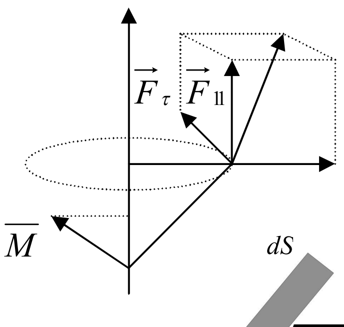
А.Г. Москаленко М.Н. Гаршина И.А. Сафонов
Т.Л. Тураева

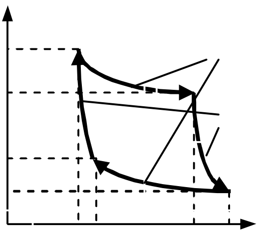
ФИЗИКА

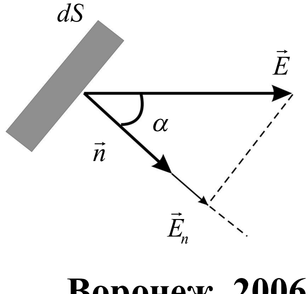
Часть 1

МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, ТЕРМОДИНАМИКА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебное пособие







Воронеж 2006

ГОУВПО “Воронежский государственный технический университет”

А.Г. Москаленко М.Н. Гаршина И.А. Сафонов Т.Л. Тураева

ФИЗИКА

Часть 1

МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, ТЕРМОДИНАМИКА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Издание второе, переработанное и дополненное

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2006

УДК 681.3;53

Физика: учеб. пособие. Ч.1.: Механика, молекулярная физика, термодинамика и электродинамика / А.Г.Москаленко, М.Н. Гаршина, И.А. Сафонов, Т.Л. Тураева. 2-е изд. перераб. и доп. Воронеж: ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2006. 172 с.

В учебном пособии кратко изложен теоретический материал, соответствующий учебной программе курса физики для заочной и ускоренной форм обучения по механике, молекулярной физике, термодинамике и электродинамике. Приведены примеры решения типовых задач с подробным описанием методов решения. По каждому из разделов предложен фонд контрольных заданий с таблицами вариантов контрольных работ. Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по техническим специальностям по дисциплине "Физика".

Предназначено для студентов технических специальностей 1 и 2 курсов очной, очно – заочной, заочной и ускоренной форм обучения.

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в текстовом редакторе MS WORD XP и содержится в файле: **Физика. Ч.1 для заочников. doc.**

Табл. 11. Библиогр.: 5 назв.

Научный редактор, профессор В.С. Железный

Рецензенты: кафедра физики Воронежского института МВД РФ (зав. кафедрой, проф. Ю.В. Спичкин); д-р физ. мат. наук, проф. Ю.Е. Калинин

ВВЕДЕНИЕ

Физика принадлежит к числу фундаментальных наук и без знания её основ невозможна успешная инженерная деятельность ни в одной области современной техники. Изучение физики позволяет также формировать интеллектуальные качества, необходимые специалисту для самостоятельной творческой работы. Однако, освоение общего курса физики требует от студента – заочника огромных усилий, длительной и кропотливой работы с различными учебниками и пособиями. Для оказания помощи в изучении первой части курса физики и написано данное пособие, включающее основы механики, механические колебания и волны, молекулярную физику и термодинамику, электродинамику и законы постоянного тока.

Теоретический материал излагается просто и доступно, основное внимание при этом обращается на физическую сущность основных понятий и законов. Наряду с теоретическими основами в пособии рассматриваются практические приёмы решения типовых задач. По каждому из разделов представлен фонд контрольных заданий с таблицами вариантов контрольных работ. В конце пособия в виде приложения даются некоторые сведения из математики, а также основные справочные данные.

Методические указания

Студенту заочнику рекомендуется:

1. Прослушать курс установочных лекций по физике. На основании полученных рекомендаций продолжить самостоятельное изучение теоретического материала, соответствующего рабочей программе по физике для данной специальности. В качестве основной литературы целесообразно использовать один из рекомендуемых учебников (см. список литературы). В качестве дополнитель-

ного материала можно использовать теоретическое введение в настоящем пособии.

2. После изучения очередного раздела теории внимательно ознакомиться с примерами решения типовых задач, представленных в данном пособии. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти основные формулы, прививает навыки практического применения теоретических знаний. Типовые задачи в пособии подобраны так, что содержат элементы задач, предлагаемых для контрольных работ. Разбор их решения несомненно поможет при выполнении контрольного задания.

3. Решение контрольных задач должно сопровождаться исчерпывающими, но краткими объяснениями. Прежде всего необходимо сделать чертёж, поясняющий содержание задачи. Затем указать основные законы и формулы, на которых базируется решение задачи. Числовые значения подставляются только в окончательную формулу, выражающую искомую величину. При этом все вычисления следует проводить в СИ, руководствуясь правилом приближённых вычислений. Наконец, при записи ответа численные значения следует представить в стандартном виде, т.е. как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень при основании десять. Например, вместо 1350 надо записать $1,35 \cdot 10^3$, вместо 0, 0386 записать $3,86 \cdot 10^{-2}$ и т.д.

4. Студент должен решить контрольные задачи того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его зачетки (шифра). Контрольные работы выполняются в обычной школьной тетради, (каждую работу в отдельной тетради), на обложке которой приводятся сведения об исполнителе по следующему образцу:

Контрольная работа по физике №1
студента группы РК-001
шифр 257320
Иванова Петра Ивановича

Контрольные работы, представленные без соблюдения указанных правил, а также работы, выполненные не по своему варианту, зачитываться не будут.

Если контрольная работа не зачтена, студент обязан представить её на повторную рецензию, включив в неё те задачи, решение которых оказалось неверным. Зачтённые контрольные работы предъявляются экзаменатору. Студент должен быть готов дать во время экзамена пояснения по существу решения задач, входящих в его контрольные работы.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика материальной точки и поступательного движения абсолютно твёрдого тела

Механика изучает законы движения материальных объектов и те причины, которые вызывают или изменяют это движение. Основные законы механики установлены для физических моделей, к которым относятся материальная точка и абсолютно твердое тело. ***Материальная точка*** **–** это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. ***Абсолютно твердое тело*** – это тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

Положение материальной точки в выбранной системе координат определяется радиус-вектором $\vec{r}$. Вектор $\vec{r}$ можно разложить на его составляющие по осям координат

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ , \qquad (1.1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные вектора, направленные вдоль координатных осей; *x, y, z* –координаты точки (рис.1.1).

При движении материальной точки по произвольной траектории ее положение описывается векторным кинематическим уравнением движения

$$\vec{r} = f(t),$$

либо тремя скалярными кинематическими уравнениями

$$x = f(t), \ y = f(t), \ z = f(t),$$

описывающими изменение координат точки со временем.

Если за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ точка переместилась из положения 1, определяемого радиус-вектором $\vec{r}_1$, в положение 2, определяемое радиус-вектором $\vec{r}_2$, то вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ называется **вектором перемещения** и характеризует изменение пространственного положения точки за данный промежуток времени. Отрезок же траектории, заключенный между точками 1 и 2, называется путем, пройденным за тот же промежуток времени Δt.

Для характеристики быстроты и направления движения материальной точки вводят понятие **скорости**. Отношение

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.2}$$

называется вектором средней скорости.

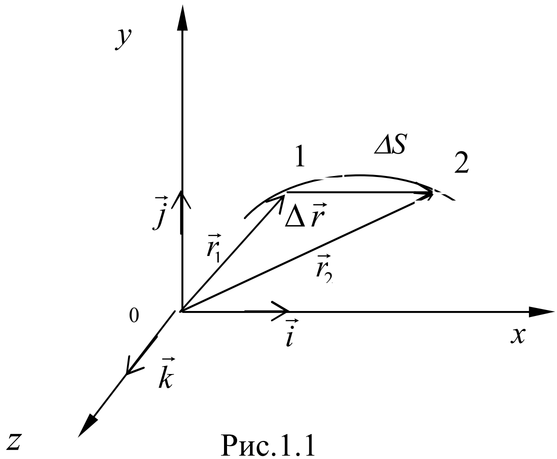


Рис.1.1

Вектор скорости в данный момент времени определяется первой производной радиус-вектора по времени

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{1.3}$$

Направление вектора скорости совпадает с направлением касательной к траектории движения в данной точке.

Разложение вектора $\vec{\upsilon}$ в декартовой системе координат имеет вид:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k} \qquad (1.4)$$

При этом, проекции скорости точки на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}, \qquad (1.5)$$

а модуль вектора скорости равен

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \qquad (1.6)$$

Модуль вектора скорости может быть также определен через производную пути по времени

$$\upsilon = |\ \vec{\upsilon}\ | = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \qquad (1.7)$$

Если известен вид функции $\upsilon\ (t)$, то путь, пройденный точкой за определенный промежуток времени, определяется интегрированием

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt. \qquad (1.8)$$

На графике зависимости скорости от времени $\upsilon = f\ (t)$ он выражается площадью заштрихованной фигуры (рис.1.2).

Быстроту изменения скорости материальной точки в пространстве характеризует **вектор ускорения:**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.9)$$

Ускорение, таким образом, есть первая производная вектора скорости по времени, или вторая производная радиус -вектора по времени.

Проекция ускорения на оси координат равны производным по времени от соответствующих проекций скорости или вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \qquad (1.10)$$

В общем случае, направление вектора $\vec{a}$ составляет некоторый угол α с направлением скорости $\vec{\upsilon}$, поэтому вектор $\vec{a}$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис.1.3).

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \cdot \qquad (1.11)$$

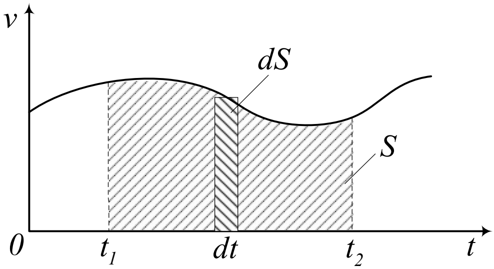


Рис.1.2

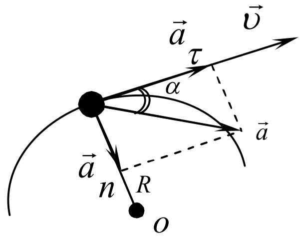


Рис.1.3

Вектор $\vec{a}_n$ совпадает с направлением нормали в данной точке траектории и называется ***нормальным*** *(центро-стремительным)* ***ускорением***.

Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости только по направлению. Его величина равна

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}, \qquad (1.12)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Вектор $\vec{a}_\tau$ называется ***тангенциальным (касательным) ускорением***, характеризующим изменение скорости по величине. Значение тангенциального ускорения определяется выражением

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (1.13)$$

Уравнение скорости и кинематическое уравнение для равнопеременного движения (равноускоренного и равнозамедленного) в векторной форме имеют следующий вид:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}\ t \ , \tag{1.14}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{\upsilon}_0 t + \vec{a} t^2 / 2 \ . \tag{1.15}$$

Классификация различных видов движений материальной точки представлена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

a_t	a_n	Вид движения
0	0	Равномерное прямолинейное
Const	0	Равнопеременное прямолинейное
0	const	Равномерное по окружности
$a_t(t)$	$a_n(t)$	Переменное криволинейное

<u>Поступательным движением</u> абсолютно твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, сохраняет неизменным направление в пространстве, т.е. перемещается параллельно самой себе (рис.1.4). По форме траектории поступательное движение может быть как **прямолинейным**, так и **криволинейным**.

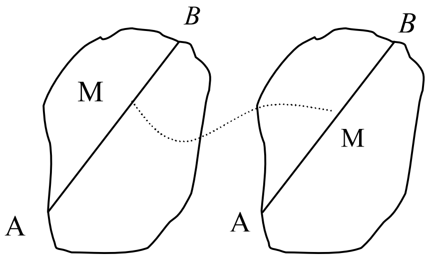


Рис.1.4

При поступательном движении все точки абсолютно твердого тела за один и тот же промежуток времени совершают одинаковые перемещения, скорости и ускорения всех точек тела одинаковы. Поэтому, чтобы описать поступательное движение абсолютно твердого тела, достаточно определить движение одной из его точек М, например, ***центра масс***.

1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения абсолютно твердого тела

Основными динамическими характеристиками материальной точки и поступательного движения абсолютно твердого тела являются **масса и импульс**.

