

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»**

Кафедра радиоэлектронных устройств и систем

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к выполнению практических занятий
для студентов специальности 11.05.01
«Радиоэлектронные системы и комплексы»
очной формы обучения**

Воронеж 2023

УДК 321.391.26(07)
ББК 32.811.3я73

Составители: А. Н. Голубинский, Д. В. Журавлёв,
Д. К. Проскурин, Р. В. Кузьменко

Цифровая обработка сигналов: методические указания к выполнению к практических занятий для студентов специальности 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы» очной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. Н. Голубинский, Д. В. Журавлёв, Д. К. Проскурин, Р. В. Кузьменко. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2023. – 42 с.

В соответствии с рабочими учебными программами дисциплин приведены практические задания и учебные вопросы по соответствующим темам, лежащие в основе способов описания дискретных и цифровых сигналов и систем во временной, z - и частотной областях, а также основные методы и особенности синтеза цифровых линейных фильтров. По каждой практической теме в описание включены: цель, примеры детального решения задач, а также перечень вопросов и практических заданий, приведён список рекомендуемой литературы.

Предназначены для студентов специальности 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы» очной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержаться в файле МУ_ЦОС_ПЗ_pdf.

Ил. 9. Библиогр.: 7 назв.

УДК 321.391.26(07)
ББК 32.811.3я73

Рецензент – А. В. Останков, д-р техн. наук, профессор
кафедры радиотехники ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов – это область науки и техники, в которой изучаются общие для различных технических приложений принципы, методы и алгоритмы обработки сигналов средствами цифровой вычислительной техники.

Цель изучения дисциплины: освоение слушателями основ теории цифровой обработки сигналов, необходимых для понимания принципов функционирования цифровых систем и устройств; привитие навыков инженерного анализа и синтеза устройств цифровой обработки сигналов; приобретение навыков, позволяющих ориентироваться в областях науки и техники, которые применяют общие для различных технических приложений принципы, методы и алгоритмы обработки сигналов средствами цифровой вычислительной техники.

Основные задачи дисциплины: 1) изучение методов математического описания дискретных и цифровых сигналов; 2) изучение способов модуляции дискретных сигналов; 3) изучение методов расчета временных и частотных характеристик дискретных и цифровых сигналов на выходе линейных и нелинейных цепей.

Междисциплинарные связи: изучение дисциплины «Цифровая обработка сигналов» базируется на знании материалов курсов «Высшая математика», «Физика», «Теория электрических цепей», «Теория электрической связи».

Требования к знаниям и умениям по дисциплине.

В результате изучения дисциплины слушатель должен:

- иметь представление о: структурах современных и перспективных цифровых устройств, систем и комплексов, используемых в них подсистем и функциональных узлов; способах количественного описания характеристик устройств цифровой обработки сигналов;
- знать: основные виды и способы дискретного представления сигналов; методы формирования и обработки дискретных и цифровых сигналов;
- уметь: использовать временные методы анализа дискретных сигналов, их преобразования в устройствах цифровой обработки сигналов; использовать спектральные методы анализа дискретных сигналов, их преобразования в устройствах обработки информации.

Данный практикум содержит учебные вопросы и практические задания по темам, в соответствии с рабочими учебными программами дисциплин, которые лежат в основе способов описания дискретных и цифровых сигналов и систем во временной, z - и частотной областях, а также основные методы и особенности синтеза цифровых линейных фильтров. По каждой практической теме в описание включены: цель, примеры детального решения задач, а также перечень вопросов и практических заданий. В заключение приведён список рекомендуемой литературы и ряд приложений, которые позволят более качественно изучить данную дисциплину.

В приложении приведены справочные сведения, которые могут понадобиться при решении задач.

1. ТЕМА 1. ОБОБЩЕННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ

Учебно-воспитательные цели:

1. Практическое применение способов представления непрерывных сигналов в цифровой форме;
2. Приобретение навыков вычисления прямого и обратного дискретного преобразования Фурье, прямого и обратного z-преобразования дискретного сигнала;
3. Стимулирование активной познавательной деятельности слушателей, способствующее выработке у них целостного представления о своей будущей деятельности по специальности;
4. Воспитание у слушателей профессиональных и нравственных качеств, пропаганда Российской науки.

1.1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1 ДИСКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ В ЦИФРОВОЙ ФОРМЕ. ДИСКРЕТНАЯ СВЕРТКА СИГНАЛОВ

Учебные вопросы:

1. Дискретное представление сигналов, интервал дискретизации, спектральная плотность дискретного сигнала. Шаг квантования, погрешность квантования.
2. Дискретная свертка сигналов.

Примеры решения задач:

П.1.1. Найдите период дискретизации сигнала по Котельникову $u(t) = U_0 \cos(2 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot t + 5 \cdot 10^6 \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot t])$.

Решение:

Период (временной интервал) дискретизации сигнала по Котельникову определяется как

$$\Delta = \frac{1}{2f_{\text{в}}},$$

где $f_{\text{в}}$ – верхняя (максимальная) частота в спектре дискретизируемого аналогового сигнала.

Для решения задачи вычислим мгновенную частоту сигнала через его полную фазу:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [2 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot t + 5 \cdot 10^6 \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot t]] = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^6 \cdot (-2\pi \sin[2 \cdot \pi \cdot t]) = 2\pi(10^7 - 5 \cdot 10^6 \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot t]) \text{ рад/с.}\end{aligned}$$

Используя свойство тригонометрической функции синус, найдём максимальное (верхнее) значение мгновенной частоты:

$$\omega_{\text{в}} = \omega_{\text{max}} = \omega(t) \Big|_{\sin[2 \cdot \pi \cdot t] = -1} = 2 \cdot \pi \cdot (10^7 + 5 \cdot 10^6) = 3\pi \cdot 10^7 \text{ рад/с.}$$

Рассчитаем линейную верхнюю частоту через известную циклическую верхнюю частоту:

$$f_{\text{в}} = \frac{\omega_{\text{в}}}{2\pi} = \frac{3\pi \cdot 10^7}{2\pi} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Гц.}$$

Таким образом, период дискретизации сигнала по Котельникову:

$$\Delta = \frac{1}{2f_{\text{в}}} = \frac{1}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^7} \approx 3,333 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

Ответ: $\Delta \approx 3,333 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$

П.1.2. Аналоговый сигнал, имеющий форму прямоугольного видеоимпульса напряжения с единичной амплитудой и длительностью τ_u , дискретизирован одиннадцатью отсчетами. Рассчитать спектральную плотность дискретного сигнала.

Решение:

Пусть $S(\omega)$ – спектральная плотность аналогового сигнала $s(t)$ (изображенного на рис.1.1):

$$s(t) = \begin{cases} U, & |t| \leq \tau_u/2; \\ 0, & |t| > \tau_u/2, \end{cases} \quad U = 1 \text{ В.}$$

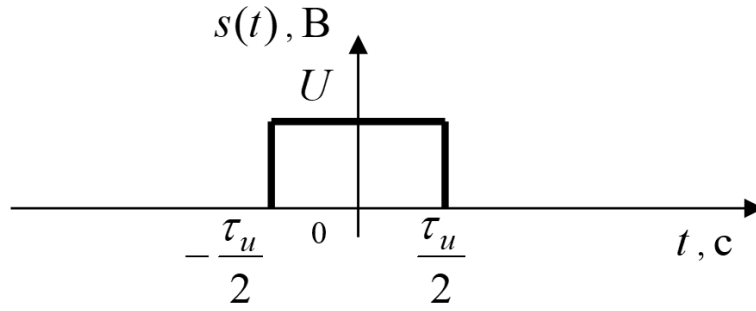


Рис. 1.1. Внешний вид сигнала

Тогда спектральная плотность дискретизированного сигнала $s_d(t) = s(t_k)$ имеет вид:

$$S_d(\omega) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right).$$

Вычислим спектральную плотность аналогового сигнала, воспользовавшись преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} U \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{U \cdot e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} = \frac{U}{-j\omega} (e^{-j\omega\tau_u/2} - e^{j\omega\tau_u/2}) = \\ &= \frac{U}{-j\omega} (\cos(\omega\tau_u/2) - j\sin(\omega\tau_u/2) - \cos(\omega\tau_u/2) - j\sin(\omega\tau_u/2)) = \\ &= \frac{U \cdot 2\sin(\omega\tau_u/2)}{\omega} = U \cdot \tau_u \frac{\sin(\omega\tau_u/2)}{\omega\tau_u/2} = U \cdot \tau_u \cdot \text{sinc}(\omega\tau_u/2), \end{aligned}$$

где $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. По условию задачи, так как аналоговый сигнал дискретизируется 11-ю отсчётами, следовательно интервал дискретизации $\Delta = \frac{\tau_u}{10}$.

Учитывая, что амплитуда единичная, получим

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U \cdot \tau_u \frac{\sin\left(\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) \frac{\tau_u}{2}\right)}{\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) \frac{\tau_u}{2}} = \frac{10}{\tau_u} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 \cdot \tau_u \frac{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi k \cdot 10}{\tau_u}\right) \frac{\tau_u}{2}\right]}{\left(\omega - \frac{2\pi k \cdot 10}{\tau_u}\right) \frac{\tau_u}{2}} = \\ &= 10 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau_u}{2} - 10k\pi\right)}{\frac{\omega\tau_u}{2} - 10k\pi}. \end{aligned}$$

Ответ:
$$S_d(\omega) = 10 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau_u}{2} - 10k\pi\right)}{\frac{\omega\tau_u}{2} - 10k\pi}.$$

Вопросы и задачи:

1.1. Найдите период дискретизации сигнала по Котельникову $u(t) = U_0 \cos(2 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot t + 5 \cdot 10^7 \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot t])$.

1.2. Непрерывный сигнал, имеющий форму прямоугольного импульса напряжения с единичной амплитудой и длительностью τ_{Π} , дискретизирован 10 отсчетами. Определить спектр дискретного сигнала.

1.3. Непрерывный сигнал, поступающий на вход АЦП, изменяется в пределах от 0 до 15 В. Для представления отсчетов этого сигнала в АЦП выделено восемь двоичных разрядов. Найдите величину шага равномерного квантования $q_{кв}$.

1.4. Максимальное значение непрерывного сигнала равно 7 В. Для представления отсчетов этого сигнала в АЦП выделено шесть двоичных разрядов. Найдите дисперсию шума квантования, если распределение значений сигнала равномерно.

