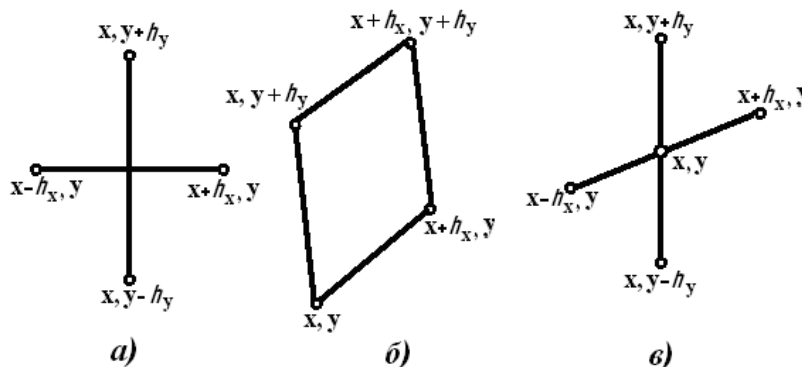


Рис. 1. Примеры шаблонов в двумерной области

Четырехточечный шаблон (рис. 1, б) соответствует аппроксимации:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx 0,5 \frac{\varphi(x+h_x, y) - \varphi(x, y)}{h_x} + 0,5 \frac{\varphi(x+h_x, y+h_y) - \varphi(x, y+h_y)}{h_x};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx 0,5 \frac{\varphi(x, y+h_y) - \varphi(x, y)}{h_y} + 0,5 \frac{\varphi(x+h_x, y+h_y) - \varphi(x+h_x, y)}{h_y}.$$

### Примеры устойчивых разностных схем для решения краевой задачи с краевыми условиями первого рода

Температурное поле в сплошной среде описывается уравнением теплопроводности

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0. \quad (9)$$

Областью определения искомой непрерывной функции  $T(x, y)$  является прямоугольник, приведенный на рис. 2. Для решения задачи используется равномерная по направлениям осей  $x$  и  $y$  сетка шагами  $h_x$  и  $h_y$  соответственно. Для произвольного внутреннего узла  $(x, y)$  вторые производные по координатам аппроксимируются разностными аналогами  $P_x$  и  $P_y$  с помощью пятиточечного шаблона (рис. 1, в):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx P_x = \frac{1}{h_x} \left[ \frac{T(x+h_x, y) - T(x, y)}{h_x} - \frac{T(x, y) - T(x-h_x, y)}{h_x} \right];$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx P_y = \frac{1}{h_y} \left[ \frac{T(x, y+h_y) - T(x, y)}{h_y} - \frac{T(x, y) - T(x, y-h_y)}{h_y} \right].$$

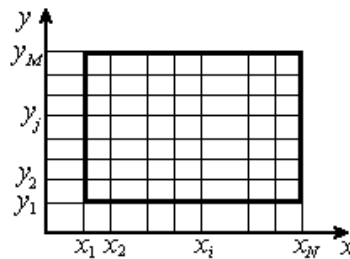


Рис. 2. Построение сетки в двумерной области

Введя обозначения  $T(x+h_x, y) = T_{i+1,j}$ ;  $T(x, y-h_y) = T_{i,j-1}$  и т. д., можно записать в более компактной форме:

$$P_x = \left[ \frac{(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j})}{h_x^2} \right];$$

$$P_y = \left[ \frac{(T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1})}{h_y^2} \right]; \quad (10)$$

Подставив (10) в (9) и считая  $\lambda_x = \lambda_y = 1$ , получим разностное уравнение:

$$P_x + P_y + Q(ih_x, jh_y) = 0. \quad (11)$$

Прямолинейные границы, области позволяют в данном случае точно аппроксимировать краевые условия:

$$T_{i,j}^{sp} = T(ih_x, jh_y), \quad (12)$$

где точки  $ih_x$  и  $jh_y$  принадлежат границе области.

Разностная схема (11), (12) устойчива и аппроксимирует исходную краевую задачу (9) со вторым порядком точности относительно шага. Кроме того, она регулярна по направлениям осей  $x$  и  $y$ , что позволяет создавать быстродействующие алгоритмы решения результирующей системы алгебраических уравнений.

### Примеры практических заданий

1. Для уравнения  $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} = 0$  при  $\rho C_p = 1$  и  $\lambda_x = 1$ , описывающего одномерный случай конвективного переноса теплоты, постройте разностный аналог, воспользовавшись равномерной сеткой  $t^n = n\tau$  при  $n=0, 1, 2, \dots$ ,  $x_m = mh$ ,  $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $\tau$  — постоянный шаг сетки по времени;  $h$  — постоянный шаг сетки по координате. При аппроксимации частных производных используйте шаблоны, приведенные на рис. 3.

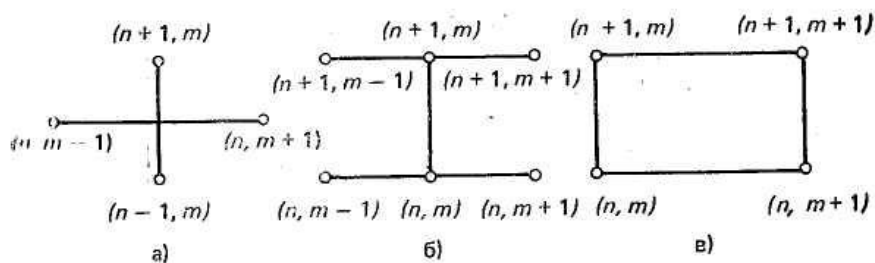


Рис. 3

2. Для уравнения  $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ , при  $\rho C_p = 1$  и  $\lambda_x = 1$ , описывающего нестационарное одномерное распределение теплоты, постройте разностный аналог, воспользовавшись равномерной сеткой из задачи 1. При аппроксимации частных производных используйте шаблоны, приведенные на рис. 4, а-в.

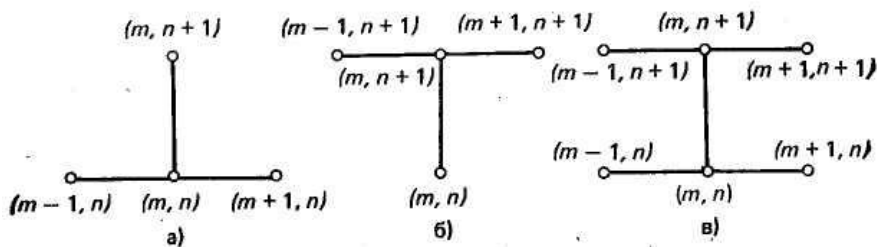


Рис. 4

3. Составьте неявную и явную разностные схемы для уравнения  $\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$  при  $\rho C_p = 1$  и  $\lambda_x = \lambda_y = 1$ , описывающего двумерное нестационарное распределение теплоты в плоской пластине.

## Лабораторная работа № 2

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Цель работы: изучение метода конечных разностей. Получение практических навыков использования метода конечных разностей при исследовании прогиба балки и пластины.

#### Теоретические сведения

В методе конечных разностей (МКР) на область рассматриваемого тела наносится сетка линий, точки пересечения которых называются узлами. В случае стержня или балки сетка будет одномерной, узлы будут располагаться на их оси. Неизвестными в узлах считаются значения функций, относительно которых справедливы известные дифференциальные уравнения механики деформируемого твердого тела.

Производные в дифференциальных уравнениях аппроксимируют приближенными алгебраическими формулами. Эти формулы называются конечно-разностными и неизвестными в них являются значения функций в узлах. Замена производных в дифференциальном уравнении конечно-разностными формулами приводит к системе линейных алгебраических уравнений.

Граничные условия, содержащие производные, с помощью конечно-разностных формул также заменяются алгебраическими уравнениями. Решение системы линейных алгебраических уравнений позволяет найти распределение напряжений в теле и изменения его размеров и формы.

Основная идея метода конечных разностей (метода сеток) для приближенного численного решения краевой задачи для двухмерного дифференциального уравнения в частных производных состоит в том, что

1) на плоскости в области  $A$ , в которой ищется решение, строится сеточная область  $A_s$  (рис. 5), состоящая из одинаковых ячеек размером  $s$  ( $s$  – шаг сетки) и являющаяся приближением данной области  $A$ ;

2) заданное дифференциальное уравнение в частных производных заменяется в узлах сетки  $A_s$  соответствующим конечно-разностным уравнением;

3) с учетом граничных условий устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области  $A_s$ .