Масса – скалярная величина, являющаяся мерой инертности тела. Под инертностью понимают свойство тела противиться изменению скорости под воздействием силы. В классической механике считается, что масса не зависит от скорости тела и является **величиной аддитивной,** т.е. масса системы равна сумме масс всех материальных точек, входящих в эту систему:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Центром масс, или центром инерции системы материальных точек называется точка С, радиус-вектор которой равен:

$$\overline{r_c} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i , \qquad (1.16)$$

где m_i и $\vec{r}_i$ - масса и радиус-вектор *i*-й материальной точки.

Скорость центра инерции

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i . \qquad (1.17)$$

Импульс (количество движения) тела – векторная физическая величина, являющаяся основной количественной мерой поступательного движения, равная произведению его массы на скорость

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}\,. \qquad (1.18)$$

Импульс системы материальных точек равен геометрической (векторной) сумме импульсов всех точек системы и, следовательно, равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции:

$$\vec{Đ}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = m\vec{\upsilon}_c \quad . \qquad (1.19)$$

В основе динамики материальной точки и поступательного движения твердого тела лежат три закона Ньютона.

Согласно **первому закону Ньютона** (закон инерции) ***тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.***

Тело, лишенное внешних воздействий, называется свободным, а его движение - инерциальным. Система отсчёта, связанная со свободным телом, называется **инерциальной системой отсчёта.**

Количественной мерой воздействия одного тела на другое является **импульс силы**, равный произведению силы на время ее действия $\vec{F}dt$. Поэтому, выражение $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\, dt = 0$ является ***условием инерциальности*** движения материальной точки.

Согласно **второму закону Ньютона, *изменение импульса тела равно импульсу всех сил действующих на тело, т.е.***

$$d\vec{P} = \vec{F}dt\,. \qquad (1.20)$$

Другая форма записи второго закона Ньютона имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,, \text{ или } \ m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,, \text{ или } \ m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,, \qquad (1.21)$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ - геометрическая сумма всех сил, действующих на тело.

Таким образом, выражения (1.20) и (1.21) представляют собой **основное уравнение динамики материальной точки и поступательного движения абсолютно твердого тела.**

Любое действие тел друг на друга имеет характер взаимодействия. Об этом говорит **третий закон Ньютона:** ***две материальные точки действуют друг на друга с силами, которые численно равны и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки, т. е.***

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad \left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|. \qquad (1.22)$$

Третий закон Ньютона позволяет перейти от динамики определенной материальной точки, к динамике произвольной механической системы. Из третьего закона следует, что в любой механической системе векторная сумма всех внутренних сил равна нулю. Векторная же сумма всех внешних сил, действующих на систему, называется **главным вектором внешних сил:**

$$\vec{F}_{внеш} = \sum \vec{F}_{i \ внеш},$$

где $\vec{F}_{i\,внеш}$- результирующая внешних сил, приложенных к i-й материальной точке. Поэтому

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{âí åø}} \quad \text{или} \quad m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{âí åø}}, \qquad (1.23)$$

где m – масса системы, $\vec{\upsilon}_{\text{с}}$ – скорость её центра инерции, $\vec{F}_{\text{âí åø}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - главный вектор всех внешних сил.

Таким образом, центр инерции механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

1.3.Кинематика вращательного движения абсолютно твёрдого тела

При вращательном движении твердого тела все его точки движутся по окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис.1.5). При этом радиус-векторы, проведенные из центров соответствующих окружностей к точкам тела за равные промежутки времени, поворачиваются на один и тот же угол. Угол поворота $\Delta\varphi$ любого из радиус-векторов определяет угловой путь, пройденный телом за данный промежуток времени Δt. Очень малые углы поворота можно рассматривать как векторы $d\vec{\varphi}$, совпадающие с осью, направление которых связано с направлением вращения тела правилом ***правого винта***. Такие векторы называются ***аксиальными***.

Быстроту изменения углового перемещения с течением времени определяет **угловая скорость**

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} . \qquad (1.24)$$

Угловая скорость является аксиальным вектором, который направлен вдоль оси вращения в соответствии с **правилом *правого винта.***

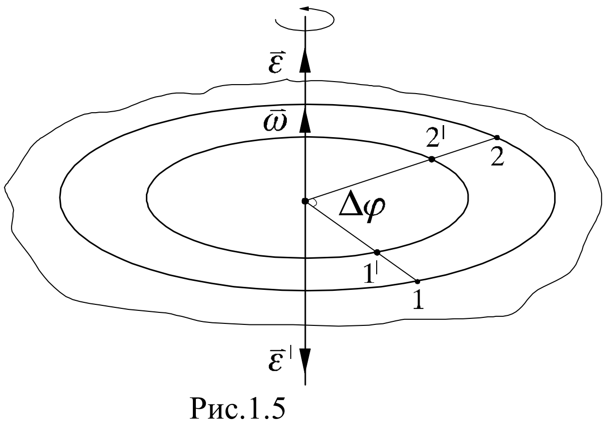


Рис.1.5

Быстроту изменения угловой скорости характеризует вектор **углового ускорения**

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \ . \qquad (1.25)$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ либо совпадает с направлением угловой скорости (при ускоренном вращении $\frac{d\omega}{dt}>0$) либо противоположно ему (при замедленном вращении $\frac{d\omega}{dt}<0$).

Угловой путь, угловая скорость и угловое ускорение при равноускоренном вращении связаны между собой формулами, аналогичными формулам равноускоренного прямолинейного движения

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t \ , \qquad (1.26)$$

$$\varphi = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z \mathrm{t}^2}{2}, \qquad (1.27)$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

Кроме угловых характеристик, движение каждой точки вращающегося тела характеризуют линейные величины υ, a, a_n, a_τ (рис.1.6).

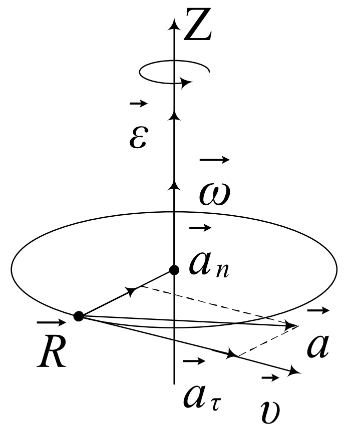


Рис.1.6

Между угловыми и линейными характеристиками движения существуют следующие соотношения:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}], \qquad \upsilon = \omega R . \tag{1.28}$$

$$a_\tau = \varepsilon R , \qquad a_n = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{\mathrm{R}} , \tag{1.29}$$

1.4. Динамика вращательного движения

Основными динамическими характеристиками абсолютно твердого тела при вращательном движении являются момент инерции и момент импульса.

1.4.1. Момент инерции и момент импульса

Моментом инерции тела относительно оси z является сумма произведений элементарных масс на квадраты расстояний от них до данной оси:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{z}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_{\mathrm{i}} \mathrm{r}_{\mathrm{i}}^2 ,. \tag{1.30}$$

где m_i и r_i - масса i-й точки и ее расстояние от оси.

Момент инерции есть мера инертности твердого тела к изменению его угловой скорости. Чем больше момент инерции, тем труднее изменить его угловую скорость. Следовательно, момент инерции тела при вращательном движении играет такую же роль, что и масса при поступательном движении.

Момент инерции тела является величиной **аддитивной**. Вычисление момента инерции тела производится по формулам

$$I_z = \int_0^m r^2 dm = \int_0^v \rho r^2 dV , \tag{1.31}$$

где dm *и* dV – масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии r от оси z, ρ – плотность тела в данной точке.

Моменты инерции некоторых однородных тел правильной геометрической формы относительно оси z, проходящей через центр массы тела, приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Твердое тело	Ось	Момент инерции
Кольцо радиусом R	Совпадает с осью кольца	$I = m R^2$
Сплошной цилиндр радиусом R	Совпадает с осью цилиндра	$I = \frac{1}{2} m R^2$
Шар радиусом R	Проходит через центр шара	$I = \frac{2}{5} m R^2$
Тонкий стержень длиной l	Перпендикулярна стержню, проходит через его центр	$I = \frac{1}{12} m l^2$

Момент инерции I_x тела относительно **произвольной оси** равен сумме момента инерции тела I_c относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс C, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между этими осями **(теорема Штейнера):**

$$I_x = I_c + md^2. \qquad (1.32)$$

Момент импульса является основной количественной мерой вращательного движения тела. Различают момент импульса тела относительно неподвижной точки (полюса) и относительно неподвижной оси.

Моментом импульса материальной точки относительно точки *O* называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из полюса O в место нахождения материальной точки, на импульс $\vec{P}$ этой точки (рис. 1.7):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{P}] = m\left[\vec{r}, \vec{\upsilon}\right], \qquad (1.33)$$

где m и $\vec{\upsilon}$ – масса и скорость материальной точки.

Вектор $\vec{L}$ перпендикулярен плоскости в которой расположены векторы от $\vec{r}$ и $\vec{P}$, а его направление определяется правилом правого винта: при вращении рукоятки буравчика от $\vec{r}$ к $\vec{P}$, его поступательное движение совпадает с направлением $\vec{L}$ (рис. 1.7)

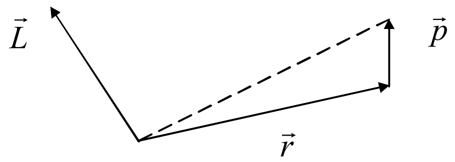


Рис.1.7

Модуль момента импульса равен:

$$L = r\, p\, sin\alpha,$$

где α - угол между $\vec{r}$ и $\vec{P}$**.**

Моментом импульса системы относительно неподвижной точки О называется геометрическая сумма моментов импульса относительно той же точки О всех материальных точек системы

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{r_i}, \overline{p}_i\right] , \tag{1.34}$$

где от $\vec{r}_i$ к $\vec{P}_i$, - радиус-вектор и импульс i-й материальной точки, а n – общее число этих точек в системе.

Моментом импульса системы относительно неподвиж - ной оси z называется величина L_z, равная проекции на эту ось вектора L момента импульса системы относительно какой либо точки О, принадлежащей этой оси:

$$\mathrm{L_z} = \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{r_i}, \overline{P_i}\right]_{\mathrm{z}} . \tag{1.35}$$

Выбор положения точки О на оси z не влияет на численное значение L_z. В частности, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ϖ, то его момент импульса относительно этой оси:

$$L_z = I_z\ \omega_z. \qquad (1.36)$$

Здесь I_z – момент инерции тела относительно оси z, а ω_z - проекция вектора $\vec{\omega}$ на ось z. Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость.

1.4.2. Момент силы. Основной закон динамики вращательного движения

Момент силы характеризует ее вращательное действие. Различают момент силы относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси.

Моментом силы $\vec{F}$ **относительно *точки*** O называется векторная величина $\vec{M}$ равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \qquad (1.37)$$

Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его направление определяется также правилом правого винта (рис.1.8)

Модуль момента силы равен

$$M = F\, r\, sin\alpha = F\, l, \qquad (1.38)$$

где α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$, $l = r\ sin\alpha$ – плечо силы $\vec{F}$, определяемое длиной перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы.

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки O оси Z. Значение M_z не зависит от выбора положения точки O на оси Z (рис.1.9). Действительно, разложим вектор силы на три составляющие: $\vec{F}_{||}$ – параллельную оси z, $\vec{F}_R$ –

перпендикулярную оси z, $\vec{F}_\tau$ – касательную к окружности радиуса R с центром на оси z. Вращательное действие оказывает только составляющая $\vec{F}_\tau$, поэтому момент силы относительно оси будет равен

$$M_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z = r\, F_\tau \cos\,\alpha\; = R\, F_\tau\,. \qquad (1.39)$$

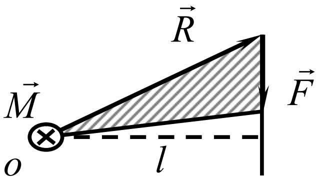


Рис. 1.8

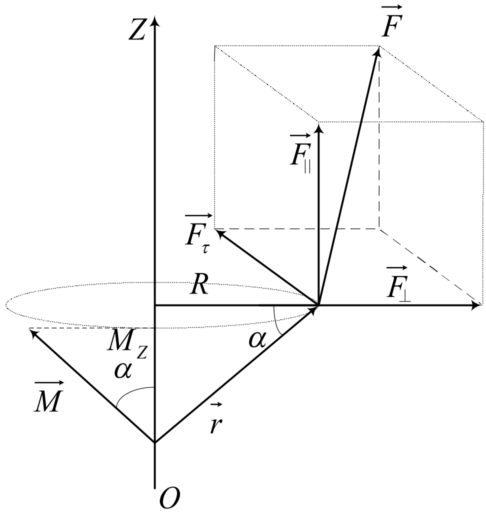


Рис. 1.9

Для установления закона изменения момента импульса материальной точки продифференцируем выражение $\overline{L} = \left[\overline{r}, \overline{P}\right]$ по времени:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{P}}}{\mathrm{dt}}] + [\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}}, \vec{P}].$$

Учитывая, что $[\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}}, \vec{P}] = [\vec{\upsilon}, \mathrm{m}\vec{\upsilon}] = 0$, а $[\vec{r}, \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{P}}}{\mathrm{dt}}] = [\vec{r}, \vec{\mathrm{F}}] = \overrightarrow{\mathrm{M}}$,

получим окончательно

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{èëè} \quad d\vec{L} = \vec{M}dt\ . \qquad (1.40)$$

Таким образом, **скорость изменения момента импульса *частицы со временем, равна суммарному моменту сил, действующих на частицу***.