1.5. Путем непосредственного вычисления найдите дискретную свертку $\{f_n\}$ двух дискретных сигналов $\{x_n\} = (15, 15, 7, 5, 3, 1, 0, \dots)$ и $\{y_n\} = (10, 5, 2, 1, 0, \dots)$.

1.6. Найти минимальное и максимальное значения дискретного сигнала $\{f_n\}$, представляющего собой дискретную свертку двух дискретных сигналов $\{x_n\} = (1, 2, 3, 4, 5)$ и $\{y_n\} = (12, 9, 6, 3, 1)$.

1.7. Найти ДПФ знакопеременной последовательности $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$.

1.8. Непрерывный сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный верхней граничной частотой $f_g = 7.5$ МГц. Сигнал имеет длительность $T_c = 60$ мкс. Дискретизация осуществляется таким образом, что длительность интервала между выборками в 4 раза короче интервала дискретизации по Котельникову. Каждое выборочное значение отображается 8-битовым двоичным числом. Определить величину N объема памяти в битах, которая требуется для записи данного отрезка сигнала.

1.9. Дисперсия шума квантования равна 100 мВ^2 , при этом распределение значений сигнала равномерно. АЦП, которое дает такую дисперсию шума квантования, имеет 10 двоичных разрядов. Определить максимальное значение входного сигнала.

1.10. Определить первые три отсчета дискретного сигнала $\{f_n\}$, представляющего собой дискретную свертку ступенчатой функции $\{x_n\} = (1, 1, 1, \dots)$ и импульсной характеристики $\{h_n\} = (1, e^{-\Delta/\tau}, e^{-2\Delta/\tau})$.

1.11. Дискретный периодический сигнал $x_d(t)$ задан четырьмя отсчетами $(1, 0, -1, 0)$. Вычислите коэффициенты ДПФ C_n этого сигнала.

Вопросы и задачи для самоподготовки:

1. Что называется регулярным дискретным временным представлением сигналов?
2. Как осуществить восстановление сигналов по Котельникову? Каковы погрешности восстановления и дискретизации?
3. Что называется модулированной импульсной последовательностью? Каков её спектр?
4. Как осуществляется представление непрерывных сигналов в цифровой форме при равномерном квантовании?
5. Как вычисляется ошибка квантования?
6. Что называют дискретной сверткой сигналов?
7. Выбрать интервал дискретизации прямоугольного импульса длительностью 100 мкс и определить число отсчетов, достаточное для описания этого импульса. В качестве наивысшей частоты спектра ω_g принять такое значение, когда спектральная плотность импульса обращается в нуль и при $\omega > \omega_g$ значения спектральной плотности не превышают 0,1 от максимального значения.
8. Представить аналитически рядом Котельникова прямоугольный импульс напряжения с единичной амплитудой и длительностью τ_u для 2-х случаев: 1 – спектр аппроксимирующей функции ограничен верхней частотой $f_{g1} = 1/(2\tau_u)$; 2 - спектр аппроксимирующей функции ограничен верхней частотой $f_{g1} = 1/\tau_u$.
9. Дискретная свертка $\{f_n\}$ двух дискретных сигналов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ равна $\{f_n\} = (2, 0, -2, 0)$. Найти сигнал $\{x_n\}$, если $\{y_n\} = (1, 2, 0, 1)$.
10. Дискретный сигнал на интервале своей периодичности задан шестью равноотстоящими отсчетами $\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$. Вычислите коэффициенты ДПФ C_n этого сигнала.

1.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО СВОЙСТВА, Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Учебные вопросы:

1. Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье.
2. Прямое и обратное z-преобразование дискретного сигнала.
3. Восстановление аналогового сигнала по коэффициентам ДПФ дискретного сигнала.

Примеры решения задач:

П.1.3. Найти ДПФ знакопеременной последовательности $(1; -1; 1; -1; 1; -1)$. Рассчитать амплитудный спектр, используя найденные коэффициенты ДПФ.

Решение:

Коэффициенты дискретного преобразования Фурье вычисляются по формуле:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j 2\pi n k / N}.$$

В нашем случае дискретный сигнал

$$\{x_k\} = (x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (1; -1; 1; -1; 1; -1)$$

имеет количество отсчётов $N = 6$. Используя свойство ДПФ о нулевом коэффициенте, получим:

$$\dot{C}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k = \frac{1}{6} [1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1] = 0,$$

теперь вычислим третий коэффициент, используя свойство о среднем коэффициенте для чётного N :

$$\dot{C}_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x_k = \frac{1}{6} [1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1] = 1.$$

Для расчёта первого и второго коэффициентов ДПФ, воспользуемся общей формулой:

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{6-1} x_k e^{\frac{-j2\pi \cdot 1 \cdot k}{6}} = \frac{1}{6} [1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 1 \cdot 0}{6}} - 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 1 \cdot 1}{6}} + 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 1 \cdot 2}{6}} - 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 1 \cdot 3}{6}} + 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 1 \cdot 4}{6}} - 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 1 \cdot 5}{6}}],$$

по свойству комплексной экспоненты, как периодической функции (с периодом 2π) и используя формулу Эйлера (для вычисления значений комплексной экспоненты), получим:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= \frac{1}{6} [1 - e^{\frac{-j\pi}{3}} + e^{\frac{-j2\pi}{3}} + 1 + e^{\frac{j\pi}{3}} - e^{\frac{j2\pi}{3}}] = \frac{1}{6} [2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)] = \\ &= \frac{1}{6} [2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}] = 0; \\ \dot{C}_2 &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{6-1} x_k e^{\frac{-j2\pi \cdot 2 \cdot k}{6}} = \frac{1}{6} [1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 2 \cdot 0}{6}} - 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 2 \cdot 1}{6}} + 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 2 \cdot 2}{6}} - 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 2 \cdot 3}{6}} + 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 2 \cdot 4}{6}} - 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi \cdot 2 \cdot 5}{6}}] = \\ &= \frac{1}{6} [1 - e^{\frac{-j2\pi}{3}} + e^{\frac{-j4\pi}{3}} - e^{-j2\pi} + e^{\frac{-j8\pi}{3}} - e^{\frac{-j10\pi}{3}}] = \\ &= \frac{1}{6} [1 - e^{\frac{-j2\pi}{3}} + e^{\frac{j2\pi}{3}} - 1 + e^{\frac{-j2\pi}{3}} - e^{\frac{j2\pi}{3}}] = 0. \end{aligned}$$

Для вычисления $\dot{C}_4$ и $\dot{C}_5$, воспользуемся следующим свойством ДПФ: если отсчеты x_k – вещественные числа и N – четное число, то:

$$\dot{C}_{\frac{N}{2}+l} = \dot{C}_{\frac{N}{2}-l}^*, \quad l = \overline{0; N/2 - 1},$$

где звёздочка означает операцию комплексного сопряжения. Тогда:

$$\dot{C}_5^* = \dot{C}_1 = 0, \text{ следовательно } \dot{C}_5 = 0;$$

$$\dot{C}_4^* = \dot{C}_2 = 0, \text{ следовательно } \dot{C}_4 = 0.$$

Таким образом, коэффициенты ДПФ $\{\dot{C}_n\} = (0; 0; 0; 1; 0; 0)$.

Амплитудный спектр дискретного сигнала можно вычислить, используя модуль найденных коэффициентов ДПФ, при этом значения амплитуд:

$$\{|\dot{C}_n|\} = (0; 0; 0; 1; 0; 0).$$

Ответ: $\{\dot{C}_n\} = (0; 0; 0; 1; 0; 0)$; $\{|\dot{C}_n|\} = (0; 0; 0; 1; 0; 0)$.

П.1.4. Найти сигнал, z-преобразование которого определяется выражением $X(z) = (1 + z^{-1}) / (1 - z^{-1})$.

Решение:

Дискретный сигнал $\{x_k\} = (x_0; x_1; x_2; \dots)$ можно рассчитать, вычислив обратное z-преобразование от заданного $X(z)$:

$$\begin{aligned}
x_k &= \frac{1}{2\pi j} \oint_L X(z) \cdot z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z+1}{z-1} \cdot z^{k-1} dz = \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^k}{z-1} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^{k-1}}{z-1} dz.
\end{aligned}$$

Для вычисления данного интеграла необходимо рассмотреть два частных случая:

1) пусть $k=0$, тогда

$$x_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{dz}{z(z-1)}.$$

Рассчитать данные интегралы, взятые по замкнутому контуру (охватывающему все особые точки) в комплексной плоскости, можно воспользовавшись теоремой о вычетах. В нашем случае необходимо вычислять в полюсах вычеты первого порядка. В результате получим:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \cdot \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{1}{z-1} \right] + \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \cdot \operatorname{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z(z-1)} \right] + \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \cdot \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{1}{z(z-1)} \right] = \\
&= \frac{1}{z-1} (z-1) \Big|_{z=1} + \frac{1}{z(z-1)} z \Big|_{z=0} + \frac{1}{z(z-1)} (z-1) \Big|_{z=1} = 1 \Big|_{z=1} + \frac{1}{z-1} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z} \Big|_{z=1} = 1-1+1=1;
\end{aligned}$$

2) пусть $k \geq 1$, тогда

$$\begin{aligned}
x_k &= \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^k \cdot dz}{z-1} + \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^{k-1} \cdot dz}{z(z-1)} = \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{z^k}{z-1} \right] + \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{z^{k-1}}{z-1} \right] = \\
&= \frac{z^k}{z-1} (z-1) \Big|_{z=1} + \frac{z^{k-1}}{z-1} (z-1) \Big|_{z=1} = z^k \Big|_{z=1} + z^{k-1} \Big|_{z=1} = 1+1=2.
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k=0; \\ 2, & k \geq 1, \end{cases}$$

или $\{x_k\} = (1; 2; 2; 2; \dots)$.

Ответ: $\{x_k\} = (1; 2; 2; 2; \dots)$.

П.1.5. Найти ДПФ дискретной свертки сигналов $\{x_k\} = (1; 1; 0; 0)$ и $\{y_k\} = (1; 0; 1; 0)$ как путем непосредственного применения формулы ДПФ к ре-

зультату вычисления дискретной свертки, так и с помощью свойства ДПФ дискретной свертки двух сигналов.

