

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет »

А.А. Катрахова В.С. Купцов

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2016

УДК 517.53

Катрахова А.А. Элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление и их приложение в технических задачах : учеб.пособие [Электронный ресурс]. – Электрон.текстовые, граф. данные (1,7 Мб) / А.А. Катрахова, В.С. Купцов. – Воронеж : ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2016. – 1 электрон.опт. диск (CD-ROM). – Систем.требования: ПК 500 и выше ; 256 Мб ОЗУ ; WindowsXP ; AdobeAcrobat ; 1024x768 ; CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.

В учебном пособии содержится изложение теоретического материала по разделу: Элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление и их приложение в технических задачах. Теоретический материал иллюстрируется примерами.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлениям 27.03.04 «Управление в технических системах», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», (все профили), дисциплине «Математика».

Табл.1. Ил. 47. Библиогр.: 10 назв.

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.- мат. наук, проф. А.И. Шашкин); д-р техн. наук, проф. Н.Д. Вервейко

©Катрахова А.А., Купцов В.С., 2016

© Оформление. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2016

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие содержит теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых практических задач по разделу :«Элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление и их приложение в технических задачах »

Содержание учебного пособия соответствует программе курса математики для бакалавров инженерно-технических специальностей вузов, рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

В первой части учебного пособия излагаются элементы теории функций комплексного переменного, то есть функций, аргументом которых являются числа, содержащие квадратный корень из отрицательных чисел, так называемые мнимые числа. Мнимые числа обязаны своим рождением одной вполне реальной математической задаче - решению уравнений третьей степени. Всякое уравнение третьей степени сводится к решению уравнений вида

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1)$$

Для решения уравнения (1) более 400 лет назад итальянский математик И. Кардано предложил способ, который в современных обозначениях сводится к следующему: корни уравнения (1) могут быть вычислены по формуле

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ где } D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Однако эта формула дает осечку, когда уравнение (1) имеет три различных действительных корня. Например, уравнение $x^3 - x = 0$ имеет корни 0, 1 и -1. Но если попытаться найти эти корни по формуле (2), то получим

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Таким образом, возникла необходимость научиться обращаться с выражениями вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$, в частности, извлекать из таких чисел кубические корни. В дальнейшем было обнаружено, что многие сложные математические задачи можно решить, если использовать комплексные числа, то есть числа вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$. Так, например, с помощью комплексных чисел знаменитый немецкий математик К.Ф. Гаусс сумел найти ответ на такой чисто геометрический вопрос: при каких натуральных n можно построить с помощью циркуля и линейки правильный n -угольник. Широкое применение нашли комплексные числа в картографии, электротехнике, гидродинамике, теоретической физике. Уже в нашем столетии комплексные числа и комплексные функции успешно применялись советскими математиками и механиками Н.Е. Жуковским, С.А. Чаплыгиным, М.В. Келдышем в теории самолета. Г.В. Колосов, Н.И. Мусхелишвили впервые стали применять комплексные функции к расчетам различных конструкций на прочность. С применением комплексных переменных в теоретической физике связаны исследования академиков Н.Н.Боголюбова и В.С. Владимирова. В частности, комплексные переменные использовались для расчета атомных реакторов.

Значительное применение нашли комплексные числа при изучении движения естественных и искусственных спутников. Так, например, одна из важных задач, которые возникли при подготовке к запуску первых искусственных спутников, состояла в следующем: как будет двигаться спутник под влиянием силы притяжения к "сплюснутому сфероиду" (такую форму имеет земной шар). Одним из самых эффективных способов решения этой задачи оказался способ, используя-

ший теорию функций комплексного переменного.

Мы перечислили лишь небольшую часть задач, в которых используется теория функций комплексного переменного. В настоящее время трудно найти область математики, где бы не использовались комплексные числа.

Во второй части учебного пособия на основе теории функций комплексного переменного излагается теория преобразования Лапласа. Приводятся применения преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, к решению некоторых типов интегральных уравнений, к расчету переходных процессов в электрических цепях. Метод решения задач, основанный на применении преобразования Лапласа (и других преобразований) называется операционным методом.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. Комплексные числа и действия над ними

1.1.1. Понятие комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательные формы комплексного числа

Комплексными числами называются выражения вида $z = x + iy$, где x и y - действительные числа, а i - так называемая мнимая единица; так обозначается число, квадрат которого равен -1. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частью комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re}z$, $y = \operatorname{Im}z$. Введем на плоскости декартову систему координат $ХОУ$ (рис. 1.1). Тогда каждому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку (x, y) на плоскости $ХОУ$. Таким образом, между множеством комплексных чисел и множеством

точек на плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому комплексному числу соответствует точка на плоскости и наоборот. Плоскость, служащая для изображения комплексных чисел, называется плоскостью комплексного переменного. Действительным числам $z=x$ соответствуют точки на оси ОХ, чисто мнимым числам, то есть числам вида $z=iy$, соответствуют точки на оси ОУ. Поэтому ось ОХ называется действительной осью, а ось ОУ - мнимой осью.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части: $z_1=z_2$, если $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Два комплексных числа $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются комплексно сопряженными числами. Изображения комплексно сопряженных чисел симметричны относительно действительной оси.

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ можно поставить в соответствие также вектор ОМ, начало которого совпадает с началом координат, а конец - с точкой М(х,у). Следовательно, комплексные числа можно изображать с помощью векторов на плоскости.

Положение точки М(х,у) на плоскости можно определить также с помощью полярных координат (r,φ). Если взять полюс в начале координат, а полярную ось направить по оси ОХ (рис. 1.1), то $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Следовательно, любое комплексное число $z=x+iy$ можно записать в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.1)$$

Форма записи комплексных чисел в виде (1.1) называется тригонометрической в отличие от алгебраической формы $z=x+iy$. Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$. Число φ называется аргументом комплексного числа и обозначается $\text{Arg}z$. Аргумент определяется для любого комплексного числа $z \neq 0$ из соотношения $\text{tg}\varphi = y/x$

не однозначно, а с точностью до числа, кратного 2π . Значение аргумента, удовлетворяющее неравенству $-\pi < \varphi < \pi$, называется главным и обозначается $\operatorname{arg} z$, следовательно, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2n\pi$, где n - любое целое число.

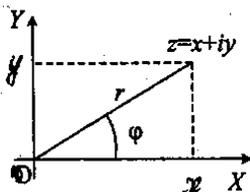


Рис. 1.1.

Главное значение аргумента комплексных чисел вычисляется

$$\text{по формулам } \operatorname{arctg} \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x, & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arctg} y/x + \pi, & \text{если } x < 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} y/x - \pi, & \text{если } x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Если воспользоваться формулой Эйлера

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

то любое комплексное число можно записать также в виде

$$z = r e^{i\varphi} \tag{1.2}$$

Форма записи комплексных чисел в виде (1.2) называется показательной формой.

Два комплексных числа, заданные в тригонометрической или показательной форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы либо равны, либо отличаются на число, кратное 2π .

1.1.2. Сложение и вычитание комплексных чисел

Сумма и разность комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяются по формулам

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Отсюда следует, что действительная и мнимая части суммы и разности комплексных чисел определяются так же, как координаты суммы и разности соответствующих векторов на плоскости. При этом следует придерживаться правила: начало всех векторов помещать в начало координат (рис.1.2). В частности, из треугольников с вершинами в точках $0, z_1, z_1+z_2$ и $0, z_1, z_1 - z_2$ следует, что

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, |z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.3)$$

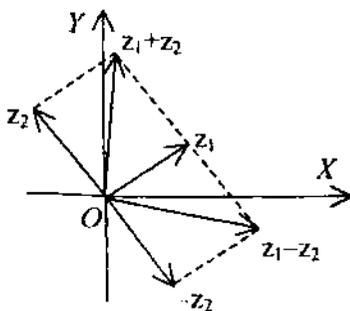


Рис. 1.2.

1.1.3. Умножение и деление комплексных чисел

Умножение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ производится по правилу умножения многочленов, при этом учитывается, что $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ и так далее

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.4)$$

Из формулы (1.4), в частности, следует, что произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным квадрату модуля этих чисел

$$z \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (1.5)$$

Сумма двух взаимно сопряженных чисел также является действительным числом

$$z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x = 2\operatorname{Re}z. \quad (1.6)$$

Деление комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению: частным от деления числа z_1 на число z_2 называется число z такое, что $z \cdot z_2 = z_1$. Это равенство невозможно, если $z_2=0$, а $z_1 \neq 0$. Это означает, что деление на 0 невозможно.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$. Тогда, в силу определения частного,

$$(x+iy)(x_2+iy_2) = x_1 + iy_1$$

или

$$(x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y) = x_1 + iy_1.$$

Приравнивая действительную и мнимую части в этом равенстве, получим систему уравнений для определения x и y

$$\begin{cases} x_2x - y_2y = x_1, \\ y_2x + x_2y = y_1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.7)$$

Этот же результат можно получить по-другому. Для этого нужно числитель и знаменатель дроби z_1/z_2 умножить на число,

сопряженное к знаменателю, и произвести умножение чисел в числителе и в знаменателе.

Если комплексные числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)= \\ &= r_1r_2 ((\cos\varphi_1\cos\varphi_2- \sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2))= \\ &= (r_1r_2)(\cos(\varphi_1+ \varphi_2)+i\sin(\varphi_1+ \varphi_2)). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент - сумме аргументов сомножителей.

Пусть теперь $z_1/z_2 = z = r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Так как $z_2z=z_1$, то, в силу (1.8), $r_2r=r_1, \varphi+\varphi_2=\varphi_1$.

Отсюда следует, что $r=r_1/r_2, \varphi=\varphi_1-\varphi_2$:

$$z_1/z_2=(r_1/r_2)(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \quad (1.9)$$

то есть

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \text{Arg}(z/z_2)=\text{Arg}z_1-\text{Arg}z_2.$$

1.1.4. Возведение комплексных чисел в целую положительную степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексных чисел

Как и для действительных чисел, n -я степень комплексного числа z определяется как произведение n одинаковых множителей z

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n$$

n множителей

Если число z задано в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то, в силу (1.7) получаем

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \quad (1.10)$$

при возведении комплексного числа в n -ю степень его модуль возводится в n -ю степень, а аргумент умножается на n . В частности, если $r=1$, то

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) называется формулой Муавра. С помощью формулы Муавра легко решается следующая тригонометрическая задача. Выразить $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через степени функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Например, при $n=3$ из формулы (1.11) следует, что

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Приравнивая в этом равенстве действительную и мнимую части, получаем

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Заметим, что формулы (1.10) и (1.11) справедливы и для целых отрицательных n . В самом деле, пусть $N=-k$ ($k>0$). Тогда

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = 1/[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k = 1/[r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)] = r^{-k}[\cos(-k\varphi) + i\sin(-k\varphi)] = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Переходим к операции извлечения корня из комплексных чисел. Корнем n -й степени из комплексного числа r называется комплексное число w , для которого выполняется равенство $w^n = z$. Пусть число $z \neq 0$ задано в тригонометрической форме: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, и пусть число $w = \sqrt[n]{z} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Из определения, корня n -й степени из z следует, что

$$(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

или

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда следует, что $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, где k - любое целое число. Так как r положительное число, то из первого равенства следует, что $\rho = \sqrt[n]{r}$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень n -й степени из числа r . Из второго равенства находим, что $\theta = (\varphi + 2\pi k)/n$.

Таким образом, формула для извлечения корня n -й степени из комплексного $z \neq 0$ имеет вид

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \quad (1.12)$$

Придавая значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений корня n -й степени из числа $z=0$. Изображения этих значений на комплексной плоскости являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$, с центром в начале координат. Аргумент одной из вершин равен φ/n . Все значения корня n -й степени из числа $z=0$ совпадают и равны 0 .

Пример: Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$.

В тригонометрической форме

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi, \quad (|-1|=1, \arg(-1)=\pi).$$

По формуле (1.12) находим, что

$$w = \sqrt[4]{-1} = 1(\cos((\pi + 2k\pi)/4) + i \sin((\pi + 2k\pi)/4)), \quad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$w_0 = \cos \pi/4 + i \sin \pi/4 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})/2;$$

$$w_1 = \cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4 = (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})/2;$$

$$w_2 = \cos 5\pi/4 + i \sin 5\pi/4 = (-\sqrt{2} - i\sqrt{2})/2;$$

$$w_3 = \cos 7\pi/4 + i \sin 7\pi/4 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})/2.$$

На рис 1.3 построены изображения точек w_0, w_1, w_2, w_3 .

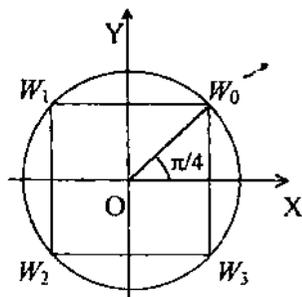


Рис. 1.3.

1.2. Комплексная плоскость.

Понятие области на комплексной плоскости.

Понятие предела последовательности комплексных чисел

Ранее мы определили комплексную плоскость как плоскость XOY , которая служит для изображения комплексных чисел.

Расширенной комплексной плоскостью называется плоскость XOY , дополненная идеальной (воображаемой) точкой $z=\infty$, называемой бесконечно удаленной точкой.

Чтобы лучше понять роль этой точки, построим в пространстве $OXYZ$ сферу с центром в точке $M(0;0;1/2)$ радиуса $R=1/2$ (рис.1.4).

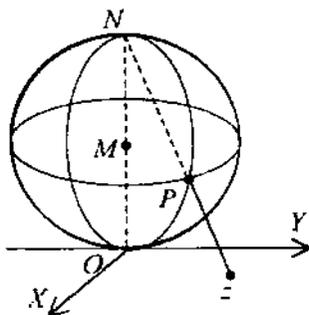


Рис. 1.4.

Любую точку $z = x+iy$ соединим прямой с точкой N на сфере. Точка P пересечения этой прямой со сферой называется стереографической проекцией точки z на сферу.

Если $|z| \rightarrow \infty$, то точка P приближается к точке N . Поэтому естественно считать точку N стереографической проекцией бесконечно удаленной точки. Роль точки $z = \infty$ подобна роли точки N на сфере.

Окрестностью точки z_0 называется совокупность внутренних точек любого круга с центром в точке z_0 радиуса ρ . то есть совокупность точек z , удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\rho$.

Окрестностью бесконечно удаленной точки называется совокупность точек, лежащих вне любого круга с центром в начале координат, то есть множество, точек, удовлетворяющих неравенству $|z|>R$.

Пусть E - множество точек комплексной плоскости. Точка z называется внутренней точкой множества E , если существует окрестность этой точки, принадлежащая множеству E . Точка z называется граничной точкой множества E , если любая окрестность этой точки содержит точки, принадлежащие множеству E , и точки, не принадлежащие этому множеству. Множество Γ всех граничных точек множества E называется границей множества E .

Множество E называется открытым множеством, если оно состоит из одних внутренних точек. Множество E называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек множества E . Всякое открытое связное множество D на комплексной плоскости называется областью. Область D называется односвязной, если любую замкнутую кривую в этой области можно непрерывно стянуть в точку, не пересекая границу области. В противном случае область D называется многосвязной.

На рис. 1.5 изображены односвязная область D и многосвязная область Ω .

Множество, состоящее из точек области D и ее границы Γ , называется замкнутой областью и обозначается \bar{D} . Обход границы Γ области D считается положительным, если при движении в этом направлении точки области D остаются слева.

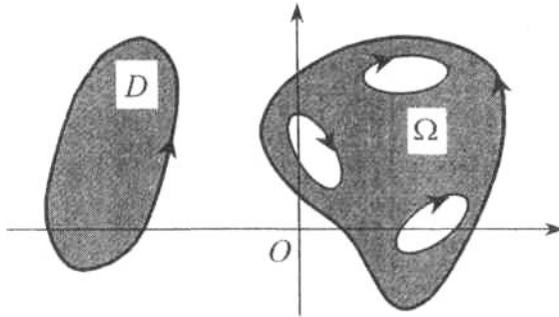


Рис. 1.5.

На рис.1.5 положительное направление обхода границы Γ отмечено стрелками.

Рассмотрим теперь последовательность комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

Число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любой окрестности точки z_0 существует число N такое, что все числа z_n при $n > N$ принадлежат этой окрестности. В этом случае пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0.$$

Это определение справедливо и тогда, когда $z_0 = \infty$ - бесконечно удаленная точка.

Последовательность $\{z_n\}$ называется сходящейся, если предел z_0 этой последовательности - конечное число.

Пусть $z_n = x_n + iy_n, z_0 = x_0 + iy_0$. Легко доказать, что если последовательность $\{z_n\}$ имеет конечный предел z_0 , то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы x_0 и y_0 , и наоборот, если существуют конечные пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0.$$

1.3. Комплексные функции

1.3.1. Комплексные функции действительного переменного

Если каждому значению действительной переменной t по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенное значение комплексной переменной $z = x + iy$, то говорят, что задана комплексная функция $z(t)$. Ясно, что действительная и мнимая части переменной z также являются функциями от t : $x = x(t)$, $y = y(t)$, то есть $z(t) = x(t) + iy(t)$. Задание комплексной функции $z(t)$ равносильно заданию двух действительных функций $x(t)$ и $y(t)$.

Пусть задана функция $z(t)$. Тогда каждому значению переменной t на комплексной плоскости соответствует точка z . При изменении t точка z опишет на комплексной плоскости некоторую кривую (L) (рис. 1.6). Уравнение $z = z(t)$ называется комплексно параметрическим уравнением этой кривой. Параметрическим уравнением кривой (L) служит система уравнений $x = x(t), y = y(t)$.

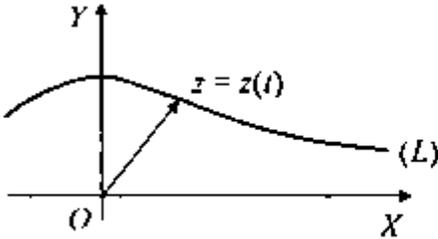


Рис.1.6.

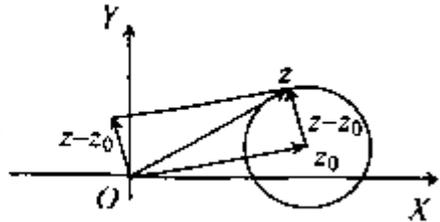


Рис.1.7.

Пример: Составить комплексно параметрическое уравнение окружности с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ радиуса R .

Окружность является геометрическим местом точек, для которых $|z - z_0| = R$ (рис. 1.7). Таким свойством обладают только числа, для которых $z - z_0 = Re^{it}$. Следовательно, уравнение

$$z = z_0 + Re^{it}$$

является комплексно параметрическим уравнением окружности.

Для комплексных функций действительной переменной естественным образом определяются понятия предела, непрерывности, производной и другие.

Например, если $z(t) = x(t) + iy(t)$, то

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} + i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = x'(t) + iy'(t),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} z(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dt.$$

1.3.2. Комплексные функции комплексного переменного

Аналогично определяется понятие комплексной функции комплексного переменного. Если каждому значению комплексного переменного $z = x + iy$ по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенное значение комплексного переменного $w = u + iv$, то говорят, что задана комплексная функция комплексного переменного и пишут $w = f(z)$. Действительная и мнимая части функции $f(z)$ очевидно, являются функциями от $z = x + iy$, то есть от двух действительных переменных x и y : $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, так что

$$f(z) = f(x, y) + i v(x, y).$$

Таким образом, задание комплексной функции $f(z)$ от комплексной переменной z равносильно заданию двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ от двух действительных

переменных x и y . Примерами функций от комплексной переменной являются степенные функции z, z^2, z^3, \dots , многочлены $P_n(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$, дробно-рациональные функции

$$R(z) = \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_n}.$$

Например, для функции $f(z) = z^3$ имеем

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

то есть

$$\operatorname{Re}f(z) = u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \operatorname{Im}f(z) = v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

Каждой действительной функции $f(x)$ действительного переменного x ставится в соответствие некоторая кривая на плоскости XOY - график этой функции. Такое наглядное представление функций от комплексного переменного невозможно. Вместо этого используется понятие отображения. Для этого рассмотрим две плоскости комплексной переменной: плоскость XOY и плоскость UOV (рис. 1.8).