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *Z*, скорость изменения момента импульса тела L_z определяется действием результирующего момента всех внешних сил, относительно данной оси, т.е.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{âí åø}}\ , \tag{1.41}$$

учитывая, что, $L_z = I_z\omega$ получим

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z^{внеш}, \tag{1.42}$$

или

$$I_z\varepsilon = M_z^{внеш}. \tag{1.43}$$

Уравнения (1.41) - (1.43) представляют собой **уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси**.

Из последней формулы видно, что чем больше момент инерции тела, тем меньшее угловое ускорение оно приобретает под действием одного и того же момента внешних сил.

В самом общем случае, движение свободного твердого тела удовлетворяет следующим двум дифференциальным уравнениям:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}^{внеш} \quad и \quad I_c\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_c^{внеш}.$$

Здесь m – масса тела, I_c – момент инерции тела относительно центра масс, $\vec{F}$ - главный вектор внешних сил, $\vec{M}_c^{внеш}$ - главный момент внешних сил относительно точки С.

Первое уравнение описывает поступательное движение свободного тела со скоростью его центра масс. Второе уравнение описывает вращение твердого тела вокруг его центра масс.

1.5.Механическая энергия, работа и мощность

Энергией называется ***скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения и типов взаимодействия материальных объектов***. Механическая энергия зависит от относительного расположения взаимодействующих тел и скорости их движения. Изменение механической энергии тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Для количественного описания процесса обмена энергией между взаимодействующими телами в механике вводят понятие работы.

1.5.1 Механическая работа при поступательном движении

Элементарная работа силы $\vec{F}$, на малом перемещении $d\vec{r}$, определяется выражением

$$\delta A = FdS\cos\alpha = F_\tau dS\ , \tag{1.44}$$

где $dS = \left|d\bar{r}\right|$, $F_\tau = F\cos\alpha$ - проекция силы на направление перемещения $d\vec{r}$, α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$.

Выражение (1.44) можно представить в виде скалярного произведения

$$\delta A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz\ , \tag{1.45}$$

Работа, совершаемая силой $\vec{F}$ на конечном участке траектории точки ее приложения, равна алгебраической сумме работ на всех малых частях этого участка, т.е. выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_L \left(\overline{F}, d\bar{r}\right) = \int_0^S F_\tau dS\ . \tag{1.46}$$

Для вычисления этого интеграла необходимо знать зависимость F_τ от S вдоль данной траектории L. Если эта зависимость представляется графически (рис.1.10), то работа измеряется заштрихованной на данном рисунке площадью.

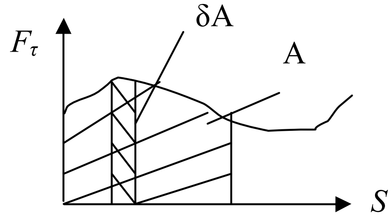


Рис.1.10

Силы, совершающие работу, принято подразделять на **консервативные (потенциальные) и неконсервативные (диссипативные**). Силы являются консервативными, если их работа не зависит от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое, а полностью определяется начальной и конечной конфигурацией взаимодействующих тел. Соответственно, работа консервативных тел вдоль любой замкнутой траектории L равна нулю, т.е.

$$\oint (\vec{F}d\vec{r}) = 0. \qquad (1.47).$$

Все силы, не удовлетворяющие этому условию, называют неконсервативными. К числу неконсервативных сил относятся, например, силы трения и сопротивления.

Для характеристики работы, совершаемой за единицу времени, в механике пользуются понятием мощности.

Мощностью называется скалярная физическая величина, равная отношению элементарной работы δA к тому промежутку времени dt, в течение которого эта работа совершается

$$N = \frac{dA}{dt}. \qquad (1.48)$$

При поступательном движении твердого тела

$$. \quad N = \frac{(\vec{F}, d\vec{r})}{dt} = (\vec{F}, \vec{\upsilon}) = F_\tau \upsilon. \qquad (1.49)$$

1.5.2. Кинетическая и потенциальная энергия

В классической физике **полную механическую энергию** системы можно представить в виде двух слагаемых

$$E = T(\upsilon) + U(r) \,. \qquad (1.50)$$

Часть механической энергии $T(\upsilon)$, зависящая от скорости движения тел в пространстве, называется **кинетической** энергией. Другая часть механической энергии $U(r)$, зависящая от взаимного расположения тел т.е. от конфигурации системы, называется **потенциальной** энергией.

В классической механике выражение для кинетической энергии материальной точки и поступательного движения абсолютно твердого тела имеет вид

$$T = m\,\upsilon^2/2 \,. \qquad (1.51)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то его кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить, т.е.

$$T = \sum \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}$$

Поскольку линейная скорость i- й точки $\upsilon_i = \omega r_i$, где r_i – расстояние от этой точки до оси вращения, а ω - угловая скорость тела, то

$$T = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \qquad (1.52)$$

В данной формуле I_z есть момент инерции тела относительно оси вращения. Следовательно, кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется по аналогии с кинетической энергией поступательного движения, только вместо массы фигурирует момент инерции, а вместо линейной скорости – угловая.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде двух движений – поступательного со скоростью, равной скорости движения центра масс тела υ_c, и вращения с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс. При этом полная кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \tag{1.53}$$

где I_c – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс; υ_c – скорость центра масс.

Для получения однозначной зависимости потенциальной энергии системы от ее конфигурации $U(x, y, z)$, необходимо выбрать, так называемую, нулевую конфигурацию (нулевой уровень), в котором потенциальную энергию системы условно считают равной нулю. Потенциальная энергия системы в произвольном состоянии равна работе, совершаемой всеми действующими на систему консервативными силами при переводе системы из рассматриваемого состояния в состояние соответствующее нулевой конфигурации. Таким образом, убыль потенциальной энергии равна работе консервативных сил

$$\delta A = -dU \quad или \quad A_{12} = -\Delta U. \tag{1.54}$$

Формула (1.54) дает возможность найти выражение потенциальной энергии U для любого стационарного поля консервативных сил. Для этого достаточно вычислить работу, совершаемую консервативными силами поля между двумя состояниями, и представить ее в виде убыли потенциальной энергии. Конкретный вид функции $U(x,y,z)$ зависит от характера силового взаимодействия. Так, потенциальная энергия в поле силы тяжести равна $U = mgh$, а потенциальная энергия упруго деформированного тела (например, пружины) равна $U = kx^2/2$, где k - коэффициент упругости, а x - абсолютная деформация.

Зная вид функции $U(x,y,z)$ можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля.

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = -\vec{\nabla}U \quad , \qquad (1.55)$$

где $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ – частные производные от функции *U(x,y,z),*

$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – оператор набла.

Выражение $\vec{\nabla}U$ читается как **"градиент *U*".** Таким образом, консервативная сила, действующая на частицу, равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком.

1.5.3. Работа и мощность при вращательном движении

Изменение кинетической энергии механической системы равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему

$$dT = \delta A_{внеш} + \delta A_{внутр} \, . \qquad (1.56)$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси элементарная работа всех внешних сил, действующих на твердое тело, равна приращению только кинетической энергии, так как его потенциальная энергия при этом не меняется. Следовательно

$$dA = dT = d\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right) = I_z\,\omega\, d\omega .$$

С учетом того, что $I_z\, d\omega = M_z\, dt$, получим

$$dA = M_z\,\omega\, dt = M_z\, d\varphi \; . \qquad (1.57)$$

Полная работа внешних сил при повороте твердого тела на некий угол φ равна:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi \; . \qquad (1.58)$$

В случае, если $M_z = const$, то последнее выражение упрощается:

$$A = M_z\,\varphi \, . \qquad (1.59)$$

Таким образом, работа внешних сил при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси определяется действием момента M_z этих сил относительно данной оси.

При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси мощность определяется выражением

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega . \qquad (1.60)$$

1.6. Законы сохранения

Любое тело (или совокупность тел) представляет собой, по существу, систему материальных точек. Состояние системы характеризуется одновременным заданием координат и скоростей всех ее частиц. При движении системы ее состояние изменяется со временем. Существуют, однако, такие функции координат и скоростей, образующих систему частиц, которые способны сохраняться во времени. К ним относятся энергия, импульс и момент импульса.

В соответствии с этим имеют место **три закона сохранения** – ***закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса,*** которые выполняются в замкнутых системах.

Система называется замкнутой, если она не обменивается с другими телами, не входящими в эту систему, соответственно энергией, импульсом, моментом импульса. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса можно получить исходя из основных уравнений динамики, однако, следует иметь в виду, что эти законы обладают гораздо большей общностью, чем законы Ньютона, и должны рассматриваться как самостоятельные фундаментальные принципы физики, относящиеся к основным законам природы.

Законы сохранения являются эффективным инструментом исследования. С помощью законов сохранения можно без решения уравнения движения получить ряд важнейших данных о протекании механических процессов.

1.6.1. Закон сохранения импульса

Импульс системы $\vec{P}$ равен векторной сумме импульсов ее отдельных частиц, т.е.

$$\sum_i \vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i \ , \qquad (1.61)$$

где $\vec{P}_i$ – импульс i-й частицы.

Найдем физическую величину, которая определяет изменение импульса системы. Для этого возьмём производную от выражения (1.61) по времени

$$\sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_i \frac{d(m_i \vec{\upsilon}_i)}{dt}. \qquad (1.62)$$

Согласно основному уравнению динамики

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_k \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i \ , \qquad (1.63)$$

где $\vec{f}_{ik}$ – силы, действующие на i -ю частицу со стороны других частиц системы (внутренние силы); $\vec{F}_i$ – сила, действующая на ту же частицу со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему (внешние силы).

Подставив последнее выражение в уравнение (1.62), получим

$$\sum_i \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \sum_k \vec{f}_{ik} + \sum_i \vec{F}_i \ . \qquad (1.64)$$

Двойная сумма – это сумма всех внутренних сил. В соответствии с третьим законом Ньютона $\vec{f}_{ik} + \vec{f}_{ki} = 0$, а значит, равна нулю и векторная сумма всех внутренних сил:

$$\sum_i \sum_k \vec{f}_{ik} = 0 \ .$$

В результате уравнение (1.64) принимает следующий вид:

$$\sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i \ внеш} \ , \qquad (1.65)$$

где $\sum \vec{F}_i$ – результирующий вектор всех внешних сил.

Из уравнения (1.65) следует, что изменение вектора импульса системы (тела) равно результирующему вектору импульса внешних сил.

$$\sum_i d\vec{P}_i = \sum_i \vec{F}_i dt \ . \tag{1.66}$$

Согласно этому уравнению, импульс системы может изменяться под действием только импульса внешних сил. Импульсы внутренних сил не могут изменить импульс системы. Отсюда непосредственно вытекает условие замкнутости системы ($\sum \vec{F}_{i\ внеш.} dt = 0$) и закон сохранения её импульса**.**

Если результирующий вектор внешних сил, действующих на систему тождественно равен нулю, то импульс системы остается постоянным.

$$\sum_i d\vec{P}_i = 0 \ , \qquad \sum_i \vec{P}_i = const,$$

1.6.2. Закон сохранения момента импульса

Момент импульса произвольной системы относительно оси Z определяется как сумма моментов импульсов ее частиц

$$L_z = \sum_i L_{iz} \ , \tag{1.67}$$

где L_{iz} – момент импульса относительно оси Z для i-й частицы системы.

Возьмём производную от уравнения (1.67) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \frac{dL_{iz}}{dt} . \tag{1.68}$$

Согласно основному закону динамики для вращательного движения производная dL_{iz}/dt равна моменту всех внутренних и внешних сил, действующих на i- ю частицу, т.е.

$$\frac{dL_{iz}}{dt} = M_{iz} + M_{iz} . \qquad (1.69)$$

Тогда

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M'_{iz} + \sum_i M_{iz} . \qquad (1.70)$$

Суммарный момент всех внутренних сил всегда равен нулю, поскольку моменты сил каждой пары взаимодействия равны по модулю и противоположны по направлению, т.е. уравновешивают друг друга. В результате последнее уравнение принимает вид

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{iz_{внеш.z}} , \qquad (1.71)$$

где $\sum_i M_{i_{внеш.z}}$ – суммарный момент всех внешних сил относительно оси Z .