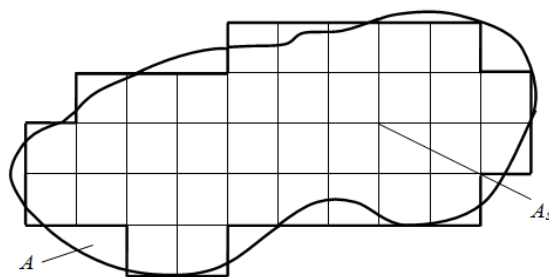


Рис. 5. Построение сеточной области



Решая полученную систему конечно-разностных алгебраических уравнений, получим значения искомой функции в узлах сетки  $As$ , т.е. приближенное численное решение краевой задачи. Выбор сеточной области  $As$  зависит от конкретной задачи, но всегда надо стремиться к тому, чтобы контур сеточной области  $As$  наилучшим образом аппроксимировал контур области  $A$ .

Поясним метод конечных разностей на примере балки (рис. 6). Разобьем длину балки на несколько одинаковых участков с шагом  $a$  и обозначим через  $v_i$  прогиб в  $i$ -й точке на границе участков. Значения прогиба в соседних точках будут соответственно:  $v_{i+1}$ ,  $v_{i+2}$ ,  $v_{i-1}$ ,  $v_{i-2}$  и т.д.

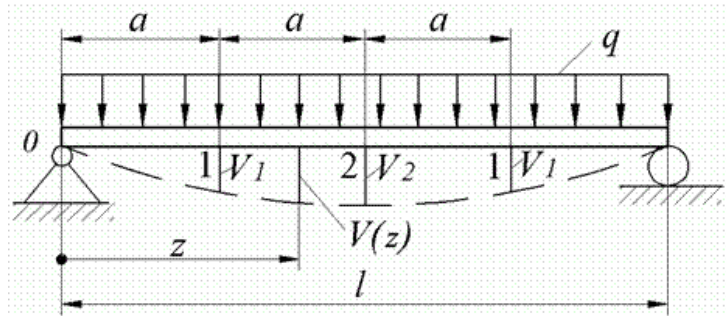


Рис. 6. Метод конечных разностей на примере балки

Из теории изгиба бруса известны следующие дифференциальные уравнения, связывающие между собой прогиб, изгибающий момент и интенсивность распределенной нагрузки:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M}{EI_x}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -q. \quad (13)$$

Аппроксимацию производной второго порядка проведем по формуле:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{a^2}. \quad (14)$$

Заменяя вторые производные, согласно равенству (14), получим уравнения изгиба балки в конечных разностях:

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = -\frac{M_i}{EI_x} a^2, \quad (15)$$

$$M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} = -q_i a^2. \quad (16)$$

### Практическая часть

**Задача.** Вычислить изгибающий момент и прогиб балки, изображенной на рис. 16.

**Решение.** Возьмём число участков, равное четырем, тогда  $a = \frac{l}{4}$ . При  $q = \text{const}$  и  $M_0 = 0$  в точках 1 и 2 получим:

$$M_2 - 2M_1 + M_0 = -\frac{ql^2}{16}, \quad M_1 - 2M_2 + M_1 = -\frac{ql^2}{16}.$$

Из этих уравнений найдем  $M_1 = \frac{3}{32} ql^2$ ,  $M_2 = \frac{1}{8} ql^2$ .

Полученные значения совпадают с точными значениями изгибающего момента при  $z = \frac{l}{4}$  и  $z = \frac{l}{2}$ .

Приняв во внимание, что при  $z=0$ ,  $v=0$ , получим

$$v_2 - 2v_1 + 0 = -\frac{3}{32} \frac{ql^2}{EI_x} \frac{l^2}, \quad v_1 - 2v_2 + v_1 = -\frac{1}{8} \frac{ql^2}{EI_x} \frac{l^2}.$$

Решение этой системы уравнений дает следующие значения перемещений:

$$v_1 = \frac{5}{32 \cdot 16} \frac{ql^4}{EI_x}, \quad v_2 = \frac{7}{32 \cdot 16} \frac{ql^4}{EI_x} = v_{max}.$$

Полученное значение максимального прогиба отличается от точного значения  $v_{max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x}$  приблизительно на 5%. Более точный результат можно получить, разбив длину балки на большее число участков.

### Исследование прогиба пластины

При расчете пластин по методу конечных разностей плоскость пластины покрывают сеткой пересекающихся линий. Для простоты возьмем ортогональную сетку с одинаковым шагом по обоим направлениям (рис. 7).

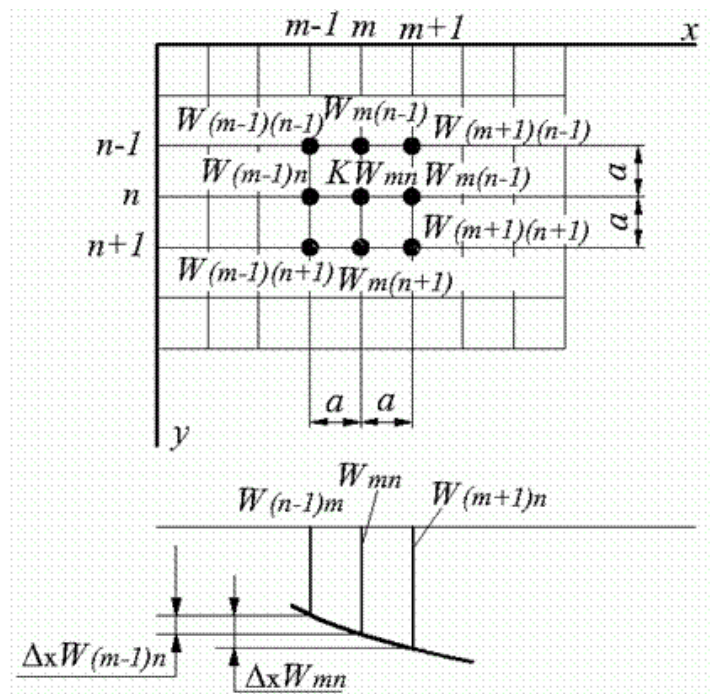


Рис. 7. Расчет пластины методом конечных разностей

Рассмотрим некоторую точку  $K$ , расположенную на пересечении линий, обозначенных символами  $m$  и  $n$ . Значения прогиба пластины  $w$  в этой точке, а также в соседних узловых точках будем обозначать так, как указано на рис. 7. Если края пластины прямолинейные и закреплены шарнирно, то в этом случае уравнения теории изгиба пластин преобразуются следующим образом. Введя обозначение

$$\frac{M_x + M_y}{1 + \mu} = M. \quad (17)$$

Получают систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p. \quad (19)$$

Эта система двух уравнений (18) и (19) второго порядка эквивалентна одному уравнению четвертого порядка. Заменяя вторые производные их приближенными выражениями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Delta_{xx}(w_{mn}),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Delta_{yy}(w_{mn}),$$

придем к следующим уравнениям:

$$\Delta_{xx}(w) + \Delta_{yy}(w) = -\frac{M}{D} a^2, \quad (20)$$

$$\Delta_{xx}(M) + \Delta_{yy}(M) = -p a^2. \quad (21)$$

В таком виде уравнения удобны для расчета пластин с прямолинейными шарнирно опертыми краями, так как в этом случае на контуре  $w=0$ ,  $M_n=0$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0$ ,  $\frac{\partial^2 M}{\partial n^2}=0$  и, следовательно,  $M=0$ .

**Задача.** Определить значения изгибающих моментов и прогибов для квадратной пластины с шарнирно опертыми краями, нагруженной равномерным давлением (рис. 8).

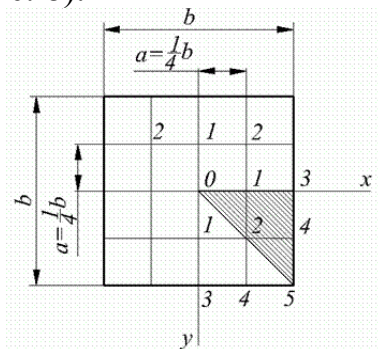


Рис. 8

Решение. Длину стороны пластины обозначим через  $b$ , шаг сетки  $a$  возьмем равным  $\frac{1}{4}b$ . Ввиду симметрии достаточно рассмотреть одну восьмую часть квадрата, которая на рис. 8 заштрихована.