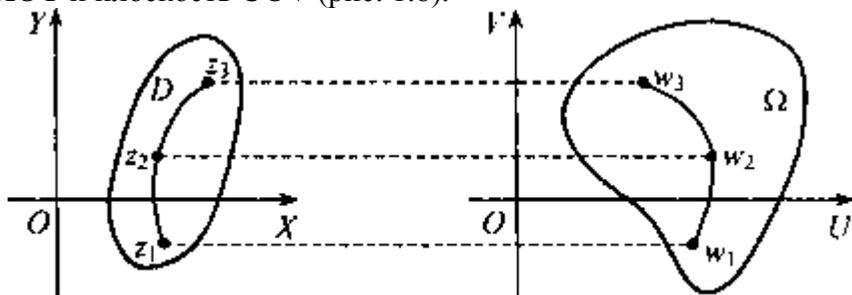


Рис. 1.8.

Функция $f(z)$ каждой точке z на плоскости XOY из области определения этой функции ставит в соответствие точку w на плоскости UOV . Точка w называется образом точки z , а точка z - прообразом точки w . Если прообразы z образуют некоторую линию на плоскости XOY , то образы этих точек образуют неко-

торую линию на плоскости UOV , если точки z заполняют область D на плоскости XOY , то их образы образуют некоторую область Ω на плоскости UOV , при этом граничные точки области D переходят в граничные точки области Ω . Говорят, что функция $f(z)$ осуществляет отображение области D на область Ω .

Пример. Рассмотрим функцию $w=1/z$. Если $z=re^{i\varphi}$, то $w=(1/r)e^{-i\varphi}$. Это означает, что точка $w=1/z$ лежит на том же луче, выходящем из точки $z=0$, что и точка \bar{z} , на расстоянии $1/r$ от начала координат (рис. 1.9).

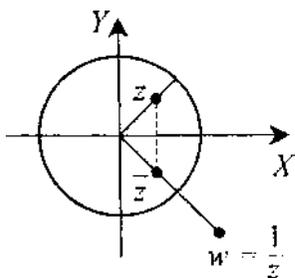


Рис. 1.9.

Если $|z|=1$, то $|w|=1$, то есть единичная окружность на плоскости XOY переходит в единичную окружность на плоскости UOV . Круг $|z|<1$ отображается во внешность круга $|w|>1$, точка $z=0$ отображается в точку $w=\infty$, и наоборот, точка $z=\infty$ переходит в точку $w=0$.

Понятия предела, непрерывности, производной для функций комплексного переменного определяются точно так же, как и для функций действительного переменного. Например, число w_0 называется пределом функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ выполняется для всех z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, кроме, быть может, точки z_0 . В этом случае пишут $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

Если $z=x+iy$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$, $w_0=u_0+iv_0$, то справедливо утверждение: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u_0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v_0$.

Отметим здесь одно важное обстоятельство. Для функций действительного переменного $f(x)$ справедлива теорема: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ тогда и только тогда, когда оба односторонних предела $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ существуют и равны между собой. Для функций комплексного переменного соответствующая теорема формулируется следующим образом.

Предел функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы этой функции, если $z \rightarrow z_0$ по любой кривой L , проходящей через точку z_0 , и если все эти пределы равны между собой. Это означает, что существование предела накладывает на функции комплексного переменного более жесткие ограничения, чем на функции действительного переменного.

Далее, функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 если эта функция определена в точке z_0 и если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Справедлива следующая теорема: функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ непрерывна в точке $z_0=x_0+iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$. Однако как мы увидим в дальнейшем, дифференцируемость функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ не достаточна для дифференцируемости функции $f(z)$. Здесь мы рассмотрели понятие однозначной функции комплексного переменного.

В теории функций комплексного переменного рассматриваются также многозначные функции, когда каждому значению комплексного переменного z ставится в соответствие не одно, а несколько и даже бесконечно многозначений функции $f(z)$.

Например, функция $\sqrt[n]{z}$ каждому $z \neq 0$ ставит в соответствие n различных значений переменной w , функция $\text{Arg}z$ при $z \neq 0$ принимает бесконечно много значений.

1.4. Ряды с комплексными членами.

В курсе математического анализа изучаются ряды, членами которых являются постоянные действительные числа или функции действительного переменного x . Точно так же можно рассматривать ряды с комплексными членами. Выражение вида

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots, \quad (1.13)$$

где $z = x + iy$ — постоянные комплексные числа, называется числовым рядом с комплексными членами.

Ряд (1.13) называется сходящимся, если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, где

$$s_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots - n\text{-я частичная сумма ряда (1.13).}$$

Наряду с рядом (1.13) рассмотрим ряды

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \quad (1.14)$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots, \quad (1.15)$$

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots \quad (1.16)$$

Справедливы следующие теоремы:

I. Ряд (1.13) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды (1.14) и (1.15).

II. Если сходится ряд (1.16), составленный из модулей членов ряда (1.13), то ряд (1.13) также сходится. В этом случае говорят, что ряд (1.13) сходится абсолютно. Если же ряд (1.13) сходится, а ряд (1.16) расходится, то ряд (1.13) называется условно сходящимся.

Из этих теорем следует, что для определения характера сходимости рядов с комплексными членами можно применять теоремы о сходимости рядов с действительными членами.

Рассмотрим теперь степенной ряд в комплексной области

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots, \quad (1.17)$$

где $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — постоянные комплексные числа, а $z = x + iy$ — комплексная переменная. Для рядов (1.17), как и для степенных рядов в действительной области, справедлива теорема.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (1.17) сходится в точке $z_0 \neq 0$, то этот ряд сходится абсолютно в любой точке z , для которой $|z| < |z_0|$. Если же ряд (1.17) расходится в точке z_1 , то этот ряд расходится в любой точке z , для которой $|z| > |z_1|$. Из теоремы Абеля также следует, что для степенного ряда (1.17) в комплексной области существует число R такое, что ряд (1.17) сходится в точках z , для которых $|z| < R$, и расходится в точках, для которых $|z| > R$. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда (4.5), а круг $|z| < R$ — кругом сходимости этого ряда. В частности может оказаться, что $R = \infty$, или $R = 0$. В первом случае степенной ряд сходится во всех точках комплексной плоскости, а во втором — в единственной точке $z = 0$.

1.5. Элементарные функции комплексного переменного

1.5.1. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного.

Формулы Эйлера.

Рассмотрим степенной ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Если $z = x$ — действительное число, то этот ряд сходится на всей числовой оси и определяет функцию e^x . В силу теоремы

Абеля, рассматриваемый ряд сходится на всей комплексной плоскости и определяет некоторую функцию комплексного переменного. Эта функция обозначается e^z . Таким образом, по определению

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (1.18)$$

Связь между функциями e^z и e^x такая же, как, например, между функциями z^2 и x^2 : функция e^z имеет более широкую область определения и совпадает с функцией e^x при $z = x$. Говорят также, что функция e^z является продолжением функции e^x на комплексную плоскость, а функция e^x - сужением функции e^z на действительную ось.

Точно также определяются функции комплексного переменного $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ как суммы соответствующих степенных рядов:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (1.19)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (1.20)$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (1.21)$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (1.22)$$

Из этих определений видно, что функции $\cos z$ и $\operatorname{ch} z$ - четные, а $\sin z$ и $\operatorname{sh} z$ - нечетные функции переменного z .

Если в равенстве (1.18) z заменить на iz , то, учитывая, что в абсолютно сходящемся ряде допустима любая группировка членов, получим

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i \frac{z^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right), \end{aligned}$$

или

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (1.23)$$

Если в этой формуле z заменить на $-z$, то получим, что

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (1.24)$$

Из равенств (1.23) и (1.24) находим, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (1.25)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \quad (1.26)$$

Равенства (1.23) - (1.26) называются формулами Эйлера. Они устанавливают связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией в комплексной области. Как известно, в действительной области эти функции не связаны между собой. Точно так же устанавливается связь между гиперболическими функциями и показательной функцией:

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z, \quad (1.27)$$

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z, \quad (1.28)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (1.29)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (1.30)$$

Формулы (1.27), (1.28) и (1.29), (1.30) позволяют установить связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \cos iz, & \operatorname{sh} iz &= i \sin z \\ \cos iz &= \operatorname{ch} z, & \sin iz &= i \operatorname{sh} z \end{aligned} \quad (1.31)$$

Рассмотрим равенство $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$. С помощью рядов это равенство означает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1^k}{k!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_1 + x_2)^k}{k!}$$

Так как перемножение рядов с комплексными членами проводится по тем же правилам, что и рядов с действительными членами, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} \quad (1.32)$$

Следовательно, формула

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

справедлива для любых комплексных чисел z_1 и z_2 .

В частности,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$

Отсюда следует, что функция e^z периодична с периодом $2\pi i$.

Из формулы (1.32) следует также, что функция e^z не обращается в 0 ни при каком комплексном z . В самом деле,

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x \neq 0$$

С помощью формул Эйлера также доказываются соотношения

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \sin z_1 \cdot \cos z_2$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2$$

С помощью этих формул получаем

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z; \quad \sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z;$$

$$\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z; \quad \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} z;$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Основные соотношения для тригонометрических и гиперболических функций действительного переменного сохраняются для соответствующих функций комплексного переменного.

Однако неравенства

$$|\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1$$

для функций $\cos z$ и $\sin z$ не сохраняются. Функции

$\cos z$ и $\sin z$ могут принимать значения, сколь угодно большие по модулю. Например, при $z = in$ имеем

$$\cos in = \frac{(e^{-n} - e^n)}{2} > \frac{e^n}{2}$$

1.5.2. Логарифмическая функция комплексного переменного. Показательная функция с любым комплексным основанием.

Комплексное число w называется логарифмом комплексного числа z , если $e^w = z$. В этом случае пишут $w = Lnz$. Так как $e^w \neq 0$, то число $z = 0$ не входит в область определения функции Lnz . Если $w = u + iv, z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, где $r > 0$, то равенство $e^w = z$ принимает вид

$$e^{u+iv} = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi), \text{ или } e^u e^{iv} = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi). \\ \text{Отсюда следует, что} \\ e^u = r; e^{iv} = (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi). \quad (1.33)$$

Из первого равенства находим, что $u = \ln r = \ln|z|$, где $\ln r$ означает логарифм натуральный для положительных чисел. Из второго равенства (1.33) следует, что $v = \varphi + 2k\pi = \text{Arg}z$. Таким образом,

$$Lnz = \ln|z| + i \cdot \text{Arg}z = \ln|z| + i \cdot \arg z + 2k\pi i, \quad (1.34)$$

где k - любое целое число. Для любого числа $z \neq 0, Lnz$ принимает бесконечно много значений.

То значение Lnz , которое соответствует главному значению аргумента числа z , называется главным и обозначается через lnz . Следовательно,

$$lnz = \ln|z| + i \cdot \arg z, Lnz = lnz + 2k\pi i. \quad (1.35)$$

Пример: Найти $Ln(-1)$.

Так как $|-1| = 1, \arg(-1) = \pi$, то $\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i, Ln(-1) = \pi i + 2k\pi i = (2k + 1)\pi i$.

Переходим к определению показательной функции с любым комплексным основанием $c \neq 0$. Если $c > 0$ и x - действительные числа, то справедливо равенство $c^x = e^{x \ln c}$. Это равенство принимается за определение показательной функции от комплексного переменного z с любым комплексным основанием $c \neq 0$. Таким образом, по определению, для любых комплексных чисел $c \neq 0$ и z полагаем

$$c^z = e^{z \ln c} \quad (1.36)$$

Так как функция $\operatorname{Ln}z$ принимает бесконечно много значений, то и функция c^z , определяемая равенством (1.36), многозначна. Его главным значением считается то, которое получается, если в правой части равенства (1.36) вместо $\operatorname{Ln}c$ использовать $\operatorname{ln}c$. Только при целых действительных z формула (1.36) определяет единственное значение c^z .

Пример: Найти i^i . Так как $|i| = 1$, $\operatorname{arg} i = \pi/2$, то $\operatorname{Ln} i = 2k\pi i + \pi i/2 = (4k + 1)\pi i/2$, то

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{-(4k+1)\pi/2}.$$

где k - любое целое число. Главное значение i^i равно $e^{-\pi/2}$.

1.6. Производная от функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана.

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в окрестности точки $z = x + iy$. Если переменной z придать приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, то функция $f(z)$ получит приращение

$$f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) =$$

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y) =$$

$$[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - iv(x, y)]$$

$$= \Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y).$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

то этот предел называется

производной от функции $f(z)$ в точке z и обозначается

$$\text{рез } f(z) \text{ или } \frac{df(z)}{dz}. \text{ Таким образом, по определению,}$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (1.37)$$

Если функция $f(z)$ имеет производную в точке z , то говорят, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке z . Очевидно, для дифференцируемости функции $f(z)$ необходимо, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы. Однако этого не достаточно для существования производной $f'(z)$. Например, для функции $w = \bar{z} = x - iy$ функции $u(x, y) = x$ и $v(x, y) = -y$ дифференцируемы во всех точках $M(x, y)$, но предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ не существует, так как, если $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta w/\Delta z = 1$, если же $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$, то $\Delta w/\Delta z = -1$. Единого предела не существует. Это означает, что функция $w = \bar{z}$ не имеет производную ни в одной точке z .

Для существования производной от функции комплексного переменного требуются дополнительные условия. Какие именно? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $M(x, y)$. Тогда для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имела производную в точке $z = x - iy$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (1.38)$$

Равенства (1.38) называются условиями Коши-Римана.

Доказательство. 1) Необходимость.

Пусть функция $f(z)$ имеет производную в точке z , то есть существует предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \quad (1.39)$$

Предел, стоящий в правой части равенства (1.39) не зависит от того, по какому пути точка $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ устремится к 0. В частности, если $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ (рис. 1.10), то

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u(x,y) + i \Delta_x v(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \quad (1.40)$$

Если же $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ (рис. 1.11), то

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u(x,y) + i \Delta_y v(x,y)}{i \Delta y} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad (1.41)$$

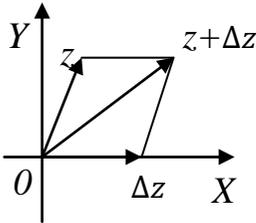


Рис. 1.10

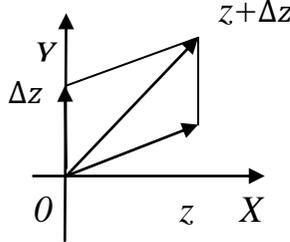


Рис. 1.11

Левые части в равенствах (1.40) и (1.41) равны. Значит равны и правые части

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

Таким образом, из предположения о существовании производной $f(z)$ следует выполнение равенств (1.38), то есть условия Коши-Римана необходимы для существования производной $f'(z)$.

1) Достаточность. Предположим теперь, что равенства (1.38) выполнены:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

и докажем, что в этом случае функция $f(z)$ имеет производную в точке $z = x + iy$, то есть предел (1.39)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \text{существует.}$$

Так как функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $M(x, y)$, то полное приращение этих функций в точке $M(x, y)$ можно представить в виде

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Delta y + \lambda_1 \Delta x + \lambda_2 \Delta y,$$

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Delta y + \mu_1 \Delta x + \mu_2 \Delta y,$$

где $\lambda_1 \rightarrow 0, \lambda_2 \rightarrow 0, \mu_1 \rightarrow 0, \mu_2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Так как, в силу (1.38),

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

то

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Delta y + \lambda_1 \Delta x + \lambda_2 \Delta y,$$

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta y + \mu_1 \Delta x + \mu_2 \Delta y,$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= \Delta u(x, y) + i \Delta v(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Delta y \right) \\ &+ i \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta y \right) + (\lambda_1 + i \mu_1) \Delta x \\ &+ (\lambda_2 + i \mu_2) \Delta y = \Delta u(x, y) \\ &+ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Delta y + \lambda_1 \Delta x + \lambda_2 \Delta y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y) + (\lambda_1 + i \mu_1) \Delta x \\ & \quad + (\lambda_2 + i \mu_2) \Delta y \\ & = \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) \Delta z + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_1 = \lambda_1 + i \mu_1 \rightarrow 0, \gamma_2 = \lambda_2 + i \mu_2 \rightarrow 0 \text{ при } \Delta z = \Delta x + i \Delta y \rightarrow 0$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta z}. (1.42)$$

Так как $|\Delta z|^2 = |\Delta x|^2 + |\Delta y|^2$, то $|\Delta x/\Delta z| \leq 1, |\Delta y/\Delta z| \leq 1$.

Поэтому

$$\gamma_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta z} \rightarrow 0, \text{ при } \Delta z \rightarrow 0$$

Отсюда следует, что правая часть равенства (1.42) имеет предел при $\Delta z \rightarrow 0$, следовательно, и левая часть имеет предел при $\Delta z \rightarrow 0$, причем этот предел не зависит от того, по какому пути Δz стремится к 0. Таким образом, доказано, что если в точке $M(x, y)$ выполнены условия (1.38), то функция $f(z)$ имеет производную в точке $z = x + iy$, причем

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

Теорема доказана полностью.

В процессе доказательства теоремы получены две формулы (1.40) и (1.42) для производной от функции комплексного переменного

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

С помощью формул (1.38) можно получить еще две формулы

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (1.43)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (1.44)$$

Если функция $f(z)$ имеет производную во всех точках области D , то говорят, что функция $f(z)$ дифференцируема в области D . Для этого необходимо и достаточно, чтобы условия Коши-Римана выполнялись во всех точках области D .

Пример. Проверить условия Коши-Римана для функции e^z .

Так как $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + z \cdot \sin y)$,

$\operatorname{Re} e^z = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, v(x, y) = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$,

поэтому

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = -e^x \cos y;$$

следовательно,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Условия Коши - Римана для функции e^z выполнены во всех точках z . Таким образом, функция e^z дифференцируема на всей плоскости комплексной переменной, причем

$$(e^z)' = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = e^x(\cos y + z \cdot \sin y) = e^z$$

Точно так же доказывается дифференцируемость функций $z^n, \cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z, \operatorname{Ln} z$, и справедливость формул

$$(z^n)' = n \cdot z^{n-1}, (\cos z)' = -\sin z, (\sin z)' = \cos z,$$

$$(ch z)' = sh z, (sh z)' = ch z, (Ln z)' = 1/z$$

Для функций комплексного переменного остаются в силе все правила дифференцирования функций действительного переменного. Доказательство этих правил вытекает из определения производной так же, как и для функций действительного переменного.

1.7. Аналитические и гармонические функции. Связь между ними.

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется аналитической в точке $z = x + iy$, если она имеет производную в точке z и в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D , если она аналитична в каждой точке этой области, иначе говоря, если во всех точках области D выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

Функция $u(x, y)$ называется гармонической в области D , если она имеет в области D непрерывные производные до второго порядка включительно и если

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.45)$$

Выражение $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ называется оператором Лапласа и обозначается через $\Delta u(x, y)$, так что уравнение (1.45) можно записать в виде $\Delta u(x, y) = 0$.

Следующие две теоремы устанавливают связь между аналитическими и гармоническими функциями.

Теорема 1. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в области D , то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ гармоничны в области D .