Из уравнения (1.71) получим

$$dL_z = \sum_i M_i dt_{внеш.z} . \qquad (1.72)$$

Таким образом, момент импульса системы относительно некоторой оси Z может изменяться под действием только суммарного момента импульса внешних сил относительно той же оси**.** Отсюда непосредственно вытекает условие замкнутости вращающейся системы $\sum M_{внеш.z} dt = 0$ и закон сохранения момента импульса**: если суммарный момент импульса внешних сил относительно неподвижной оси тождественно равен нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется,** т.е,

$$dL_z = 0 \quad \text{и} \quad L_z = const .$$

1.6.3. Закон сохранения механической энергии

Пусть движущаяся частица обладает кинетической энергией *T*. Изменение кинетической энергии может быть обусловлено работой как консервативных, так и неконсервативных сил:

$$\Delta T = A_{\text{í åêî í ñ.}} + A_{\text{êî í ñ.}}\,. \qquad (1.73)$$

Работа, совершаемая консервативной силой, равна убыли потенциальной энергии, т.е.

$$A_{\text{êî í ñ}} = -\Delta U \quad .$$

С учетом этого

$$\Delta T = A_{\text{í åêî í ñ}} - \Delta U \ , \qquad \text{или}$$

$$\Delta(T+U) = \Delta E_{\text{ì åõ}} = A_{\text{í åêî í ñ.}}\,, \qquad (1.74)$$

где $E_{мех.} = T + U$ – полная механическая энергия частицы,

а $\Delta E_{\boldsymbol{мех.}}$ - ее изменение.

Таким образом, изменение полной механической энергии частицы обусловлено работой только неконсервативных сил. Если на частицу не действуют неконсервативные силы $dA_{неконс} = 0$, то полная механическая энергия частицы остается неизменной:

$$\Delta E_{\text{ì åõ}} = 0 \qquad \text{и} \qquad E_{мех} = T + U = const\ . \qquad (1.75)$$

Этот вывод можно обобщить на систему, состоящую из любого числа взаимодействующих тел. Только в случае системы тел необходимо иметь в виду следующее: неконсервативные силы, действующие на тело системы, могут быть и внутренними, и внешними. Поэтому для того, чтобы сохранилась механическая энергия системы тел, необходимо, чтобы система была замкнутой (не действуют внешние неконсервативные силы) и консервативной (не действуют внутренние неконсервативные силы).

Таким образом**, полная механическая энергия замкнутой консервативной системы есть величина постоянная.** В этом заключено существо одного из основных законов механики – закона сохранения и превращения механической энергии.

Если внутри замкнутой системы действуют неконсервативные силы, то механическая энергия такой системы постепенно уменьшается, превращаясь в другие, немеханические формы энергии. Такие замкнутые неконсервативные системы, механическая энергия которых убывает, называются **диссипативными.**

В принципе любая реальная механическая система диссипативна, ибо в любой системе всегда действуют какие-либо неконсервативные силы, например силы трения, силы сопротивления, пластические деформации и т.д., приводящие к диссипации энергии (латинское слово «диссипация» означает рассеяние).

Однако, **согласно универсальному закону сохранения энергии, *в любой замкнутой системе убыль механической энергии в точности равна приращению энергии других, немеханических, видов энергии,*** т.е. полная энергия различных форм движения в такой системе сохраняется неизменной.

В заключение, проведем сопоставление основных формул кинематики и динамики поступательного движения и вращения твердого тела относительно неподвижной оси.

Таблица 1.3

Поступательное движение	Вращательное движение
$\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d^2 \underline{r}}{dt^2}$ $S = \int_0^t \upsilon(t)dt$ $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$, *если* $\vec{a} = const$ $S_x = \upsilon_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$, $a = const$	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ $\varphi = \int_0^t \omega(t)dt$ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t$, *если* $\varepsilon = const$ $\varphi_z = \omega_{0z}t + \dfrac{\varepsilon_z t^2}{2}$, $\varepsilon = const$
m $\vec{F}$ $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$ $d\vec{P} = \vec{P}dt$ $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ $\delta A = F_\tau dS$ $T = \dfrac{mv^2}{2}$ $N = F_\tau v$	$I = \int_0^m r^2 dm = \int_0^V \rho r^2 dV$ $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ $\vec{L} = I\vec{\omega}$ $d\vec{L} = \vec{M}dt$ $I_z \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} M_{zi}$ $dA = M_z d\varphi$ $T = \dfrac{I\omega^2}{2}$ $N = M_z \omega$

1.7. Механика жидкостей и газов

1.7.1. Идеальная жидкость. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли

В гидроаэромеханике используется единый подход к изучению жидкостей и газов. Жидкости и газы рассматривают как **сплошные среды**, не вдаваясь в их молекулярное строение. Жидкость считается **несжимаемой**, поскольку ее плотность мало зависит от давления. Однако, как показывают расчеты, при движении газов со скоростями, намного меньшими скорости звука в этой среде, их также можно с достаточной точностью считать несжимаемыми. Движение жидкости (газа) называется **течением**, а совокупность движущихся частиц жидкости – **потоком**.

Графически движение жидкости изображается с помощью **линий тока**, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис.1.10.а). Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют **трубкой тока** (рис.1.10.в).

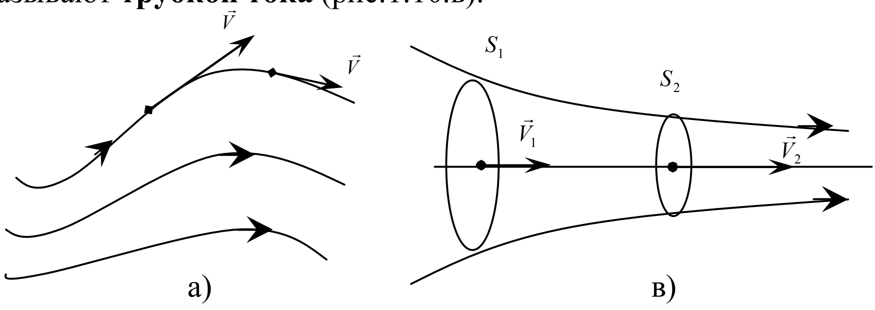


Рис.1.10

Течение жидкости называется **стационарным** (установившимся), если значение скоростей в каждой ее точке со временем не меняется. Для стационарного течения несжимаемой жидкости справедливо соотношение

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 = const \quad . \tag{1.76}$$

Следовательно, при стационарном течении произведение скорости течения на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная. Это соотношение называется **уравнением неразрывности.**

Жидкость, у которой полностью отсутствуют силы внутреннего трения, называется **идеальной**. Течение идеальной жидкости не сопровождается диссипацией энергии.

Применение закона сохранения механической энергии к установившемуся течению жидкости позволяет получить соотношение

$$\boxed{\frac{\rho V^2}{2} + \rho g h + p = const}\ . \qquad (1.77)$$

Это уравнение называется **уравнением Бернулли**.

Величина p в формуле называется **статическим давлением**, величина $\frac{\rho V^2}{2}$ - **динамическим давлением** (напором), а величина ρgh - **гидростатическим давлением.** Для горизонтальной трубки выражение (1.57) принимает вид

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = const\ , \qquad (1.78)$$

где $p_0 = p + \frac{\rho V^2}{2}$ - **полное давление.**

Из формул (1.76) и (1.78) следует, что ***при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в широких местах, т.е. там, где скорость меньше.***

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого имеется малое отверстие (рис.1.11).

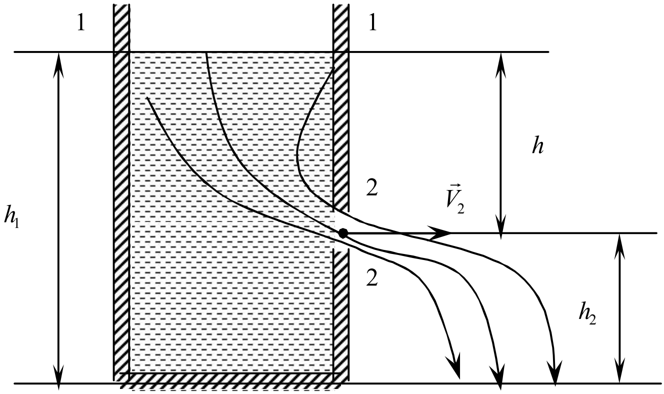


Рис.1.11.

Напишем уравнение Бернулли для сечений на уровне h_1 и h_2:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 . \qquad (1.79)$$

Так как давления p_1 и p_2 в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т.е. $p_1 = p_2$, то уравнение будет иметь вид

$$\frac{V_1^2}{2} + g h_1 = \frac{V_2^2}{2} + g h_2 . \qquad (1.80)$$

Из уравнения неразрывности (1.76) следует, что $V_2/V_1 = S_1/S_2$, где S_1 и S_2 - площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если $S_1 >> S_2$, то $V_2^2 = 2g(h_2 - h_1) = 2gh$, или

$$V_2 = \sqrt{2gh} . \qquad (1.81)$$

1.7.2. Вязкость. Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

Идеальная жидкость, т.е. жидкость без внутреннего трения, является абстракцией. Всем реальным жидкостям и газам присуще **внутреннее трение**, называемое **вязкостью.**

Вязкость – ***это свойство реальных жидкостей обмениваться импульсами при перемещении одной части жидкости относительно другой***. Вязкость проявляется, в частности, в том, что возникшее в жидкости или газе течение после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно прекращается.

Рассмотрим установившееся медленное течение жидкости в круглой трубе (рис.1.12). Ее скорость меняется от нуля в непосредственной близости к стенкам сосуда до максимума на оси трубы. Жидкость оказывается как бы разделенной на слои, которые скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Такое течение называется **ламинарным** (слоистым).

Между слоями жидкости действуют силы внутреннего трения, удовлетворяющие соотношению

$$F = \eta \left| \frac{\Delta \upsilon}{\Delta n} \right| S \ , \qquad (1.82)$$

где η - коэффициент динамической вязкости, зависящий от природы и состояния жидкости; $\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta h}$ - градиент скорости, показывающий, как быстро изменяется скорость в перпендикулярном направлении движения слоев; S - площадь слоя.

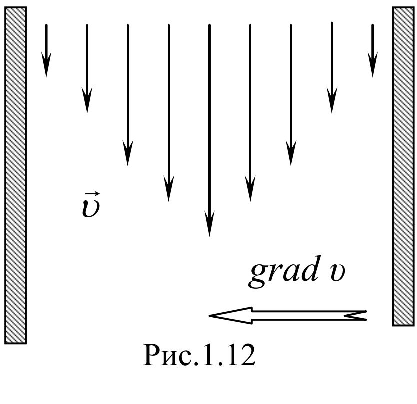


Рис.1.12

Единица вязкости – **паскаль-секунда** ($[\eta] = Па \cdot с$). ***Это вязкость такой среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости, равном единице, возникает сила внутреннего трения в 1 Н на 1 м²* *поверхности касания слоев*.**

Вязкость зависит от температуры. У жидкостей вязкость уменьшается с увеличением температуры, а у газов, наоборот, увеличивается. Это указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. С увеличением скорости характер течения жидкости резко меняется. Происходит интенсивное вихревое образование и перемешивание жидкости (газа). Такое течение называется **турбулентным** (вихревым). Характер течения определяется значением безразмерной величины, числа **Рейнольдса**

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\eta}, \tag{1.83}$$

где l - характерный размер сечения.

При малых Re течение носит ламинарный характер. Начиная с некоторого значения Re, называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер.

Один из методов определения вязкости основан на измерении скорости падения в жидкости медленно движущихся небольших тел сферической формы.

1.8. Механика деформируемых тел

1.8.1. Идеально упругое тело. Упругие напряжения

Все реальные тела деформируются. Под действием приложенных сил они меняют свою форму или объем. Такие изменения называются ***деформациями***. Различают два предельных случая: ***деформации упругие*** и ***деформации пластические.***

Упругими называются деформации, исчезающие после прекращения действия приложенных сил.

Пластическими деформациями называются такие деформации, которые сохраняются в теле, по крайней мере частично, и после прекращения действия приложенных сил.

Ограничимся изучением только упругих деформаций, считая тела ***идеально упругими***. Такая идеализация возможна лишь для очень малых деформаций. Для них существует линейная зависимость между действующими силами и вызывающими ими деформациями, подчиняющимися закону Гука. Рассмотрим произвольно деформированное тело (рис. 1.13).