Применим уравнение (21) поочередно к точкам 0,1,2:

$$\Delta_{xx}(M_0) + \Delta_{yy}(M_0) = -pa^2,$$

$$\Delta_{xx}(M_1) + \Delta_{yy}(M_1) = -pa^2,$$

$$\Delta_{xx}(M_2) + \Delta_{yy}(M_2) = -pa^2.$$

Подставив значения вторых разностей, получим:

$$\text{в точке 0: } M_1 - 2M_0 + M_1 + M_1 - 2M_0 + M_1 = 4M_1 - 4M_0 = -\frac{pb^2}{16},$$

$$\text{в точке 1: } M_3 - 2M_1 + M_0 + M_2 - 2M_1 + M_2 = M_0 - 4M_1 + 2M_2 = -\frac{pb^2}{16},$$

$$\text{в точке 2: } M_4 - 2M_2 + M_1 + M_1 - 2M_2 + M_4 = 2M_1 - 4M_2 = -\frac{pb^2}{16}.$$

Так как в точках 3,4,5,  $M=0$ , то получим систему

$$4M_1 - 4M_0 = -\frac{pb^2}{16},$$

$$M_0 - 4M_1 + 2M_2 = -\frac{pb^2}{16},$$

$$2M_1 - 4M_2 = -\frac{pb^2}{16}.$$

Решение этой системы уравнений дает

$$M_0 = \frac{9}{2} \cdot \frac{pb^2}{64}; \quad M_1 = \frac{7}{2} \cdot \frac{pb^2}{64}; \quad M_2 = \frac{11}{4} \cdot \frac{pb^2}{64}.$$

Зная теперь функцию в узловых точках, применим уравнение (20) к тем же точкам 0, 1, 2:

$$\Delta_{xx}(w_0) + \Delta_{yy}(w_0) = -\frac{9}{2} \frac{pb^2}{64D} a^2,$$

$$\Delta_{xx}(w_1) + \Delta_{yy}(w_1) = -\frac{7}{2} \frac{pb^2}{64D} a^2,$$

$$\Delta_{xx}(w_2) + \Delta_{yy}(w_2) = -\frac{11}{4} \frac{pb^2}{64D} a^2.$$

После подстановки значений вторых разностей с учетом того, что  $w_3=0$ ,  $w_4=0$  и  $w_5=0$ , получим

$$4w_1 - 4w_0 = -\frac{9}{2} \cdot \frac{pb^4}{64 \cdot 16D},$$

$$w_0 + 2w_2 - 4w_1 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{pb^4}{64 \cdot 16D},$$

$$2w_1 - 4w_2 = -\frac{11}{4} \cdot \frac{pb^4}{64 \cdot 16D},$$

откуда

$$w_0 = \frac{66pb^4}{16^2 \cdot 64D}, \quad w_1 = \frac{48pb^4}{16^2 \cdot 64D}, \quad w_2 = \frac{35pb^4}{16^2 \cdot 64D}.$$

Вычисленный прогиб в центре пластины

$$w_0 = \frac{66pb^4}{12^2 \cdot 64D} = 0,00403 \frac{pb^4}{D}$$

отличается от точного значения  $w_0 = 0,00406 \frac{pb^4}{D}$  меньше, чем на 1%.

Подсчитаем изгибающие моменты. В центре пластины по условию симметрии

$$M_{x0} = M_{y0} = \frac{M_0(1+\mu)}{64 \cdot 2}, \text{ следовательно, } M_{x0} = \frac{9}{2} \cdot \frac{pb^2(1+0,3)}{64 \cdot 2} = 0,0457 pb^2.$$

Точное же значение момента  $M_{x0} = 0,0459 pb^2$ . Погрешность составляет 4,5%.  
Для повышения точности решения следует взять более мелкую сетку.

### Примерное практическое задание

Решить задачу методом конечных разностей для уравнения:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

с начальными условиями

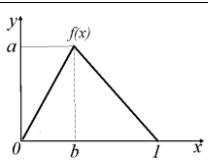
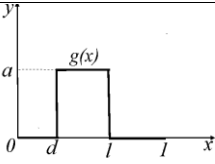
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями  $u(0,t) = u(1,t) = 0$ .

Вычисления выполнить с шагом  $h$  по  $x$  равным 0.1, с шагом  $\tau$  по  $t$  равным 0.04, провести вычисления для 16 временных слоев с получением результатов на каждом шаге.

Исходные данные приведены в таблице ниже:

$f(x)$	$g(x)$	$a$	$b$	$c$	$d$	$l$
		7.0	0.35	-2.1	0.35	0.75

### Лабораторная работа № 3

## РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В MATHCAD

Цель работы: научиться решать краевые задачи в системе MathCAD с использованием разностных схем.

### Теоретические сведения

Алгоритм метода конечных разностей состоит из этапов, традиционных для метода сеток:

- 1) построение сетки в заданной области (дискретизация задачи);
- 2) замена дифференциального оператора в исходном дифференциальном уравнении известным разностным аналогом (алгебраизация задачи);
- 3) решение полученной системы алгебраических уравнений.

Для построения разностной схемы на расчетный интервал необходимо нанести сетку линий. Если уравнение содержит производную по одной переменной, то сетка окажется одномерной. Точки пересечения линий называются узлами, в которых ищутся значения функции. Полученные решения называются сеточными функциями. Понятно, что они не могут быть непрерывными и представляют собой множество, поскольку вычислены при определенных значениях аргумента. Поэтому при построении графика для получения гладкой кривой вычисленные ранее приближения интерполируются подходящим полиномом.

Расстояния между узлами определяются выбранным шагом сетки  $h$ . На каждом шаге дифференциальное уравнение аппроксимируется конечно-разностным алгебраическим, где в качестве переменной выступает искомое значение функции в узле  $i$ . Если в нашем уравнении содержится производная первого и второго порядков, то можно приближенно записать.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} \quad (22)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\frac{x_{i+1} - x_i}{h} - \frac{x_i - x_{i-1}}{h}}{h} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} \quad (23)$$

Если граничные условия заданы в форме производных, их также необходимо заменить разностными аналогами. Учитывая это, с помощью простых преобразований можно получить систему линейных алгебраических уравнений, называемую разностной схемой.

Количество шагов  $N$  определяет количество алгебраических уравнений в системе:  $N+1$  (с учетом граничных условий). К разностной схеме предъявляются следующие требования: во-первых, она должна наилучшим образом аппроксимировать дифференциальное уравнение, во-вторых, при стремлении длины шага к нулю решение разностной задачи должно сходиться к решению дифференциальной задачи. Безусловно, для обеспечения сходимости необходима также устойчивость разностной схемы. Подставив левое граничное условие в первое уравнение, а правое — в последнее, можно обнаружить, что матрица коэффициентов при неизвестных  $A$  симметрична и трехдиагональна. Таким образом, задача сводится к решению системы

$$Ax = B, \quad (24)$$

где  $B$  и  $x$  — векторы правых частей и неизвестных соответственно.

### Программирование в системе MathCAD

Возможности MathCAD позволяют решить подавляющее большинство задач без использования программирования, причем несколькими способами. Одна есть класс задач, при решении которых без программирования не обойтись. Все операторы и элементы языка программирования располагаются на панели инструментов Programming (Программирование) (рис. 9), которая относится к панели Math (Математические).

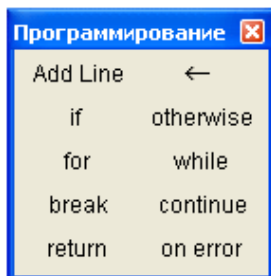


Рис. 9. Панель Программирование

Программа MathCAD есть частный случай выражения MathCAD. Подобно любому выражению программа возвращает значение, если за ней следует знак равенства. Обычное выражение MathCAD состоит из одной строки. Выражение–программа содержит много строк. Фактически выражение–программа — это составное выражение.

Чтобы написать программу, прежде всего для нее должен быть создан специальный обособленный от остального документа блок. Выглядит он как черная вертикальная линия с маркерами, в которые заносятся те или иные выражения алгоритма. Чтобы построить единичный элемент программного блока, нужно нажать кнопку команды Add Line (Добавить линию) панели

Programming (Программирование) или воспользоваться «горячей» клавишей «]».

Для создания программы нужно выполнить следующую процедуру.

1. Ввести имя выражения–программы.
2. Ввести оператор присваивания (:=).
3. Щелкнуть на кнопке Add Line столько раз, сколько строк должна содержать программа.
4. В появившихся местах ввести нужные операторы, лишние места ввода удалить.

Для присвоения значений переменным и функциям в программах Mathcad используется специальный оператор: «←» (Local Definition — Локальное присваивание), расположенный на панели Programming (также вводится сочетанием клавиш Shift + «[»). Использовать оператор обычного присваивания «:=» или оператор вывода «=» в программах нельзя. Однако вид уже введенного оператора присваивания может быть сменен с «←» на «=». Для этого нужно щелкнуть на соответствующей строке программы правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню открыть меню View Definition As (Видеть присваивание как). В данном меню нужно выбрать пункт Equal (Равенство) (по умолчанию выбран пункт Left Arrow (Левая стрелка)).