Доказательство. Так как функция $f(z)$ аналитична в области D , то во всех точках этой области выполняются условия Коши - Римана (1.38)

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

Предполагая, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют в области D непрерывные частные производные до второго порядка включительно, продифференцируем первое из равенств (1.38) по переменной x , а второе - по y и сложим полученные равенства.

Получим

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$$

Точно так же доказывается гармоничность функции $v(x, y)$.

Теорема 2. Если функция $u(x, y)$ гармонична в односвязной области D , то существует аналитическая функция $f(z)$ такая, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$.

Для доказательства этой теоремы достаточно найти функцию $v(x, y)$ такую, чтобы для функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области D выполнялись условия Коши-Римана (1.38)

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$

Эти равенства можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений для определения функции $v(x, y)$.

Проинтегрируем первое из равенств (1.38) по переменной x в пределах от x_0 до x . Получим

$$v(x, y) - v(x_0, y) = -\int_{x_0}^x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx$$

отсюда следует, что

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + v(x_0, y)$$

Полученное равенство продифференцируем по переменной y .

Получим

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = - \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} dx + \frac{\partial v(x_0,y)}{\partial y} \quad (1.46)$$

Так как функция $u(x, y)$ гармонична в области D , то

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}$$

Если в равенстве (1.46) сделать еще замену $\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, то

это равенство запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial v(x_0, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x_0, y)}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial v(x_0, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial v(x_0, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x}, v(x_0, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} dy + C$$

Таким образом,

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x_0,y)}{\partial x} dy + C. \quad (1.47)$$

Точно так же доказывается, что

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dy - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y} dy + C. \quad (1.48)$$

С помощью формул (1.47) и (1.48) функция $v(x, y)$, а следовательно, и функция $f(z)$, определяется с точностью до постоянного слагаемого. Теорема доказана.

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, для которых в области D выполняются условия Коши-Римана (1.38), называются взаимно сопряженными. Зная одну из них, вторая определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Пример. Дана гармоническая функция $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$. Найти сопряженную ей функцию $v(x, y)$ и аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ при дополнительном усло-

вии $f(0) = 0$. Для решения этой задачи воспользуемся формулой (1.48), полагая в этой формуле $x_0 = 0, y_0 = 0$. Так как

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x - 1, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2y$$

Следовательно,

$$f(z) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y + C) = (x + iy)^2 - (x + iy) + iC = z^2 - z + iC.$$

Из условия $f(0) = 0$ следует, что $C = 0$.

Таким образом, $v(x, y) = 2xy - y, f(z) = z^2 - z$.

1.8. Геометрический смысл модуля и аргумента производной от функции комплексного переменного.

Понятие конформного отображения.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 , причем $f'(z_0) \neq 0$, и пусть $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ - уравнение некоторой кривой Γ на плоскости комплексного переменного, причем $z_0 = z(t_0)$. Будем предполагать, что функция $z(t)$ имеет в точке t_0 производную, отличную от 0: $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) \neq 0$. Как известно, вектор $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ направлен по касательной к кривой Γ в точке z_0 .

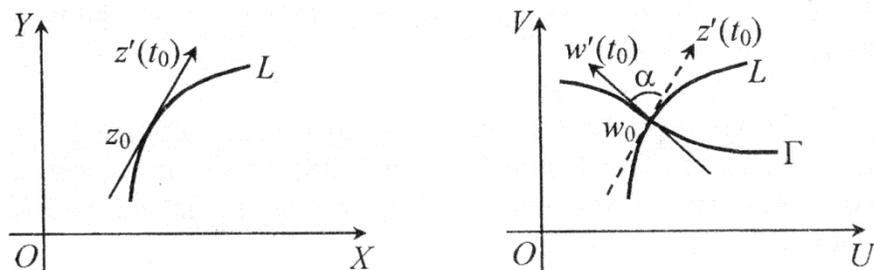


Рис. 1.12.

Пусть $w_0 = f(z_0)$ - образ точки z_0 , а L - образ кривой Γ при отображении $w = f(z)$ плоскости XOY на плоскость UOV (рис. 1.12). Уравнение кривой L имеет вид $w = w(t) = f[z(t)]$.

По правилу дифференцирования сложной функции $w'(z) = f'[z(t)]z'(t)$. Так как $f'(z_0) \neq 0, z'(t_0) \neq 0$, то $w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) > 0$. Следовательно,

$$\text{Arg}w'(t_0) = \text{arg}f'(z_0) + \text{Arg}z'(t_0) = \alpha + \text{Arg}z'(t_0), \quad (1.49)$$

где $\alpha = \text{arg}f'(z_0)$ не зависит от вида кривой Γ . Векторы $z'(t_0)$ и $w'(t_0)$ определяют направление касательной к кривым Γ и L соответственно в точках z_0 и w_0 . Поэтому равенство (1.49) позволяет сделать следующий вывод. Если аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке z_0 производную $f'(z_0) \neq 0$, то аргумент этой производной равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой кривой, проходящей через эту точку, чтобы получить направление касательной в соответствующей точке w_0 к образу данной кривой при отображении $w = f(z)$. Если $\alpha = \text{arg}f'(z_0) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, если $\alpha < 0$, то по часовой стрелке.

Если через точку z_0 провести любые две кривые Γ_1 и Γ_2 , имеющие касательные в этой точке, то направление касательных к образам L_1 и L_2 этих кривых в точке $w_0 = f(z_0)$ получаются путем поворота касательных к кривым Γ_1 и Γ_2 на один и тот же угол α . Поэтому угол между кривыми L_1 и L_2 по величине и направлению совпадает с углом между кривыми Γ_1 и Γ_2 (рис. 1.13).

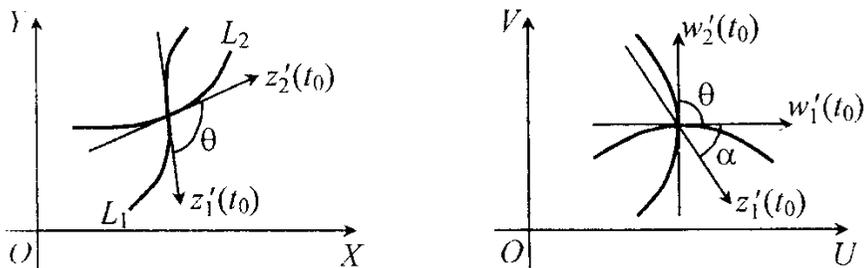


Рис. 1.13.

Отображение, сохраняющее углы между линиями, называется конформным. Если при этом сохраняется и направление отсчета

углов, то такое отображение называется конформным отображением первого рода. Таким образом, отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным отображением первого рода во всех точках, в которых производная от этой функции отлична от нуля. Чтобы выяснить геометрический смысл модуля производной, заметим, что $|\Delta z|$ равен расстоянию между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta w|$ равен расстоянию между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$. Поэтому величина $|\Delta w|/|\Delta z|$ показывает, в каком отношении изменяется расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$ при отображении $w = f(z)$.

Так как $|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$, то величину $|f'(z_0)|$ естественно назвать коэффициентом растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояние между точками при отображении увеличивается и происходит растяжение области, если же $|f'(z_0)| < 1$, то отображение $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 приводит к сжатию. Так как величина $|f'(z_0)|$ не зависит от того, по какому направлению точка $z_0 + \Delta z$ стремится к точке z_0 , то коэффициент растяжения в данной точке одинаков во всех направлениях. В качестве примера рассмотрим отображение, осуществляемое линейной функцией

$$w = kz + b, \quad (1.50)$$

где $k \neq 0$, b - постоянные комплексные числа. Так как $|w'| = |k| > 0$, то отображение (1.50) конформно во всех точках комплексной плоскости. Рассмотрим все возможные случаи, при этом для большей наглядности будем считать плоскость w совмещенной с плоскостью z .

1. Пусть $k = 1$, то есть $w = z + b$. Так как сложение комплексных чисел равносильно сложению соответствующих векторов, то при отображении $w = z + b$ точка w получается из точки z сдвигом на один и тот же вектор, соответствующий комплексному числу b (рис. 1.14).

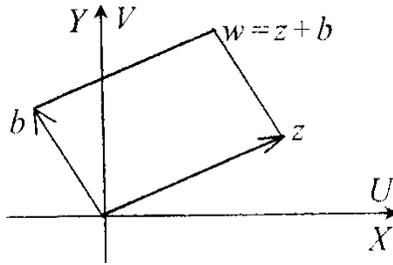


Рис. 1.14

В этом случае линейная функция (1.50) осуществляет параллельный перенос плоскости z на один и тот же вектор.

2. Пусть $b = 0, |k| = 1, \operatorname{arg} k = \alpha$, то есть $w = e^{i\alpha} z$.

Так как при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, то $|w| = |z|$, $\operatorname{arg} w = \operatorname{arg} z + \alpha$. Поэтому вектор w получается поворотом вектора z на угол α (рис. 1.15). Следовательно, в этом случае плоскость w получается из плоскости z поворотом на угол α .

3. Пусть $b = 0, k = r > 0: w = rz$.

В этом случае $\operatorname{arg} k = 0, |k| = r$, поэтому $\operatorname{arg} w = \operatorname{arg} z$,

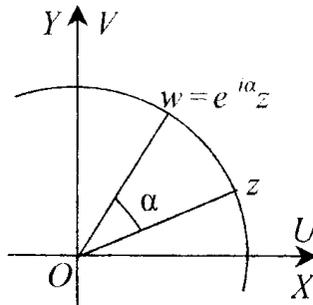


Рис. 1.15

$|w| = r|z|$. Первое из этих равенств показывает, что точки w и z находятся на одном и том же луче, выходящем из начала координат, а из второго следует, что $|w|/|z| = r = \operatorname{const}$

(рис. 1.16).

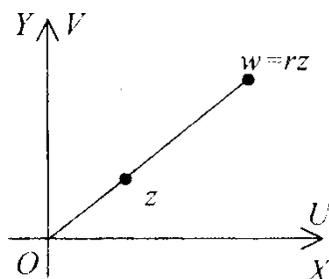


Рис. 1.16

Следовательно, в этом случае функция $w = rz$ осуществляет преобразование подобия (гомотетию) с центром подобия в начале координат. Если же $k = -r < 0$, то функция $w = -rz$, кроме преобразования подобия осуществляет еще и зеркальное отражение точки z от начала координат.

4. Общий случай линейного преобразования $w = kz + b$ сводится к рассмотренным выше простейшим преобразованиям. Действительно, если $|k| = r, \operatorname{arg} k = \alpha$, то $w = re^{i\alpha}z + b$ и переход от точки z к точке w осуществляется путем последовательного применения следующих операций: 1) поворота вектора z около начала координат на угол α ; 2) преобразования подобия с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия r ; 3) параллельного переноса на вектор, соответствующий комплексному числу b .

1.9. Интеграл от функции комплексного переменного.

Пусть в плоскости комплексного переменного задана замкнутая или незамкнутая кривая L , которую будем предполагать гладкой или кусочно-гладкой (это значит, что во всех точках кривой, кроме конечного числа, можно провести касательную). Пусть A - начальная точка, а B - конечная точка кривой L . Тем самым на кривой устанавливается положительное направление обхода, которое отметим стрелкой (рис. 1.17).

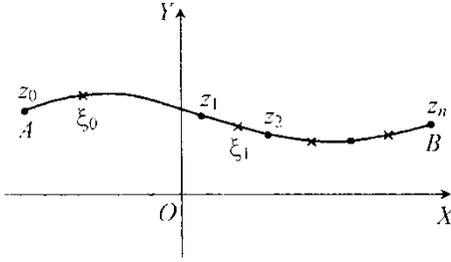


Рис. 1.17.

Предположим, что в точках кривой L задана непрерывная функция $f(z)$. Разобьем кривую L на n частей точками $z_0 = A, z_1, z_2, \dots, z_n = B$, и обозначим

$$z_1 - z_0 = \Delta z_0, z_2 - z_1 = \Delta z_1, \dots, z_n - z_{n-1} = \Delta z_{n-1}$$

Внутри или на одном из концов каждой элементарной дуги выберем по точке $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ и составим сумму

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k. \quad (1.51)$$

Определение. Если существует предел интегральной суммы (1.51), когда длина наибольшей из элементарных дуг стремится к 0, и если этот предел не зависит ни от способа разбиения кривой L на части, ни от выбора точек в каждой части, то этот предел называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой L и обозначается через $\int_{AB} f(z) dz$ в случае незамкнутой кривой, и через $\oint_C f(z) dz$ в случае замкнутой кривой.

Таким образом, по определению:

$$\int_{AB} f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k. \quad (1.52)$$

Для интеграла от функции комплексного переменного справедливы следующие свойства:

$$1. \int_{AB} [f_1(z) + f_2(z)] dz = \int_{AB} f_1(z) dz + \int_{AB} f_2(z) dz,$$

$$2. \int_{AB} kf(z) dz = k \int_{AB} f(z) dz,$$

где k - действительная или комплексная постоянная.

$$3. \int_{BA} f(z) dz = - \int_{AB} f(z) dz,$$

Если в интеграле направление интегрирования изменить на противоположное, то интеграл изменит знак,

$$4. \int_{AB} f(z) dz = \int_{AC} f(z) dz + \int_{BC} f(z) dz,$$

где C - внутренняя точка кривой AB .

5. Если во всех точках кривой L $|f(z)| < M$, то

$$\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq M l,$$

где l длина кривой L .

Доказательство этих свойств проводится так же, как доказательство соответствующих свойств для определенных или криволинейных интегралов. Докажем, например, свойство 5).

Пусть $L|f(z)| < M$. Тогда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \leq M l \quad (1.53)$$

так как $\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta z_k|$ равна длине ломаной линии, вписанной в кривую L , а длина ломаной не больше длины кривой.

Переходя к пределу при $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$, получим

$$\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq M.$$

Установим теперь связь между интегралом от функции комплексного переменного и криволинейными интегралами.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_k = x_k + iy_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$.

Тогда интегральная сумма (1.51) запишется в виде

$$\sum f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum [u(\zeta_k, \eta_k) + iv(\zeta_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i \Delta y_k),$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ получаем, что

$$\int_{ABABAB} f(z) dz = \int u(x,y) dx - v(x,y) dy + i \int v(x,y) dx + u(x,y) dy. \quad (1.54)$$

Вычисление интеграла от функции комплексного переменного
 Пусть кривая $L = AB$ имеет параметрическое уравнение $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем точке A отвечает значение параметра $t=t_0$, а точке B - значение параметра $t=T$. Будем предполагать, что функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$. Комплексно параметрическое уравнение кривой L имеет вид $z = z(t)$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$. Тогда, используя формулу для вычисления криволинейных интегралов и равенство (1.54), получим

$$\begin{aligned} \int_{ABABAB} f(z) dz &= \int u(x,y) dx - v(x,y) dy + i \int v(x,y) dx + u(x,y) dy \\ &= \int_{t_0}^T \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\} dt + \\ &\quad + i \int_{t_0}^T \{v[x(t), y(t)]x'(t) - u[x(t), y(t)]y'(t)\} dt = \\ &= \int_{t_0}^T \int \{[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)]\} dt \end{aligned} \quad (1.55)$$

1.10. Теорема Коши для простого и сложного контура.

Простым контуром называется замкнутая кривая, не имеющая точек самопересечения (рис. 1.18).

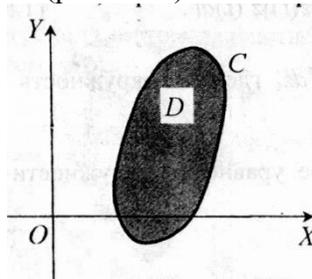


Рис. 1.18.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области D , ограниченной простым контуром C , то

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (1.56)$$

Доказательство. Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в области D . Тогда во всех точках этой области выполняются условия Коши–Римана $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$. Как известно, если во всех точках односвязной области выполняется условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$,

$$\text{то } \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Так как $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$, то $\oint_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0$

так как $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$, то $\oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy = 0$

следовательно, $\oint_C f(z)dz = 0$

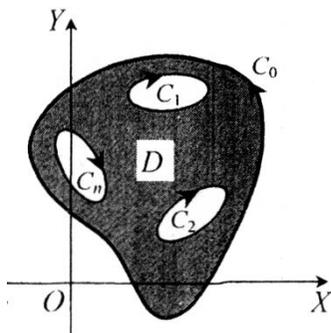


Рис. 1.19.

Пусть теперь D - многосвязная область, ограниченная внешним контуром C_0 и внутренними контурами C_1, C_2, \dots, C_n (рис. 1.19). Граница области многосвязной области D называется сложным контуром и обозначается символом Γ . Как было

условлено ранее, положительным обходом контура Γ называется такое движение по границе области, при котором точки области остаются слева. Следовательно, положительное направление обхода внешнего контура против часовой стрелки, а внутренних контуров - по часовой стрелке. Интегралом от функции $f(z)$ по сложному контуру Γ называется сумма интегралов от этой функции по всем граничным контурам, причем интегрирование по всем контурам проводится в одном и том же (положительном или отрицательном) направлении:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz \quad (1.57)$$

Теорема 2. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области D , ограниченной сложным контуром Γ , то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0 \quad (1.58)$$

Если направление интегрирования по внутренним контурам изменить на противоположное, то равенство (1.58) примет вид

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz \quad (1.59)$$

где интегрирование по всем контурам проводится по часовой

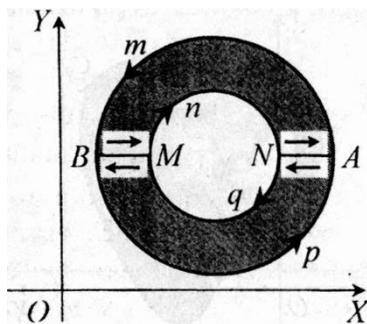


Рис. 1.20.

Доказательство. Простоты ради рассмотрим случай, когда область D ограничена внешним контуром C_0 и одним внутренним контуром C_1 (рис.1.20). Разобьем область D на две односвязные области D_1 и D_2 так, как это показано на рис. 1.20. Че-

рез $L_1 = AmBmNNA$ и $L_2 = BpANqMB$ обозначим простые контуры, ограничивающие соответственно области D_1 и D_2 .

По теореме Коши для простого контура имеем

$$\oint_{L_1} f(z) dz = \oint_{AmB} f(z) dz + \oint_{BM} f(z) dz + \oint_{MnN} f(z) dz + \oint_{NA} f(z) dz = 0,$$

$$\begin{aligned} \oint_{L_2} f(z) dz &= \int_{AmB} f(z) dz \\ &+ \int_{BM} f(z) dz + \int_{MnN} f(z) dz + \int_{NA} f(z) dz = 0, \end{aligned}$$

Если сложить почленно полученные равенства, то интегралы по линиям AN и BM взаимно уничтожатся, и в результате имеем $\oint_{CO} f(z) dz + \oint_{C1} f(z) dz = 0$, что и требовалось доказать. Если интеграл от функции $f(z)$ по любому замкнутому контуру, расположенному в области D , равен нулю, то этот интеграл по любой кривой, расположенной внутри области D , не зависит от вида этой кривой, а зависит только от положения начальной и конечной точек этой кривой. Теорема Коши для простого контура гласит, что если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , то интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равен нулю, и, следовательно, интеграл по любой кривой, соединяющей две точки области D , не зависит от вида кривой, а зависит только от положения этих точек. Поэтому при обозначении интеграла нет необходимости указывать вид кривой, а достаточно указать начальную и конечную точки интегрирования $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$. Легко доказать, что в этом случае справедлива формула Ньютона – Лейбница

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)$$

где $F(z)$ - первообразная для функции $f(z)$.

Заметим, что правила интегрирования функций комплексного переменного ничем не отличаются от правил интегрирования функций действительного переменного.