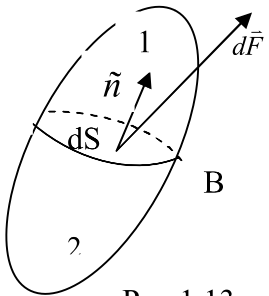


Рис.1.13

Мысленно разделим его на две части: тело (1) и тело (2), граничащие между собой вдоль поверхности AB. Результирующая всех внешних сил, приложенных к каждой из этих двух частей, уравновешивается упругой силой $F_{упр}$, действующей на рассматриваемую часть со стороны другой.

Физическую величину, численно равную упругой силе $dF_{упр}$, приходящуюся на единицу площади сечения тела, называют ***напряжением σ:***

$$\sigma = \frac{dF_{упр}}{dS} . \tag{1.84}$$

Напряжение называют ***нормальным*** $\sigma_н$, если сила направлена по нормали к площадке dS, и ***касательным*** σ_τ, если она направлена по касательной к этой площадке.

Согласно экспериментально установленному **Гуком закону**, ***напряжение упруго деформированного тела прямо пропорционально его относительной деформации***:

$$\boxed{\sigma = K_x \frac{\Delta x}{x}}\,, \tag{1.85}$$

где K_x - модуль упругости, а Δx - абсолютная величина изменения x. Величина K_x определяется свойствами материала, из которого изготовлено тело. В зависимости от вида деформации модуль упругости имеет различные наименования, обозначения и численные значения.

Любая сложная деформация твердого тела может быть представлена как результат наложения более простых деформаций. Рассмотрим ***основные виды деформаций***: **одноосное растяжение (сжатие); сдвиг; кручение.**

.

1.8.2 Одноосное растяжение и сжатие

Возьмём однородный стержень (рис.1.14) и приложим к его основаниям растягивающие (или сжимающие) усилия. Пусть l_o - длина недеформированного стрежня, а S - его сечение. После приложения силы F его длина получает приращение Δl и делается равной $\boldsymbol{l = l_o + \Delta l}$. Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{lo}\,, \tag{1.86}$$

называется **относительным удлинением стержня**. В случае растягивающих сил оно положительно, в случае сжимающих сил – отрицательно.

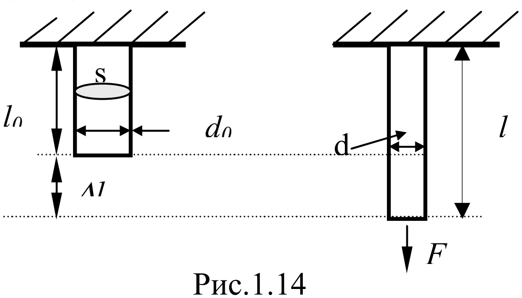


Рис.1.14

В любом поперечном сечении деформированного стержня возникнут нормальные упругие напряжения

$$\sigma_n = \frac{F}{S} . \tag{1.87}$$

Согласно формуле (1.85) **закон Гука для деформации растяжения (сжатия) имеет вид**

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} , \tag{1.88}$$

где E - модуль Юнга.

Модуль Юнга зависит только от материала стержня и его физического состояния. При $\Delta l = l - l_0 = l_0$ $\varepsilon = 1$ и $E = \sigma_n$. Поэтому, **модуль Юнга *равен нормальному напряжению, которое возникло бы в образце при увеличении его длины в 2 раза, если бы при такой деформации выполнялся закон Гука***. Однако при таких больших деформациях закон Гука не выполняется и либо образец разрушается, либо нарушается пропорциональность между деформацией и силой.

Под действием растягивающей или сжимающей силы изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня. Характеристикой этого изменения является относительное поперечное сжатие (растяжение)

$$\varepsilon_i = \frac{d - do}{do} = \frac{\Delta d}{do} , \tag{1.89}$$

где d - поперечный размер образца.

При растяжении $\varepsilon < 0$, при сжатии $\varepsilon > 0$. Отношение

$$\boxed{\mu = \frac{\varepsilon_{\text{i}}}{\varepsilon}} , \tag{1.90}$$

называется **коэффициентом Пуассона**.

Для больших изотропных материалов он близок к 0,25. Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через E и μ.

Деформированное тело обладает запасом потенциальной энергии*. Эта энергия называется* ***упругой****.* Она равна работе, затраченной на деформацию тела.

Приложим к стержню растягивающую силу $f(x)$ и будем непрерывно увеличивать ее от начального значения $f=0$ до конечного значения $f=F$. При этом удлинение будет меняться от $x = 0$ до конечного значения $x = \Delta l$. По закону Гука

$$f = \frac{ES}{l} x . \tag{1.91}$$

Вся работа совершаемая при деформации, пойдет на приращение потенциальной энергии, поэтому

$$U = A = \int_0^{\Delta l} f(x) dx = \frac{E\varepsilon^2}{2} V . \tag{1.92}$$

Объемная плотность упругой энергии *W*, т.е. энергия, приходящаяся на единицу объема растянутого (сжатого) стержня, равна

$$\boxed{W = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}}. \tag{1.93}$$

1.8.3. Сдвиг

Сдвигом называют такую деформацию твердого тела, при которой все его плоские слои, параллельные некоторой плоскости, называемой **плоскостью сдвига**, смещаются параллельно друг другу (рис.1.15,а). Сдвиг происходит под действием касательной силы F, приложенной к грани ВС, параллельной плоскости сдвига. Грань АД параллельная ВС, закреплена неподвижно (рис.1.15,б). При малом сдвиге:

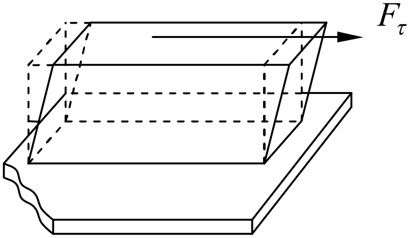
$$\gamma \approx tg\gamma = \frac{CC'}{CД}, \tag{1.94}$$

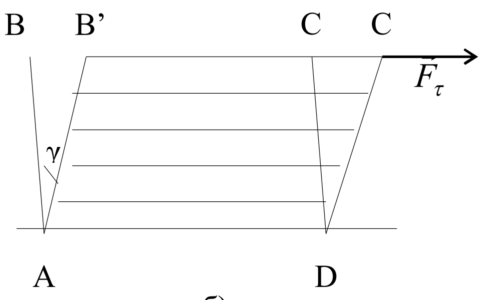
где Δx = СС’ - ***абсолютный сдвиг***, а γ - *угол сдвига*, называемый также ***относительным сдвигом***.

Закон Гука для деформации сдвига имеет вид

$$\boxed{\sigma_\tau = G\gamma}, \tag{1.95}$$

где σ_τ =F/S – скалывающее, или ***тангенциальное, напряжение***, G - модуль сдвига.





а) б)

Рис.1.15

Модуль сдвига *численно равен касательному напряжению, которое возникло бы в образце при относительном сдвиге, равном единице, если бы в этом случае выполнялся закон Гука.*

Между модулем сдвига, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона существует соотношение

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad . \tag{1.96}$$

Объемная плотность энергии упругой деформации при сдвиге, как и при растяжении, прямо пропорциональна квадрату напряжения и обратно пропорциональна модулю упругости:

$$\boxed{W = \frac{\sigma_\tau^2}{2G}}. \tag{1.97}$$

1.8.4. Кручение

Возьмем однородную проволоку, закрепим ее верхний конец, а к нижнему концу приложим закручивающие силы, создающие вращающий момент M. В результате этого каждый радиус нижнего основания ее повернется вокруг продольной оси на угол φ. Такая деформация называется **кручением**.

Деформация кручения является неоднородной. Это значит, что деформация внутри образца меняется от точки к точке.

Закон Гука для деформации кручения записывается в виде

$$\boxed{M = f\varphi}\,, \tag{1.98}$$

где f - модуль кручения.

Модуль кручения ***показывает, какой момент сил нужно приложить, чтобы закрутить проволоку на угол в 1 рад***. В отличие от модулей Юнга и сдвига он зависит не только от материала, но и от геометрических размеров проволоки.

Деформацию кручения можно свести к деформации сдвига. Выведем выражение для модуля кручения.

Стержень (рис.1.16) можно представить состоящим из множества цилиндрических оболочек (трубок) радиусом r, длиной L и толщиной dr. Площадь основания трубки

$$dS = 2\pi\, r\, dr\,, \tag{1.99}$$

а момент упругих сил, действующих на это основание:

$$dM = 2\,\pi\, r\, dr\, \sigma_\tau\, r\,, \tag{1.100}$$

где σ_τ - тангенциальное напряжение в этом основании.

С учетом того, что каждый элемент цилиндрической трубки сдвигается на угол:

$$\gamma = \frac{r\varphi}{L}\,, \tag{1.101}$$

то по закону Гука для деформации сдвига получим

$$\sigma_\tau = G\gamma = G\frac{r\varphi}{L}\,. \tag{1.102}$$

Таким образом, момент сил, действующих на цилиндрическую трубку, равен

$$dM = 2\pi G\,\frac{r\,3\varphi\, dr}{L}\,. \tag{1.103}$$

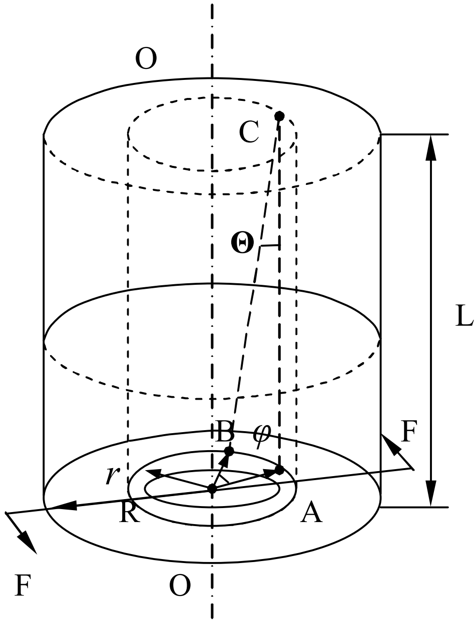


Рис.1.16

Полный момент сил, действующих на проволоку (стержень) радиуса R, найдется интегрированием:

$$M = \frac{2\pi G\varphi}{2L}\int_0^R r3dr = \frac{\pi G\varphi}{2L}R^4 . \qquad (1.104)$$

Сопоставляя с законом Гука для деформации кручения (1.98) получим выражение для модуля кручения :

$$\boxed{f = \frac{\pi Gr4}{2L}}. \qquad (1.105)$$

Экспериментально модуль кручения можно измерить, наблюдая крутильные колебания маятника.

1.9. Примеры решения задач

Задача №1. Движение частицы в плоскости ХУ описывается кинематическими уравнениями: $x = At$; $y = At(1 - Bt)$ (1), где А и В – константы. Определить: 1) уравнение траектории $y = f(x)$; 2) векторы скорости, ускорения и их численные значения; 3) вектор средней скорости за первые τ секунд движения и его модуль.

Решение

1) Для нахождения уравнения траектории движения частицы необходимо исключить параметр t из кинематических уравнений:

$$y = x - \frac{Bx^2}{A}.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение параболы.

2) Вектор скорости частицы в момент времени t определяется выражением:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j},$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ - единичные векторы вдоль осей X и У, а υ_x и υ_y - проекции вектора скорости на соответствующие оси.

Дифференцируя уравнения (1) по времени, получим:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = A; \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = A - 2ABt$$

и, следовательно, $\vec{\upsilon} = A\vec{i} + (A - 2ABt)\vec{j}$.

Модуль вектора скорости равен

$$\upsilon = \sqrt{{\upsilon_x}^2 + {\upsilon_y}^2} = A\sqrt{2(1 - 2Bt + 2B^2t^2)}.$$

Вектор ускорения представляет собой первую производную от вектора скорости

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j},$$

где $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = 0,\qquad a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -2AB.$ Следовательно,

$$\vec{a} = a_y\vec{j} = -2AB\vec{j}$$

Знак «-» в полученном выражении свидетельствует о том, что ускорение направлено в сторону, противоположную оси У.

Модуль ускорения равен

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = 2AB$$

3) Вектор средней скорости определяется выражением

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j},$$

где $\Delta t = t - t_0 = \tau$, поскольку $t_0 = 0$, $\Delta x = x - x_0 = A\tau;$

$\Delta y = y - y_0 = A\tau(1 - B\tau)$

Окончательно,

$$<\vec{\upsilon}> = A\vec{i} + A\tau(1 - B\tau)\vec{j};$$

$$|<\vec{\upsilon}>| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = A\sqrt{1 + (1 - B\tau)^2}\ .$$

Задача №2. Маховик, вращающийся с постоянной частотой $n_0 = 10\,об/с$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, частота вращения оказалась равной $n_0 = 6\,об/с$. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность t торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал $N = 50\,об$.