Решение:

Способ 1. Непосредственный расчет ДПФ от результата вычисления дискретной свертки сигналов $\{x_k\} = (x_0; x_1; x_2; x_3)$ и $\{y_k\} = (y_0; y_1; y_2; y_3)$. Дискретной свёрткой двух дискретных сигналов конечной длительности, называется сигнал:

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{k-n}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

В результате получим (учитывая, что значения дискретных отсчетов с отрицательными номерами равны нулю):

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{4-1} x_n y_{0-n} = \frac{1}{4} (x_0 y_{0-0} + x_1 y_{0-1} + x_2 y_{0-2} + x_3 y_{0-3}) = \frac{1}{4} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = \frac{1}{4}; \\ f_1 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{4-1} x_n y_{1-n} = \frac{1}{4} (x_0 y_{1-0} + x_1 y_{1-1} + x_2 y_{1-2} + x_3 y_{1-3}) = \frac{1}{4} (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = \frac{1}{4}; \\ f_2 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{4-1} x_n y_{2-n} = \frac{1}{4} (x_0 y_{2-0} + x_1 y_{2-1} + x_2 y_{2-2} + x_3 y_{2-3}) = \frac{1}{4} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = \frac{1}{4}; \\ f_3 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{4-1} x_n y_{3-n} = \frac{1}{4} (x_0 y_{3-0} + x_1 y_{3-1} + x_2 y_{3-2} + x_3 y_{3-3}) = \frac{1}{4} (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Значит сигнал дискретной свёртки $\{f_k\} = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Коэффициенты дискретного преобразования Фурье рассчитываются по формуле:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi n k/N},$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{C}_{f0} &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} f_k = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}; \\ \dot{C}_{f2} &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} (-1)^k f_k = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0; \\ \dot{C}_{f1} &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} f_k e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot k/4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-j\pi/2} + \frac{1}{4} e^{-j\pi} + \frac{1}{4} e^{-j3\pi/2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}j \right) = 0; \\ \dot{C}_{f3} &= \dot{C}_{f1}^* = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ДПФ $\{\dot{C}_{f_n}\} = \left(\frac{1}{4}; 0; 0; 0\right)$.

Способ 2. Вычисление ДПФ помощью свойства ДПФ дискретной свертки двух сигналов:

$$\dot{C}_{f_n} = \dot{C}_{x_n} \cdot \dot{C}_{y_n}.$$

Рассчитаем ДПФ сигналов $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$:

$$\dot{C}_{x0} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} x_k = \frac{1}{4}(1+1+0+0) = \frac{1}{2};$$

$$\dot{C}_{x2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} (-1)^k x_k = \frac{1}{4}(1-1+0-0) = 0;$$

$$\dot{C}_{x1} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} x_k e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot k/4} = \frac{1}{4}(1 \cdot 1 + 1 \cdot e^{-j\pi/2} + 0 \cdot e^{-j\pi} + 0 \cdot e^{-j3\pi/2}) = \frac{1}{4}(1-j);$$

$$\dot{C}_{x3} = \dot{C}_{x1}^* = \frac{1}{4}(1+j);$$

$$\dot{C}_{y0} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} y_k = \frac{1}{4}(1+0+1+0) = \frac{1}{2};$$

$$\dot{C}_{y2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} (-1)^k y_k = \frac{1}{4}(1-0+1-0) = \frac{1}{2};$$

$$\dot{C}_{y1} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{4-1} y_k e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot k/4} = \frac{1}{4}(1 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-j\pi/2} + 1 \cdot e^{-j\pi} + 0 \cdot e^{-j3\pi/2}) = \frac{1}{4}(1-1) = 0;$$

$$\dot{C}_{y3} = \dot{C}_{y1}^* = 0,$$

$$\text{т.е. } \{\dot{C}_{x_n}\} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}(1-j); 0; \frac{1}{4}(1+j)\right) \text{ и } \{\dot{C}_{y_n}\} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Используя свойство ДПФ о свёртке, получим:

$$\dot{C}_{f0} = \dot{C}_{x0} \cdot \dot{C}_{y0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\dot{C}_{f1} = \dot{C}_{x1} \cdot \dot{C}_{y1} = \frac{1}{4}(1-j) \cdot 0 = 0;$$

$$\dot{C}_{f2} = \dot{C}_{x2} \cdot \dot{C}_{y2} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$\dot{C}_{f3} = \dot{C}_{x3} \cdot \dot{C}_{y3} = \frac{1}{4}(1+j) \cdot 0 = 0,$$

таким образом, результат $\{\dot{C}_{f_n}\} = \left(\frac{1}{4}; 0; 0; 0\right)$, совпадает со значениями ДПФ, полученными по первому способу.

Ответ: $\{\dot{C}_{f_n}\} = \left(\frac{1}{4}; 0; 0; 0\right)$.

Вопросы и задачи:

1.12. Вычислите коэффициенты ДПФ C_n , где $n = 0, 1, 2$ дискретного периодического сигнала $x_d(t)$, заданного тремя отсчетами $(0, 10, 20)$.

1.13. ДПФ некоторого дискретного сигнала $\{x_k\}$ равно $\{C_k\} = (1, 0, 0, 0)$. Найти значения сигнала $\{x_k\}$.

1.14. Получите выражение периодического аналогового сигнала $x(t)$, каждому периоду которого отвечает дискретный сигнал, состоящий из четырех равноотстоящих выборов $(1, 0, -0.5, 0)$.

1.15. Вычислите Z-преобразование $F(z)$ дискретной свертки $\{f_n\}$ дискретных сигналов $\{x_n\} = (1, 1, 1, 0, 0, \dots)$ и $\{y_n\} = (0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$.

1.16. Найдите дискретный сигнал $\{x_n\}$, которому отвечает Z-преобразование $X(z) = 1/(1 - 0.3 \cdot z^{-1})$.

1.17. Найти ДПФ дискретной свертки сигналов $\{x_k\} = (1, 1, 0, 0)$ и $\{y_k\} = (1, 0, 1, 0)$ как путем непосредственного применения формулы ДПФ к результату вычисления дискретной свертки, так и с помощью свойства ДПФ дискретной свертки двух сигналов.

1.18. Восстановите аналоговый сигнал $x(t)$ по коэффициентам ДПФ $\{C_n\} = (0, 0.5, 0, 0.5)$.

1.19. Найдите Z-преобразование $X(z)$ дискретного сигнала $\{x_k\}$, имеющего общий член $x_n = \alpha^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

1.20. Вычислите седьмой член x_6 дискретной последовательности $\{x_n\}$, Z-преобразование которой равно $X(z) = 25/(1 - 0.9 \cdot z^{-1})$.

Вопросы и задачи для самоподготовки:

1. Что называют дискретным преобразованием Фурье?
2. Как осуществляется восстановление аналогового сигнала по коэффициенту дискретного преобразования Фурье?
3. Каковы основные свойства дискретного преобразования Фурье?
4. Как вычисляется прямое и обратное Z-преобразование?

5. Как связано Z-преобразование с преобразованиями Лапласа и Фурье?
6. Каковы основные свойства Z-преобразования?
7. Найти ДПФ числовой последовательности, состоящей из двух элементов: $x_0 = a$; $x_1 = b$. Применив к результату обратное ДПФ, убедиться в том, что получается первоначальный сигнал.
8. Найти сигнал, Z-преобразование которого определяется выражением $X(z) = (1 + z^{-1}) / (1 - z^{-1})$.

2. ТЕМА 2. ЦИФРОВОЕ КОДИРОВАНИЕ И МОДУЛЯЦИЯ СИГНАЛОВ

Учебно-воспитательные цели:

1. освоить метод анализа цифровой модуляции при гармонической и негармонической несущей;
2. приобретение навыков определения полосы частот сигналов с цифровой модуляцией при разных видах несущего колебания;
3. стимулирование активной познавательной деятельности слушателей, способствующее выработке у них целостного представления о своей будущей деятельности по специальности;
4. воспитание у слушателей профессиональных и нравственных качеств, пропаганда Российской науки.

2.1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Учебные вопросы:

1. Импульсно-кодовая модуляция.
2. Цифровая модуляция при гармонической несущей.
3. Цифровая модуляция при негармонической несущей.

Примеры решения задач

П.2.1. Определить суммарную среднюю мощность шума на выходе системы ИКМ, если число разрядов кода $n = 7$, вероятность ошибочного приема одного разряда $p = 10^{-6}$, а сигнал $x(t)$ на входе меняется в диапазоне от -1 В до 1 В.

Решение:

Суммарная дисперсия (средняя мощность) шума на выходе системы ИКМ:

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_{\text{кв}}^2 + \sigma_{\text{л.и.}}^2,$$

где дисперсия шума квантования (при большом числе уровней квантования $N = 2^n$):

$$\sigma_{\text{кв}}^2 = \frac{(\Delta x)^2}{12},$$

шаг квантования $\Delta x = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{N}$; а дисперсия ошибки из-за ложной информации:

$$\sigma_{\text{л.и.}}^2 = p(\Delta x)^2 \left(\frac{4^n - 1}{3} \right).$$

Вычислим численные значения параметров:

$$\Delta x = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{N} = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2^n} = \frac{1 - (-1)}{2^7} = \frac{2}{128} = \frac{1}{64} \text{ В};$$

$$\sigma_{\text{кв}}^2 = \frac{(\Delta x)^2}{12} = \frac{1}{12 \cdot (64)^2} \approx 2,035 \cdot 10^{-5} \text{ В}^2;$$

$$\sigma_{\text{л.и.}}^2 = p(\Delta x)^2 \left(\frac{4^n - 1}{3} \right) = 10^{-6} \cdot \frac{1}{64^2} \left(\frac{4^7 - 1}{3} \right) \approx 1,333 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2;$$

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_{\text{кв}}^2 + \sigma_{\text{л.и.}}^2 = 2,035 \cdot 10^{-5} + 1,333 \cdot 10^{-6} \approx 2,168 \cdot 10^{-5} \text{ В}^2.$$

Ответ: $\sigma_{\Sigma}^2 \approx 2,168 \cdot 10^{-5} \text{ В}^2$.

П.2.2. Напишите выражение для сигнала в системе ЧМ-ЧМ. Определите ширину полосы частот сигнала, если частота несущей $f_{02} = 100 \text{ МГц}$, частота поднесущей $f_{01} = 70 \text{ кГц}$, верхняя частота сообщения $F_{\text{max}} = 3,5 \text{ кГц}$, индекс модуляции при первой ЧМ $m_1 = 10$, а при второй $m_2 = 15$.