Присваивание значений в программах имеет ряд особенностей. Важнейшим из них является то, что присвоение величин используемым алгоритмом функциям и переменным может быть произведено как в самой программе, так и выше нее. Данные два подхода существенно отличаются

Если значение переменной или функции присваивается в программе посредством оператора «←», то такая переменная или функция будет являться локальной. То есть она будет видимой только в рамках программы. Как-то повлиять на объекты вне программы она не сможет (равно как извне к ней нельзя будет получить доступ).

Если переменная или функция задается выше программы с помощью оператора «:=», то она будет обладать глобальной видимостью. То есть такая переменная или функция будет доступна любому нижележащему объекту, в том числе и коду программ. Однако программа может только прочитать значение глобальной переменной или вызвать глобальную функцию. Как-то изменить значение глобальной переменной или функции программа не может. Это очень важно учитывать при написании алгоритмов. Если программа должна осуществлять какую-то модификацию объекта (например, возводить все элементы массива в квадрат), то результат своей работы она должна возвращать.

Условный оператор if действует в два этапа. Сначала проверяется условие, записанное справа от оператора if, и, если оно истинно, выполняется выражение слева от него, если ложно, происходит переход к следующей строке программы.



Операторы цикла. В обычном документе MathCAD использование дискретной переменной фактически равноценно применению оператора цикла, служащего для вычисления одного выражения. MathCAD вычисляет выражения сверху вниз и переходит к следующему выражению, лишь окончательно завершив все вычисления в предыдущем выражении, и больше вернуться к нему не может. Если же в каждом цикле должно быть вычислено несколько выражений, необходимо составлять программу.

### Практическая часть

Требуется решить краевую задачу:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) - u(t)\frac{d}{dt}x(t) - v(t)x(t) - w(t) = 0 \quad (25)$$

на интервале  $[a; b]$  с начальными условиями  $x(a)$ ,  $x(b)$ . Значения параметров приведены в таблице 1.

В MathCAD нет собственных алгоритмов, позволяющих находить решение конечно-разностным методом. Однако построить разностную схему можно, воспользовавшись программными средствами.

#### Порядок выполнения работы

1. Зададим интервал интегрирования, величину шага, коэффициенты уравнения, граничные условия и узловые точки расчетной сетки.

$$N := 500$$

$$a := 0 \quad b := 20$$

$$h := \frac{b - a}{N}$$

$$u(t) := 0.05 \quad v(t) := -5 \quad w(t) := \sin(0.05 \cdot t)$$

$$x_a := 0 \quad x_b := 1$$

$$i := 1..N - 1 \quad t_i := a + i \cdot h$$

2. Определяем для системы разностных уравнений трехдиагональную матрицу коэффициентов при неизвестных.

$$A_{i,i} := 2 + h^2 \cdot v(t_i) \quad A_{i,i+1} := \frac{h}{2} \cdot u(t_i) - 1 \quad A_{i,i-1} := \frac{-h}{2} \cdot u(t_i) - 1$$

$$A := \text{submatrix}(A, 1, N - 1, 1, N - 1)$$

### 3. Задаем вектор правых частей

$$B := \begin{cases} B_0 \leftarrow \left( -h^2 \cdot w(t_1) \right) + x_a \cdot \left( \frac{h}{2} \cdot u(t_1) + 1 \right) \\ \text{for } i \in 1 \\ \quad x := \text{lsolve}(A, B) \\ \quad B_i \leftarrow - \\ B_{N-2} \leftarrow x := \text{stack}(x_a, x, x_b) u(t_{N-1}) + 1 \\ B \end{cases}$$

### 4. Решаем систему разностных уравнений

### 5. Результат работы разностной схемы представлен на рис.10.

Можно отметить некоторые особенности построенной разностной схемы. Вторая производная должна быть в первой степени и не содержать каких либо сомножителей, краевые условия должны быть поставлены строго на границах интервала поиска. Коэффициенты при остальных слагаемых, а также свободный член уравнения в общем случае могут являться функциями, поэтому в программе заданы в виде  $u(t)$ ,  $v(t)$  и  $w(t)$ . Точность варьируется в зависимости от количества шагов, однако не следует забывать, что при слишком большом их увеличении резко возрастает время расчетов, значительная часть которого используется функцией `Isolve`.

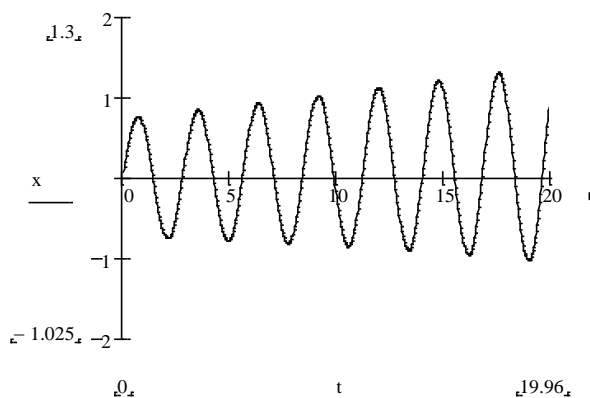


Рис. 10. Результат работы программы

Связано это с тем, что встроенному алгоритму приходится работать с матрицами больших размеров. В нашем случае, когда количество узловых точек равно 500, матрица  $A$  имеет размерность  $500 \times 500$ . Нетрудно понять, что при увеличении  $N$  в арифметической прогрессии скорость вычислений будет падать в геометрической прогрессии. Например, уже при  $N=1000$  расчет длится недопустимо долго.

Решить возникшую проблему довольно просто. Как известно, самым популярным алгоритмом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод последовательного исключения Гаусса. В классической форме для  $N-1$  уравнений системы он требует порядка  $N^3$  арифметических операций. Однако для систем, содержащих матрицы особой структуры имеется множество вариантов этого алгоритма, которые позволяют во много раз повысить его быстродействие. Выше упоминалось, что матрица  $A$  имеет ленточную структуру: только главная диагональ и две соседние содержат ненулевые элементы.

$$A = \begin{array}{c|cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 0 & 1.992 & -0.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.001 & 1.992 & -0.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1.001 & 1.992 & -0.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1.001 & 1.992 & -0.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1.001 & 1.992 & -0.999 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.001 & 1.992 & -0.999 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.001 & 1.992 & -0.999 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.001 & 1.992 & -0.999 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.001 & 1.992 & -0.999 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.001 & 1.992 \end{array}$$

Для решения систем с подобными матрицами существует модификация алгоритма Гаусса, называемая методом прогонки. Для нахождения корней системы  $N-1$  уравнений требует порядка  $N$  операций, в отличие от стандартного алгоритма. Рассмотрим соответствующую программу. Любое решение, полученное методом прогонки, описывается уравнением

$$x_i = a_{i+1} \cdot x_{i+1} + b_{i+1} \quad (26)$$

где  $a_{i+1}, b_{i+1}$  — прогоночные коэффициенты. Они определяются на первом этапе работы алгоритма, называемого прямым ходом прогонки.

В классическом варианте метода Гаусса этому этапу соответствует приведение матрицы к треугольному виду. Обратим внимание, что, согласно уравнению, предыдущий корень вычисляется исходя из последующего. Такая последовательность называется обратным ходом алгоритма прогонки, в процессе которого непосредственно ищется вектор решений. Описанные действия представлены ниже в виде программы. Заметим, что скорость расчета значительно возрастает при замене функции `Isolve` на данный алгоритм.

### Алгоритм прогонки

```

x :=
  α1 ←  $\frac{A_{0,1}}{A_{0,0}}$ 
  β1 ←  $\frac{B_{0,0}}{A_{0,0}}$ 
  for i ∈ 1.. N - 3
    αi+1 ←  $\frac{-A_{i,i+1}}{A_{i,i} + A_{i+1,i} \cdot \alpha_i}$ 
    βi+1 ←  $\frac{-A_{i+1,i} \cdot \beta_i + B_{i,0}}{A_{i,i} + A_{i+1,i} \cdot \alpha_i}$ 
  xN-2 ←  $\frac{-A_{N-2,N-3} \cdot \beta_{N-2} + B_{N-2,0}}{A_{N-2,N-2} + A_{N-2,N-3} \cdot \alpha_{N-2}}$ 
  for i ∈ N - 3.. 0
    xi ← αi+1 · xi+1 + βi+1
x
  
```

Метод прогонки также используется для решения систем разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения в частных производных.