Решение

При равнозамедленном вращательном движении уравнения угловой скорости и углового пути имеют вид:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t\ , \qquad (1)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (2)$$

Решение этой системы уравнений дает соотношение, связывающее угловое ускорение с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями

$$\omega^2 - \omega_0^{\ 2} = 2\varepsilon\varphi,$$

или

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^{\ 2}}{2\varphi}. \qquad (3)$$

Но так как $\varphi = 2\pi N$ и $\omega = 2\pi n$, то

$$\varepsilon = \frac{\pi(n^2 - n_0^{\ 2})}{N}. \qquad (4)$$

Подставив числовые значения в выражение (4), получим

$$\varepsilon = \frac{3{,}14(36-100)}{50} = -4{,}02\ ^{рад}\!/_{с^2}$$

Угловое ускорение получилось отрицательным, так как маховик вращался замедленно. Продолжительность торможения определяем из уравнения (1):

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}$$

и с учетом (4) окончательно

$$t = \frac{2\pi(n-n_0)N}{\pi^2(n-n_0^{\ 2})} = \frac{2N}{n_0+n}$$

Подставив числовые значения найдем: $t = 6{,}25с$.

Задача №3. Частица совершает перемещение в плоскости ХУ из точки с координатами (1,2) *м* в точку с координатами (2,3) *м* под действием силы $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$ *Н.* Определить работу данной силы.

Решение

Элементарная работа, совершаемая силой F при перемещении $d\vec{r}$, равна скалярному произведению этих векторов.

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = (3\vec{i} + 4\vec{j})(dx\vec{i} + dy\vec{j}) = 3dx + 4dy \ .$$

Работа при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 определится интегрированием

$$A_{12} = \int dA = \int_{x1}^{x2} 3dx + \int_{y1}^{y2} 4dy = 3(x_2 - x_1) + 4(y_2 - y_1).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$A_{12} = 7\,Дж\,.$$

Задача №4. Моторная лодка массой m = 400 *кг* начинает двигаться по озеру. Сила тяги мотора F= 0,2 кН.Считая силу сопротивления пропорциональной скорости, определить скорость лодки через t = 20с после начала её движения. Коэффициент сопротивления κ = 20 *кг/с.*

Решение

На лодку в горизонтальном направлении действуют две силы: сила тяги мотора и сила сопротивления , величина которой пропорциональна скорости, т.е. $F_c = \kappa\upsilon$. Уравнение движения лодки имеет вид :

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F - \kappa\upsilon$$

Для решения данного дифференциального уравнения разделим переменные

$$\frac{d\upsilon}{F - \kappa\upsilon} = \frac{1}{m}dt\ ,$$

и выполним интегрирование:

$$\int_0^V \frac{d\upsilon}{F - \kappa\upsilon} = \frac{1}{m}\int_0^{\Delta t} dt \Rightarrow -\frac{1}{\kappa}\ln(F - \kappa\upsilon)\Big|_0^V = \frac{\Delta t}{m}$$

Подставив пределы интегрирования, проведём преобразование

$$\ln\frac{F - \kappa\upsilon}{F} = -\frac{\kappa}{m}\Delta t$$

Или

$$\frac{F - \kappa\upsilon}{F} = e^{-\frac{\kappa}{m}\Delta t}$$

Окончательно имеем

$$\upsilon = \frac{F}{\kappa}(1 - e^{\frac{\kappa}{m}\Delta t)})$$

Произведя вычисления, найдем V = 6.3 м/с.

Задача №5. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)$, где a – константа. Найти: а) силу $\vec{F}$, действующую на частицу; б) работу А, совершаемую над частицей силами поля при её перемещении из точки M(1,1,1,) в точку N(2,2,3).

Решение

Используя выражение, связывающее потенциальную энергию частицы с силой, действующей на неё, получим

$$\vec{F} = -gradU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) =$$

$$= a\left[-\frac{1}{y}\vec{i} + \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{z}\right)\vec{j} + \frac{y}{z^2}\vec{k}\right]$$

Работа сил потенциального поля равна убыли потенциальной энергии

$$A_{12} = -\Delta U = U_1 - U_2 .$$

По известным координатам точек M и N находим

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = a\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{a}{3}$$

и $$A_{12} = -\frac{a}{3}\,Дж .$$

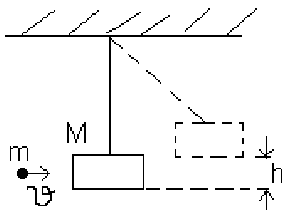
Задача № 6

Пуля массой m =15*г*, летящая с горизонтальной скоростью υ=500*м/с*, попадает в баллистический маятник *M*=6 *кг* и застревает в нем. Определить высоту h , на которую поднимется маятник после удара.

Решение.

При неупругом ударе выполняется только закон сохранения импульса, в соответствии с которым

$$m\upsilon = (m + M)u$$



После удара, пренебрегая силами сопротивления воздуха, можно воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh$$

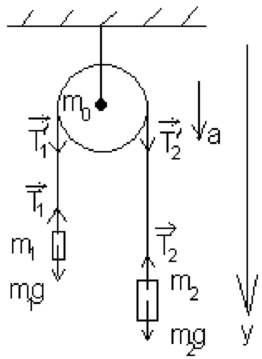
Решая совместно полученные уравнения, найдем

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(m\upsilon)^2}{2g(m+M)^2} \quad ; \quad h = 7{,}9\ см$$

Задача №7. Через блок в виде диска массой m_0 перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами m_1 и m_2($m_2 > m_1$). Найти ускорение грузов. Трением пренебречь.

Решение

Применим к решению задачи основные законы динамике поступательного и вращательного движения. С этой целью, покажем силы, действующие на тела данной системы, напишем уравнения движения для каждого из тел в отдельности.



На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (см. рис.).

Уравнения движения этих тел в проекции на ось y имеют вид

$$-m_1 a = m_1 g - T_1 \,, \tag{1}$$

$$-m_2 a = m_2 g - T_2 \,. \tag{2}$$

Вращение блока вызывается действием сил натяжения нити, поскольку моменты сил тяжести блока и реакции оси равны нулю. Тогда основное уравнение динамики вращательного движения для блока имеет вид

$$I\varepsilon = R(T_2 - T_1), \tag{3}$$

где R - радиус блока, $\mathrm{I} = \frac{m_0 R^2}{2}$ - его момент инерции, ε - угловое ускорение.

Учтено также, что по третьему закону Ньютона силы натяжения нити с каждой из сторон блока одинаковы по модулю, т.е.

$$T_1 = T'_1 \,, \qquad T_2 = T'_2$$

Если нить не проскальзывает относительно блока, то касательное ускорение его точек, соприкасающихся с нитью, равно ускорению нити в любой её точке, а следовательно

$$a = \varepsilon R$$

Решение системы полученных уравнений дает искомый результат

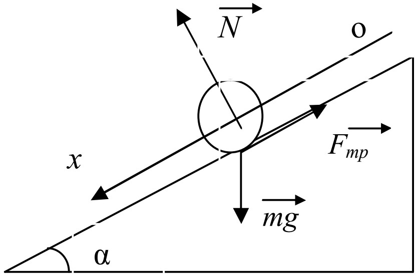
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}} g.$$

Задача №8. Однородный шар скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α . Найдите ускорение центра инерции шара.

Решение

Решим данную задачу двумя методами: непосредственным использованием уравнения динамики, и с помощью законов сохранения.

1-й метод



На шар действует сила тяжести $\overrightarrow{mg}$, сила реакции $\overrightarrow{N}$ и сила трения $\overrightarrow{F_{тр}}$. Последняя является силой трения покоя, которая и создает вращающий момент относительно мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Под действием этих сил шар участвует в двух движениях (поступательном и вращательном), уравнения которых имеют следующий вид

$$ma_c = mg\sin\alpha - F_{тр}, \qquad (1)$$

$$I_{ñ}\varepsilon = RF_{òð},$$

где $a_с$ – ускорение центра масс шара , I_c - момент инерции шара относительно его центра масс, ε - угловое ускорение.

Учитывая, что $I_c = \frac{2}{5}mR^2$, $\upsilon_c = \omega R$ и $a_c = \varepsilon R$, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{2}{5}mR\frac{a_c}{R} = RF_{тр} \Rightarrow \frac{2}{5}ma_c = F_{тр}. \qquad (3)$$

Решая уравнение (1) и (3) совместно, получим

$$a = \frac{5}{7}g\sin\alpha. \qquad (4)$$

2-й метод

Рассмотрим шар в некоторый момент его движения по наклонной плоскости. Координата его центра масс в данный момент времени равна *X*. Полная механическая энергия шара, при условии , что за нулевой уровень потенциальной энергии выбрана точка О , будет равна

$$-mg \times \sin\alpha + \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = E \quad . \tag{5}$$

Дифференцируя данное уравнение по времени , получим

$$-mg\frac{dx}{dt}\sin\alpha + m\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} + I\omega\frac{d\omega}{dt} = 0$$

После преобразования , с учетом того , что

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon\,; \quad \frac{d\upsilon}{dt} = a_c\,; \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{a_c}{R}\,,$$

будет иметь

$$a_c\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mg\sin\alpha$$

Наконец, заменяя момент инерции шара его значением

$I_c = \frac{2}{5}mR^2$, найдем

$$a_c = \frac{5}{7}g\sin\alpha\ .$$

Задача №9. Тонкий стержень массой m и длинной L подвешен за один конец и может вращаться без трения. К той же оси подвешен на нити ℓ шарик такой же массы . Шарик отклоняется на некоторый угол и отпускается. При какой длине нити шарик после удара о стержень остановится? Удар абсолютно упругий.

Решение

В соответствии с законом сохранения момента импульса для системы шарик-стержень будет иметь

$$m\upsilon\ell = I\omega\ , \tag{1}$$

где I-момент инерции стержня относительно оси вращения. По теореме Штейнера

$$I = I_c + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

С учетом этого уравнение (1) приводится к виду

$$\upsilon\ell = \frac{1}{3}L^2\omega$$

При абсолютно упругом ударе выполняется и закон сохранения механической энергии, в соответствии с которым

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (2)$$

или после преобразования

$$\upsilon^2 = \frac{1}{3}L^2\omega^2 \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1) и (3), найдем

$$\ell = L\sqrt{3}$$

1.10. Задачи для контрольных заданий

1.1. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 4$ *м/с*, $B = -0{,}05$ *м/с*^{2}. Определить момент времени, в который скорость точки равна нулю. Найти координату и ускорение в этот момент.

1.2. Путь, пройденный точкой по окружности радиусом 2 *м*, выражен уравнением $S = A + Bt + Ct^2$. Найти нормальное, тангенциальное и полное ускорения точки через время, равное 0,5 *с* после начала движения, если $C = 3$ *м/с*^{2}, В = 1 *м/с*.

1.3. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где $B = -2$ *м/с*, $C = 1$ *м/с*^{2}. Найти линейную скорость точки, ее тангенциальное, нормальное и полное ускорения через t_1=3 *с* после начала движения, если известно, что нормальное ускорение точки при t_2=2 *с* равно 0,5 *м/с*^{2}.

1.4. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид $x = At + Bt^3$, где $A = 3$ *м/с*, $B = 0{,}06$ *м/с*^{3}. Найти скорость и ускорение точки в моменты времени $t = 0$ и $t = 3$ *с*. Каковы средние значения скорости и ускорения за первые 3 *с* движения?

1.5. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^3$, где A=6 *м/с*, B=0,125 *м/с*^{3}. Определить среднюю скорость точки в интервале времени от $t = 2$ *с* до $t = 6$ *с*.

1.6. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon = 30$ *м/с*. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в конце второй секунды после начала движения.

1.7. Точка движется по окружности радиусом 2 м согласно уравнению $S=At^3$, где $A = 2$ *м/с*^{3}. В какой момент времени нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному? Определить полное ускорение в этот момент.

1.8. Найти, во сколько раз нормальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее тангенциального ускорения для того момента, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости.

1.9. Радиус – вектор частицы изменяется со временем по закону $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}\,(м)$. Найти: а) векторы скорости и ускорения; б) модуль скорости в момент t = 1 с.