Пример. Вычислить $\int_{1+i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz$

Так как функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ аналитична всюду, то для вычисления интеграла можно использовать формулу (1.59). В результате получим, что

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz = (z^3 + z^2) \Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7+19i.$$

1.11. Интегральная формула Коши

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области D , ограниченной простым контуром C , то в любой внутренней точке области D значение функции $f(z)$ определяется по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (1.60)$$

Доказательство. Пусть z - любая внутренняя точка области D . Обозначим через C_ε окружность радиуса ε с центром в точке z , а через D_ε - область, ограниченную этой окружностью. Радиус ε окружности C_ε выберем настолько малым, чтобы окружность C_ε состояла из внутренних точек области D (рис. 1.21).

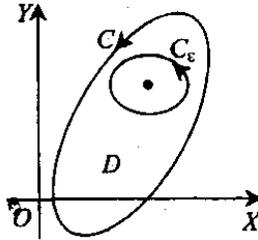


Рис. 1.21.

В области D рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \text{если } \xi \neq z, \\ f(z), & \text{если } \xi = z. \end{cases}$$

Функция $\varphi(\xi)$ аналитична и, следовательно, непрерывна во всех точках области D , кроме точки $\xi = z$.

Так как, кроме того,

$$\lim_{\xi \rightarrow z} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = f'(z)$$

То функция $\varphi(\xi)$ непрерывна в точке z . Из непрерывности функции $\varphi(\xi)$ в замкнутой ограниченной области D следует ее ограниченность в этой области $|\varphi(\xi)| \leq k$.

Так как функция $\varphi(\xi)$ аналитична в области $D - D_\epsilon$, то по теореме Коши для сложного контура

$$\oint_C \varphi(\xi) d\xi = \oint_{C_\epsilon} \varphi(\xi) d\xi \quad (1.61)$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части равенства (1.61).

Так как $|\varphi(\xi)| \leq k$, то $|\oint_{C_\epsilon} \varphi(\xi) d\xi| \leq k2\pi\epsilon$,

где $\epsilon > 0$ - столь угодно малое число. Левая часть равенства (1.61) - постоянное число, не зависящее от ϵ , а правая часть по модулю меньше любого, сколь угодно малого положительного числа. Это возможно только в том случае, когда

$$\oint_C \varphi(\xi) d\xi = \oint_{C_\varepsilon} \varphi(\xi) d\xi = 0, \text{ то есть } \oint_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0.$$

$$\text{Откуда находим, что контура } \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \oint_C \frac{d\xi}{\xi - z} = 0.$$

Так как функция $\frac{1}{\xi - z}$ аналитична в области $D - D_\varepsilon$, то по теореме Коши для сложного контура $\oint_C \frac{d\xi}{\xi - z} = \oint_{C_\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i$

Поэтому

$$\oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - 2\pi i f(z) = 0. \text{ Откуда следует } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

Теорема доказана.

Формула (1.60) называется интегральной формулой Коши. Эта формула показывает, что значения аналитической функции во внутренних точках области D однозначно определяются значениями этой функции в граничных точках этой области.

Доказанная теорема верна также для функций, аналитических в замкнутой области D , ограниченной сложным контуром Γ . В этом случае интегральная формула Коши имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (1.62)$$

Доказательство этой формулы ничем не отличается от доказательства равенства (1.60).

1.12. Интегральная формула Коши для производных от аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области D , ограниченной контуром C , и пусть z - внутренняя точка области D . Выберем Δz таким образом, чтобы точка $z + \Delta z$ принадлежала окрестности точки z , состоящей из точек области D . Тогда, в силу (1.60)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z - \Delta z}$$

и

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)}.$$

При $\Delta z \rightarrow 0$ левая часть этого равенства стремится к $f'(z)$, а подынтегральная функция в правой части стремится к $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$.

Таким образом, $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}$,

Аналогично,

$$\frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(2\zeta - 2z - \Delta z) f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)^2 (\zeta - z)^2}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta z \rightarrow 0$, получим, что

$$f^{(2)}(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3}, \quad (1.62)$$

Продолжая, этот процесс, можно доказать, что функция $f(z)$ во всех внутренних точках области имеет производные любого порядка и что

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad (1.63)$$

Формула (1.63) также называется интегральной формулой Коши для производных аналитической функции. Из определения аналитической функции в точке следует, что если функция $f(z)$ аналитична в точке z , то она аналитична и в некоторой окрестности этой точки. Отсюда из предыдущих рассуждений вытекает следующее утверждение:

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z , то она имеет производные любого порядка. Для функции действительного переменного подобное утверждение неверно: функция $f(x)$ может иметь в окрестности точки x производные первого порядка, но не иметь производных более высоких порядков.

Интегральные формулы (1.60) и (1.63) можно использовать для вычисления контурных интегралов. Для этого формулы (1.60) и (1.63) запишем в виде;

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0), \quad \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad (1.64)$$

Примеры: 1) Вычислить $\oint_C \frac{e^z dz}{z^2-6z}$, где $C: |z-2|=3$

Так как функция $f(z) = \frac{e^z}{z^2-6z}$ аналитична в круге $|z-2| \leq 3$, то по первой формуле (1.64) находим, что

$$\oint_C \frac{e^z dz}{z^2-6z} = \oint_C \frac{\frac{e^z}{z-6} dz}{z} = 2\pi i \left. \frac{e^z}{z-6} \right|_{z=0} = \frac{-\pi i}{3}.$$

2) Вычислить $\oint_C \frac{\sin z dz}{(z-\pi)^4}$, где C — любой контур, содержащий точку $z=\pi$.

С помощью второй формулы (1.64) при $n=3$ находим, что

$$\oint_C \frac{\sin z dz}{(z-\pi)^4} = \frac{2\pi i}{3!} (\sin z)^{(3)} = \left(\frac{\pi i}{3}\right) (-\cos z) \Big|_{z=\pi} = \frac{\pi i}{3}.$$

1.13. Степенные ряды в комплексной области.

Рассмотрим снова степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (1.65)$$

Как отмечалось ранее в п. 1.4, степенной ряд (1.65) сходится в некотором круге радиуса R с центром в начале координат. Для степенных рядов в комплексной области справедливы все основные теоремы о степенных рядах в действительной области. В частности, если радиус сходимости ряда (1.65)

$R > 0$, то сумма этого ряда в любой точке круга сходимости $|z| < R$ имеет производные любого порядка, каждую из которых можно получить почленным дифференцированием ряда (1.65) соответствующее число раз. Ряды, полученные почленным дифференцированием ряда (1.65), имеют один и тот же радиус сходимости R . Таким образом, если радиус сходимости

ряда (1.13) $R > 0$, то сумма этого ряда $f(z)$ является аналитической функцией в круге $|z| < R$.

Рассмотрим теперь степенной ряд вида

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots \quad (1.66)$$

Если в этом ряде сделать замену переменной $z - z_0 = \zeta$, то получим ряд

$$c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n + \dots \quad (1.67)$$

рассмотренного вида (1.65).

Пусть ряд (1.67) сходится в круге $|\zeta| < R$, где $R > 0$. Тогда ряд (1.66) сходится в круге $|z - z_0| < R$ и сумма ряда (1.66) аналитична в этом круге.

Рассмотрим еще ряд вида

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots \quad (1.68)$$

Если в этом ряде сделать замену переменной $\frac{1}{(z - z_0)} = \zeta$, то снова получится ряд вида (1.65). Если этот ряд сходится в круге $|\zeta| < R$, где $R > 0$, то ряд (1.68) сходится в области, для которой $1/|z - z_0| < R$, то есть в области $|z - z_0| > r$, где $r = 1/R$. Область $|z - z_0| > r$ представляет собой внешность круга радиуса r с центром в точке z_0 . Сумма ряда (1.68) является аналитической функцией в области $|z - z_0| > r$.

Наконец, рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad (1.69)$$

содержащий отрицательные и неотрицательные степени разности $z - z_0$. Представим сумму ряда (1.69) в виде

$$f_1(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad f_2(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k(z - z_0)^k.$$

Пусть первый из этих рядов сходится в круге $|z-z_0| < R$, а второй – вне круга $|z-z_0| > r$. Если $r < R$ формула (1.69) сходится в области $r < |z-z_0| < R$, то есть в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями с центром в точке z_0 . Будем называть эту область кольцом. Сумма ряда (1.69) аналитична в этом кольце. Заметим, что возможен случай $r=0$. В этом случае область $0 < |z-z_0| < R$ представляет собой круг в исключительной точкой z_0 .

1.14. Ряды Тейлора и Лорана

В предыдущем пункте показано, что если степенные ряды (1.64) сходятся соответственно в круге $|z-z_0| < R$ или в кольце $r < |z-z_0| < R$, то суммы этих рядов аналитичны в области сходимости этих рядов. Справедливы и обратные теоремы.

Теорема 1 (теорема Тейлора). Если функция $f(z)$ аналитична в

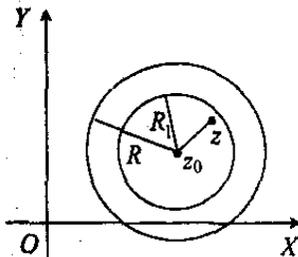


Рис. 1.23.

круге $|z-z_0| < R$, то в любой внутренней точке z этого круга функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (1.70)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{k+1}} \quad (1.71)$$

А C – окружность $|z-z_0| = R_2 < R$.

Доказательство. Пусть z – любая внутренняя точка круга. Проведем окружность $C_1 : |z-z_0| = R_1$, где $R_1 < R$, таким образом, чтобы точка z оказалась внутри круга $|z-z_0| < R_1$

(рис. 1.22). Так как функция $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z-z_0| < R_1$, то по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (1.72)$$

Функцию $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$

разложим в степенной ряд по степеням $z - z_0$, пользуясь формулой для суммы геометрического ряда

$$\frac{a}{1 - q} = \sum_{k=0}^{\infty} a q^k, \text{ если } |q| < 1,$$

следовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \end{aligned} \quad (1.73)$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}$

Пусть S - любая окружность $|z - z_0| = R_2$, где $R_2 < R$.

Так как функция $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ аналитична в замкнутой области, лежащей между окружностями S и S_1 , то по теореме Коши для сложного контура

$$\oint_{c_1} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} = \oint_c \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}$$

Таким образом, для вычисления c_k использовать формулу (1.71), где S - любая окружность с центром в точке z_0 радиуса $R_2 < R$.

Теорема доказана.

Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то она имеет производные любого порядка во внутренних точках этого круга, причем справедлива формула (1.63). В частности, для точки $z = z_0$ эта формула имеет вид

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}$$

Отсюда следует, что коэффициенты c_k ряда Тейлора можно вычислить по формулам

$$c_k = f^{(k)}(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (1.74)$$

Теорема 2 (теорема Лорана). Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, то в любой внутренней точке z этого кольца функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (1.75)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \quad (1.76)$$

Доказательство. Пусть z - любая точка кольца $r < |z - z_0| < R$.

Проведем две окружности C_1 и C_2 радиуса R_1 и R_2

($r < R_1 < R_2 < R$) таким образом, чтобы точка z принадлежала области, заключенной между окружностями C_1 и C_2 (рис. 1.23.а)

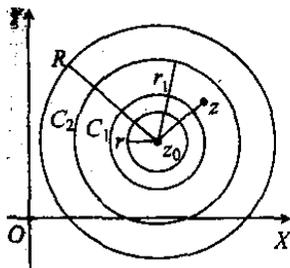


Рис. 1.23.а

Так как функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области, заключенной между окружностями C_1 и C_2 , то по интегральной формуле Коши для многосвязной области

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где интегрирование по окружности C_2 проводится против часовой стрелки, а по окружности C_1 - по часовой стрелке. Если интегрирование по окружности C_1 изменить на противоположное, то предыдущая формула примет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f_2(z) + f_1(z). \quad (1.77)$$

Так же, как в теореме 1, доказывается, что

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}$.

Рассмотрим функцию $f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}$.

Функцию $\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{(\zeta - z_0)}{(z - z_0)}}$

разложим в степенной ряд по степеням $z - z_0$, пользуясь формулой для суммы геометрического ряда. Так как

$$\left| \frac{(\zeta - z_0)}{(z - z_0)} \right| < 1, \text{ то } \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{n+1} \quad (1.79)$$

Если обе части равенства (1.79) умножить на $f(\zeta)/(2\pi i)$ и проинтегрировать, полученное равенство по контуру C_1 , то получим, что

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

где

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta$$

Если в полученных равенствах сделать замену $n+1 = -k$, то эти равенства примут вид

$$f_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \quad (1.80)$$

Из равенств (1.78) и (1.80) находим, что

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Коэффициенты c_k этого ряда при $k < 0$ и $k \geq 0$ вычисляются с помощью интегралов по разным окружностям C_1 и C_2 . Однако,

$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ аналитична в замкнутой области

$R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$, то

$$\oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \oint_{C_2} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} = \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}},$$

где C - любая окружность $|z - z_0| = R_3$, где $r < R_3 < R$.

Таким образом, формула (1.76) для вычисления коэффициентов ряда (1.75) справедлива для любых целых k .

Теорема доказана.

Ряд, стоящий в правой части (1.75), называется рядом Лорана. Представим ряд Лорана в виде суммы двух рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z - z_0)^k}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z - z_0)^k}$ называется главной частью, а ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ правильной частью ряда Лорана.

1.15. Особые точки функции комплексного переменного.

Классификация особых точек

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если функция $f(z)$ не аналитична в точке z_0 , но аналитична в некоторой окрестности этой точки. Так как в настоящее время не рассматриваются особые точки других типов, то изолированные особые точки будем называть просто особыми точками.

Пусть z_0 - особая точка функции $f(z)$, и пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$ с исключенной точкой z_0 (рис. 1.24). Тогда функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 разлагается в ряд Лорана

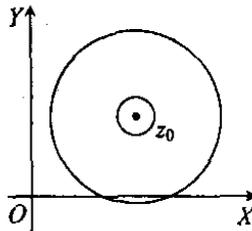


Рис. 1.24.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad (1.81)$$

где

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ - главная часть,

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ - правильная часть ряда Лорана.

Возможны следующие случаи:

1. Все коэффициенты главной части ряда Лорана равны нулю, то есть разложение имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

В этом случае точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$. Если функцию $f(z)$ определить в точке z_0 , положив $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$, то особенность функции в точке z_0 устраняется. Определенная таким образом функция $f(z)$ становится не только непрерывной, но и аналитической в точке z_0 . Например, точка $z_0=0$ кажется особой для функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

Однако разложение функции $\frac{\sin z}{z}$ по степеням z имеет вид

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

Все коэффициенты главной части ряда Лорана равны нулю.

Поэтому, точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Если положить $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, то особая точка $z_0=0$ устраняется, $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{если } z \neq 0 \\ 1, & \text{если } z = 0 \end{cases}$ аналитична на всей плоскости

комплексного переменного.

2. Все коэффициенты ряда Лорана, кроме конечного числа, равны нулю, ряд Лорана (1.81) для функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots \quad (1.82)$$

где $c_n \neq 0$. В этом случае точка z_0 называется полюсом кратности n для функции $f(z)$. Если $n = 1$, то точка z_0 называется простым полюсом. Если аналитическую функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad (1.83)$$

где $g(z_0) \neq 0$, то точка z_0 называется нулем функции $f(z)$ кратности n . Пусть точка z_0 - полюс кратности n для функции $f(z)$. Запишем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана (1.82) в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} (c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \dots + c_0(z-z_0)^n + \dots) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^n}, \quad (1.84)$$

где $h(z_0) = c_{-1} \neq 0$.

Отсюда следует, что $1/f(z) = (z - z_0)/h(z) = (z - z_0)^n g(z)$,

где $g(z_0) = \frac{1}{h(z_0)} = 1/c_{-n} \neq 0$.

Таким образом, если точка z_0 - полюс кратности n для функции $f(z)$, то z_0 - нуль кратности n для функции $1/f(z)$. Справедливо и обратное утверждение: если точка z_0 - нуль кратности n для функции $f(z)$, то z_0 - полюс кратности n для функции $f(z)$, то z_0 - полюс кратности n для функции $1/f(z)$. Из равенства (1.84) следует также, что если z_0 - полюс любой кратности для функции $f(z)$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

3. Отличны от нуля бесконечное число коэффициентов главной части ряда Лорана (1.82) для функции $f(z)$. В этом случае точка z_0 называется существенно особой точкой для функции $f(z)$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(z) = \sin(1/z)$ и точку $z_0 = 0$. Разложение функции $\sin(1/z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет вид

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, является главной частью ряда Лорана для функции $\sin(1/z)$. Поэтому точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой для функции $\sin(1/z)$. Можно доказать, что если z_0 - существенно особая точка для функции $f(z)$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует. Это означает, что функция $f(z)$ стремится к различным пределам, когда точка z стремится к точке z_0 по различным путям.

Заметим, что все определения и классификация особых точек применимы и к бесконечно удаленной точке $z = \infty$. Точка $z = \infty$ является особой точкой для функции $f(z)$, если точка $z = 0$ является особой точкой для функции $f(1/z)$. Тип особой точки $z = \infty$ для функции $f(z)$ совпадает с типом особой точки $z = 0$ для функции $f(1/z)$.

Например, точка $z = 0$ является существенно особой точкой для функции $\sin(1/z)$. Следовательно, точка $z = \infty$ является существенно особой точкой для функции $\sin z$.

1.16. Вычет функции в особой точке.

Основная теорема о вычетах

Пусть z_0 - изолированная особая точка функции $f(z)$, C - простой контур, содержащий особую точку z_0 и не содержащий других особых точек. Докажем, что $\oint_C f(z) dz$ не зависит от вида контура C .

Пусть C_1 и C_2 - простые контуры, содержащие особую точку z_0 и не содержащие других особых точек.

Возможны два случая:

1. Контур C_1 и C_2 не пересекаются (рис. 1.25). Так как функция $f(z)$ аналитична в области, лежащей между контурами C_1 и C_2 , то по теореме Коши для сложного контура

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

2. Контур C_1 и C_2 пересекаются. Проведем контур C_3 , содержащий точку z_0 так, чтобы C_3 лежал внутри контуров C_1 и C_2 (рис. 1.26).

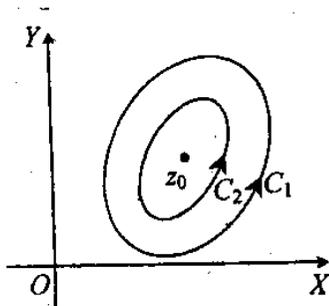


Рис. 1.25.

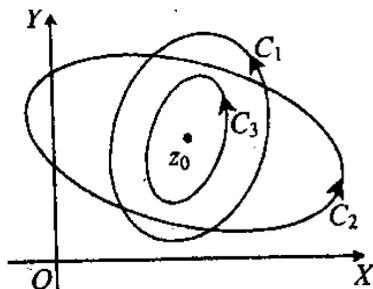


Рис. 1.26.

Тогда, по доказанному,

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_3} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

что и требовалось доказать.

Определение. Число $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$, где C - простой контур, содержащий особую точку z_0 и не содержащий других особых точек, называется вычетом функции $f(z)$ в особой точке z_0 и обозначается символом $\text{Res}[f(z), z_0]$.

Таким образом, по определению,

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz, \quad (1.85)$$

Где C - любой простой контур, содержащий особую точку z_0 и не содержащий других особых точек функции $f(z)$. Определение вычета корректно, так как интеграл, стоящий в правой части равенства (1.85), не зависит от вида контура C .

Если z_0 - особая точка функции $f(z)$, то в окрестности точки z функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}},$$

в частности, если $k = -1$, то

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}[f(z), z_0] \quad (1.86)$$

Роль понятия вычета выясняется из следующей теоремы.