### Варианты заданий

№ варианта	u(t)	v(t)	w(t)	a	b	x(a)	x(b)
1	10	-1	cos(2t)	0	20	1	4
2	7	2	-sin(3t)	0	20	0	1
3	-1,2	2	-t <sup>3</sup> + 1	0	20	5	10
4	-1	-1	cos(t)	0	20	0	5
5	-5	-3	sin(t <sup>2</sup> )	0	20	0	2
6	2	2	-cos(0,5t)	-10	10	0	2
7	-16	-9	sin(2t)	0	20	-1	1
8	-5	-3	t <sup>2</sup> -t+1	-5	15	-5	5
9	1	1	-sin(2t+1)	0	20	0	1
10	T	5	-10	-10	10	-2	3
11	-3	-t <sup>2</sup>	-2t	-10	10	-3	7

## Лабораторная работа № 4

### РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения в частных производных в системе MathCAD

#### Теоретические сведения

Дифференциальные уравнения в частных производных, называемые также уравнениями математической физики, с удивительной точностью описывают самые разнообразные реальные процессы, начиная от колебаний струны и заканчивая всевозможными явлениями в биосфере. Поэтому подавляющее большинство современных разработок, которые ведутся специалистами по численным методам, относятся именно к области дифференциальных уравнений в частных производных.

В общем виде дифференциальные уравнения второго порядка, которые описывают огромное количество разнообразных физических явлений, можно записать следующим образом:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + C \frac{\partial U}{\partial x} + D \frac{\partial U}{\partial y} + EU = F \quad (27)$$

Параметры реальных процессов, как правило, зависят от времени, поэтому оно может выступать в качестве одной из переменных функции  $U$ . Уравнение (как и сам процесс) в таком случае называется нестационарным (или неустановившимся).

Когда коэффициенты при производных — постоянные величины, уравнение линейно и в простейших случаях разрешимо аналитически. Если коэффициенты являются функциями того или иного параметра, уравнение называется нелинейным и, как правило, не имеет аналитического решения.

Линейные уравнения математической физики подразделяются на три типа в зависимости от соотношения входящих в них коэффициентов, которое определяется физическим смыслом решаемой задачи:

- если  $b^2 - ac = 0$ , уравнение называется параболическим;
- если  $b^2 - ac > 0$ , уравнение называется гиперболическим;
- если  $b^2 - ac < 0$ , уравнение называется эллиптическим.

Решением любого дифференциального уравнения в частных производных является функция нескольких аргументов, для каждого из которых необходимо задать область определения. Так как переменные характеризуют параметры реальных процессов, для них область определения всегда положительна. Если в качестве переменных функции  $U$  выступают пространственная и временная координаты  $x$  и  $t$ , то начальные условия определяются как зависимости  $U(x)$  или ее первой производной по левой границе интервала существования  $t$ .

Граничные условия, напротив, представляют собой зависимость  $V$  от времени  $t$  в крайних точках области определения пространственной координаты.

Принципы, лежащие в основе построения разностных схем существенно не отличаются от изложенных в Лабораторной работе №1. Задача несколько усложняется в связи с тем, что уравнение содержит производные функции по нескольким переменным. Поэтому даже в простейшем случае, когда функция  $U$  зависит всего от двух координат  $x$  и  $t$ , расчетная область покрывается двумерной сеткой, в узлах которой вычисляются соответствующие друг другу значения  $x$  и  $t$ . Теоретически разностную схему можно построить и для уравнений с тремя и четырьмя независимыми переменными.

### Практическая часть

**Постановка задачи.** Требуется решить параболическое одномерное уравнение теплопроводности, описывающее процесс распределения тепла в неравномерно нагретом металлическом стержне, поверхность которого покрыта теплоизоляционным материалом. Будем пренебрегать толщиной стержня, предполагая, что в любой точке произвольно выбранного сечения температура постоянна (рис. 11).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (28)$$

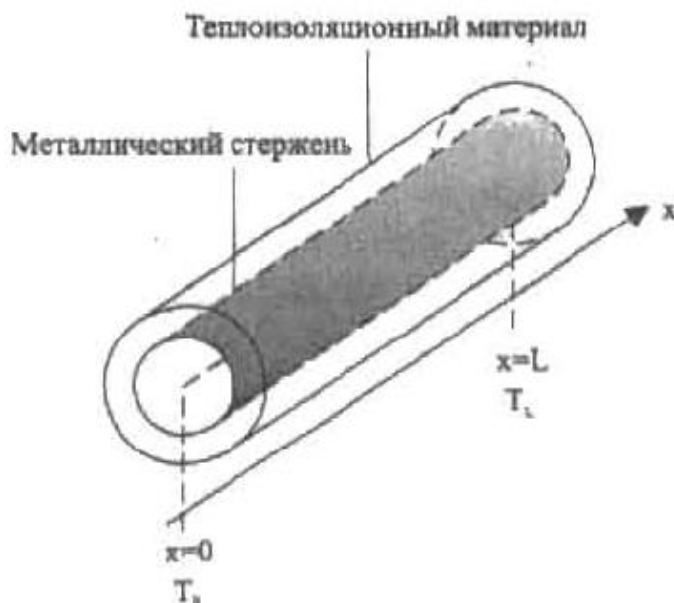


Рис. 11. Модель распространения тепла в неравномерно нагретом стержне

В течение определенного промежутка времени на концах стержня поддерживаются постоянные температуры  $T_0$  и  $T_L$ , что необходимо указать в граничных условиях:

$$\begin{aligned} T(t, 0) &= T_0 \\ T(t, L) &= T_L \quad 0 \leq t \leq A. \end{aligned}$$

Начальное условие задает температуру стержня в момент времени  $t = 0$ :

$$T(0, x) = T_{\text{исх}}(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

Коэффициент температуропроводности  $a$  является характеристикой материала, учитывающей его плотность, теплоемкость и теплопроводность. Эти параметры могут меняться при различных температурных режимах, и в реальных условиях  $a$  зависит от температуры. Однако для упрощения задачи флуктуациями свойств вещества можно пренебречь.

### Решение задачи с использованием явной разностной схемы

Теперь, когда задано уравнение, описывающее процесс диффузии тепла, и все необходимые условия, можно приступить к построению разностной схемы. Для этого нанесем на расчетную область сетку, в узлах которой будем искать функцию  $T_{ij}$  — температуру участка  $i$  в момент времени  $j$ . Длина шага  $k$  и  $h$  по временной и пространственной координатам  $j$  и  $i$  может и не совпадать. Другими словами

$$\begin{aligned} T_{j+1} &= T_j + k, \\ T_{i+1} &= T_i + h. \end{aligned}$$

Далее запишем исходное дифференциальное уравнение в конечно-разностной форме (аналогично решению краевой задачи в предыдущей лабораторной работе):

$$\frac{T_{j+1,i} - T_{j,i}}{k} = \frac{a^2 T_{j,i-1} - 2T_{j,i} + T_{j,i+1}}{h^2} \quad (29)$$

Общая температура стержня при  $t = j$  будет решением уравнения на временном слое  $j$ . Температуру в следующий момент времени  $j + 1$  можно выразить, исходя из ранее найденных значений  $T$  в трех соседних узлах  $i$  предыдущего временного слоя  $j$ . Такого рода схемы называются явными.

$$T_{j+1,i} = cT_{j,i-1} + (1 - 2c)T_{j,i} + T_{j,i+1} \quad (30)$$

где  $c = \frac{a^2 k}{h^2}$

Программа, осуществляющая решение задачи.

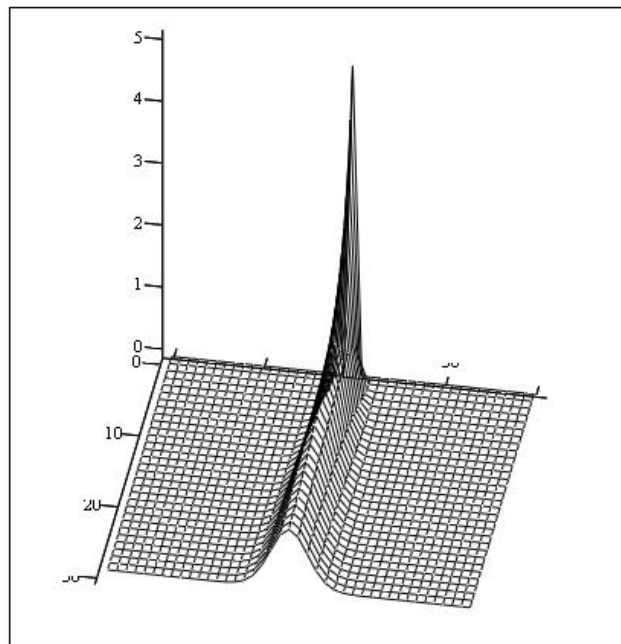
```

F := (A ← 30 L ← 40 n ← 30 m ← 500)
      (
        h ←  $\frac{A}{n-1}$  k ←  $\frac{L}{m-1}$  a ← 1 c ←  $\frac{a^2 \cdot k}{h^2}$ 
      )
      for j ∈ 0..A-1
        for i ∈ 1..L-1
          T0,20 ← 5
          Tj,0 ← 0
          Tj,40 ← 0
          Tj+1,i ← c · (Tj,i-1 - 2 · Tj,i + Tj,i+1) + Tj,i
      T