Решение:

Для двойной модуляции типа ЧМ-ЧМ можно сделать следующее пояснение

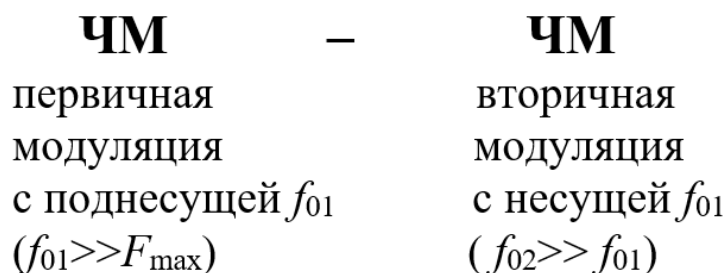


Рис. 2.1. Пояснение к двойной модуляции ЧМ-ЧМ

Приведём также структуру спектра при двойной модуляции ЧМ-ЧМ (рис.2.2):

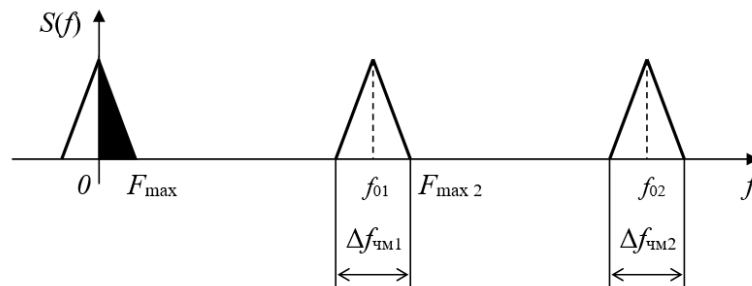


Рис. 2.2. Структура спектра двойной модуляции ЧМ-ЧМ

Итак, выражение для сигнала при первичной ЧМ:

$$u_{\text{ЧМ1}}(t) = U_{01} \cos \left(\omega_{01}t + K_{\text{ЧМ1}} \int_0^t s(t_1) dt_1 + \phi_{01} \right),$$

где U_{01} – начальная амплитуда сигнала (без модуляции); $\omega_{01} = 2\pi f_{01}$; ϕ_{01} – начальная фаза поднесущей; $K_{\text{ЧМ1}}$ – некоторая константа, характеризующая модулятор; $s(t)$ – информационное, модулирующее колебание, например, цифровая последовательность в двоичном коде. Тогда выражение для сигнала при ЧМ-ЧМ имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{\text{ЧМ-ЧМ}}(t) &= U_{02} \cos \left(\omega_{02}t + K_{\text{ЧМ2}} \int_0^t u_{\text{ЧМ1}}(t_1) dt_1 + \phi_{02} \right) = \\ &= U_{02} \cos \left(\omega_{02}t + K_{\text{ЧМ2}} \int_0^t \left[U_{01} \cos \left(\omega_{01}t_1 + K_{\text{ЧМ1}} \int_0^{t_1} s(t_2) dt_2 + \phi_{01} \right) \right] dt_1 + \phi_{02} \right). \end{aligned}$$

Практическая ширина полосы частот поднесущего колебания:

$$\Delta f_{\text{ЧМ1}} = 2(m_1 + 1)F_{\text{max}} = 2 \cdot (10 + 1) \cdot 3,5 \cdot 10^3 = 77 \cdot 10^3 = 77 \text{ кГц},$$

верхняя частота в поднесущем колебании:

$$F_{\text{max 2}} = f_{01} + \frac{1}{2} \Delta f_{\text{ЧМ1}} = 70 \cdot 10^3 + \frac{1}{2} \cdot 77 \cdot 10^3 = 108,5 \cdot 10^3 = 108,5 \text{ кГц},$$

таким образом, ширина полосы частот несущего колебания:

$$\Delta f_{\text{чм}2} = 2(m_2 + 1)F_{\text{max}2} = 2 \cdot (15 + 1) \cdot 108,5 \cdot 10^3 = 3472 \cdot 10^3 = 3,472 \text{ МГц.}$$

Ответ: $\Delta f_{\text{чм}2} = 3,472 \text{ МГц};$

$$u_{\text{чм-чм}}(t) = U_{02} \cos \left(\omega_{02}t + K_{\text{чм}2} \int_0^t \left[U_{01} \cos \left(\omega_{01}t_1 + K_{\text{чм}1} \int_0^{t_1} s(t_2) dt_2 + \phi_{01} \right) \right] dt_1 + \phi_{02} \right).$$

Вопросы и задачи:

2.1. Определить суммарную среднюю мощность шума на выходе системы ИКМ, если число разрядов кода $n = 7$, вероятность ошибочного приема одного разряда $p = 10^{-6}$, а сигнал на входе меняется в диапазоне от -1 В до 1 В .

2.2. Определить число возможных уровней квантования гауссовского случайного сигнала и полосу частот, занимаемую полученным сигналом ИКМ, если основание кода $m = 2$, верхняя частота в спектре мощности гауссовского случайного сигнала равна $f_g = 3.5 \text{ кГц}$, а отношение средних мощностей сигнала и шума квантования равно $q_{\text{дБ}} = 40 \text{ дБ}$.

2.3. Напишите выражение для сигнала в системе ЧМ-ЧМ. Определите ширину полосы частот сигнала, если частота несущей $f_{02} = 100 \text{ МГц}$, частота поднесущей $f_{01} = 70 \text{ кГц}$, верхняя частота сообщения $F_{\text{max}} = 3.5 \text{ кГц}$, индекс модуляции при первой ЧМ $m_1 = 10$, а при второй $m_2 = 15$.

2.4. Сигнал при цифровой ФМ содержит 8 элементов и имеет вид (рис.2.3):

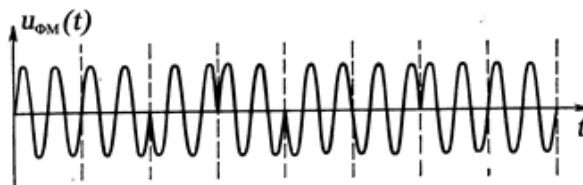


Рис. 2.3. Внешний вид ФМ сигнала

Считая, что первый элемент соответствует символу «1», напишите двоичный код передаваемого сообщения.

2.5. Сигнал при цифровой ОФМ имеет вид (рис.2.4):

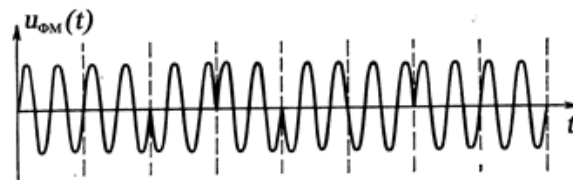


Рис. 2.4. Внешний вид ОФМ сигнала

Восстановить код, соответствующий этому сигналу, если: а) символ «1» передается сменой фазы предыдущего элемента сигнала, а символ «0» – сигналом с той же фазой; б) символ «0» передается сменой фазы предыдущего элемента сигнала, а символ «1» – сигналом с той же фазой.

2.6. Определите полосу частот сигнала, необходимую для передачи сигнала при импульсной модуляции, если считать, что несущая образована последовательностью прямоугольных импульсов длительностью $\tau_u = 1$ мкс, а ширина спектра определяется тремя первыми лепестками функции $|\sin(\pi f \tau_u)/(\pi f \tau_u)|$.

2.7. Напишите выражение для сигнала АИМ-БМ. Несущее колебание является последовательностью прямоугольных импульсов. Какая полоса частот требуется для его передачи. Ширина спектра сигнала АИМ определяется двумя первыми лепестками функции $|\sin(\pi f \tau_u)/(\pi f \tau_u)|$, $\tau_u = 5$ мкс.

2.8. Определить минимальное значение средней мощности сигнала ИКМ, необходимое для обеспечения отношения средних мощностей сигнала и суммарного шума не менее 40 Дб. При этом число разрядов кода $n = 6$, вероятность ошибочного приема одного разряда $p = 10^{-5}$, а сигнал на входе меняется в диапазоне от -1 В до 1 В. Определить на сколько процентов можно уменьшить среднюю мощность сигнала ИКМ, если вероятность ошибочного приема одного разряда будет равна $p = 10^{-7}$.

2.9. Напишите выражение для сигнала в системе ФМ-АМ. Определите ширину полосы частот сигнала, если частота несущего колебания $f_{02} = 10$ МГц, частота поднесущей $f_{01} = 100$ кГц, верхняя частота сообщения $F_{\max} = 4$ кГц, а индекс ФМ $m_1 = 15$.

2.10. Определите минимальное значение длительности импульсов несущего колебания для сигнала АИМ-ЧМ, если полоса частот, занимаемая этим сигналом, не превышает 800 кГц, индекс ЧМ $m_2 = 15$. Ширина спектра сигнала АИМ определяется первым лепестком функции $|\sin(\pi f \tau_u)/(\pi f \tau_u)|$.

Вопросы и задачи для самоподготовки:

1. Что называется аналого-цифровым и цифро-аналоговым преобразованием сигналов?
2. Что называется импульсно-кодовой модуляцией?
3. Какие существуют виды цифровой модуляции при гармонической несущей?
4. Какие существуют виды цифровой модуляции при негармонической несущей?
5. Определить минимально необходимую полосу частот сигнала ИКМ при основании кода m и полосе сообщения F_c .

6. Нарисуйте реализацию сигнала при цифровой АМ с пассивной паузой (символ «0» передается отсутствием излучения), соответствующую коду 10111001.
7. Напишите выражение для сигнала АИМ-ФМ. Несущее колебание является последовательностью прямоугольных импульсов. Какая полоса частот требуется для его передачи. Ширина спектра сигнала АИМ определяется тремя первыми лепестками функции $|\sin(\pi f \tau_u)|/(\pi f \tau_u)$, $\tau_u = 5$ мкс, индекс ФМ $m_2 = 15$.

3. ТЕМА 3. ЛИНЕЙНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ

Учебно-воспитательные цели:

- 1) на практических примерах закрепить навыки расчета основных характеристик цифровых фильтров;
- 2) практическое применение методов синтеза цифровых фильтров с заданными характеристиками;
- 3) стимулирование активной познавательной деятельности слушателей, способствующее выработке у них целостного представления о своей будущей деятельности по специальности;
- 4) воспитание у слушателей профессиональных и нравственных качеств, пропаганда Российской науки.