Теорема 1 (основная теорема о вычетах). Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области D , ограниченной простым контуром C , кроме конечного числа особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , ни одна из которых не лежит на контуре C , то

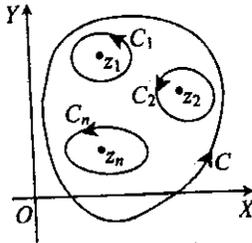


Рис. 1.27

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k] \quad (1.87)$$

Доказательство. Окружим особые точки z_1, z_2, \dots, z_n контурами C_1, C_2, \dots, C_n так, чтобы эти контуры не пересекались между собой и не пересекали контур C (рис. 1.27). Так как функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области, лежащей между внешним контуром C и внутренними контурами C_1, C_2, \dots, C_n , то по теореме Коши для сложного контура, имеем

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k],$$

что и требовалось доказать.

Вычет функции в бесконечно удаленной точке

Пусть функция $f(z)$ аналитична вне круга радиуса R с центром в начале координат. Тогда функция $f(z)$ в области $|z| > R$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \text{ где } c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z^{k-1}} \quad (1.88)$$

Интегралы для вычисления коэффициентов c_k берутся по окружности $C: |z| = R$ достаточно большого радиуса R в направлении против часовой стрелки.

Определение. Число $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$, где интегрирование по окружности $C: |z| = R$ проводится по часовой стрелке, называется вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке и обозначается через $Res[f(z), \infty]$.

Из формул (1.88) для c_k при $k = -1$ следует, что

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = -Res[f(z), \infty].$$

Таким образом,

$$Res[f(z), \infty] = -c_{-1} \quad (1.89)$$

Пример. Пусть $f(z) = (z+1)/z = 1 + 1/z$. Последнее выражение является разложением функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки: $c_0 = 1, c_{-1} = 1$, остальные коэффициенты равны нулю. Отсюда следует, что $Res[f(z), \infty] = -1$. Заметим, что $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+1}{z} = 1$. Это означает, что точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)$. Приведенный пример показывает, что вычет функции в точке $z = \infty$ может быть отличен от нуля даже в том случае, когда эта точка - устранимая особая точка. Приведем еще одну формулу для вычисления вычета в бесконечно удаленной точке. Для этого рассмотрим часть ряда Лорана (1.88) для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots$$

Если в этом равенстве заменить z на $1/z$, а затем обе части полученного равенства умножить на $1/z^2$, то получим

$$f(1/z) = c_{-1} z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots,$$

$$\left(\frac{1}{z^2}\right) f(1/z) = \dots + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_1}{z^3} \dots$$

Получили ряд Лорана для функции $\left(\frac{1}{z^2}\right) f(1/z)$

в окрестности точки $z = 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Res}\left[\left(\frac{1}{z^2}\right) f(1/z), 0\right] = c_{-1} = -\operatorname{Res}[f(z), \infty].$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[\left(\frac{1}{z^2}\right) f(1/z), 0\right] \quad (1.90)$$

Из определения вычета функции в бесконечно удаленной точке и из основной теоремы о вычетах вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , то сумма всех вычетов функции, включая вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$$

$$\text{или } \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] = -\operatorname{Res}[f(z), \infty]. \quad (1.91)$$

Последняя формула позволяет упростить вычисление некоторых интегралов.

1.17. Вычисление вычетов в простом и кратном полюсе

Пусть z_0 - простой полюс функции $f(z)$. Из определения простого полюса следует, что ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + g(z), \quad (1.92)$$

где $g(z)$ - аналитическая в окрестности точки z функция. Умножим обе части равенства (1.92) на $z - z_0$ и перейдем в полученном равенстве к пределу при $z \rightarrow z_0$. В результате получим, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [c_{-1} + (z - z_0)g(z)] = c_{-1},$$

так как, в силу непрерывности аналитической функции $g(z)$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0.$$

Таким образом, если z_0 - простой полюс функции $f(z)$, то

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (1.93)$$

Иногда для вычисления вычета функции в простом полюсе более удобна другая формула.

Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - аналитические в точке z_0 функции, причем $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$. Это значит, что z_0 - простой нуль для функции $\psi(z)$ и, следовательно, простой полюс для функции $f(z)$. Тогда

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Таким образом, в этом случае

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{\Psi, z_0}\right) = \frac{\varphi(z_0)}{\Psi'(z_0)} \quad (1.94)$$

2. Пусть теперь z_0 – полюс кратности n для функции $f(z)$. В этом случае ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots,$$

где $c_{-n} \neq 0$. Если обе части этого равенства умножить на $(z - z_0)^n$, то получим

$$(z - z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + c_0(z - z_0)^n + c_1(z - z_0)^{n+1} + \dots$$

Обе части этого равенства продифференцируем $(n-1)$ раз. В результате получим

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)! c_{-1} + b_0(z - z_0) + b_1(z - z_0)^2 + \dots$$

Отсюда, переходя к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)! c_{-1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]. \quad (1.95)$$

Примеры.

1. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$ во всех ее особых точках. Точка $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$ являются простыми полюсами функции $f(z)$. С помощью формулы (1.94) находим, что

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2 + 4}, 2i\right] = \frac{1}{2z} \Big|_{z=2i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 4}, 2i \right] = \frac{1}{2z} \Big|_{z=-2i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

Так как сумма вычетов во всех особых точках, включая бесконечно удаленную точку, равна нулю, то отсюда следует, что

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 4}, \infty \right] = 0$$

2. Найдем вычет функции $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$ в особой точке $z=i$. Точка $z=i$ является полюсом кратности 3 функции $f(z)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^2 + 1)^3}, i \right] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{(z-i)^3}{(z-i)^3(z+i)^3} \right]^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1}{(z+i)^3} \right]^{(2)} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^3} = \frac{6}{(2i)^3} = -\frac{3i}{16}. \end{aligned}$$

3. Вычислить $\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2 + z} dz$.

В круге $|z| < 4$ функция $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ имеет две особые точки $z_1=0$ и $z_2=-1$. По основной теореме о вычетах

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2 + z} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), -1])$$

Так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + 1} = 1$, точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, поэтому $\operatorname{Res}[f(z), 0] = 0$. Точка $z_2=-1$ - простой полюс функции $f(z)$. По формуле (1.94) находим, что

$$\operatorname{Res}[f(z), -1] = \frac{e^z - 1}{2z + 1} \Big|_{z=-1} = 1 - e^{-1}.$$

Следовательно,

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2 + z} dz = 2\pi i(1 - e^{-1}).$$

4. Вычислить
$$\oint_{|z|=3} \frac{z^{13} dz}{(z^2 + 1)(z^4 + 2)^3}.$$

В круге $|z| < 3$ функция $f(z) = \frac{z^{13} dz}{(z^2 + 1)(z^4 + 2)^3}$ имеет шесть особых точек. Чтобы найти эти точки и вычислить вычеты в них, потребуются значительные вычисления. Чтобы избежать этого воспользуемся теоремой о том, что сумма всех вычетов функции, включая в точке $z=\infty$, равна нулю. Поэтому

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^{13} dz}{(z^2 + 1)(z^4 + 2)^3} = -2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z^{13} dz}{(z^2 + 1)(z^4 + 2)^3}, \infty \right].$$

Для вычисления вычета функции в точке $z=\infty$, воспользуемся формулой (1.90)

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}[(1/z^2)f(1/z), 0], \text{ где}$$

$$f(z) = \frac{z^{13} dz}{(z^2 + 1)(z^4 + 2)^3}, g(z) = \frac{1}{z^2} f(1/z) = f(z) = \frac{z^{13} dz}{(z^2 + 1)(z^4 + 2)^3}$$

Точка $z=0$ является простым полюсом функции $g(z)$. Поэтому

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}[g(z), 0] = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + z^2)(1 + 2z^4)^3} = -1.$$

Следовательно,

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^{13} dz}{(z^2 + 1)(z^4 + 2)^3} = 2\pi i.$$

1.18. Некоторые применения вычетов

1. 18. 1. Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leq 1$, кроме конечного числа особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , ни одна из которых не лежит на окружности $|z| = 1$

Рассмотрим интеграл

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz. \quad (1.96)$$

Этот интеграл можно вычислить двумя способами: во-первых, спомощью замены переменной $z=e^{it}$, $dz = e^{it} dt$ вычисление интеграла(18.1) сводится к вычислению определенного интеграла по формуле (1.55), и во-вторых, интеграл (1.96) можно вычислить с помощью вычетов. Таким образом, справедливы две формулы:

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{it} dt \quad \text{и} \quad \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k].$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{it} dt = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]. \quad (1.97)$$

Приведенные рассуждения применимы для вычисления

интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$, где $R(u, v)$ – дробно –

рациональная функция от переменных u и v .

Следует в этом интеграле замену переменной:

$e^{it} = z$, $i e^{it} dt = dz$. Тогда

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad dt = \frac{dz}{iz},$$

следовательно,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} F(z) dz.$$

В результате получили интеграл, который можно вычислить с помощью вычетов.

Пример. Вычислить $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\cos t}$.

С помощью замены $e^{it} = z$, $\cos t = \frac{z+1}{2z}$, $dt = \frac{dz}{iz}$ получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\cos t} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz(5-4\frac{z^2-1}{2z})} = -\frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2-5z+2}.$$

Функция $\frac{dz}{2z^2-5z+2}$ имеет две особые точки $z_1 = 1/2$ и $z_2 = 2$ – простые полюсы, причем в круге $|z| < 1$ лежит одна точка $z=1/2$. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\cos t} = i2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2z^2-5z+2}, \frac{1}{2}\right) = -2\pi \frac{1}{4z-5} \Big|_{z=1/2} = \frac{2}{3}\pi$$

1.18.2. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

Теорема. Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, кроме конечного числа особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , ни одна из которых не лежит на тельной оси, и пусть $\lim_{z \rightarrow \infty} [zf(z)] = 0$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]. \quad (1.98)$$

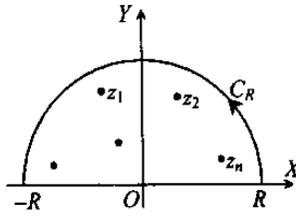


Рис. 1.28.

Доказательство. Проведем в верхней полуплоскости дугу C_R окружности $|z| = R$. Радиус R этой окружности выберем так, чтобы все особые точки функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости, оказались внутри контура C , состоящего из отрезка $[-R, R]$ и дуги C_R (рис. 1.28). Тогда, по основной теореме о вычетах

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k].$$

или

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \oint_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]. \quad (1.99)$$

Оценим интеграл по дуге C_R . Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} [zf(z)] = 0$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число $N=N(\varepsilon)$ такое что неравенство $|zf(z)| < \varepsilon$ выполняется для всех z , для которых $|z| > N$. Поэтому, если $R > N$, то во всех точках C_R выполняется неравенство $|f(z)| < \varepsilon/R$. Отсюда и из свойства 5 интеграла от функции комплексного переменного следует, что

$$\left| \oint_{C_R} f(z) dz \right| < \left(\frac{\varepsilon}{R} \right) \pi R = \pi \varepsilon,$$

следовательно ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Переходя в равенстве (1.99) к пределу $R \rightarrow \infty$ находим , что

$$\oint_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k].$$

Теорема доказана.

Пример. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}$.

Функция $f(z) = \frac{dx}{(x^2 - 2z + 2)^2}$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im}z > 0$, кроме одной особой точки $z=1+i$, являющейся полюсом кратности 2, и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [zf(z)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dx}{(z^2 - 2z + 2)^2} = 0.$$

Так как

$$\text{Res}[f(z), 1+i] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1-i)^2}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-2}{(z-1+i)^3} = \frac{1}{4i},$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

1.18.3. Лемма Жордана. Применение леммы к вычислению несобственных интегралов

Пусть C_R -дуга окружности радиуса R с центром в начале координат, расположенная в полуплоскости $\text{Im}z > b$ (рис. 1.29).

Лемма. Если функция $f(z)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im}z \geq b$, кроме конечного числа особых точек, ни одной из которых не лежит из прямой $\text{Im}z = b$, и если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$,

то при любом $t > 0$.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int e^{itz} f(z) dz = 0.$$

Лемма Жордана приводится здесь без доказательства. Лемма Жордана используется для вычисления некоторых несобственных интегралов.

Пример. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2}$.

Пусть C_R дуга окружности $|z| = R$, расположенная в полуплоскости $\text{Im}z > 0$ и пусть C – контур, состоящий из отрезков $[-R, R]$ и дуги C_R (рис. 1.30).

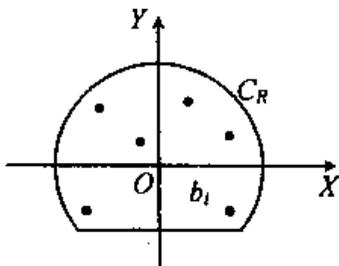


Рис. 1.29.

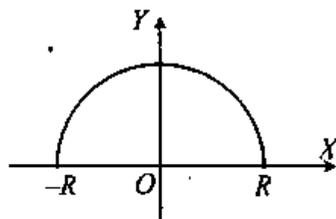


Рис. 1.30.

Рассмотрим вспомогательный интеграл $\oint_C \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2}$

По основной теореме о вычетах

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} &= \int_{-R}^R \frac{e^{iz} dz}{x^2 + a^2} + \int_{C_R} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = 2\pi i \text{Res} \left[\frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}, ai \right] = \\ &= 2\pi i \left. \frac{e}{2z} \right|_{z=ai} = \frac{\pi}{ae^a}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Функция $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ удовлетворяет условию леммы

Жордана . Поэтому $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = 0$.

Из равенства (1.100) при $R \rightarrow \infty$ находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}, \text{ или}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Приравнивая в этом равенстве действительную и мнимую части, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + a^2} = 0.$$

В теории преобразования Лапласа лемма Жордана применяется в другой формулировке. Пусть C_R – дуга окружности $|p| = R$, расположенная в полуплоскости $\text{Re} p < a$ (рис. 1.31).

Лемма. Если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\text{Re} p < a$, кроме конечного числа особых точек, ни одна из которых не расположена на прямой $\text{Re} p = a$, и если $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$

то при любой $t > 0$, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{pt} F(p) dp = 0$. Вторая формулировка леммы получается из первой, если в ней сделать замену переменной $iz = p$. При такой замене плоскость комплексного переменного p получается из плоскости переменного z поворотом на угол $\pi/2$ вокруг начала координат.

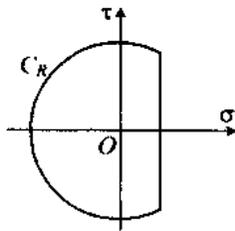


Рис. 1.31.

2. ОПЕРЕЦИОННОЕ ИСЧЕСЛЕНИЕ

2.1. Оригинал и изображение Лапласа

Комплексная функция $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ называется оригиналом, если для нее выполнены условия:

1. Функция $f(t)$ непрерывна и имеет производные до некоторого порядка на всей числовой оси $t \in (-\infty, \infty)$, кроме отдельных точек, в которых функция или ее производные имеют разрывы первого рода, причем на каждом отрезке конечной длины таких точек конечное число.

2. $f(t) = 0$, если $t < 0$.

3. Функция $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ может расти не быстрее некоторой показательной функции. Это означает, что для каждой функции $f(t)$ можно указать постоянные M и α такие, что

$$|f(t)| \leq e^{\alpha t}. \quad (2.1)$$

Ясно, что если (2.1) выполняется для некоторого α , то оно выполняется для любого $\beta > \alpha$. Точная нижняя граница чисел α , для которых выполняется неравенство (2.1), называется порядком роста функции $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Иными словами, число α называется порядком роста функции $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, если неравенство $|f(t)| \leq Me^{\beta t}$ выполняется при всех $\beta > \alpha$ и не выполняется при $\beta < \alpha$. Например, если функция $f(t)$ ограничена на всей числовой оси, то ее порядок роста равен 0. Нулевой порядок роста имеют также и степенные функции t^n ($n > 0$), так как для любой степенной функции t^n можно указать число M такое, что $t^n \leq Me^{\varepsilon t}$ при любом

$$\varepsilon > 0, t > 0.$$

Таким образом, условие 3 означает, что функция $f(t)$ имеет конечный порядок роста при $t \rightarrow +\infty$. Примером функции для которой не выполняется условие 3, служит функция e^{t^2} . Простейшим примером оригинала является так называемая единичная функция Хевисайда (рис. 2.1). $\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$

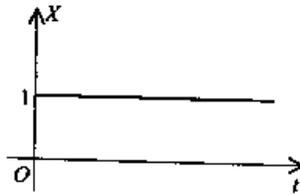


Рис. 2.1

Если для функции $f(t)$ выполнены условия 1 и 3 и не выполняется условие 2, что для $\eta(t)f(t)$ выполнены все три условия, предъявляемые к оригиналам, так как

$$\eta(t) f(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

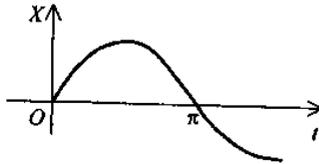


Рис. 2.2

Например, функция $\sin t$, $\cos t$, $e^{\alpha t}$, t^n и другие не являются оригиналами, так как для них не выполнено условие $f(t) = 0$ при $t < 0$. Поэтому в операционном исчислении рассматриваются функции $\eta(t) \sin t$, $\eta(t) \cos t$, $\eta(t) t^n$ и другие, которые являются оригиналами, при этом множитель $\eta(t)$ условились не писать, так что, например, функция $f(t) = \sin t$ в операционном исчислении имеет график вида (2.2).

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом преобразования Лапласа или изображением функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ от комплексного переменного $p = \sigma + ir$, определяемая по формуле

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.2)$$

Если функция $F(p)$ является преобразованием Лапласа функции $f(t)$, то этот факт записывается в виде:

$$F(p) \div f(t), f(t) \div F(p), F(p) = L[f(t)].$$

Примеры: 1. Пусть $f(t) = 1$ (то есть $f(t) = \eta(t)$).

Тогда

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} dt = \left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \text{ если } \operatorname{Re} p > 0.$$

Таким образом,

$$1 \div \frac{1}{p}, \quad (2.3)$$

2. Пусть $f(t) = e^{-at}$, где a - постоянное комплексное или действительное число. Тогда

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \\ &= -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}, \text{ если } \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a, \\ &e^{-at} \div \frac{1}{p-a}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теорема. Если оригинал $f(t)$ имеет порядок роста σ_0 , то его изображение $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ причем $F(p) \rightarrow +\infty$. (рис. 2.3)

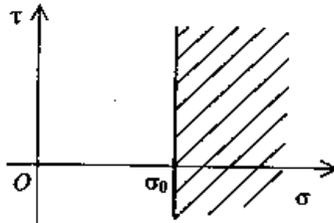


Рис. 2.3.

По определению

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Покажем, что интеграл стоящий в правой части этого равенства, сходится для всех $p = \sigma + i\tau$, если $\sigma > \sigma_0$. В самой деле, пусть $\sigma = \text{Re} p > \sigma_0$. По условию теоремы $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$, для любого $\sigma > \sigma_0$, следовательно,

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-\sigma t} \leq M e^{-(\sigma - \sigma_0)t}.$$

Так как $\sigma - \sigma_0 > 0$, то интеграл $\int_0^{\infty} e^{-(\sigma - \sigma_0)t} dt$ сходится, следовательно интеграл $\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ сходится абсолютно.

Так как

$$\int_0^{\infty} M e^{-(\sigma - \sigma_0)t} dt \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow +\infty.$$

$$\text{то } F(p) = \left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| < \frac{M}{(\sigma - \sigma_0)} \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Аналитичность функции $F(p)$ в полуплоскости $\text{Re} p = \sigma > \sigma_0$

Примем без доказательства.

2.2. Свойства преобразования Лапласа

2.2.1. Линейность преобразования Лапласа

Теорема 1. Если функция $f_1(t)$ и $f_2(t)$ оригиналы, то функция $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$, где C_1 и C_2 постоянные числа, также является оригиналом, причем

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p). \quad (2.5)$$

В самом деле, пусть σ_1 и σ_2 — порядок роста соответственно функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Тогда число $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$, очевидно, является порядком роста функции $f(t)$.