```

При вводе параметров задачи следует учитывать, что, при определенном их сочетании явная разностная схема становится неустойчивой. Это связано с тем, что ошибка аппроксимации, полученная на одном слое, увеличивается при переходе к следующему. Когда же разностная схема устойчива, в процессе вычислений ошибка уменьшается. В рассматриваемом случае показателем сходимости решения является множитель  $c$ .

x := 0..40



F

Рис. 12. Поверхность решения уравнения теплопроводности



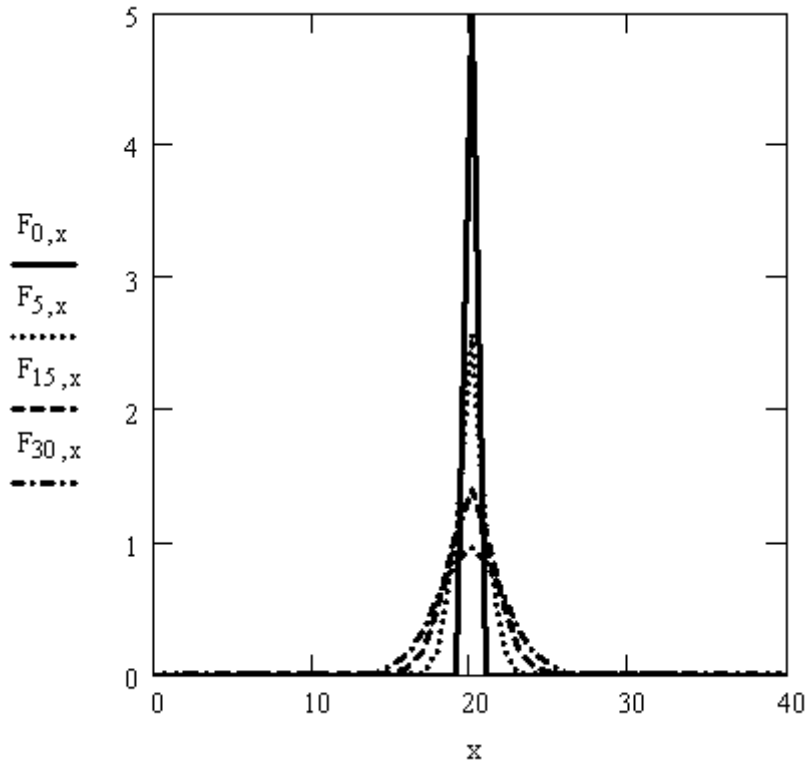


Рис. 13. Профили температуры на разных временных слоях

### Решение задачи с использованием неявной разностной схемы

Применение явных разностных схем ограничивается слишком малой длиной шага, используемой ими. Безусловной альтернативой, лишенной такого недостатка, является неявная разностная схема, обеспечивающая сходимость решения при любом значении параметра  $c$ . Запишем конечно-разностную формулу, аппроксимирующую согласно неявной схеме уравнение теплопроводности:

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{k} = a^2 \frac{T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1}}{h^2} \quad (31)$$

Учитывая коэффициент  $c$  из уравнения (9), можно записать.

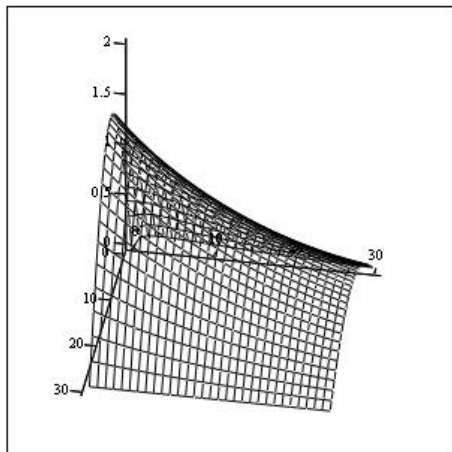
$$-cT_{i-1,j+1} + (1 + 2c)T_{i,j+1} - cT_{i+1,j+1} = T_{i,j} \quad (32)$$

Принципиальным отличием неявных разностных схем является то, что на данном временном слое для поиска решения используются значения функции, рассчитанные на этом же слое, а не на предыдущем, как при вычислениях с помощью явных схем.

Легко заметить, что для  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  и  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  последнее равенство представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, матрица

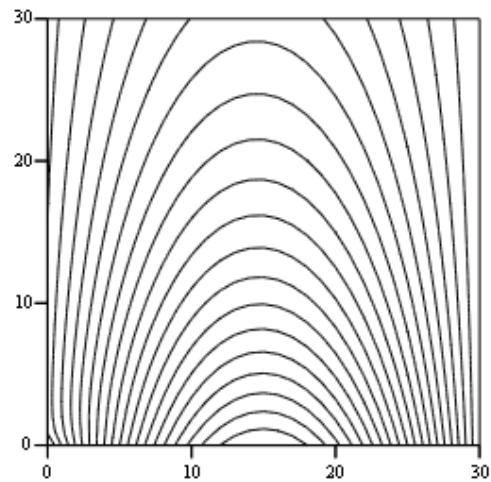
которой, как и в случае краевых задач, симметрична и имеет трехдиагональную форму.

Программный вариант решения уравнения теплопроводности с использованием неявной схемы. В начале программы определяется произвольный шаг по пространственной и временной координате, а также значение коэффициента  $a$ . Далее вводятся элементы матрицы  $M$  системы линейных уравнений, граничные  $T_0$ ,  $T_n$  и начальные  $T$ , условия. В конце на каждом временном слое  $t$  непосредственно вычисляются значения функции в узлах сетки. В примере решение получено при  $s=4$ , что подтверждает безусловную устойчивость неявных разностных схем.



T

Рис. 14. Поверхность решения уравнения



T

Рис. 15. Контурный график решения

### Варианты задания

№ варианта	A	L	n	$m_1$	$m_2$	$T_{0,L/2}$
1	30	35	30	500	15	5
2	40	40	30	500	20	5
3	30	50	25	500	25	3
4	30	76	30	500	30	2
5	40	76	35	550	35	5
6	35	80	40	450	40	7
7	40	80	40	500	35	5
8	30	100	50	500	30	10
9	40	100	30	450	25	5

10	25	90	30	500	20	4
11	30	90	35	450	15	5
12	35	100	35	500	10	10
13	40	60	40	450	15	7
14	40	64	30	400	20	5
15	29	48	40	500	25	6

## Лабораторная работа № 5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Цель работы: изучение метода конечных элементов. Получение практических навыков использования метода конечных элементов.

### Теоретические сведения

В МКЭ исходная область определения функции разбивается с помощью сетки, в общем случае неравномерной, на отдельные подобласти — *конечные элементы*. Искомая непрерывная функция аппроксимируется кусочно–непрерывной, определенной на множестве конечных элементов. Аппроксимация может задаваться произвольным образом, но чаще всего для этих целей используются полиномы, которые подбираются так, чтобы обеспечить непрерывность искомой функции в узлах на границах элементов.

Аналогичный подход может быть и в случае двух– трехмерных областей определения искомой функции.

Для двухмерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как прямо–, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее подходят элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь, прямолинейные и криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех этапов:

**Этап 1.** *Выделение конечных элементов* (разбиение заданной области на конечные элементы).

**Этап 2.** *Определение аппроксимирующей функции* для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции  $\varphi^{(e)}$  в произвольной точке  $e$ -го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$\varphi^{(e)} = A^{(e)}R + A_0,$$

где  $A^{(e)}$  — вектор-строка коэффициентов полинома;  $A_0$  — свободный член;  $R = (x, y, z)$  — вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа заключается в определении неизвестного вектора  $A^{(e)}$  и свободного члена  $A_0$ . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через вектор  $\Phi^{(e)}$  узловых значений функции и координаты узлов и, проделав эквивалентные преобразования, получают

$$\varphi^{(e)} = N^{(e)}\Phi^{(e)}, \quad (33)$$

где  $N^{(e)}$  — матрица-строка, элементы которой называют функциями формы конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

**Этап 3. Объединение конечных элементов в ансамбль.** На этом этапе уравнения (33), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т. е. в систему алгебраических уравнений:

$$\varphi = N\Phi. \quad (34)$$

Система (34) является моделью искомой непрерывной функции.