1.10. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1=A_1 + B_1t + C_1t^2$ и $x_2 = A_2 + C_2t^2$, где A_1=10 *м*, $B_1 = 32$ *м/с*, $C_1 = -3$ *м/с*^{2}, $A_2 = 5$ *м*, $C_2 = 5$ *м/с*^{2}. В какой момент времени скорости этих точек одинаковы? Чему равны скорости и ускорения точек в этот момент?

1.11. Якорь электромотора, вращающийся с частотой $n = 50$ *об/с*, двигаясь после выключения тока равнозамедленно, остановился, сделав $N = 1680$ *об*. Найти угловое ускорение якоря.

1.12. Ротор электродвигателя, имеющий частоту вращения $n = 955$ *об/мин*, после выключения остановился через $t = 10$ *с*. Считая вращение равнозамедленным, определить угловое ускорение ротора после выключения электродвигателя. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

1.13. Колесо радиусом R = 0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где B=2 *рад/с*, С=1 *рад/с*^{3} . Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время t = 2 *с* после начала движения следующие величины:
а) угловую скорость, б) линейную скорость, в) угловое ускорение, г) тангенциальное ускорение, д) нормальное ускорение.

1.14. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол его поворота изменяется со временем по закону $\varphi = Bt^2$, где B = 0,20 *рад/с*^{2}. Найти полное ускорение точки на ободе колеса в момент t = 2,5 *с*, если линейная скорость точки в этот момент υ = 0,65 *м/с*.

1.15. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = At - Bt^3$, где A = 6,0 *рад/с*, B = 2,0 *рад/с*^{3}. Найти средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от начала движения до остановки. Определить угловое ускорение в момент остановки тела.

1.16. Маховик, вращающийся с постоянной частотой n_1 =10 *об/с*, начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение снова было равномерным с частотой n_2=6 *об/с*. Определить угловое ускорение маховика и продолжительность торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал N = 50 *об*.

1.17. Диск радиусом 10 *см*, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением ε = 0,5 *рад/с*^{2}. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорение точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

1.18. Колесо радиусом R=0,3 м вращается согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где A = 1 *рад/с*, B = 0,1 *рад/с*^{3}. Определить полное ускорение точек на окружности колеса в момент времени t =2 с.

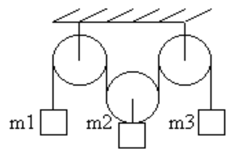
1.19. Диск вращается с угловым ускорением ε = - 2 *рад/с*^{2}. Сколько оборотов N сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 240\ мин^{-1}$ до $n_2 = 90\ мин^{-1}$? Найти время Δt, в течение которого это произойдет.

1.20. Маховик начал вращаться из состояния покоя равноускоренно и, сделав 40 полных оборотов, приобрёл угловую скорость 10 $рад/с$. Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

1.21. Тело массой m =1$кг$ движется так, что пройденное расстояние от времени дается уравнением $S = a \sin \omega t$, где a =5см, $\omega = \pi\ рад/с$. Найти ускорение, силу и импульс тела через $1/6\,с$ после начала движения.

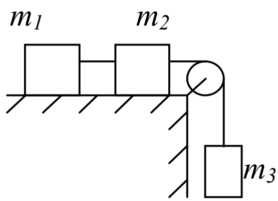
1.22. Тело массой m =1$кг$ движется так, что его координаты x и y изменяются от времени следующим образом: $x = a - bt + ct^2$, $y = dt^3$, где $c = 1\,м/с^2$, $d = 2\,м/с^3$. Определить ускорение и действующую на тело силу к концу пятой секунды.

1.23. Определить ускорение грузов массы m_1, m_2, m_3 в системе. Массой блоков пренебречь. Трение отсутствует.

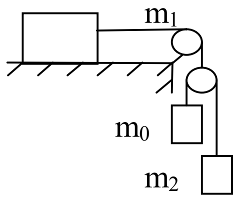


1.24. Шар массой m, двигаясь со скоростью υ, упруго ударяется о гладкую неподвижную стенку так, что скорость направлена под углом α к нормали. Определить импульс, получаемый стенкой.

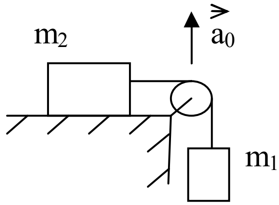
1.25. В установке, показанной на рисунке, массы тел равны m_1, m_2 и m_3, масса блока пренебрежимо мала и трения в блоке нет. Найти ускорение, с которым опускается тело m_3, и силу натяжения нити, связывающей тела m_1 и m_2, если коэффициент трения между этими телами и горизонтальной поверхностью равен k.



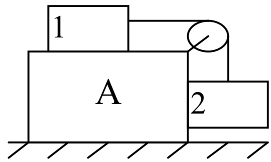
1.26. В системе, показанной на рисунке, массы тел равны m_0, m_1, m_2, трения нет, массы блоков пренебрежимо малы. Найти ускорение тела m_1.



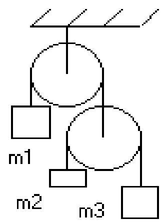
1.27. Через невесомый блок, укрепленный на краю стола, перекинута нерастяжимая нить, связывающая грузы с массами m_1=1 *кг* и m_2=2 *кг*. Стол движется вверх с ускорением a_0 =1 *м/с*. Найти ускорение груза m_1 относительно стола и относительно земли. Трением пренебречь.



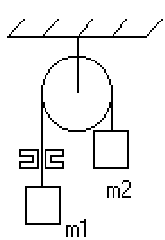
1.28. С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок А, чтобы тела 1 и 2 не двигались относительно него? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен k. Массой блока пренебречь.



1.29. Определить ускорение грузов массы m_1, m_2 и m_3, а также силу натяжения нитей в системе блоков, если $m_1 = m_2 + m_3$. Массой блоков пренебречь. Трение отсутствует.



1.30. Невесомая нерастяжимая нить, перекинутая через неподвижный блок, пропущена через щель. При движении нити на неё со стороны щели действует постоянная сила трения f. На концах нити подвешены грузы m_1 и m_2. Определить ускорение грузов.



1.31. Шар, движущийся со скоростью 2 *м/с*, ударяется центрально в неподвижный шар такой же массы. Определить скорости шаров после удара в случае, если удар упругий и если удар неупругий.

1.32. Охотник стреляет вдоль лодки под углом 60° к горизонту. Какую скорость имел при вылете заряд ружья, если его масса 50 *г*. и лодка приобрела скорость 0,05 *м/с*? Масса лодки и охотника 180 *кг*.

1.33. Мяч, летящий со скоростью υ_0 = 15*м/с*, отбрасывается ракеткой в противоположную сторону со скоростью υ_1= 20*м/с*. Найти изменение импульса, если изменение кинетической энергии ΔW = 8,75 *Дж*.

1.34. Два шара массой m_1 = 9 *кг* и m_2 = 12 *кг* подвешены на нитях длиной l = 1,5 *м*. Первоначально шары соприкасаюся между собой, затем меньший шар отклонили на угол α = 30° и отпустили. Считая удар неупругим, определить высоту h, на которую поднимутся оба шара после удара.

1.35. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого шара 0,2 *кг*, масса второго – 0,1 *кг*. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту 4,5 *см*, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если: а) удар упругий, б) удар неупругий?

1.36. Шар массой m_1= 6 *кг* движется со скоростью υ_1 =2 *м/с* и сталкивается с шаром массой m_2 = 4 *кг*, который движется ему навстречу со скоростью υ_2 = 5 *м/с*. Найти скорость шаров после прямого центрального удара. Удар считать абсолютно упругим.

1.37. Шар массой m_1 =5*кг* движется со скоростью υ_1 =2 м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 =3 *кг*. Вычислить работу, совершенную при деформации шаров при прямом центральном ударе.

1.38. На покоящийся шар налетает со скоростью υ= 4 *м/с* другой шар одинаковой с ним массы. В результате столкновения шар изменил направление движения на угол 30°. Определить скорости шаров после удара. Удар считать упругим.

1.39. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью υ_0 = 3 *км/ч*, укреплено орудие. Масса платформы с орудием $M = 10$ *т*. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы. Снаряд массой $m = 10$ *кг*. вылетает из ствола под углом $\alpha = 60^{\circ}$ к горизонту. Определить скорость снаряда (относительно Земли), если после выстрела скорость платформы уменьшилась в $n = 2$ раза.

1.40. Частица массы m_1 налетела со скоростью υ на неподвижную частицу массы m_2, которая после упругого удара полетела под углом α к первоначальному направлению движения налетающей частицы. Определите скорость частицы m_2 после удара.

1.41. Подсчитать работу поднятия груза массой m = =200 *кг* по наклонной плоскости длиной $l = 5$ м, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^{\circ}$, если ускорение тела при подъёме равно $a = 0{,}5$ м/с^2, коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

1.42. Вагон массой $m = 20$ *т*, двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью $\upsilon_0 = 54$ км/ч, останавливается через некоторое время под действием силы трения, которая изменяется с расстоянием по закону $F = -\alpha x$, где $\alpha = 100$ *н/м*. Найти работу силы трения и расстояние, которое пройдёт вагон до остановки.

1.43. На какую глубину погрузится тело, падая с высоты h в воду, если плотность тела ρ меньше плотности воды ρ_1? Трением тела о воздух и воду пренебречь.

1.44. Сила, действующая на частицу, имеет вид $\vec{F} = a\vec{i}$, где a – константа. Вычислить работу, совершаемую над частицей этой силой на пути от точки с координатами (1,2,3) *м* до точки с координатами (7,8,9) *м*.

1.45. Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$. Найти мощность, развиваемую силой в момент времени t.

1.46. Тело массой $m = 1{,}0$ *кг* падает с высоты h=20*м*. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти среднюю по времени мощность, развиваемую силой тяжести на пути h, и мгновенную мощность на высоте $h/2$.

1.47. Спортсмен с высоты h = 12 *м* падает на упругую сетку. Пренебрегая массой сетки, определить, во сколько раз наибольшая сила давления спортсмена на сетку больше его силы тяжести, если прогиб сетки, под действием только силы тяжести спортсмена x_0 = 15 *см*.

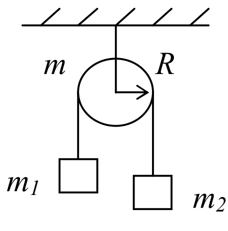
1.48. Пуля массой m = 15 *г*, летящая горизонтально, падает в баллистический маятник длиной l = 1 *м* и массой M = 1,5 *кг* и застревает в нём. Маятник в результате этого отклонился на угол φ = 30º. Определить скорость пули.

1.49. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = d/r$, где r – модуль радиус-вектора частицы, d=const. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу, работу, совершаемую этой силой над частицами при её переходе из точки M(1,2,3) в точку N(2,3,4).

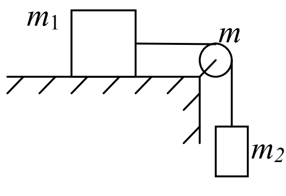
1.50. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперёд гирю массой m_1=5*кг* и вследствие отдачи покатился назад со скоростью υ_2=1м/с. Масса конькобежца m_2 = 60 *кг*. Определить работу A, совершённую конькобежцем при бросании гири.

1.51. На барабан, представляющий однородный цилиндр радиусом R = 0,2 *м* и массой m_1 = 9 *кг*, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m_2 = 2 *кг*. Найти ускорение груза и кинетическую энергию системы, спустя время t =3 *с*.

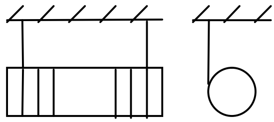
1.52. В установке, показанной на рисунке, известны масса однородного сплошного цилиндра m, его радиус R и массы тел m_1 и m_2. Найти угловое ускорение цилиндра и отношение натяжений T_2/T_1 вертикальных участков нити в процессе движения.



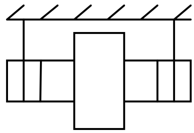
1.53. В системе, показанной на рисунке, известны массы тел m_1 и m_2 , коэффициент трения k между телом m_1 и горизонтальной плоскостью, а также масса блока m, который можно считать однородным диском. Найти



ускорение тела m_2 и работу силы трения, действующей на тело m_1, за первые t секунд после начала движения.



1.54. Однородный цилиндр массой m и радиусом R начинает опускаться под действием силы тяжести. Найти угловое ускорение цилиндра и натяжение каждой нити.



1.55. На стержень радиусом r наглухо насажен сплошной диск радиусом R и массой m . К стержню прикреплены нити, при помощи которых диск подвешен к штативу. Найти ускорение, с которым опускается диск. Массой стержня пренебречь.

1.56. Найти ускорение центра однородного шара, скатывающегося без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Чему равна сила трения между шаром и плоскостью?