3.1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Цифровая фильтрация сигналов трансверсальными и рекурсивными фильтрами.

Учебные вопросы:

1. Импульсная характеристика, системная функция, частотный коэффициент передач, алгоритм фильтрации и структурная схема трансверсального цифрового фильтра.
2. Импульсная характеристика, системная функция, частотный коэффициент передач, алгоритм фильтрации и структурная схема рекурсивного цифрового фильтра.
3. Проверка устойчивости цифрового рекурсивного фильтра.

Примеры решения задач

П.3.1. Трансверсальный цифровой фильтр работает в соответствии с алгоритмом $y_k = 4x_k - 2,5x_{k-1} + 0,8x_{k-2}$. Изобразите схему фильтра, найдите им-

пульсную характеристику $\{h_k\}$, системную функцию $H(z)$ и частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$, АЧХ и ФЧХ.

Решение:

В соответствии с алгоритмом фильтрации трансверсальным (нерекурсивным) цифровым фильтром

$$y_k = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \dots + a_{m-1} x_{k-m+1} = \sum_{n=0}^{m-1} a_n x_{k-n},$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ – последовательность коэффициентов, можно изобразить следующую схему фильтра:

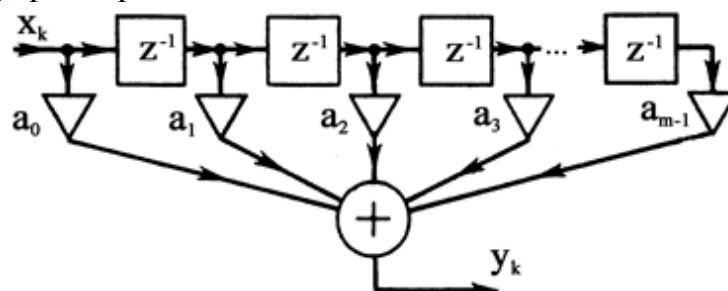


Рис. 3.1. Структурная схема трансверсального цифрового фильтра

В нашем случае отличные от нуля коэффициенты фильтра $a_0 = 4$; $a_1 = -2,5$; $a_2 = 0,8$. Таким образом, получим схему (рис.3.2):

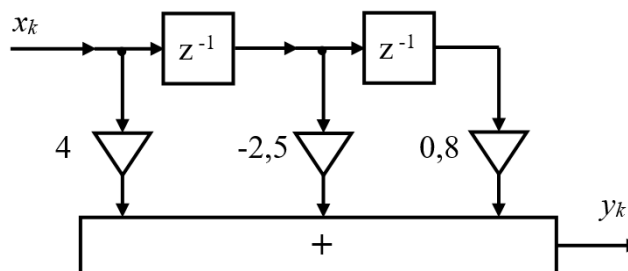


Рис. 3.2. Схема полученного фильтра

Импульсная характеристика трансверсального цифрового фильтра:

$$\{h_k\} = (a_0; a_1; a_2; a_3; \dots; a_{m-1}) = (4; -2,5; 0,8).$$

Системная функция трансверсального ЦФ:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^{-k} = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_{m-1} \cdot z^{-(m-1)} = 4 - 2,5 \cdot z^{-1} + 0,8 \cdot z^{-2}.$$

Частотный коэффициент передачи трансверсального ЦФ:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \sum_{k=0}^{m-1} a_k e^{-j\omega k \Delta} = a_0 + a_1 e^{-j\omega \Delta} + a_2 e^{-j2\omega \Delta} + \dots + a_{m-1} e^{-j(m-1)\omega \Delta} = \\ &= 4 - 2,5 \cdot e^{-j\omega \Delta} + 0,8 \cdot e^{-j2\omega \Delta} = \\ &= 4 - 2,5 \cdot \cos(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \cos(2\omega \Delta) - j \cdot [-2,5 \cdot \sin(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \sin(2\omega \Delta)]. \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика трансверсального ЦФ:

$$\begin{aligned} A(\omega) \equiv |K(j\omega)| &= \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k \cos(\omega k \Delta) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k \sin(\omega k \Delta) \right)^2} = \\ &= \sqrt{(4 - 2,5 \cdot \cos(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \cos(2\omega \Delta))^2 + (-2,5 \cdot \sin(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \sin(2\omega \Delta))^2}. \end{aligned}$$

Фазочастотная характеристика трансверсального ЦФ:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) \equiv \arg[K(j\omega)] &= -\arctg \left(\frac{\sum_{k=0}^{m-1} a_k \sin(\omega k \Delta)}{\sum_{k=0}^{m-1} a_k \cos(\omega k \Delta)} \right) = \\ &= -\arctg \left(\frac{-2,5 \cdot \sin(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \sin(2\omega \Delta)}{4 - 2,5 \cdot \cos(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \cos(2\omega \Delta)} \right). \end{aligned}$$

Ответ: схема цифрового фильтра – рис.3.2; $\{h_k\} = (4; -2,5; 0,8)$;
 $H(z) = 4 - 2,5 \cdot z^{-1} + 0,8 \cdot z^{-2}$; $K(j\omega) = 4 - 2,5 \cdot e^{-j\omega \Delta} + 0,8 \cdot e^{-j2\omega \Delta}$;
 $A(\omega) = \sqrt{(4 - 2,5 \cdot \cos(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \cos(2\omega \Delta))^2 + (-2,5 \cdot \sin(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \sin(2\omega \Delta))^2}$;
 $\Phi(\omega) = -\arctg \left(\frac{-2,5 \cdot \sin(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \sin(2\omega \Delta)}{4 - 2,5 \cdot \cos(\omega \Delta) + 0,8 \cdot \cos(2\omega \Delta)} \right).$

П.3.2. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0,5 \cdot z^{-1}}$. Нарисуйте структурную схему фильтра, запишите алгоритм фильтрации, определите его частотный коэффициент передачи, АЧХ и ФЧХ, вычислите импульсную характеристику.

Решение:

Системная функция рекурсивного ЦФ имеет вид:

$$H(z) = \frac{\sum_{g=0}^{m-1} a_g z^{-g}}{1 - \sum_{p=1}^{n-1} b_p z^{-p}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m-1} z^{-(m-1)}}{1 - b_1 z^{-1} - \dots - b_{n-1} z^{-(n-1)}},$$

таким образом, в нашем случае отличные от нуля коэффициенты фильтра $a_0 = 1$; $a_1 = 1$; $b_1 = 0,5$. Структурная схема заданного цифрового фильтра (рис.3.3):

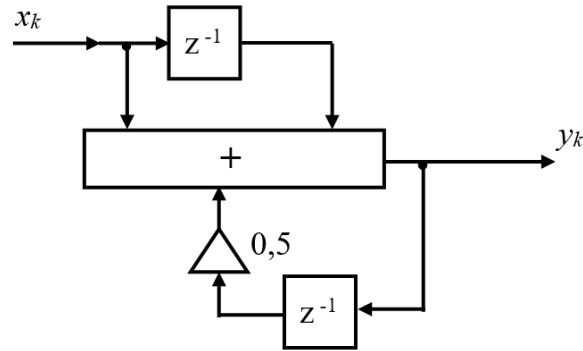


Рис. 3.3. Структурная схема заданного фильтра

Алгоритм фильтрации данного рекурсивного цифрового фильтра:

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{g=0}^{m-1} a_g x_{k-g} + \sum_{p=1}^{n-1} b_p y_{k-p} = \\ &= a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \dots + a_{m-1} x_{k-m+1} + b_1 y_{k-1} + b_2 y_{k-2} + \dots + b_{n-1} y_{k-n+1} = \\ &= x_k + x_{k-1} + 0,5 \cdot y_{k-1}. \end{aligned}$$

Частотный коэффициент передачи рекурсивного ЦФ:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{\sum_{g=0}^{m-1} a_g e^{-j\omega g \Delta}}{1 - \sum_{p=1}^{n-1} b_p e^{-j\omega p \Delta}} = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega \Delta} + a_2 e^{-j2\omega \Delta} + \dots + a_{m-1} e^{-j(m-1)\omega \Delta}}{1 - b_1 e^{-j\omega \Delta} - b_2 e^{-j2\omega \Delta} - \dots - b_{n-1} e^{-j(n-1)\omega \Delta}} = \\ &= \frac{1 + e^{-j\omega \Delta}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\omega \Delta}} = \frac{1 + \cos(\omega \Delta) - j \cdot \sin(\omega \Delta)}{1 - 0,5 \cdot \cos(\omega \Delta) - j \cdot [-0,5 \cdot \sin(\omega \Delta)]}. \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика рекурсивного ЦФ:

$$\begin{aligned}
A(\omega) \equiv |K(j\omega)| &= \sqrt{\frac{\left(\sum_{g=0}^{m-1} a_g \cos(\omega g \Delta)\right)^2 + \left(\sum_{g=0}^{m-1} a_g \sin(\omega g \Delta)\right)^2}{\left(1 - \sum_{p=1}^{n-1} b_p \cos(\omega p \Delta)\right)^2 + \left(\sum_{p=1}^{n-1} b_p \sin(\omega p \Delta)\right)^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{(1 + \cos(\omega \Delta))^2 + (\sin(\omega \Delta))^2}{(1 - 0,5 \cdot \cos(\omega \Delta))^2 + (0,5 \cdot \sin(\omega \Delta))^2}}.
\end{aligned}$$

Фазочастотная характеристика рекурсивного ЦФ:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) \equiv \arg[K(j\omega)] &= -\operatorname{arctg} \left(\frac{\sum_{g=0}^{m-1} a_g \sin(\omega g \Delta)}{\sum_{g=0}^{m-1} a_g \cos(\omega g \Delta)} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sum_{p=1}^{n-1} b_p \sin(\omega p \Delta)}{1 - \sum_{p=1}^{n-1} b_p \cos(\omega p \Delta)} \right) = \\
&= -\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega \Delta)}{1 + \cos(\omega \Delta)} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{0,5 \cdot \sin(\omega \Delta)}{1 - 0,5 \cdot \cos(\omega \Delta)} \right).
\end{aligned}$$

Найдём импульсную характеристику рекурсивного цифрового фильтра, как обратное z-преобразование от системной функции.