Поэтому, если $\text{Re } p > \sigma$, то

$$F(p) = \int_0^{\infty} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] e^{-pt} dt =$$

$$C_1 \int e^{-pt} dt + C_2 \int f_2(t) e^{-pt} dt = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

Примеры. Найти изображения функций $\cos bt$, $\sin bt$, $\text{ch } bt$, $\text{sh } bt$.

По формулам Эйлера $\cos bt = \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}$,

$$\sin bt = \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}, \quad \text{ch } bt = \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}, \quad \text{sh } bt = \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2}.$$

Поэтому

$$\cos bt \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - ib} + \frac{1}{p + ib} \right) = \frac{p}{p^2 + b^2},$$

$$\sin bt \div \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - ib} - \frac{1}{p + ib} \right) = \frac{p}{p^2 + b^2}$$

$$\text{ch } bt \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - b} + \frac{1}{p + b} \right) = \frac{p}{p^2 - b^2},$$

$$\text{sh } bt \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - b} - \frac{1}{p + b} \right) = \frac{p}{p^2 - b^2}.$$

Таким образом,

$$\cos bt \div \frac{p}{p^2 + b^2}, \quad (2.6)$$

$$\sin bt \div \frac{p}{p^2 + b^2}, \quad (2.7)$$

$$\text{ch } bt \div \frac{p}{p^2 - b^2}, \quad (2.8)$$

$$\text{sh } bt \div \frac{p}{p^2 - b^2}. \quad (2.9)$$

2.2.2. Теорема подобия

Теорема 2. Если $f(t) \div F(p)$, то для любого $\alpha > 0$,

$$f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad (2.10)$$

В самом деле, если в интеграле $\int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt$ сделать

Замену переменной $\alpha t = t_1, dt = dt_1/\alpha$, то получим

$$f(\alpha t) \div \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-\frac{p}{\alpha} t_1} dt_1 = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Например, зная, что $\cos t \div \frac{p}{p^2 + 1}$, находим

$$\cos bt \div \frac{1}{b} \frac{\frac{p}{b}}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 - b^2}, \text{ что совпадает с результатом (2.6).}$$

2.2.3. Теорема о смещении изображения

Теорема 3. Если $f(t) \div F(p)$, то для любого постоянного комплексного числа α

$$f(t)e^{\alpha t} \div F(p - \alpha). \quad (2.11)$$

В самом деле,

$$f(t)e^{\alpha t} \div \int_0^{\infty} f(t)e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p - \alpha).$$

С помощью теоремы 3 из соотношений (2.6)-(2.9) получаем

$$e^{\alpha t} \cos bt \div \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + b^2}, \quad (2.12)$$

$$e^{\alpha t} \sin bt \div \frac{b}{(p - \alpha)^2 + b^2}, \quad (2.13)$$

$$e^{\alpha t} \operatorname{ch} bt \div \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + b^2}, \quad (2.14)$$

$$e^{\alpha t} \cos bt \div \frac{b}{(p - \alpha)^2 + b^2}. \quad (2.15)$$

2.2.4. Дифференцирование оригинала

Теорема 4. Если функции $f(t)$ и $f(t)$ - оригиналы и если $f(t) \div F(p)$, то

$$f'(t) \div p F(p) - f(0). \quad (2.16)$$

В частности, если $f(0) = 0$, то $f'(t) \div pF(p)$.

Доказательство. С помощью формулы интегрирования по частям находим, что

$$\begin{aligned} f'(t) \div \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(0)e^{-pt} dt = \\ &= pF(p) \div \lim_{T \rightarrow \infty} [f(T)e^{-pT} - f(0)]. \end{aligned}$$

Пусть $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$ и пусть $\sigma = \text{Re } p > \sigma_0$. Тогда

$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{-(\sigma - \sigma_0)t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [f(T)e^{-pT} - f(0)] = -f(0), f'(t) \div p F(p) - f(0).$$

Следствие.

Если функции, $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ - оригиналы, то

$$f^{(k)}(t) \div p^k F(p) - p^{k-1}f(0) - p^{k-2}f'(0) \dots - f^{(k-1)}(0), \quad (2.17)$$

где $k=1, 2, 3, \dots, n$.

В частности, если

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0,$$

$$\text{То } f^{(k)}(t) \div p^k F(p), \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.18)$$

Так как $f'(t) = [f'(t)]', f'''(t) = [f'(t)]'$, то в силу (2.16), имеем

$$\begin{aligned} f''(t) \div p[p F(p) - f(0)] - f'(0) &= \\ &= p^2 F(p) - p f(0) - f'(0), \\ f'''(t) \div p[p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)] - f''(0) &= \\ &= p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0), \\ f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Соотношения (2.17) – (2.18) играют большую роль в применениях преобразования Лапласа, так как сложной операции дифференцирования оригинала соответствует более простая операция над изображением оригинала.

2.2.5. Интегрирование оригинала

Теорема 5. Если $f(t) \div F(p)$, то интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p .

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}, \quad (2.19)$$

Интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p .

В самом деле,

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] e^{-pt} dt.$$

Применим к интегралу в правой части этого соотношения формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = \int_0^t f(\tau) d\tau, dv = e^{-pt} dt, du = f(t) dt, v = -\frac{1}{p} e^{-pt}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) d\tau \div \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] e^{-pt} dt &= \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \int_0^t f(\tau) d\tau \right]_0^\infty + \\ &+ \frac{1}{p} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} F(p), \end{aligned}$$

так как, если $\text{Re } p > s_0$, где s_0 – порядок роста функции

$$\int_0^t f(\tau) d\tau, \text{ то } e^{-pt} \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

2.2.6. Дифференцирование изображения

Теорема 6. Если $f(t) \div F(p)$, то

$$(-t)f(t) \div F'(p), \quad (2.20)$$

$$(-t)^n f(t) \div F''(p), \quad (2.21)$$

Дифференцированию изображению по переменной p соответствует умножение оригинала на $(-t)$.

Доказательство. Так как функция

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{d}{dp} f(t) e^{-pt} dt. \text{ Поэтому}$$

$$F(p) = \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-pt} \div (-t)f(t),$$

Применяя это правило n раз, получим

$$(-t)^n f(t) \div F^{(n)}(p)$$

Пример. Положим в формуле (2.21) $f(t) = (-1)^n$.

$$(-1)^n \div \frac{(-1)^n}{p}, \text{ то } t = (-t)^n (-1)^n \div \left(\frac{(-1)^n}{p} \right)^{(n)} =$$

$$(-1)^n (-1)(-2)(-3) \dots (-n) \frac{1}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \text{ Следовательно,}$$

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (2.22)$$

2.2.7. Интегрирование изображения

Теорема 7. Если $F(p) \div f(t)$ и если несобственный

интеграл $\int_p^\infty F(q) dq$ сходится, что $\int_p^\infty F(q) dq \div \frac{f(t)}{t}$,

иными словами, интегрированию изображения в пределах от p до ∞ соответствует деление оригинала на t .

Доказательство. Пусть несобственный интеграл

$$\int_p^\infty F(q) dq = \int_p^\infty \left[\int_0^\infty f(t) e^{-qt} dt \right] dq \quad (2.23)$$

сходится и пусть интегрирование по переменной q , соединяющей точки p и ∞ , проводится по кривой, лежащей в полуплос-

кости $\text{Re} p > \sigma_0$, где σ_0 - порядок роста функции $f(t)$. Тогда, меняя в повторном интеграле (2.23) порядок интегрирования, получим

$$\int_p^\infty F(q) dq = \int_p^\infty \left[\int_p^\infty e^{-qt} dq \right] f(t) dt =$$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{1}{t} e^{-qt} \Big|_p^\infty \right] f(t) dt = \int_0^\infty \frac{1}{t} f(t) e^{-pt} dt,$$

то есть $\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(q) dq.$

Примеры.

1. Найти изображение функции $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

$$\text{Так как } \sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}, \text{ то } \frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{dq}{q^2 + 1} =$$

$$= \arctg q \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p = \text{arcctg } p.$$

2. Найти изображение функции $\text{sit} = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Функция sit называется интегральным синусом. Пользуясь результатом предыдущего примера и теоремой об интегрировании оригинала, находим, что

$$\text{sit} \div \frac{\text{arcctg } p}{p}.$$

2.2.8. Теорема о запаздывании оригинала.

Изображение периодических оригиналов

Пусть $f(t)$ - оригинал и пусть $a > 0$. Тогда функция $f(t - a)$ называется запаздывшим оригиналом. График функции $f(t - a)$ получается из графика функции $f(t)$ сдвигом вправо на величину a (рис. 2.4).

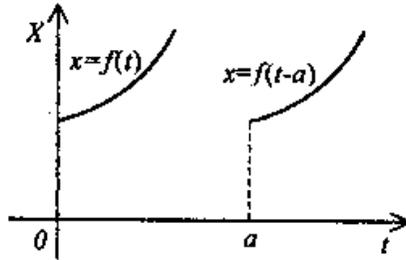


Рис. 2.4.

Теорема 8. Если $f(t) \div F(p)$, то $f(t-a) \div F(p)e^{-at}$, при запаздывании оригинала на величину a изображение умножается на e^{-at} .

Доказательство. Пусть $f(t) \div F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$.

Тогда, так как $f(t-a) = 0$ при $t < 0$,

то $f(t-a) \div \int_0^{\infty} f(t-a)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t-a)e^{-pt} dt$.

В последнем интеграле сделаем замену переменной $t-a=t_1$.

В результате получим

$$\int_0^{\infty} f(t-a)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-p(t_1+a)} dt_1 = e^{-at} \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-pt_1} dt_1,$$

то есть $f(t-a) \div e^{-at}F(p)$.

Пример. Найти изображения функций, графики которых изображены на рис. 2.5, 2.6 и 2.7. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ можно задать в виде:

$$f_1(t) = A\eta(t) - A\eta(t-a),$$

$$f_2(t) = A\eta(t) - 2A\eta(t-a) + 2A\eta(t-2a) - \dots$$

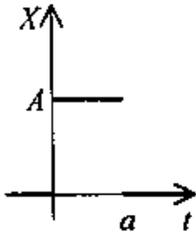


Рис. 2.5.

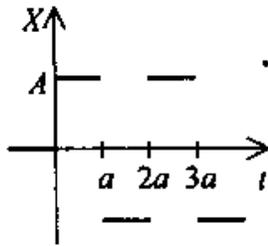


Рис. 2.6.

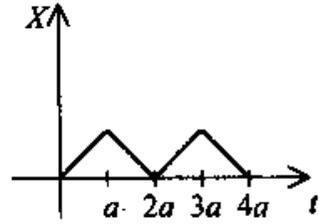


Рис. 2.7.

Следовательно, $F(p) = \frac{A(1 - e^{-at})}{p}$,

$$F(p) = \frac{A}{p} (1 - 2e^{-at} + e^{-2at} - e^{-3at} + \dots) = \frac{A}{p} \left(1 - \frac{2e^{-at}}{1 + e^{-at}} \right) =$$

$$= \frac{A(1 - e^{-at})}{p(1 + e^{-at})} = \frac{A}{p} th \left(\frac{ap}{2} \right).$$

Легко видеть, что $f_3(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Поэтому

$$F_3(p) = \frac{F_2(p)}{p} = \frac{A}{p^2} th \left(\frac{ap}{2} \right).$$

Оригинал $f(t)$ называется периодическим оригиналом с периодом T , если равенство $f(t + T) = f(t)$ выполняется для всех $t > 0$. Функции $f_2(t)$ и $f_3(t)$, рассмотренные в предыдущем примере, являются периодическими оригиналами с периодом $T = 2a$. Изображение периодического оригинала можно найти следующим образом. Пусть $g(t) = f(t)$, если $t \in [0, T]$ и $g(t) = 0$, если t не принадлежит $[0, T]$. Тогда

$$f(t) = g(t) + g(t - T) + g(t - 2T) + g(t - 3T) + \dots,$$

$$F(p) = G(p) + G(p)e^{-pT} + G(p)e^{-2pT} + G(p)e^{-3pT} + \dots$$

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 - e^{-pT}}. \quad (2.24)$$

Пример. Найти изображение функции, график которой изображен на рис 2.8. Имеем $g(t) = t$, если $t \in [0, T]$ и $g(t) = 0$, если t не принадлежит $[0, T]$. Поэтому

$$G(p) = \int_0^T te^{-pt} dt = \left(-\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \right) \Big|_0^T = \frac{1 - e^{-pT}}{p^2} - \frac{Te^{-pT}}{p}.$$

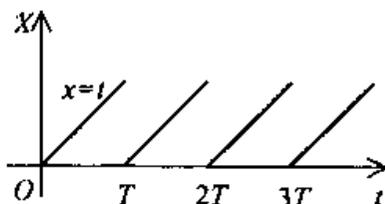


Рис. 2.8.

Следовательно, $F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{Te^{-pT}}{p(1 - e^{-pT})}$.

2.2.9. Гамма- функция Эйлера. Изображение степенных функций

В общем курсе высшей математики рассматривается несобственный интеграл $\int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$. Этот интеграл сходится, если $a > 0$, и определяет функцию $\Gamma(a)$, называемую гамма-функцией Эйлера $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, a > 0$.

Для функции $\Gamma(a)$ справедливо равенство: $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$, которое позволяет свести вычисление функции $\Gamma(a)$ при $a > 1$ к вычислению $\Gamma(a)$ при $a \in (0, 1]$. В частности

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2.$$

Найти теперь изображение функции $f(t) = t^a$, где $a > -1$ - любое действительное число .

По определению $F(p) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$. Считаю $p > 0$ действительной переменной, сделаем в интеграле замену переменной $pt = t_1, t = t_1/p, dt = dt_1/p$. В результате получим

$$F(p) = \frac{1}{p^{a+1}} \int_0^{\infty} t_1^a e^{t_1} dt = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}.$$

Таким образом, если $a > -1$, то

$$t^a \div \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad (a > -1). \quad (2.25)$$

В частности, если $a = n$ — целое положительное число, то $t \div \frac{n!}{p^{n+1}}$, что совпадает с результатом (2.22), полученным

Другим способом.

При $a = -1/2$ и $a = 1/2$

получим $\frac{1}{\sqrt{e}} \div \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad \sqrt{t} \div \frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$

Эти результаты принято записывать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \div \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad (2.26)$$

$$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \div \frac{1}{p\sqrt{p}}. \quad (2.27)$$

Замечание. Функция $t^a, a \in (-1, 0)$ при $t = 0$ терпит разрыв второго рода. Однако для этих функций преобразование Лапласа существует. Поэтому функции t^a при $a \in (-1, 0)$ включают в себя множество оригиналов.

2.3. Обратное преобразование Лапласа

В предыдущих пунктах решалась задача: дана функция $f(t)$, принадлежащая множеству оригиналов, требуется найти преобразование Лапласа $F(p)$ этой функции. Рассмотрим теперь обратную задачу. Дана функция $F(p)$ комплексного переменного p . Требуется выяснить, при каких условиях $F(p)$ является преобразованием Лапласа для некоторой функции $f(t)$ и как найти оригинал $f(t)$, изображением которой является данная функция $F(p)$.

Для решения этой задачи сравним преобразование Лапласа с преобразованием Фурье. Как известно, если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси т.е. на каждом $[-T, T]$ конечной длины кусочно - непрерывна и кусочно - монотонна, то для нее существует преобразование Фурье

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\tau t} dt. \quad (2.28)$$

Функция $f(t)$ по функции $F(\tau)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) e^{i\tau t} d\tau. \quad (2.29)$$

Пусть $f(t)$ – оригинал, $F(p)$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$. Так как $f(t) = 0$ при $t < 0$ и $p = \sigma + i\tau$, то формула (2.2) для определения $F(p)$ можно записать в виде

$$F(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + i\tau)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{2\pi} f(t) e^{-\sigma t}] e^{-\sigma t} dt.$$

Отсюда следует, что при каждом постоянном $\sigma > \sigma_0$ функция $F(\sigma + i\tau)$ является преобразованием Фурье для функции. Поэтому, в силу (2.29),

$$\sqrt{2\pi} f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\tau) e^{i\tau t} d\tau$$

отсюда находим, что

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\tau) e^{(\sigma+i\tau)t} d\tau \quad (2.30)$$

Формула (2.30) справедлива во всех точках t , в которых функция $f(t)$ непрерывна, и всех $\sigma > \sigma_0$. Преобразуем интеграл в правой части (2.30) в интеграл по комплексному переменному $p = \sigma + i\tau$. Так как $\sigma = \text{const}$, то $d\tau = \frac{1}{i} d(\sigma + i\tau) = \frac{1}{i} dp$, при этом, если переменная τ меняется пределах от $-\infty$ до ∞ , то переменная p меняется по прямой $\sigma = \text{const}$ от $\sigma - i\infty$ до $\sigma + i\infty$. Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (2.31)$$

Функция $f(t)$, определяемая по формуле (2.31), называется обратным преобразованием Лапласа для функции $F(p)$.

Предыдущие рассуждения являются нестрогим доказательством следующей теоремы.

Теорема. Если функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$ аналитична в некоторой полуплоскости $\text{Re } p = \sigma > \sigma_0$ удовлетворяет условию $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, то функция $f(t)$ является преобразованием Лапласа для функции $f(t)$, причем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp \text{ при } t > 0, \text{ и } f(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Непосредственное вычисление интеграла, стоящего в правой части формулы (2.31) очень часто сопряжено с большими трудностями. Рассмотрим случаи, когда обратное преобразование Лапласа можно найти более простыми способами.

2.3.1. Применение вычетов для отыскания обратного преобразования Лапласа

На практике очень часто изображение Лапласа аналитично не только в полуплоскости $\text{Re } p = \sigma > \sigma_0$, но и во всей плоскости комплексного переменного p , кроме конечного числа особых точек. В этом случае справедлива следующая теорема:

Теорема. Если функция $F(p)$ аналитична в плоскости комплексного переменного p , кроме конечного числа особых точек p_1, p_2, \dots, p_n , и если $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, то функция $F(p)$ является преобразованием Лапласа для функции $f(t)$, причем

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(p)e^{ipt}, p_k] \text{ при } t > 0 \text{ и } f(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

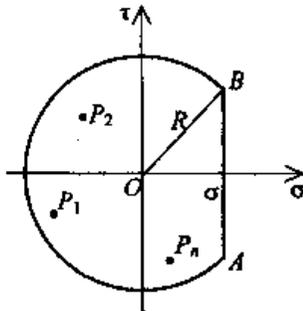


Рис. 2.9.

Для доказательства теоремы построим на плоскости комплексного переменного размыкнутый контур C , состоящий из отрезка AB прямой $\text{Re } p = \sigma > \sigma_0$ и дуги C_R радиуса R с центром в начале координат (рис. 2.9). Отрезок AB и радиус R дуги C_R выберем так, чтобы все особые точки p_1, p_2, \dots, p_n ции $F(p)$ лежали внутри области, ограниченной контуром C . Тогда, силу основной теоремы о вычетах

$$\oint_C F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(p)e^{pt}, p_k], \text{ или}$$

$$\oint_{AB} F(p)e^{pt} dp + \int_{C_R} F(p)e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(p)e^{pt}, p_k].$$

В силу леммы Жордана (см. 1.18.3) при $t > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0$$

Так как

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{AB} F(p) e^{pt} dp = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

,то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{AB} F(p) e^{pt} dp + \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp \right) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(p)e^{pt}, p_k].$$

Так же можно доказать, что при $t < 0, f(t) = 0$.