**Этап 4. Определение вектора узловых значений функции.**

Выражение для функций формы **одномерного симплекс-элемента** представляющего собой отрезок, приведенный на рисунке (рис. 26). Интерполяционный полином для элемента имеет вид  $\varphi = a_1 + a_2x$

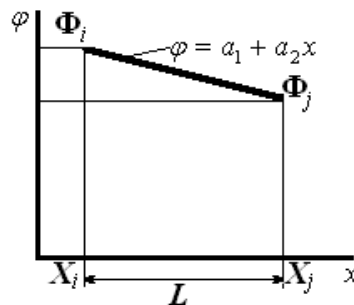


Рис. 16

Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  определяются через узловые значения функции  $\Phi_i$  и  $\Phi_j$  в соответствии с условием непрерывности:

$$\varphi = \Phi_i \text{ при } x = X_i$$

$$\varphi = \Phi_j \text{ при } x = X_j$$

Функции формы одномерного симплекс-элемента:

$$N_i = (X_j - x)/L; \quad N_j = (x - X_i)/L$$

Т.е.  $\varphi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j$  или в матричной форме  $\varphi = N\Phi$ , где  $N = [N_i, N_j]$  -

матрица-строка;  $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$  - вектор-столбец.

Двухмерный симплекс–элемент представляет собой плоский треугольник с прямолинейными сторонами.

Интерполяционный полином, аппроксимирующий непрерывную функцию  $\varphi$  внутри треугольного симплекс–элемента имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2x + a_3y. \quad (35)$$

Чтобы получить выражения для функций формы элемента, необходимо пронумеровать узлы треугольника. Обозначим их номерами  $i, j, k$ , начиная с произвольно выбранного узла, двигаясь при этом против часовой стрелки (рис. 17). Узловые значения  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k$  будем по-прежнему считать известными.

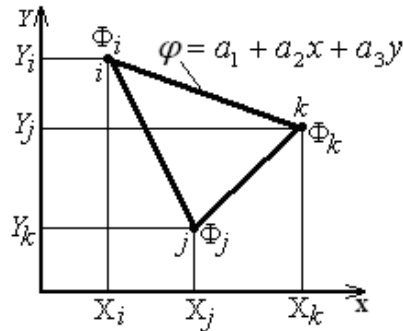


Рис. 17. Функция двухмерного симплекс–элемента

Используя условие непрерывности искомой функции в узлах аналогично предыдущему случаю, составим систему уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_i &= a_1 + a_2X_i + a_3Y_i; \\ \Phi_j &= a_1 + a_2X_j + a_3Y_j; \\ \Phi_k &= a_1 + a_2X_k + a_3Y_k. \end{aligned} \quad (36)$$

решая которую относительно неизвестных коэффициентов полинома, получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,5/S[(X_jY_k - X_kY_j)\Phi_i + (X_kY_i - X_iY_k)\Phi_j + (X_iY_j - X_jY_i)\Phi_k]); \\ a_2 &= (0,5/S)[(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k]; \\ a_3 &= (0,5/S)[(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k]. \end{aligned} \quad (37)$$

где  $S$  — площадь элемента, вычисляемая по формуле

$$S = 0,5[X_i(Y_j - Y_k) + X_j(Y_k - Y_i) + X_k(Y_i - Y_j)].$$

Подставим (37) в (36), проделаем аналогичные преобразования, получим

$$\varphi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k; \quad (38)$$

$$\begin{aligned} N_i &= (0,5/S)(a_i + b_i x + c_i y), \\ \text{где } N_j &= (0,5/S)(a_j + b_j x + c_j y), \\ N_k &= (0,5/S)(a_k + b_k x + c_k y); \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
& a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, & a_j = (X_k Y_i - Y_k X_i), & & a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \\
\text{и} & b_i = Y_j - Y_k, & b_j = Y_k - Y_i, & & b_k = Y_i - Y_j, \\
& c_i = X_k - X_j, & c_j = X_i - X_k, & & c_k = X_j - X_i.
\end{aligned}$$

Определитель системы (36) связан с площадью треугольника  $S$  соотношением

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2S.$$

Вычисляя значения функций формы  $N_i, N_j, N_k$  нетрудно убедиться, что они равны 1 в узлах с соответствующими номерами и 0 в остальных узлах элемента.

**Трехмерный симплекс-элемент** представляет собой тетраэдр. Четыре его узла обозначены индексами  $i, j, k, l$  причем обход узлов  $i, j, k$  осуществляется против часовой стрелки. Узел  $l$  расположен в вершине, находящейся вне плоскости узлов  $i, j, k$ .

Интерполяционный полином для тетраэдра имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \quad (40)$$

Коэффициенты полинома (31) можно определить из условий в узлах конечного элемента

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_i + a_4 Z_i, \\
\Phi_j &= a_1 + a_2 X_j + a_3 Y_j + a_4 Z_j, \\
\Phi_k &= a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k + a_4 Z_k, \\
\Phi_l &= a_1 + a_2 X_l + a_3 Y_l + a_4 Z_l.
\end{aligned} \quad (41)$$

Эта система уравнений может быть решена с помощью правила Крамера. Такой алгоритм требует вычисления пяти определителей. Проще провести вычисления на ЭВМ.

Систему уравнений (41) запишем в матричной форме

$$[\Phi]^T = [C] \cdot [a], \quad (42)$$

где  $[\Phi]^T = [\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l]$ ,  $[a]^T = [a_1 a_2 a_3 a_4]$ ,

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}.$$

Строка коэффициентов  $[a]$  может быть получена обращением матрицы  $[C]$  и последующим умножением (33) на  $[C]^{-1}$ :

$$[a] = [C]^{-1} \cdot [\Phi], \quad (43)$$

Так как  $\varphi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z = [1 \ x \ y \ z] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$ ,

то, используя (34), получим  $\varphi = [I \ x \ y \ z] \cdot [C]^{-1} \cdot [\Phi]$

Замечание. Определитель матрицы  $[C]$  равен шести объемам тетраэдра.

### Практическая часть

**Задача 1.** Для аппроксимации распределения температуры в стержне с помощью одномерного симплекс-элемента было установлено, что температура в узлах  $i$  и  $j$  равна  $120$  и  $90^\circ\text{C}$  соответственно (рис. 18). Определите температуру в точке на расстоянии  $4$  см от начала координат и градиент температуры внутри элемента. Узлы  $i$  и  $j$  расположены на расстоянии  $1,5$  и  $6$  см от начала координат.

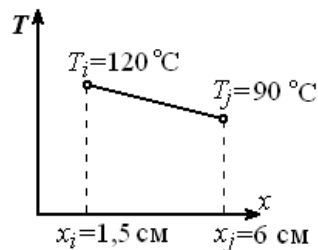


Рис. 18

Решение. Температура ( $t$ ) внутри одномерного симплекс-элемента определяется соотношением

$$t = \left(\frac{X_j - x}{L}\right)T_i + \left(\frac{x - X_i}{L}\right)T_j.$$

Данные элемента:

$$X_i = 1,5 \text{ см}, \quad T_i = 120^\circ\text{C}.$$

$$X_j = 6,0 \text{ см}, \quad T_j = 90^\circ\text{C}.$$

$$x = 4,0 \text{ см}, \quad L = X_j - X_i = 4,5 \text{ см}.$$

Подставляя исходные данные в формулу для температуры, получим

$$t = \left(\frac{6,0 - 4,0}{4,5}\right) \cdot 120 + \left(\frac{4,0 - 1,5}{4,5}\right) \cdot 90 = \frac{2 \cdot 120}{4,5} + \frac{2,5 \cdot 90}{4,5} =$$

$$= 53,33 + 50 = 103,33^\circ\text{C}.$$

Для градиента температур получим

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{1}{L}T_i + \frac{1}{L}T_j = \frac{1}{L}(T_j - T_i) = \frac{90 - 120}{4,5} = \frac{-30}{4,5} = -6,67 \frac{^\circ\text{C}}{\text{см}}.$$

**Задача 2.** Получить соотношение, определяющее элемент с вершинами в точках  $(0;0)$ ,  $(4;0,5)$ ,  $(2;5)$ , и вычислить значение давления в точке  $B$  с координатами  $(2;1,5)$ , если заданы узловые значения  $P_i = 50 \text{ Н/см}^2$ ,  $P_j = 32 \text{ Н/см}^2$ ,  $P_k = 48 \text{ Н/см}^2$ .