$$\begin{aligned}
h_k &= \frac{1}{2\pi j} \oint_L H(z) \cdot z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{1+z^{-1}}{1-0,5 \cdot z^{-1}} \cdot z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z+1}{z-0,5} \cdot z^{k-1} dz = \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^k}{z-0,5} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^{k-1}}{z-0,5} dz.
\end{aligned}$$

Для вычисления данных интегралов необходимо рассмотреть два частных случая:

1) если $k = 0$, тогда

$$h_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{dz}{z-0,5} + \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{dz}{z(z-0,5)}.$$

Рассчитать данные интегралы, взятые по замкнутому контуру (охватывающему все особые точки) в комплексной плоскости, можно воспользовавшись теоремой о вычетах. В нашем случае необходимо вычислять в полюсах вычеты первого порядка. В результате получим:

$$\begin{aligned}
h_0 &= \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \cdot \operatorname{res}_{z=0,5} \left[\frac{1}{z-0,5} \right] + \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \cdot \operatorname{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z(z-0,5)} \right] + \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \cdot \operatorname{res}_{z=0,5} \left[\frac{1}{z(z-0,5)} \right] = \\
&= \frac{1}{z-0,5} (z-0,5) \Big|_{z=0,5} + \frac{1}{z(z-0,5)} z \Big|_{z=0} + \frac{1}{z(z-0,5)} (z-0,5) \Big|_{z=0,5} = 1 \Big|_{z=0,5} + \frac{1}{z-0,5} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z} \Big|_{z=0,5} = 1 - 2 + 2 = 1;
\end{aligned}$$

2) если $k \geq 1$, тогда

$$\begin{aligned}
h_k &= \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^k \cdot dz}{z-0,5} + \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^{k-1} \cdot dz}{z(z-0,5)} = \operatorname{res}_{z=0,5} \left[\frac{z^k}{z-0,5} \right] + \operatorname{res}_{z=0,5} \left[\frac{z^{k-1}}{z-0,5} \right] = \\
&= \frac{z^k}{z-0,5} (z-0,5) \Big|_{z=0,5} + \frac{z^{k-1}}{z-0,5} (z-0,5) \Big|_{z=0,5} = z^k \Big|_{z=0,5} + z^{k-1} \Big|_{z=0,5} = \\
&= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k} + \frac{2}{2^k} = \frac{3}{2^k}.
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$h_k = \begin{cases} 1, & k=0; \\ \frac{3}{2^k}, & k \geq 1, \end{cases}$$

$$\text{или } \{h_k\} = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \dots \right).$$

Ответ: схема цифрового фильтра – рис.3.3; $y_k = x_k + x_{k-1} + 0,5 \cdot y_{k-1}$;

$$K(j\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega\Delta}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\omega\Delta}}; \quad A(\omega) = \sqrt{\frac{(1 + \cos(\omega\Delta))^2 + (\sin(\omega\Delta))^2}{(1 - 0,5 \cdot \cos(\omega\Delta))^2 + (0,5 \cdot \sin(\omega\Delta))^2}};$$

$$\Phi(\omega) = -\arctg\left(\frac{\sin(\omega\Delta)}{1 + \cos(\omega\Delta)}\right) + \arctg\left(\frac{0,5 \cdot \sin(\omega\Delta)}{1 - 0,5 \cdot \cos(\omega\Delta)}\right); \quad \{h_k\} = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \dots \right).$$

П.3.3. Собственные колебания в рекурсивном цифровом фильтре второго порядка описываются разностным уравнением $y_k = y_{k-1} - 0,5 \cdot y_{k-2}$. Исследуйте устойчивость данного фильтра.

Решение:

Способ 1. По определению рекурсивный фильтр с алгоритмом фильтрации

$$y_k = b_1 y_{k-1} + b_2 y_{k-2} + \dots + b_{n-1} y_{k-n+1},$$

будет устойчив, если все корни характеристического уравнения

$$\gamma^{n-1} - b_1 \gamma^{n-2} - b_2 \gamma^{n-3} - \dots - b_{n-1} = 0,$$

по модулю меньше единицы ($|\gamma_1| < 1$; $|\gamma_2| < 1$; ...; $|\gamma_{n-1}| < 1$, т.е. располагаются внутри единичного круга с центром в точке ноль). Обозначая

$$y_k = \gamma^k,$$

получим характеристическое уравнение для заданного фильтра ($b_1 = 1$; $b_2 = -0,5$):

$$\gamma^k = 1 \cdot \gamma^{k-1} - 0,5 \cdot \gamma^{k-2}$$

Или

$$\gamma^k - 1 \cdot \gamma^{k-1} + 0,5 \cdot \gamma^{k-2} = 0,$$

то есть

$$\gamma^2 - \gamma + 0,5 = 0.$$

Корни данного характеристического уравнения

$$\gamma_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,5}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} (1 \pm j).$$

Модули полученных комплексных корней:

$$\gamma_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

таким образом, выполняется условие $|\gamma_1| < 1$; $|\gamma_2| < 1$, а, следовательно, фильтр устойчив.

Способ 2. По критерию устойчивости рекурсивный фильтр является устойчивым, если все корни характеристического многочлена вида

$$(w+1)^{n-1} - b_1 (w-1)(w+1)^{n-2} - b_2 (w-1)^2 (w+1)^{n-3} - \dots$$

$$\dots - b_{n-2} (w-1)^{n-2} (w+1) - b_{n-1} (w-1)^{n-1} = 0.$$

расположены в левой полуплоскости (т.е. $\operatorname{Re}[w] < 0$). Для получения характеристического уравнения необходимо приравнять знаменатель системной функции рекурсивного ЦФ к нулю

$$z^{n-1} - b_1 z^{n-2} - b_2 z^{n-3} - \dots - b_{n-1} = 0$$

и осуществить замену переменных

$$z = \frac{w+1}{w-1}.$$

В нашем случае получим ($b_1 = 1$; $b_2 = -0,5$):

$$\left(\frac{w+1}{w-1} \right)^2 - 1 \cdot \left(\frac{w+1}{w-1} \right) + 0,5 = 0$$

или

$$(w+1)^2 - 1 \cdot (w-1) \cdot (w+1) + 0,5 \cdot (w-1)^2 = 0,$$

следовательно

$$w^2 + 2w + 1 - (w^2 - 1) + 0,5 \cdot (w^2 - 2w + 1) = 0,$$

приводя подобные, получим:

$$0,5 \cdot w^2 + w + 2,5 = 0,$$

то есть характеристическое уравнение можно записать в виде:

$$w^2 + 2 \cdot w + 5 = 0.$$

Проведём анализ полученного характеристического уравнения (составленного на переменную w) двумя методами.

I. Найдём корни характеристического уравнения, непосредственно решив алгебраическое уравнение второй степени:

$$w_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{-16}) = \frac{1}{2}(-2 \pm j \cdot 4) = -1 \pm j \cdot 2.$$

Реальные части полученных корней:

$$\operatorname{Re}[w_1] = -1; \operatorname{Re}[w_2] = -1,$$

таким образом, выполняется условие $\operatorname{Re}[w_1] < 0; \operatorname{Re}[w_2] < 0$, и, следовательно, фильтр устойчив.

II. Как известно, в общем случае решения алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней являются весьма трудоёмкими и громоздкими, а уравнения 5-й степени и выше аналитического решения в общем виде не имеют вовсе. В этой связи для анализа устойчивости систем с обратной связью (например, в виде рекурсивных цифровых фильтров) применяют алгебраические критерии (без непосредственного решения алгебраического уравнения n -й степени), например критерий Рауса-Гурвица. Согласно критерию Рауса-Гурвица система с обратной связью будет устойчива, если для характеристического уравнения:

$$q_n w^n + q_{n-1} w^{n-1} + q_{n-2} w^{n-2} + \dots + q_2 w^2 + q_1 w + q_0 = 0$$

будут выполняться условия:

- 1) коэффициенты $q_n > 0$ и $q_0 > 0$;
- 2) определитель Гурвица

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} q_{n-1} & q_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q_{n-3} & q_{n-2} & q_{n-1} & q_n & \dots & 0 & 0 \\ q_{n-5} & q_{n-4} & q_{n-3} & q_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_0 & q_1 \end{vmatrix};$$

- 3) все главные миноры определителя Гурвица должны быть больше нуля.

В нашем случае при $q_2 = 1; q_1 = 2; q_0 = 5$:

- 1) коэффициенты $q_2 = 1 > 0$ и $q_0 = 5 > 0$;
- 2) определитель Гурвица

$$D_1 = |q_1| = |2| = 2;$$

- 3) главные миноры в данном определителе Гурвица отсутствуют.

Таким образом, согласно критерию Рауса-Гурвица, исследуемый рекурсивный цифровой фильтр устойчив.

Ответ: рекурсивный цифровой фильтр устойчив.

Вопросы и задачи

3.1. Импульсная характеристика фильтра определяется выражением

$$\{h_k\} = (1; 0; 1; 1; 0).$$

Записать алгоритм цифровой фильтрации и изобразить схему фильтра. Рассчитать системную функцию и частотный коэффициент передачи.

3.2. Трансверсальный цифровой фильтр работает в соответствии с алгоритмом

$$y_k = 4x_k - 2.5x_{k-1} + 0.8x_{k-2}.$$

Изобразите схему фильтра, найдите импульсную характеристику $\{h_k\}$, системную функцию $H(z)$ и частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$.

3.3. Системная функция цифрового фильтра определяется выражением

$$H(z) = \frac{0.8 + 0.3z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 - 0.6z^{-1} - 0.4z^{-2} + 0.3z^{-3}}.$$

Запишите частотный коэффициент передачи, алгоритм цифровой фильтрации и изобразите схему фильтра.

3.4. Системная функция цифрового фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}.$$

Определите его импульсную характеристику, частотный коэффициент передачи, запишите алгоритм фильтрации и нарисуйте структурную схему фильтра.

3.5. Собственные колебания в рекурсивном цифровом фильтре второго порядка описываются разностным уравнением

$$y_k = y_{k-1} - 0.5y_{k-2}.$$

Исследуйте устойчивость данного фильтра.

3.6. Системная функция цифрового фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}.$$

Исследуйте устойчивость данного фильтра.