2.3.2. Оригиналы рациональных изображений

Рассмотрим случай, когда изображение $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией переменного p :

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (2.32)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ многочлены, причем степень числителя меньше степени знаменателя. Как известно из анализа, функцию (2.32)

можно представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций, то есть в виде суммы дробей вида

$$\frac{M}{p-a}, \quad \frac{M}{(p-a)^k}, \quad \frac{Mp+N}{p^2+ap+b}, \quad \frac{Mp+N}{(p^2+ap+b)^k}.$$

где $4b-a^2 > 0$. Оригиналы функций (2.33) находятся с помощью формул (2.3), (2.4), (2.6) - (2.9), (2.12) - (2.15), (2.22).

$$\frac{M}{p-a} \div Me^{at}, \quad \frac{M}{(p-a)^k} \div \frac{Mt^{k-1}e^{at}}{(k-1)!},$$

$$\frac{Mp+N}{p^2+ap+b} = \frac{M\left(p+\frac{a}{2}\right)}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4b-a^2}{4}} +$$

$$\frac{2N-Ma}{\sqrt{4b-a^2}} \frac{\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4b-a^2}{4}} \div e^{\frac{at}{2}} \left(M \cos \omega t + \frac{2N-Ma}{\sqrt{4b-a^2}} \sin \omega t \right),$$

где $\omega = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$. Оригинал дроби вида $\frac{Mp+N}{(p^2+ap+b)^k}$ проще всего находится с помощью вычетов. Оригиналы рациональных изображений находятся как суммы оригиналов простейших дробно-рациональных функций.

2.4 Теорема об умножении изображений.

Интеграл Дюамеля

Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ являются оригиналами. Функция

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

называется сверткой оригиналов и обозначается

$$h(t) = f(t) * g(t)$$

операция свертывания оригиналов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности:

1. $g(t) * f(t) = f(t) * g(t),$

$$2. \quad h(t) * [f(t) * g(t)] = [h(t) * f(t)] * g(t).$$

Проверим, например, свойство коммутативности. Имеем

$$g(t) * f(t) = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной $t - \tau = \tau_1$,
 $d\tau = -d\tau_1$.

Получим

$$\begin{aligned} g(t) * f(t) &= \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau = - \int_t^0 g(t - \tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 = \\ &= \int_0^t f(\tau_1)g(t - \tau_1)d\tau_1 = f(t) * g(t). \end{aligned}$$

Свойства коммутативности и ассоциативности позволяют находить свертку трех и более оригиналов, причем порядок свертываемых функций не играет роли. Легко проверяется, что свертка оригиналов также является оригиналом.

Теорема 1. Если $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$, то

$$f(t) * g(t) \div F(p)G(p),$$

При свертывании оригиналов их изображения перемножаются.

Доказательство. Пусть

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Тогда

$$H(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Интеграл в правой части этого равенства является повторным интегралом по неограниченной области D в плоскости (t, τ) определяемой неравенствами $0 < t < \infty$, $0 < \tau < t$ (рис. 2.10).

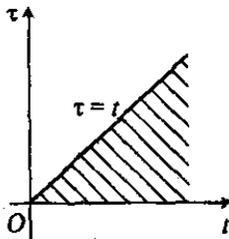


Рис. 2.10.

Если в повторном интеграле изменить порядок интегрирования, то получим

$$H(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{\infty} g(t-\tau)e^{-pt} dt.$$

Во внутреннем интеграле правой части сделаем замену переменной $t - \tau = t_1$, $t = t_1 + \tau$, $dt = dt_1$. В результате получим

$$H(p) = \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{\infty} g(t_1)e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(t_1)e^{-pt_1} dt_1 = F(p)G(p),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 называется теоремой об умножении изображений. Аналогично доказывается теорема об умножении оригиналов.
Теорема 2. Если $f(t)$ и $g(t)$ - оригиналы, порядок роста которых соответственно равен σ_1 и σ_2 , и если

$$f(t) \div F(p), g(t) \div G(p), \quad \text{то}$$

$$f(t)g(t) \div \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq, \text{ где } a > \sigma_1, \text{Rep} = \sigma > a + \sigma_2.$$

Интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq$$

называется сверткой изображений.

Таким образом, умножению изображений соответствует свертывание оригиналов, умножению оригиналов соответствует свертывание изображений и деление результата на $2\pi i$.

Пользуясь теоремой 1, найдем оригинал для изображений да $p F(p)G(p)$, где $F(p) \div f(t)$, $G(p) \div g(t)$.

Для этого заметим, что

$$p F(p)G(p) = [p F(p) - f(0)]G(p) + f(0)G(p),$$

или

$$p F(p)G(p) = [p G(p) - g(0)]F(p) + g(0)F(p).$$

Отсюда следует, что

$$p F(p)G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0)g(t),$$

или

$$p F(p)G(p) \div g'(t) * f(t) + g(0)f(t),$$

то есть

$$p F(p)G(p) \div \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau + f(0)g(t), \quad (2.34)$$

или

$$p F(p)G(p) \div \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau + g(0)f(t). \quad (2.35)$$

Если воспользоваться коммутативностью свертки, то соотношения (2.34) и (2.35) принимают вид

$$p F(p)G(p) \div \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau + f(0)g(t), \quad (2.36)$$

$$p F(p)G(p) \div \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau + g(0)f(t). \quad (2.37)$$

Интеграл в правых частях соотношений (2.34)-(2.37) называется интегралом Дюамеля. В частности, если $f(0) = 0$, то

$$p F(p)G(p) \div f'(t) * g(t) = \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

а если $g(0) = 0$, то

$$F(p)G(p) \div g'(t) * f(t) \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

2.5. Теоремы о разложении

Для отыскания прямого и обратного преобразования Лапласа очень часто используются следующие две теоремы, которые приводятся здесь без доказательства.

Теорема 1. Если функция $F(p)$ аналитична в области $|p| > R$, удовлетворяет условию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p)$$

и разлагается в ряд Лорана

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k},$$

то функция $F(p)$ является изображением для функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Теорема 2. Если функция $f(t)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного t , аналитична на всей комплексной плоскости, имеет конечный порядок роста при $t \rightarrow +\infty$ и разлагается в степенной ряд

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

то изображение $F(p)$ функции $f(t)$ разлагается в ряд вида

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k k!}{p^{k+1}}.$$

Примеры.

1. Показать, что функция $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ является изображением функции Бесселя

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}.$$

Для решения этой задачи разложим функцию $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

ряд Лорана по степеням $\frac{1}{p}$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} =$$

$$\frac{1}{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \dots (-(2k-1)/2)}{k!} \frac{1}{p^{2k}}\right).$$

Так как $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2 p^{2k+1}} \div \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = J_0(t).$$

2. Разложить в степенной ряд функцию

$$f(t) = cht \cos t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cos t.$$

По теореме о смещении изображения находим, что

$$F(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \right] = \frac{p^3}{p^4+4}.$$

Разложим функцию $\frac{p^3}{p^4+4}$ в степенной ряд по степеням $\frac{1}{p}$

Области $|p| > 2$. Получим

$$F(p) = \frac{p^3}{p^4+4} = \frac{1}{p} \frac{1}{1+\frac{4}{p^4}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{p^{4k+1}}.$$

Следовательно,

$$f(t) = cht \cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k t^{4k}}{(4k)!}.$$

2.6. Применения преобразования Лапласа

2.6.1. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.

Применение интеграла Дюамеля

Пусть требуется найти частное решение дифференциального уравнения

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (2.38)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (2.39)$$

Будем предполагать, что решение $x(t)$ и его производные $x'(t)$, $x''(t)$, ..., $x^{(n-1)}(t)$, а также функция $f(t)$ являются оригиналами.

Тогда, применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям уравнения (2.38), получим

$$\begin{aligned} a_0 &= [p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_1 - \dots - x_{n-1}] + \\ &+ a_1 [p^{n-1} X(p) - p^{n-2} x_0 - p^{n-3} x_1 - \dots - x_{n-2}] + \dots + \\ &+ a_n X(p) = F(p) \end{aligned}$$

или

$$A(p)X(p) - B(p) = F(p), \quad (2.40)$$

где $A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ - характеристический многочлен уравнения (2.38), $B(p)$ - многочлен, степень которого не превышает $n-1$, зависящий от начальных условий x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Из уравнения (2.40) находим, что

$$X(p) = \frac{B(p) + F(p)}{A(p)}.$$

Отсюда с помощью обратного преобразования Лапласа находится искомое решение $x(t)$.

Пример. Найти решение задачи Коши

$$x'' + a^2 x = b \sin at, x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Применяя преобразование Лапласа, получим

$$p^2 X(p) - px_0 - x_1 + a^2 X(p) = \frac{ab}{p^2 + a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$X(p) = \frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} + \frac{px_0 + x_1}{p^2 + a^2}.$$

С помощью таблицы изображений и их оригиналов находим, что

$$x(t) = \frac{b}{2a^2} (\sin at - at \cos at) + x_0 \cos at + \frac{x_1}{a} \sin at.$$

При произвольных x_0, x_1 слагаемое $\bar{x}(t) = x_0 \cos at + \frac{x_1}{a} \sin at$ является общим решением однородного уравнения

$x'' + ax = 0$, а слагаемое $x^*(t) = \frac{b}{2a^2} (\sin at - at \cos at)$ является частным решением неоднородного уравнения

$$x'' + a^2 x = b \sin at.$$

Если начальные условия (2.39) нулевые, то в некоторых случаях решение уравнения (2.38) легче находить с помощью интеграла Дюамеля.

Пусть требуется найти решение уравнения (2.38)

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (2.41)$$

Для этого найдем решение вспомогательного уравнения

$$a_0 x_1^{(n)} + a_1 x_1^{(n-1)} + \dots + a_n x_1 = 1, \quad (2.42)$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям (2.41).

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (2.38) и (2.42), получим

$$A(p)X(p) = F(p), A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}.$$

Разделим полученное первое уравнение на второе. Получим

$$\frac{X(p)}{X_1(p)} = pF(p), \text{ следовательно, } X(p) = pX_1(p)F(p).$$

Отсюда с помощью интеграла Дюамеля находим, что

$$x(t) = x'_1(t) * f(t) = f(t) * x'_1(t),$$

То есть

$$x(t) = \int_0^t x'_1(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) x'_1(t - \tau) d\tau. \quad (2.43)$$

Применение интеграла Дюамеля оправдано в тех случаях, когда решается задача (2.38)-(2.41) для различных функций $f(t)$ или тогда, когда трудно найти $F(p)$.

Пример. Найти решение задачи Коши

$$x'' - x = e^{-t^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Для вспомогательной задачи

$$x'' - x = 1, \quad x_1(0) = x'_1(0) = 0$$

находим, что

$$X_1(p)(p^2 - 1) = \frac{1}{p}, \quad X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)},$$

то есть

$$x_1(t) \div \frac{1}{p(p^2 - 1)}, \quad x'_1(t) \div \frac{1}{p^2 - 1},$$

следовательно, $x'_1(t) = \text{sh}t$.

Отсюда в силу (2.43) следует, что

$$x(t) = e^{-t^2} * sht = \int_0^t e^{-\tau^2} sh(t - \tau) d\tau.$$

Аналогично применяется преобразование Лапласа к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Например, пусть требуется найти решение задачи Коши для системы

$$\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, & x(0) = 1, x'(0) = 0, \\ x + y'' - y + z = 0, & y(0) = 0, y'(0) = 0, \\ x + y + z'' - z = 0, & z(0) = 0, z'(0) = 0. \end{cases}$$

Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению системы, получим

$$\begin{cases} p^2 X(p) - p - X(p) + Y(p) + Z(p) = 0, \\ X(p) + p^2 Y(p) + Y(p) + Z(p) = 0, \\ X(p) + Y(p) + p^2 Z(p) + Z(p) = 0 \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} (p^2 - 1)X(p) + Y(p) + Z(p) = p, \\ X(p) + (p^2 - 1)Y(p) + Z(p) = 0, \\ X(p) + Y(p) + (p^2 - 1)Z(p) = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений, находим, что

$$X(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}, \quad Y(p) = Z(p) = -\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}.$$

Отсюда с помощью обратного преобразования Лапласа находим,

$$x(t) = \frac{\cos t + 2ch t\sqrt{2}}{3}, \quad y(t) = z(t) = \frac{\cos t - ch t\sqrt{2}}{3}$$

Преобразование Лапласа применяется также и для решения некоторых типов линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

2.6.2. Решение интегральных уравнений

Уравнения вида

$$f(t) = \int_0^t k(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (2.44)$$

и

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (2.45)$$

называются уравнениями Вольтерра соответственно первого и второго рода. Здесь $f(t)$, $k(t, \tau)$ - заданные функции, $x(t)$ - неизвестная функция. Функция $k(t, \tau)$ называется ядром интегрального оператора.

Рассмотрим случаи, когда функция $k(t, \tau) = k(t - \tau)$ зависит только от разности $t - \tau$, то есть рассмотрим уравнения Вольтерра вида

$$f(t) = \int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (2.46)$$

и

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (2.47)$$

причем будем предполагать, что функции $f(t)$ и $k(t)$ являются оригиналами. Применим преобразование Лапласа к правой и левой частям уравнений (2.46) и (2.47), при этом воспользуемся теоремой об умножении изображений. В результате

чим $F(p) = K(p)X(p)$ для уравнения (2.46) и

$$X(p) = F(p) + K(p)X(p)$$

для уравнения (2.47). Отсюда следует, что

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p)} \text{ или } X(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}.$$

Неизвестная функция $x(t)$ находится с помощью обратного преобразования Лапласа.

Пример. Найти решение интегрального уравнения

$$x(t) = \sin t + \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau.$$

Это уравнение Вольтерра второго рода. Так как

$$\int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau = t * x(t),$$

то переходя к изображениям, получим

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{X(p)}{p^2}.$$

Отсюда находим, что

$$X(p) = \frac{p^2}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 - 1} + \frac{1}{p^2 + 1} \right).$$

Следовательно, $x(t) = \frac{1}{2}(sh t + \sin t)$.

2.7. Приложение теории функций комплексного переменного и операционного исчисления технических задач

2.7.1. Решение задач электротехники

Применению преобразования Лапласа к решению задач электротехники посвящена большая специальная литература.

Здесь мы рассмотрим лишь простейшие примеры.

Рассмотрим колебательный контур, в котором последовательно включены сопротивление R , индуктивность L и емкость C (рис. 2.11). Уравнение, описывающее состояние колебательного контура, имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = v(t). \quad (2.48)$$

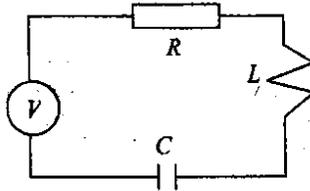


Рис. 2.11

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (2.48) и предполагая, что $i(0) = 0$, получим

$$I(p) + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} = V(p).$$

Отсюда находим, что

$$I(p) = \frac{V(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{V(p)}{Z(p)}, \quad (2.49)$$

где $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ называется операторным сопротивлением цепи. Формула (2.49) является операторной формой закона Ома. Из формулы (2.49) с помощью обратного преобразования Лапласа можно найти силу тока

$$i(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{V(p)}{Z(p)} e^{pt} dp. \quad (2.50)$$

Например, пусть $v(t) = E$ - в цепь включается постоянное напряжение. Тогда

$$V(p) = \frac{E}{p}, \quad I(p) = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{E}{L} \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL}}.$$

Возможны следующие случаи:

1) если $\Delta = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$, то $i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin t\sqrt{\Delta}$;

2) если $\Delta = 0$, то $i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{Rt}{2L}}$

3) если $\Delta < 0$, то $i(t) = \frac{E}{L\sqrt{-\Delta}} t e^{-\frac{Rt}{2L}} \text{sh } t\sqrt{-\Delta}$.

В первом случае в цепи наблюдаются затухающие гармонические колебания, во втором и третьем случае - непериодический затухающий процесс. Пусть в контур включено постоянное единичное напряжение $v_1(t) = E = 1$. Тогда

$$V_1(p) = \frac{1}{p}, \quad I_1(p) = \frac{1}{pZ(p)}.$$

Если теперь в контур включить произвольное напряжение $v(t)$, то

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)}, \quad \frac{I(p)}{I_1(p)} = pV(p).$$

Следовательно, $I(p) = p I_1(p) V(p)$.

Отсюда с помощью интеграла Дюамеля находим, что

$$i(t) = i'_1(t) * v(t) = \int_0^t i'_1(\tau) v(t - \tau) d\tau \quad (2.51)$$

или

$$i(t) = v(t) * i'_1(t) = \int_0^t v(\tau) i'_1(t - \tau) d\tau. \quad (2.52)$$

Формулы (2.51) и (2.52) показывают, что, не зная параметры контура, а зная лишь реакцию контура на единичное напряжение, можно рассчитать реакцию контура на любое напряжение $v(t)$. Мы рассмотрели случай, когда $i(0) = 0$, $v(0) = 0$. Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент времени $t=0$ в контуре есть ток i_0 и на обкладках конденсатора есть начальный заряд q_0 . Тогда состояние контура описывается дифференциальным уравнением

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt + \frac{q_0}{C} = v(t), i(0) = i_0, \quad (2.53)$$

которое после применения преобразования Лапласа принимает вид

$$LpI(p) - Li_0 + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} + \frac{q}{Cp} = V(p).$$

Отсюда следует, что

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} + \frac{Li_0 + \frac{q_0}{Cp}}{Z(p)}, \text{ где } Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp}.$$

Таким образом, к току, определяемому изображением

$$I_1(p) = \frac{V(p)}{Z(p)}, \text{ добавляется ток, изображение которого}$$

етвид $I_2(p) = \frac{Li_0 + \frac{q_0}{Cp}}{Z(p)}$. Этот ток называется током короткого замыкания. Он получается, если положить $v(t) = 0$, то есть коротко замкнуть контур.

Рассмотрим теперь не один контур, а сложную электрическую цепь. Расчет электрических постоянного тока проводится на основе законов Кирхгофа:

1. Алгебраическая сумма всех токов, притекающих к данной точке цепи, равна нулю.

2. Для каждого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных ветвях цепи равна нулю.

В курсах электротехники доказывается, что если ток меняется во времени, то оба закона Кирхгофа остаются справедливыми также для операторных токов и операторных сопротивлений. Всякую электрическую цепь можно разбить на участки, содержащие один из трех возможных типов сопротивлений: активное сопротивление R , сопротивление индукции L и сопротивление емкости C . Зависимость напряжения от тока на отдельных участках цепи имеет вид

$$1) v_R = Ri, \quad 2) v_L = L \frac{di}{dt}, \quad 3) v_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt.$$

Применяя преобразование Лапласа к этим равенствам, получим зависимость операторных напряжений от операторных токов.

$$1) V_R(p) = RI(p), \quad 2) V_L(p) = pLI(p), \quad 3) V_C(p) = \frac{I(p)}{Cp}.$$

Эти соотношения объединяет операторная форма закона Ома

$$V(p) = Z(p)I(p),$$

где $Z(p)$ - операторное сопротивление цепи, зависящее от операторных сопротивлений

$$Z_R(p) = R, \quad Z_L(p) = Lp, \quad Z_C(p) = \frac{1}{Cp}.$$

Рассмотрим возможные типы соединений отдельных сопротивлений в электрическую цепь. Сопротивления Z_1 и Z_2 соединены последовательно (рис. 2.12).



Рис. 2.12

В этом случае

$$V_1(p) = Z_1(p)I(p), \quad V_2(p) = Z_2(p)I(p),$$

$$V(p) = V_1(p) + V_2(p) = [Z_1(p) + Z_2(p)]I(p) = Z(p)I(p).$$

Следовательно, $Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p)$ - при последовательном соединении операторные сопротивления складываются.

2) сопротивления Z_1 и Z_2 соединены параллельно (рис. 2.13).