Решение. Давление  $p$  внутри элемента определяется по формуле  $p = N_i P_i + N_j P_j + N_k P_k$ , где

$$N_i = (0,5/S)(a_i + b_i x + c_i y),$$

$$N_j = (0,5/S)(a_j + b_j x + c_j y),$$

$$N_k = (0,5/S)(a_k + b_k x + c_k y).$$

Подставив значения координат узлов, получим

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0,5 = 19,$$

$$b_i = Y_j - Y_k = 0,5 - 5 = -4,5,$$

$$c_i = X_k - X_j = 2 - 4 = -2,$$

$$a_j = (X_k Y_i - Y_k X_i) = 2 \cdot 0 - 0,5 \cdot 0 = 0,$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i = 0 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0 = 0,$$

$$b_j = Y_k - Y_i = 5 - 0 = 5,$$

$$b_k = Y_i - Y_j = 0 - 0,5 = -0,5,$$

$$c_j = X_i - X_k = 0 - 2 = -2,$$

$$c_k = X_j - X_i = 4 - 0 = 4.$$

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0,5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19.$$

После подстановки констант в функции формы выражение для  $p$  примет вид

$$p = \frac{1}{19} ((19 - 4,5x - 2y)P_i + (5x - 2y)P_j + (-0,5x + 4y)P_k).$$

Значение давления  $p$  в точке  $B$  с координатами  $(2; 1,5)$  равно

$$p = \frac{1}{19} ((19 - 4,5 \cdot 2 - 2 \cdot 1,5) \cdot 50 + (5 \cdot 2 - 2 \cdot 1,5) \cdot 32 + (-0,5 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5) \cdot 48) = \frac{1}{19} (7 \cdot 50 + 7 \cdot 32 + 5 \cdot 48) = 42,84 \text{ Н / см}^2.$$

**Задача 3.** Даны координаты вершин тетраэдра:  $(1,2,1)$ ,  $(0,0,0)$ ,  $(2,0,0)$ ,  $(1,0,3)$ . Определить функции формы трехмерного конечного элемента, используя процедуру обращения матрицы.

Решение. По значениям координат узлов составим матрицу

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ей соответствует обратная матрица

$$[C]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запишем интерполяционный полином  $\varphi = [1 \ x \ y \ z] \cdot [C]^{-1} \cdot [\Phi]$ .

Так как  $\varphi = [N] \cdot [\Phi]$ , функции формы представляются произведением вида

$$N = [1 \ x \ y \ z] \cdot [C]^{-1}.$$

После подстановки  $[C]^{-1}$  получим



$$[N] = \frac{1}{6} [I \ x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

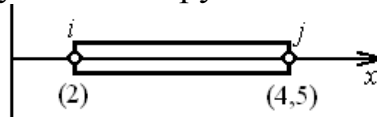
или  $[N] = \left[ \frac{y}{2}, \frac{1}{6}(6-3x-y-z), \frac{1}{6}(3x-y-z), \frac{1}{6}(-y+2z) \right]$ .

Таким образом, функции формы элемента имеют вид

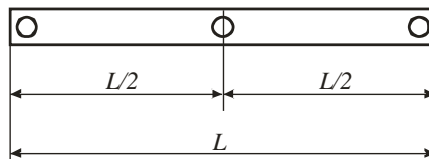
$$N_i = \frac{y}{2}, \quad N_j = \frac{6-3x-y-z}{6}, \quad N_k = \frac{3x-y-z}{6}, \quad N_l = \frac{-y+2z}{6}.$$

### Примерные практические задания

1. Вычислите функцию формы для элемента, представленного на рисунке ниже. Узловые координаты указаны в круглых скобках.



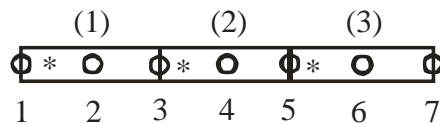
2. Получите выражение для функции формы одномерного квадратичного элемента (элемента с одним внутренним узлом), изображенного на рисунке ниже. Интерполяционный полином для элемента имеет вид  $\varphi = a_1 + a_2x + a_3x^2$ .



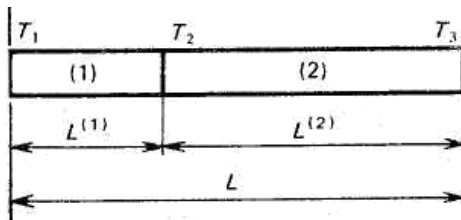
3. Составьте уравнения ансамбля конечных элементов для области, приведенной на рисунке ниже. Отправной узел для каждого элемента помечен звездочкой.

а) В каждом узле определена одна степень свободы.

б) В каждом узле определена векторная величина, имеющая три степени свободы.



4. Запишите систему уравнений для определения узловых температур в одномерном однородном стержне длиной  $L$  с постоянной площадью сечения  $S$ . Конечно-элементная модель стержня приведена на рисунке. Левый конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток заданной интенсивности  $q$ . Правый свободный конец стержня теплоизолирован, а вдоль боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен. Коэффициент теплообмена —  $\alpha$ , температура окружающей среды —  $T_*$ .



5. Вычислите функцию формы для элемента, представленного на рис. 19. Узловые координаты указаны в круглых скобках.

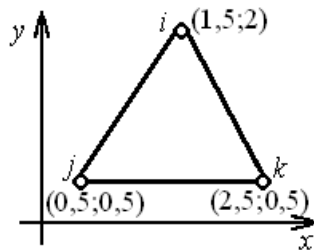


Рис. 19

6. Получите выражения для функций формы двумерного четырехугольного мультиплекс-элемента, приведенного на рис. 20. Интерполяционный полином для элемента имеет вид  $\varphi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4yx$ .

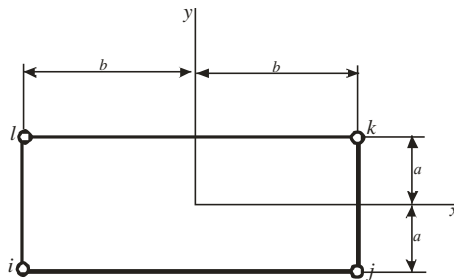


Рис. 20

7. Вычислите значения функций формы во внутренней точке  $A$  с координатами  $x=2$ ,  $y=2,5$  двумерного симплекс-элемента при следующих значениях координат узлов:  $x_i=1$ ;  $y_i=2$ ;  $x_j=4$ ;  $y_j=1$ ;  $x_k=3$ ;  $y_k=4$ . Определите значение температуры во внутренней точке  $A$  при следующих узловых значениях непрерывной функции  $T$ :  $T_i = 15^\circ\text{C}$ ;  $T_j = 20^\circ\text{C}$ ;  $T_k = 40^\circ\text{C}$ .

8. Вычислите матрицы жесткости отдельных конечных элементов в задаче о кручении стержня. Координаты узлов элементов приведены на рис. 21.

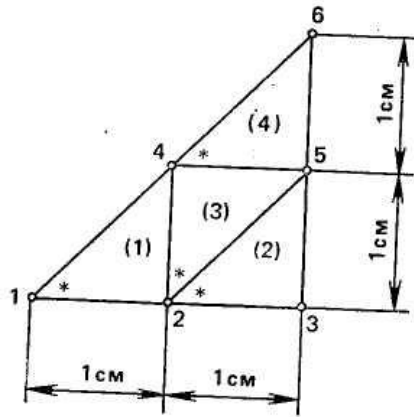


Рис. 21

9. Определить функции формы трехмерного конечного элемента, используя процедуру обращения матрицы. Координаты вершин тетраэдра  $(0,1,1)$ ,  $(2,0,0)$ ,  $(1,0,3)$ ,  $(2,2,1)$ .

10. Матрица  $C^{-1}$  для тетраэдрального элемента с узлами в точках  $(0,0,0)$ ,  $(2,1,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(1,1,2)$  имеет вид

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Показать, что эта матрица является обратной к матрице  $C$ . Определить функции формы этого элемента.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1       Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зинкевич, К. Морган. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
- 2       Ли К. Основы САПР (CAD/ САМ/ САЕ) / К. Ли. — СПб.: Питер, 2004. — 560 с.
- 3       Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования: учеб. для вузов / И.П. Норенков. 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. — 448 с.
- 4       Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. М.: Мир, 1979. — 393 с.
- 5       Килина А.А. Модели и методы анализа проектных решений: учеб. пособие / А.А. Килина, Е.Д. Федорков. Воронеж: ВГТУ, 2008. — 228 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Лабораторная работа № 1. Аппроксимация дифференциальных операторов.....	4
2. Лабораторная работа № 2. Решение задач методом конечных разностей.....	6
3. Лабораторная работа № 3. Решение краевых задач с использованием разностных схем в MathCAD.....	14
4. Лабораторная работа № 4. Решение дифференциальных уравнений в частных производных в системе MathCAD.....	21
5. Лабораторная работа № 5. Решение задач методом конечных элементов.....	28
Библиографический список.....	37

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению лабораторных работ по дисциплине  
«Модели и методы анализа проектных решений»  
для студентов направления подготовки бакалавров  
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»  
очной и заочной форм обучения

Составитель:  
Собенина Ольга Валерьевна

Отпечатано в авторской редакции

Подписано к изданию 01.02.2022.  
Уч.-изд. л.2,4

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»  
394006 Воронеж, ул.20-летия Октября, 84