3.7. Импульсная характеристика цифрового фильтра определяется выражением

$$h_k = 2 \exp(-k/3).$$

Найдите системную функцию фильтра и запишите алгоритм фильтрации в рекурсивной и нерекурсивной реализациях. Использовать формулу прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q), \quad |q| < 1.$$

3.8. Схема цифрового фильтра имеет вид (рис.3.4):

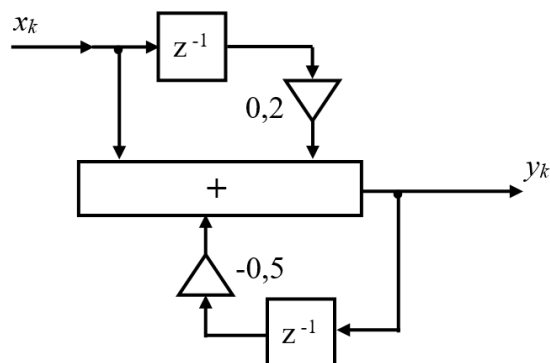


Рис. 3.4. Схема цифрового фильтра

Найдите системную функцию, импульсную характеристику и запишите алгоритм фильтрации.

3.9. Собственные колебания в рекурсивном цифровом фильтре описываются разностным уравнением

$$y_k = -1.5y_{k-1} - 0.9y_{k-2} - 0.2y_{k-3}.$$

Исследуйте устойчивость данного фильтра.

Вопросы и задачи для самоподготовки:

1. Что называется цифровым фильтром?

2. Каковы преимущества и недостатки цифровых фильтров по сравнению с аналоговыми фильтрами?
3. Как формулируются свойства линейности и стационарности цифровых фильтров?
4. Как в общем виде записываются импульсная характеристика, частотный коэффициент передачи и системная функция трансверсального цифрового фильтра?
5. Как в общем виде записываются импульсная характеристика, частотный коэффициент передачи и системная функция рекурсивного цифрового фильтра?
6. Найдите частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ трансверсального цифрового фильтра второго порядка, имеющего алгоритм $y_k = x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}$. Исследуйте вид функции $K(j\omega)$ при $\omega \cdot \Delta \rightarrow 0$ (ограничится тремя членами разложения экспоненты в ряд).
7. Рекурсивный цифровой фильтр работает в соответствии с алгоритмом $y_k = x_k + y_{k-1} - 0.5y_{k-2}$. Найдите импульсную характеристику фильтра.
8. Системная функция цифрового фильтра записывается выражением

$$H(z) = \frac{2}{1 - 2z^{-1}}.$$

Исследуйте устойчивость данного фильтра.

3.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Линейные алгоритмы цифрового преобразования сигналов. Синтез цифровых КИХ-фильтров и БИХ-фильтров.

Учебные вопросы:

1. Синтез цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой.
2. Синтез цифровых фильтров с бесконечной импульсной характеристикой.
3. Расчет характеристик на выходе цифрового фильтра.

Примеры решения задач

П.3.4. Синтезировать цифровой фильтр с помощью метода инвариантности импульсной характеристики, если аналоговым фильтром является интегрирующая RC-цепочка с импульсной характеристикой вида $h_a(t) = \exp(-t/\tau)/\tau$, $t > 0$ и $h_a(t) = 0$, $t < 0$.

Решение:

Для синтеза ЦФ с помощью метода инвариантной импульсной характеристики выберем в качестве импульсной характеристики ЦФ равномерно распределенные отсчеты импульсной характеристики аналогового фильтра (фильтра-прототипа). Иначе говоря:

$$h_k = h_a(k\Delta),$$

где Δ – период дискретизации. Это эквивалентно замене непрерывного времени t в импульсной характеристике $h_a(t)$, на дискретные моменты времени $t_k = k\Delta$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, импульсная характеристика ЦФ для нашего случая имеет отсчёты:

$$h_k = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{k\Delta}{\tau}\right).$$

Как видно это фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр) или рекурсивный фильтр.

Вычислим основные характеристики синтезируемого цифрового фильтра:

1) системная функция ЦФ определяется через импульсную характеристику следующим образом:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\Delta}{\tau} k} \cdot z^{-k} = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\Delta}{\tau}} \cdot z^{-1} \right)^k ;$$

используя формулу для суммы бесконечной убывающей $|q| < 1$ геометрической прогрессии $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, получим:

$$H(z) = \frac{1/\tau}{1 - e^{-\frac{\Delta}{\tau}} \cdot z^{-1}} ;$$

2) частотный коэффициент передачи рассчитаем через системную функцию воспользовавшись заменой переменных $z = \exp(j\omega\Delta)$:

$$K(j\omega) = H(z) \Big|_{z=\exp(j\omega\Delta)} = \frac{1/\tau}{1 - e^{-\frac{\Delta}{\tau}} \cdot e^{-j\omega\Delta}}.$$

3) алгоритм фильтрации ЦФ, можно записать на основе системной функции или частотного коэффициента передачи:

$$y_k = \frac{1}{\tau} \cdot x_k + e^{-\frac{\Delta}{\tau}} \cdot y_{k-1} = a_0 \cdot x_k + b_1 \cdot y_{k-1},$$

где $a_0 = \frac{1}{\tau}$; $b_1 = e^{-\frac{\Delta}{\tau}}$.

$$\text{Ответ: } h_k = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{k\Delta}{\tau}\right); \quad y_k = \frac{1}{\tau} \cdot x_k + e^{-\frac{\Delta}{\tau}} \cdot y_{k-1}; \quad H(z) = \frac{1/\tau}{1 - e^{-\frac{\Delta}{\tau}} \cdot z^{-1}};$$

$$K(j\omega) = \frac{1/\tau}{1 - e^{-\frac{\Delta}{\tau}} \cdot e^{-j\omega\Delta}}.$$

П.3.5. Аналоговая колебательная динамическая система второго порядка описывается дифференциальным уравнением

$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot y(t) = x(t)$. Выполнить синтез фильтра, используя методы расчетов, основанные на численном решении дифференциального уравнения.

Решение:

Аналоговая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\sum_{n=0}^N c_n \left(\frac{d^n y_a(t)}{dt^n} \right) = \sum_{m=0}^M d_m \left(\frac{d^m x_a(t)}{dt^m} \right),$$

имеет передаточную функцию $K_a(p)$:

$$K_a(p) = \frac{\sum_{m=0}^M d_m \cdot p^m}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot p^n} = \frac{1}{\omega_0^2 + 2\alpha \cdot p + p^2}.$$

В нашем случае $c_0 = \omega_0^2$; $c_1 = 2\alpha$; $c_2 = 1$; $d_0 = 1$. Системная функция ЦФ может быть получена непосредственно из аналоговой передаточной функции путем замены переменных:

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta},$$

таким образом

$$\begin{aligned} H(z) &= K_a(p) \Big|_{p=(1-z^{-1})/\Delta} = \frac{1}{\omega_0^2 + \frac{2\alpha}{\Delta} \cdot (1 - z^{-1}) + \frac{1}{\Delta^2} \cdot (1 - z^{-1})^2} = \\ &= \frac{1}{\omega_0^2 + \frac{2\alpha}{\Delta} - \frac{2\alpha}{\Delta} z^{-1} + \frac{1}{\Delta^2} - \frac{2}{\Delta^2} z^{-1} + \frac{1}{\Delta^2} z^{-2}} = \\ &= \frac{1 / \left(\omega_0^2 + \frac{2\alpha}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^2} \right)}{1 - \frac{\frac{2\alpha}{\Delta} + \frac{2}{\Delta^2}}{\omega_0^2 + \frac{2\alpha}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}} \cdot z^{-1} + \frac{\frac{1}{\Delta^2}}{\omega_0^2 + \frac{2\alpha}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}} \cdot z^{-2}} = \frac{a_0}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}, \end{aligned}$$

$$\text{где } a_0 = \frac{\Delta^2}{\omega_0^2 \cdot \Delta^2 + 2\alpha \cdot \Delta + 1}; \quad b_1 = \frac{2(\alpha \cdot \Delta + 1)}{\omega_0^2 \cdot \Delta^2 + 2\alpha \cdot \Delta + 1}; \quad b_2 = \frac{-1}{\omega_0^2 \cdot \Delta^2 + 2\alpha \cdot \Delta + 1}.$$

Частотный коэффициент передачи данного рекурсивного ЦФ получим на основе его системной функции:

$$K(j\omega) = H(z) \Big|_{z=\exp(j\omega\Delta)} = \frac{a_0}{1 - b_1 e^{-j\omega\Delta} - b_2 e^{-j2\omega\Delta}}.$$

Алгоритм фильтрации ЦФ, можно записать на основе системной функции или частотного коэффициента передачи:

$$y_k = a_0 \cdot x_k + b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2}.$$

Ответ: $y_k = a_0 \cdot x_k + b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2}; \quad H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}};$

$$K(j\omega) = \frac{a_0}{1 - b_1 e^{-j\omega\Delta} - b_2 e^{-j2\omega\Delta}}, \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{\Delta^2}{\omega_0^2 \cdot \Delta^2 + 2\alpha \cdot \Delta + 1}; \quad b_1 = \frac{2(\alpha \cdot \Delta + 1)}{\omega_0^2 \cdot \Delta^2 + 2\alpha \cdot \Delta + 1};$$

$$b_2 = \frac{-1}{\omega_0^2 \cdot \Delta^2 + 2\alpha \cdot \Delta + 1}.$$

П.3.6. Аналоговый фильтр имеет передаточную функцию вида $K_a(p) = 1/(1 + 1/(3 \cdot p))$. Выполните синтез цифрового фильтра с помощью билинейного преобразования.

Решение:

Синтез ЦФ с помощью билинейного преобразования, а именно получение системной функции ЦФ, осуществляется на основе аналоговой передаточной функции с помощью замены переменных:

$$p = \frac{2}{\Delta} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Таким образом, в нашем случае для передаточной функции аналогового фильтра-прототипа:

$$K_a(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3p}} = \frac{3p}{1 + 3p} = \frac{\frac{1}{3}p}{\frac{1}{3} + p}$$

получим системную функцию ЦФ:

$$\begin{aligned} H(z) = K_a(p) \Big|_{p = \frac{2}{\Delta} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{3 \cdot \frac{2}{\Delta} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta(z+1)}{6(z-1)}} = \frac{6(z-1)}{6(z-1) + \Delta(z+1)} = \\ &= \frac{6z - 6}{(6 + \Delta)z - (6 - \Delta)} = \frac{\frac{6}{6 + \Delta} + \left(\frac{-6}{6 + \Delta}\right) \cdot z^{-1}}{1 - \left(\frac{6 - \Delta}{6 + \Delta}\right) \cdot z^{-1}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1}}, \end{aligned}$$

где $a_0 = \frac{6}{6+\Delta}$; $a_1 = \frac{-6}{6+\Delta}$; $b_1 = \frac{6-\Delta}{6+\Delta}$.