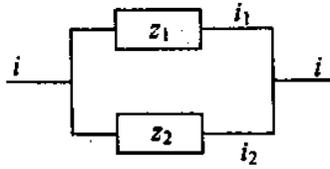


Рис. 2.13.

В этом случае

$$\begin{aligned}
 I(p) &= I_1(p) + I_2(p) = \frac{V(p)}{Z_1(p)} + \frac{V(p)}{Z_2(p)} = \\
 &= V(p) \left[\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right] = \frac{V(p)}{Z(p)}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}, \quad Z(p) = \frac{Z_1(p) Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}.$$

Полученные соотношения для операторных сопротивлений и закон Ома в операторной форме позволяют составить операторное уравнение для любой электрической цепи.

Пример. Найти ток в контуре, изображенном на рис. 2.14, если $i(0) = 0$ и при $t = 0$ в цепь включается постоянное напряжение E . Для параллельного участка цепи

$$\frac{1}{Z_1(p)} = Cp + \frac{1}{R}, \quad Z_1(p) = \frac{R}{1 + CRp}.$$

Для всей цепи

$$Z(p) = Z_1(p) + Z_1(p) = Lp + \frac{R}{1 + CRp} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{1 + CRp}.$$

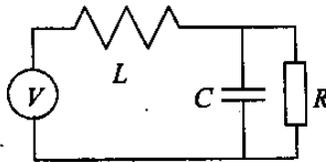


Рис. 2.14.

По закону Ома

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)}, \text{ где } V(p) = \frac{E}{p}.$$

Следовательно,

$$I(p) = \frac{E(1 + CRp)}{p(LCRp^2 + Lp + R)}.$$

Отсюда с помощью обратного преобразования Лапласа находится ток $i(t)$.

2.7.2. Решение некоторых задач математической физики.

Ограничимся случаем, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных x и t . Переменную x будем рассматривать как пространственную координату, переменную t — как время.

Рассмотрим, например, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2.54)$$

(a^2 — постоянная).

Разберем первую краевую задачу для уравнения (2.54): найти решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения (2.54) для $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2.55)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad (2.56)$$

Предположим, что $u(x, t)$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ и $f(x, t)$ рассматриваемые как функции t , являются оригиналами. Обозначим через

$$U(p, x) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt \quad (2.57)$$

- изображение функции $u(x, t)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \div \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \div \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (2.58)$$

По правилу дифференцирования оригиналов получаем с учетом начального условия (2.55):

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div pU - \varphi(x). \quad (2.59)$$

Предположим, что $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются оригиналами и

$$\psi_1(t) \div \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \div \Psi_2(p). \quad (2.60)$$

Тогда граничные условия (2.56) дают

$$U|_{x=0} = \Psi_1(p), \quad U|_{x=1} = \Psi_2(p). \quad (2.61)$$

Таким образом, операторный метод приводит решение задачи (2.54), (2.55), (2.56) к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x, p) = 0 \quad (2.62)$$

при граничных условиях (2.61), где $F(x, p) = f(x, t)$. Решая задачу (2.62), (2.61) и обращая полученное решение, найдем функцию $u(x, t)$, являющуюся решением задачи (2.54), (2.55), (2.56).

Аналогично решаются и другие краевые задачи для уравнения теплопроводности, а также краевые задачи для уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$ (2.63)

телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0 \quad (2.64)$$

и некоторых других уравнений более общего вида.

Задача. Концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены жестко.

Начальное отклонение задано равенством

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

Начальные скорости равны нулю. Найти отклонения $u(x, t)$ при $l > 0$.

Решение. Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.65)$$

Начальные условия

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (2.66)$$

краевые условия

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (2.67)$$

Переходя к изображениям, будем иметь

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.68)$$

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \quad (2.69)$$

Решая уравнение (2.68), получим

$$U(x, p) = C_1 e^{px/a} + C_2 e^{-px/a} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Учитывая краевые условия (2.69), найдем

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оригиналом для $U(x, p)$ является функция

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (2.70)$$

которая будет решением поставленной задачи.

Таблица оригиналов и изображений

Номер формулы	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

4	$t^n \ (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
5	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
6	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
7	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$
8	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$
9	$\operatorname{ch} bt$	$\frac{p}{p^2 - b^2}$
10	$\operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{p^2 - b^2}$
11	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
12	$t^a e^{at}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p-a)^{a+1}}$
13	$e^{at} \cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$
14	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$
15	$e^{at} \operatorname{ch} bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - b^2}$
16	$e^{at} \operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 - b^2}$
17	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$
18	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$

19	$J_n(t)$	$\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$
20	$J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{p^2 + a^2} - p)^n}{a^n \sqrt{p^2 + a^2}}$
21	sit	$\frac{\arctg p}{p}$
22	$tcosbt$	$\frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$
23	$tsinbt$	$\frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2}$
24	$tchbt$	$\frac{p^2 + b^2}{(p^2 - b^2)^2}$
25	$tshbt$	$\frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2}$

2.7.3 Расчет электростатического поля двухпроводной линии

Современная индустрия выдвигает широкий круг инженерных задач электротехники, связанных с исследованием двумерных электростатических полей. Это расчет напряженности и емкости проводов линий передач, коаксиальных кабелей, конденсаторов различной формы, электрофильтров и т.д. Их уравнения записанные в принятых обозначениях электростатики, имеют вид $D = \epsilon E = -\epsilon \text{grad} u^* = -\epsilon \nabla u^*$, $\text{div} D = \text{div} \epsilon E = 0$, где D – вектор электростатической индукции; E – напряженность электростатического поля; ϵ – диэлектрическая проницаемость; u^* – потенциал или потенциальная функция.

При переходе к безразмерным величинам выбирают характерные длину L ; потенциальную функцию u_0^* и диэлектрическую проницаемость среды ϵ_0 .

Тогда характерным значением модуля вектора D является $|D| = D_0 = \epsilon_0 u_0^*/L$. Очевидно, что при $\epsilon = \text{const}$, учитывая, что $E = u_0^*/L$, уравнения в безразмерных величинах можно записать в виде $D = E = -\text{gradu}^*$, $\text{div}D = \text{div}E = 0$.

В двумерных задачах, вводя функцию потока электростатического поля v , запишем основные равенства рассматриваемого процесса в виде

$$D_x = \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \quad D_y = \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}, \quad u = -u^*;$$

$$W = u + iv, \quad D = \frac{dW}{dz}, \quad \text{где } W \text{ – комплексный потенциал}$$

В задачах, рассматриваемых в данной главе, вычислится емкость C между двумя проводящими поверхностями, которая определяется как отношение результирующего потока электрического поля, общего для обеих поверхностей, к разности потенциалов между ними т.е. $C = (v_1 - v_2)/(u_1 - u_2)$

Это соотношение справедливо и в том случае, когда число проводящих поверхностей более двух. Если имеются только два проводника (один из них может находиться в бесконечности) то поток между ними равен заряду q на каждом из них и емкость $C = q/(u_1 - u_2)$

Двухпроводные линии передач

Рассмотрим электростатическое поле двухпроводной линии из тонких проводов, расположенных друг от друга на расстоянии $2a$. Пусть один из проводов имеет линейную плотность заряда $+q$ другой $-q$. Пусть далее $z_1 = -a$ и $z_2 = a$ – комплексные координаты точек пересечения осей проводов плоскостью (z) см.рис.2.15.

Комплексный потенциал электростатического поля, создаваемого каждым проводом в отдельности, в безразмерных величинах имеет вид

$$W_1 = -\frac{q}{2\pi} \ln(z + a), \quad W_2 = \frac{q}{2\pi} \ln(z - a)$$

Тогда комплексный потенциал результирующего поля

$$W = W_1 + W_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right) \quad (2.71)$$

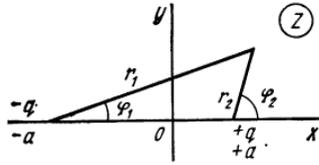


Рис.2.15

Обозначим $z+a=r_1 \exp(i\phi_1)$, $z-a=r_2 \exp(i\phi_2)$, где r_1 и r_2 – расстояния от точки $z=x+iy$ до осей проводов; ϕ_1 и ϕ_2 – углы между радиус-векторами r_1 и r_2 и положительным направлением оси Ox . Подставив выражение для комплексного потенциала поля вместо $z+a=r_1 \exp(i\phi_1)$, $z-a=r_2 \exp(i\phi_2)$, получим:

$$W = -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \exp i(\phi_1 - \phi_2) = -\frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{r_1}{r_2} + i(\phi_1 - \phi_2) \right] = \frac{iq}{2\pi} (\phi_2 - \phi_1) + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Выделяя в полученном выражении действительную и мнимые части, имеем:

$$v = \frac{q}{2\pi} (\phi_2 - \phi_1), \quad u = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Полагая в выражении $r_1=r_2$, получаем $u = 0$, то есть линией нулевого потенциала является ось Oy . Уравнение эквипотенциалей получим, положив в соотношении $u = c = const$:

$$\frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = c.$$

Запишем данное выражение, обозначив $\exp\left(c \frac{q}{2\pi}\right) = \sqrt{k}$, в виде $r_2/r_1 = \sqrt{k}$ или $r_2^2/r_1^2 = k$.

Таким образом, в декартовых прямоугольных координатах уравнения эквипотенциалей имеют вид

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = k \quad \text{или} \quad (1-k)x^2 - 2(1+k)ax + (1-k)y^2 = -a^2(1-k).$$

Так как $1-k \neq 0$, то разделим обе части этого равенства на $1-k$ и прибавим к обеим частям выражение $\left(\frac{1+k}{1-k}\right)a^2$.

Получаем

$$x^2 - 2 \frac{1+k}{1-k} ax + \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 a^2 + y^2 = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 a^2 - a^2 \text{ или}$$

$$\left(x - \frac{1+k}{1-k} a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2\sqrt{k}}{1-k}\right)^2 \quad (2.72)$$

Последнее уравнение определяет семейство окружностей с центрами $\left(\frac{1+k}{1-k} a, 0\right)$ и радиусами $r = \pm \frac{2\sqrt{k}}{1-k} a$. При $k > 1$ окружности расположены слева от точки $z=0$, при $k < 1$ — справа от нее. Определяя радиус из соотношения $r = \pm \frac{2\sqrt{k}}{1-k} a$, при $k > 1$ следует брать соответствующий физическому смыслу отрицательный знак. Таким образом переходим к выводу, что семейство окружностей с центрами на оси абсцисс. Полагая в функции потока $\phi_1 = \phi_2$, получает $U=0$. Т.е ось Ox является линией потока. Для того чтобы получить уравнение силовых линий поля, нужно положить в выражение $U=c=\text{const}$; тогда

$$\text{tg}(\phi_2 - \phi_1) = 1/k \quad (2.73)$$

где $k = 1/\text{tg}(2\pi c/q)$. В принятой системе координат $\text{tg}\phi_1 = y/(x+a)$, $\text{tg}\phi_2 = y/(x-a)$, поэтому преобразуя равенство (2.73), находим что линиями потока поля является окружности с центрами, расположенными на оси Oy :

$$x^2 + (y - ak)^2 = (a\sqrt{1+k^2})^2 \quad (2.74)$$

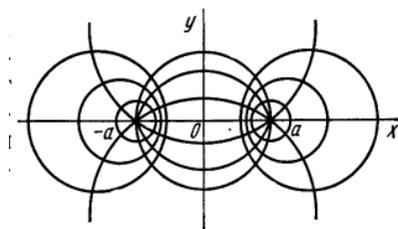


Рис 2.16

Картина эквипотенциалей и линии потока поля изображена на рис 2.16

Рассмотрим семейство $u=\text{const}$ и обозначим r радиус какой-либо эквипотенциали, лежащей справа от начала координат, а

l-расстояние от центра до этой точки . Тогда на основани формулы (2.72) имеем

$$r = \pm \frac{2a\sqrt{k}}{1-k} l = a(1+k)/(1-k) \quad (2.75)$$

Откуда $l + r = \frac{a(1+\sqrt{k})^2}{1-k}$, $l - r = \frac{a(1-\sqrt{k})^2}{1-k}$ следовательно

$$l^2 = r^2 + a^2 \quad (2.76)$$

Эта формула позволяет геометрически определить положение на оси Oх центра эквипотенциали заданного радиуса r.

Аналогично, обозначая r_1 радиус какой-либо линии потока и l_2 -расстояние от центра до начала координат, на основании (2.74) имеем $r_1 = a\sqrt{1+k^2}$, $l_1 = ak$.

Отсюда $l_1^2 = r_1^2 - a^2$, $r_1^2 = l_1^2 + a^2$. Таким образом геометрически просто определить положение центра линии потока радиуса r_1 на оси Oy.

Из изложенного следует что эквипотенциали и линии потока электростатического поля двухпроводной линии тонких проводов, представляют собой неконцентрические окружности. Безразмерный вектор электростатической индукции D и безразмерный вектор напряжения электростатического поля E (в безразмерных величинах $E=D$) на основании комплексного потенциала задачи имеет вид

$$D = E = \left(\frac{DW}{dz} \right) = \frac{qa}{\pi} \frac{1}{z^3 - a^2} \quad (2.77)$$

Расчет электростатического поля двухпроводной линии на цилиндрических проводах одинакового радиуса r при расстоянии 2l между их центрами, начнем с определения положения электрических осей этих проводов. Под электрической осью принимают такую ось , при перенесении на которую зарядов с поверхности провода электростатическое поле не меняется.

Положение электрических осей определяется расстоянием a, которое находится из соотношения $a = \sqrt{l^2 - r^2}$. Для определения потенциалов проводов нужно решить относительно k уравнение $r = \pm 2a\sqrt{k}/(1 - k)$. В результате имеем

$$u = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{l \pm a}{t}. \quad (2.78)$$

Для точек, расположенных в полуплоскости $\text{Re}z < 0$ числитель в формуле (2.78) следует брать в виде $l+a$; для точек, расположенных в полуплоскости $\text{Re}z > 0$, в виде $l-a$. Чтобы вычислить емкость двухпроводной линии, составленной из цилиндрических проводов одинакового радиуса r , найдем разность потенциалов между проводами. имеем

$$u_1 - u_2 = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{l+1}{r} - \frac{q}{2\pi} \ln \frac{l-a}{r} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{l+a}{l-a} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(l+a)^2}{l^2 - a^2} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{l+a}{r}$$

Тогда емкость на единицу длины линии без учета влияния земли согласно равна.

$$C = \frac{q}{u_1 - u_2} = \frac{\pi}{\ln\left(\frac{l+a}{r}\right)}$$

Для вычисления напряжённости электростатического поля двухпроводной линии составленной из цилиндрических проводов одинакового радиуса r . воспользуемся формулой (2.77). Подставляя в эту формулу вместо q его выражение, найденное из соотношения (2.78) имеем

$$E = \frac{u_1 - u_2}{\ln[(l+a)/r]} \frac{2a}{(z^2 - a^2)}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее пособие написано авторами на основе многолетнего опыта преподавания курса высшей математики в техническом университете и рассчитано на студентов тех специальностей, в программу которых входят разделы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление.

Материал пособия авторы постарались изложить так, чтобы максимально помочь студентам овладеть основами ТФКП и операционного исчисления. С этой целью в пособии разобрано большое количество примеров, которые помогут студентам глубже усвоить теоретический материал курса и приобрести навыки решения задач.

Этот раздел служит теоретической базой в решении многих прикладных вопросов дисциплин «Теоретические основы электротехники», «Теория автоматического управления», «Проектирование электротехнических устройств (электрических машин)», «Математическое моделирование электрических машин» и других общетехнических дисциплин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Араманович И.Г., Лунц Г.А., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1965. 390 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Г.Я. Высшая математика в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк., 1997. 4.2. 415 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1966. 408 с.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981. 302 с.
5. Левинштейн М.Л. Операционное исчисление и его приложения к задачам электротехники М.-Л.: Энергия, 1964. 466 с.
6. Мантуров О.В. Курс высшей математики. М.: Высш. шк., 1991. 448 с.
7. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М.: Наука, 1980. 303 с.
8. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Высш. шк., 1991. 448 с.
9. Радыгин В.М., Голубева О. В. Применение функций теории комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.
10. Катрахова А.А., Семенов. М.П. Лекции по теории комплексного переменного и операционному исчислению: учебное пособие / М.П. Семенов. – Воронеж. ВГТУ. 2004. 128 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.....	5
1.1. Комплексные числа и действия над ними.....	5
1.1.1. Понятие комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.....	5
1.1.2. Сложение и вычитание комплексных чисел	7
1.1.3. Умножение и деление комплексных чисел	8
1.1.4. Возведение комплексных чисел в целую положительную степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексных чисел.....	10
1.2. Комплексная плоскость. Понятие области на комплексной плоскости. Понятие предела последовательности комплексных чисел.....	13
1.3. Комплексные функции.....	16
1.3.1. Комплексные функции действительного переменного.....	16
1.3.2. Комплексные функции комплексного переменного.....	17
1.4. Ряды с комплексными членами.....	21
1.5. Элементарные функции комплексного переменного.....	22
1.5.1. Показательная, тригонометрическая и гиперболические функции комплексного переменного. Формулы Эйлера.....	22
1.5.2. Логарифмическая функция комплексного переменного. Показательная функция с любым комплексным основанием ...	26
1.6. Производная от функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.....	27
1.7. Аналитические и гармонические функции. Связь между ними.....	33
1.8. Геометрический смысл модуля и аргумента производной от функции комплексного переменного.	

Понятие конформного отображения.....	36
1.9.Интеграл от функции комплексного переменного	40
1.10.Теорема Коши для простого и сложного контура	43
1.11.Интегральная формула Коши.....	47
1.12.Интегральная формула Коши для производных от аналитической функции.....	49
1.13.Степенные ряды в комплексной области.....	51
1.14.Ряды Тейлора и Лорана.....	53
1.15.Особые точки функции комплексного переменного. Классификация особых точек.....	57
1.16.Вычет функции в особой точке. Основная теорема о вычетах.....	60
1.17.Вычисление вычетов в простом и кратном полюсе.....	65
1.18.Некоторые применения вычетов.....	69
1.18.1.Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$	69
1.18.2.Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.....	70
1.18.3.Лемма Жордана. Применение леммы к вычислению несобственных интегралов.....	72
2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....	75
2.1 Оригинал и изображение Лапласа.....	75
2.2. Свойства преобразования Лапласа.....	78
2.2.1.Линейность преобразования Лапласа.....	78
2.2.2.Теорема подобия.....	80
2.2.3.Теорема о смещении изображения.....	80
2.2.4.Дифференцирование оригинала.....	81
2.2.5.Интегрирование оригинала.....	82
2.2.6.Дифференцирование изображения.....	83
2.2.7.Интегрирование изображения.....	83
2.2.8.Теорема о запаздывании оригинала Изображение периодических оригиналов.....	84
2.2.9.Гамма - функция Эйлера. Изображение	

степенных функций.....	87
2.3. Обратное преобразование Лапласа.....	89
2.3.1 Применение вычетов для отыскания обратного преобразования Лапласа.....	91
2.3.2. Оригиналы рациональных изображений.....	92
2.4. Теорема об умножении изображений. Интеграл Дюамеля.....	93
2.5. Теоремы о разложении	97
2.6. Применения преобразования Лапласа.....	99
2.6.1. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэф- фициентами. Применение интеграла Дюамеля.....	99
2.6.2. Решение интегральных уравнений.....	103
2.7. Приложение теории функций комплексного перемен- ного и операционного исчисления технических задачах.....	104
2.7.1. Решение задач электротехники.....	104
2.7.2. Решение некоторых задач математической физики.....	110
2.7.3. Расчет электростатического поля двухпроводной линии	114
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	120
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	121

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна
Купцов Валерий Семенович

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В авторской редакции

Подписано к изданию 21.06.2016.

Объем данных 1,7 Мб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14