Частотный коэффициент передачи полученного рекурсивного ЦФ получим на основе его системной функции:

$$K(j\omega) = H(z)|_{z=\exp(j\omega\Delta)} = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta}}{1 - b_1 e^{-j\omega\Delta}}.$$

Алгоритм фильтрации ЦФ, можно записать на основе системной функции или частотного коэффициента передачи:

$$y_k = a_0 \cdot x_k + a_1 \cdot x_{k-1} + b_1 \cdot y_{k-1}.$$

Ответ: $y_k = a_0 \cdot x_k + a_1 \cdot x_{k-1} + b_1 \cdot y_{k-1}$; $H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1}}$;

$$K(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta}}{1 - b_1 e^{-j\omega\Delta}}, \text{ где } a_0 = \frac{6}{6+\Delta}; a_1 = \frac{-6}{6+\Delta}; b_1 = \frac{6-\Delta}{6+\Delta}.$$

П.3.7. На вход рекурсивного фильтра поступает сигнал ошибки квантования, имеющий дисперсию $\sigma_e^2 = 2,86 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2$. Алгоритм фильтрации описывается выражением $y_k = x_k + 0,9 \cdot y_{k-1}$. Найти дисперсию ошибки квантования σ_f^2 на выходе цифрового фильтра.

Решение:

Дисперсия шума на выходе ЦФ может быть рассчитана на основе дисперсии шума на входе ЦФ и импульсной характеристики ЦФ:

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^2,$$

для физически реализуемых ЦФ отсчеты импульсной характеристики с отрицательными степенями равны нулю, поэтому можно записать:

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} |h_k|^2.$$

Найдём импульсную характеристику рекурсивного цифрового фильтра, как обратное z-преобразование от системной функции.

$$h_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_L H(z) \cdot z^{k-1} dz,$$

при этом заданный рекурсивный ЦФ с алгоритмом фильтрации

$$y_k = x_k + 0,9 \cdot y_{k-1} = a_0 \cdot x_k + b_1 \cdot y_{k-1}$$

имеет системную функцию

$$H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 \cdot z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0,9 \cdot z^{-1}}.$$

Таким образом, импульсная характеристика

$$h_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{1}{1 - 0,9 \cdot z^{-1}} \cdot z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{z^k}{z - 0,9} dz,$$

вычислим данный интеграл, используя теорему о вычетах:

$$h_k = \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \cdot \operatorname{res}_{z=0,9} \left[\frac{z^k}{z - 0,9} \right] = \frac{z^k}{z - 0,9} (z - 0,9) \Big|_{z=0,9} = z^k \Big|_{z=0,9} = (0,9)^k.$$

Используя формулу для суммы бесконечной убывающей $|q| < 1$ геометрической прогрессии $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, получим дисперсию ошибки квантования на выходе цифрового фильтра:

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \frac{1}{1 - |0,9|^2} = \sigma_e^2 \frac{1}{1 - 0,81} = 2,86 \cdot 10^{-4} \frac{1}{1 - 0,81} \approx 1,505 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2.$$

Ответ: $\sigma_f^2 \approx 1,505 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2$.

Вопросы и задачи

3.10. Синтезировать цифровой фильтр с помощью метода инвариантности импульсной характеристики, если аналоговым фильтром является интегрирующая RC-цепочка с импульсной характеристикой вида $h_a(t) = \exp(-t/\tau)/\tau$, $t > 0$ и $h_a(t) = 0$, $t < 0$.

3.11. Аналоговая колебательная динамическая система второго порядка описывается дифференциальным уравнением

$$d^2 y(t)/dt^2 + 2\alpha dy(t)/dt + \omega_0^2 y(t) = x(t).$$

Выполнить синтез фильтра, используя методы расчетов, основанные на численном решении дифференциального уравнения.

3.12. Аналоговый фильтр Баттерворта первого порядка с единичной частотой среза имеет передаточную функцию вида $K_a(p) = 1/(p+1)$. Выполните синтез цифрового фильтра с помощью билинейного преобразования. Частота дискретизации равна $\Delta = 1$.

3.13. Найти необходимое число разрядов АЦП, чтобы обеспечить отношение сигнал/шум не менее 90 Дб, при условии, что квантуется сигнал, средняя мощность которого $\sigma_x^2 = 1 \text{ В}^2$.

3.14. На вход рекурсивного фильтра поступает сигнал ошибки квантования, имеющий дисперсию $\sigma_e^2 = 2.86 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2$. Алгоритм фильтрации описывается выражением $y_k = x_k + 0.9 \cdot y_{k-1}$. Найти дисперсию ошибки квантования σ_f^2 на выходе фильтра.

3.15. На вход фильтра поступает сигнал ошибки квантования. Алгоритм фильтрации описывается выражением $y_k = 2x_k - 0.2y_{k-1}$, а дисперсия ошибки квантования на выходе фильтра $\sigma_f^2 = 3 \text{ мВ}^2$. Найти дисперсию ошибки квантования сигнала на входе фильтра σ_e^2 .

3.16. Аналоговая колебательная динамическая система второго порядка описывается дифференциальным уравнением $d^2y(t)/dt^2 + 3 \cdot y(t) = 5 \cdot dx(t)/dt$. Выполнить синтез фильтра, используя методы расчетов, основанные на численном решении дифференциального уравнения.

3.17. Аналоговый фильтр Баттерворта второго порядка с единичной частотой среза имеет передаточную функцию вида $K_a(p) = 1/(p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1)$. Выполните синтез цифрового фильтра с помощью билинейного преобразования. Частота дискретизации равна $\Delta = 1$.

3.18. Найти необходимое число разрядов АЦП, чтобы обеспечить отношение сигнал/шум не менее 40 дБ, при условии, что квантуется сигнал, средняя мощность которого $\sigma_x^2 = 1 \text{ мВ}^2$.

3.19. На вход рекурсивного фильтра поступает сигнал ошибки квантования, имеющий дисперсию $\sigma_e^2 = 2.86 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2$. Алгоритм фильтрации описывается выражением $y_k = x_k + 2 \cdot x_{k-1} + 0.3 \cdot x_{k-2}$. Найти дисперсию ошибки квантования σ_f^2 на выходе фильтра.

Вопросы и задачи для самоподготовки:

1. Какой цифровой фильтр называется устойчивым?
2. Каковы критерии устойчивости цифрового фильтра?
3. Как осуществляется синтез цифровых фильтров на основе метода инвариантности импульсной характеристики?

4. Как осуществляется синтез цифровых фильтров на основе метода численного решения дифференциального уравнения?
5. Как осуществляется синтез цифровых фильтров на основе метода билинейного преобразования?
6. Что называется эффектом Гиббса?
7. Каким образом проводится расчет цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой при использовании окон?
8. Аналоговый фильтр имеет передаточную функцию вида $K_a(p) = 1/(1 + 1/(3 \cdot p))$. Выполните синтез цифрового фильтра с помощью билинейного преобразования.
9. Определить отношение сигнал/шум, которое обеспечивает АЦП. Считать, что число разрядов АЦП $n = 5$, а квантуется сигнал, средняя мощность которого $\sigma_x^2 = 1 \text{ В}^2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература:

1. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева. – 2-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / С.И. Баскаков. – 5-е изд. – М.: Высш. шк., 2005. – 462 с.

Дополнительная литература:

3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач: Учеб. пособие для вузов / С.И. Баскаков. – М.: Высшая школа, 2002. – 214 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учеб. для вузов / А.Б. Сергиенко. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2006. – 751 с.
5. Голубинский А.Н. Теория цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие / А.Н. Голубинский, С.В. Ролдугин, И.В. Лазарев. – Воронеж: ВИ МВД России, 2010. – 155 с.
6. Голубинский А.Н. Лабораторный практикум по курсу “Теория цифровой обработки сигналов” / А.Н. Голубинский, С.В. Ролдугин, Б.А. Швырев. – Воронеж: ВИ МВД России, 2008. – 66 с.
7. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 976 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Таблица П.1

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц, их наименования и обозначения

Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		русское	международное
10^{-18}	атто	а	a
10^{-15}	фемто	ф	f
10^{-12}	пико	п	p
10^{-9}	нано	н	n
10^{-6}	микро	мк	μ
10^{-3}	милли	м	m
10^{-2}	санتي	с	c
10^{-1}	деци	д	d
10^1	дека	да	da
10^2	гекто	г	h
10^3	кило	к	k
10^6	мега	М	M
10^9	гига	Г	G
10^{12}	тера	Т	T
10^{15}	пета	П	P
10^{18}	экса	Э	E

Таблица П. 2

Греческий алфавит

Прописные	Строчные	Название	Прописные	Строчные	Название
Α	α	альфа	Ν	ν	ни (ню)
Β	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гамма	Ο	ο	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
Ε	ε	эпсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
Η	η	эта	Τ	τ	тау
Θ	θ	тета (тэта)	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	иота (йота)	Φ	φ	фи
Κ	κ	каппа	Χ	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	ми (мю)	Ω	ω	омега

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Тема 1. Обобщенная дискретизация сигналов	4
1.1. Практическое занятие № 1. Дискретное представление сигналов. Представление непрерывных сигналов в цифровой форме. Дискретная свертка сигналов.....	4
1.2. Практическое занятие № 2. Дискретное преобразование Фурье и его свойства, Z-преобразование и его свойства	9
2. Тема 2. Цифровое кодирование и модуляция сигналов	15
2.1. Практическое занятие №1	15
3. Тема 3. Линейные алгоритмы цифрового преобразования сигналов	20
3.1. Практическое занятие № 1	20
3.2. Практическое занятие № 2	31
Библиографический список.....	39
Приложение. Справочные сведения.....	40

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических занятий
для студентов специальности 11.05.01
«Радиоэлектронные системы и комплексы»
очной формы обучения

Составители:

Голубинский Андрей Николаевич,
Журавлёв Дмитрий Владимирович,
Проскурин Дмитрий Константинович,
Кузьменко Роман Валентинович

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 14.09.2023.

Уч.-изд. л. 2,2.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84