1.57. Определить линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой h =1 *м*.

1.58. На барабан радиусом R = 0,5 *м* намотан шнур, к которому привязан груз массой m = 10 *кг*. Найти момент инерции барабана J, если известно, что груз опускается с ускорением a = 2,04 *м/с*^{2}.

1.59. На барабан радиусом R = 20 *см,* момент инерции которого J = 0,1 *кг·м*^{2}, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 0,5 *кг*. До начала вращения барабана груз находился на высоте h = 1 *м* над полом. Через какое время груз опустится на пол и какова будет при этом кинетическая энергия системы?

1.60. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого J = 1,5 *кг·м*^{2}, вращаясь равнозамедленно, за время t = 1 *мин* уменьшил частоту своего вращения с n_0 = 240 *об/мин* до n_1 = 120 *об/мин*. Определить: 1) угловое ускорение маховика; 2) момент силы торможения; 3) работу торможения.

1.61 На скамье Жуковского сидит человек и держит в вытянутых руках гири по 10 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи ℓ_1=50 *см*. Скамья вращается с частотой n_1=1 c^{-1} . Как изменится частота вращения скамьи и какую работу произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до ℓ_2=20*см*? Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения $J = 2{,}5$ *кг м*^{2}.

1.62 На краю свободно вращающегося достаточно большого горизонтального диска, имеющего радиус R и момент инерции J, стоит человек массой m. Диск совершает n_1 *об/мин.* Как изменится скорость вращения диска, если человек перейдет от края диска к центру? Какую работу совершит человек при переходе? Размерами человека по сравнению с радиусом диска можно пренебречь.

1.63. Шарик массой m =50 *г*, привязанный к концу нити длиной ℓ_1=1 *м*, вращается с частотой n_1=1 *об/с*, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния ℓ_2=0,5 *м*. С какой частотой будет при этом вращаться шарик? Какую работу совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

1.64. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $R = 2$ *м*, стоит человек. Масса платформы $M = 240$ *кг*, масса человека $m = 80$ *кг*. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2$ *м/с* относительно платформы.

1.65. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки; стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой n_1=10 c^{-1}. Радиус колеса равен 20*см*, его масса m =3 *кг*. Определить частоту вращения n_2 скамьи, если человек повернет стержень на угол 180°? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 $кг \cdot м^2$.

1.66. Вертикально расположенный однородный стержень массы М и длины ℓ может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массы m, в результате чего стержень отклонился на угол α. Считая m<<M, найти скорость летевшей пули.

1.67. Два горизонтально расположенных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны J_1 и J_2, а угловые скорости ω_1 и ω_2. После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между их поверхностями начинают вращаться как единое целое. Найти установившуюся угловую скорость дисков и приращение кинетической энергии вращения этой системы.

1.68. Тонкий стержень массой m и длиной L подвешен за один конец и может вращаться без трения. К той же оси подвешен на нити длиной ℓ шарик такой же массы. Шарик отклоняется на некоторой угол и отпускается. При какой длине нити шарик после удара о стержень остановится? Удар абсолютно упругий.

1.69. Стержень длиной ℓ=1.5 *м* и массой M=10 *кг* может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня попадает пуля массой m =10 *г*, летящая в горизонтальном направлении со скоростью v=500 *м/с*, и застревает в стержне. На какой угол отклонится стержень после удара?

1.70. Бревно высоты h = 3 м и массы m = 50 *кг* начинает падать из вертикального положения на землю. Определить скорость верхнего конца и момент импульса бревна в момент падения на землю.

2. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО - КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

2.1. Идеальный газ. Уравнение состояния. Основное уравнение молекулярно - кинетической теории

Состояние термодинамической системы описывается некоторым числом макроскопических величин-параметров состояния. Наиболее распространёнными параметрами состояния являются **температура *T*, давление *P* и объём *V***.

Состояние термодинамической системы называют стационарным, если оно не изменяется во времени. Если стационарность состояния не обусловлена внешними воздействиями, то оно называется равновесным.

Наряду с параметрами состояния системы вводятся другие величины, которые также характеризуют её состояние и меняются с изменением состояния, т. е. являются функциями состояния. Эти величины зависят только от состояния и не зависят от того пути, по которому система перешла из одного состояния в другое. Наиболее важными функциями состояния являются **внутренняя энергия системы *U*** и её **энтропия *S*.**

Единицей количества вещества в системе СИ является моль: ***1 моль - такое количество вещества, в котором содержится столько же атомов, молекул или ионов, сколько в 12 г чистого изотопа углерода*** $^{12}_{6}C$. Число молекул, атомов или ионов N_a, содержащихся в 1 моле вещества называется **числом Авогадро**. (N_a=6,022·10^{23} моль$^{-1}$).

Разреженные газы, собственным объёмом молекул которых и их взаимодействием можно пренебречь, описываются моделью идеального газа. Уравнение, связывающее между собой параметры равновесного состояния, называется уравнением состояния. Такое уравнение для идеального газа, называемое **уравнением Менделеева - Клайперона,** имеет вид:

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT = NkT \quad . \qquad (2.1)$$

Здесь m-масса газа, M-масса одного моля, ν-количество молей, N-число молекул; R-универсальная газовая постоянная, k-постоянная Больцмана.

Число Авогадро, универсальная газовая постоянная и постоянная Больцмана связаны соотношением

$$R = N_a k$$

Их значения равны: R=8,314 Дж/моль·К, k = 1,380·10^{-23} Дж/К, N_a = 6,022·10^{23}моль$^{-1}$.

Так как отношение числа молекул к объёму представляет собой концентрацию молекул $n = \frac{N}{V}$, то

$$p = nkT. \qquad (2.2)$$

Из уравнения Менделеева - Клайперона (2.1) следует ряд частных законов, которые были открыты независимо от него.

1. В уравнении (2.1) или (2.2) нет указаний на ориентацию стенки, на которую оказывается давление газа. Следовательно, ***давление одинаково по всем направлениям***. **Это закон Паскаля**.

2. Из (2.1) следует, что $N = \frac{pV}{kT}$. **При одинаковых параметрах состояния (P, V и T) число молекул любых газов одинаково** (**закон Авогадро**). Так как 1 моль любого газа содержит одно и то же число молекул N_a , то при одинаковом давлении и температуре моль любого газа занимает один и тот же объём.

Состояние газа, параметры которого P=1,01·10^5*Па*= =1*атм* = *760 мм.рт.ст*. и Т = 273*К* = 0^o *С,* называют **нормальным состоянием**. Следовательно, один моль идеального газа, содержащий N_a атомов, занимает при нормальных условиях объём V_M=2,24·10^{-2} $м^3$. Если имеется N_1 молекул одного газа и N_2 молекул другого, то из (2.2) следует

$$p = \frac{(N_1 + N_2)kT}{V} = p_1 + p_2; \quad p = \sum_i p_i \,.$$

Таким образом, ***давление смеси газов равно сумме давлений её компонентов***. **Это закон Дальтона**. При этом давление каждого компонента смеси называется парциальным давлением.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа связывает параметры состояния газа с характеристиками движения его молекул:

$$p = \frac{2}{3} n\overline{E}\ , \tag{2.3}$$

где $\overline{E} = \dfrac{m\overline{\upsilon}^2_{cp}}{2}$ средняя энергия поступательного движения молекулы. Из сравнения (2.2) с (2.3) следует, что

$$\overline{E} = \frac{3}{2} kT\ . \tag{2.4}$$

Таким образом, ***абсолютная температура T есть мера средней кинетической энергии молекул*** (в модели идеального газа потенциальная энергия полагается равной нулю).

В основе вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории лежит положение о том, что движения по направлениям X,Y,Z совершенно равноправны и независимы друг от друга. Если одноатомную молекулу рассматривать как материальную точку, то для описания её положения в пространстве достаточно трёх независимых координат. ***Число независимых координат тела называется*** **числом его степеней свободы**. Следовательно, одноатомная молекула имеет три степени свободы. Двухатомная молекула с жёсткой связью между атомами имеет пять степеней свободы. Три из них определяют поступательное движение молекулы, две - вращательное. Если в молекуле три (и более) атома, связанных жёсткой связью, то число степеней свободы равно 6.

Для молекулы с тремя степенями свободы $\overline{E} = \overline{E}_x + \overline{E}_y + \overline{E}_z = \frac{3}{2} kT$, поэтому ***на каждую степень свободы поступательного движения в среднем приходится энергия***

$\frac{1}{2}kT$. Больцман показал, что этот результат является общим и применим к другим степеням свободы. Это утвержде- ние получило название **закона о равномерном распределе- нии энергии по степеням свободы**, ***согласно которому на каждую степень свободы системы, находящейся в тепловом равновесии, приходится в среднем энергия, равная*** $\frac{1}{2}kT$. Таким образом, средняя энергия любой молекулы

$$\overline{E} = \frac{i}{2}kT, \qquad (2.5)$$

где i - число степеней свободы.

2.2. Распределение молекул по скоростям

Беспорядочное движение молекул в газах даёт возможность при их исследовании пользоваться статистическими методами.

Пусть скорости dN молекул попадают в интервал от υ до $\upsilon+d\upsilon$. Доля молекул, имеющих скорость в указанном интервале, по отношению к общему числу молекул равна вероятности P того, что молекулы имеют скорость $(\upsilon \div \upsilon+d\upsilon)$:

$$P = \frac{dN}{N}.$$

Вероятность P, отнесённая к ширине интервала $d\upsilon$, называется **плотностью вероятности** f(υ): $f(\upsilon) = \frac{1}{N}\frac{dN(\upsilon)}{d\upsilon}$.

Зависимость плотности вероятности (доли) случайной величины от её значения называется **функцией распределения этой случайной величины.**

Функция распределения скоростей молекул газа была получена Максвеллом и имеет следующий вид:

$$f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\upsilon^2 e^{\frac{-m\upsilon^2}{2kT}}\,d\upsilon. \qquad (2.6)$$

Здесь N-общее число молекул, m-масса отдельной молекулы. Тогда число молекул, скорости которых заключены в пределах от υ до $\upsilon+d\upsilon$, определяется выражением

$$dN(\upsilon) = Nf(\upsilon)d\upsilon = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\upsilon^2 e^{\frac{-m\upsilon^2}{2kT}} . \qquad (2.7)$$

График функции $f(v)$ представлен на рис. 2.1.

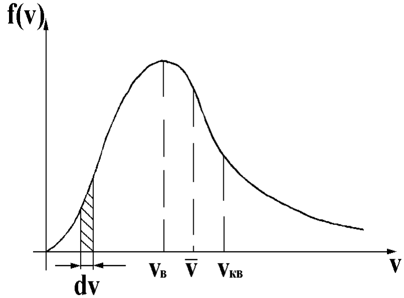


Рис. 2.1

Площадь заштрихованного участка $f(\upsilon)d\upsilon = \dfrac{dN}{N}$ равна доле молекул, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon+d\upsilon$. Площадь под всей кривой равна доле молекул, скорости которых лежат в интервале от 0 до ∞, а это все молекулы, поэтому такая площадь равна 1:

$$\int_0^\infty f(\upsilon)d\upsilon = 1 .$$

Максвелловское распределение не меняется во времени, оно стационарно. Для данного газа оно зависит только от абсолютной температуры. На рис.2.2 приведены функции распределения скоростей для двух различных температур T_1 и T_2 $(T_2>T_1)$.

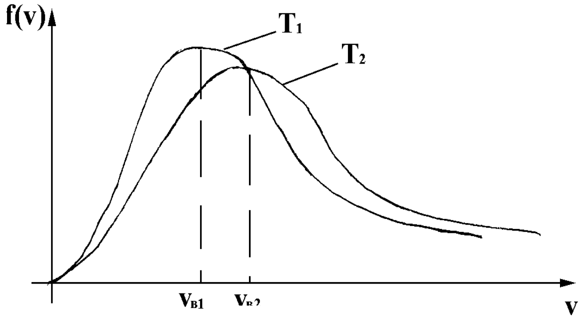


Рис. 2.2

С ростом температуры увеличивается доля молекул, имеющих большую скорость. Скорость при которой функция *f(v)* достигает максимума называется **наиболее вероятной скоростью**. Этой и близкой к ней скоростью обладает наибольшее число молекул. Значение наиболее вероятной скорости можно найти из условия $f(v)' = 0$.

$$\upsilon_{\hat{a}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \qquad (2.8)$$

где m - масса молекулы, M - молярная масса.

Наряду с наиболее вероятной скоростью в молекулярно-кинетической теории пользуются понятием **средней арифметической и средней квадратичной скоростью.**

Средняя арифметическая скорость молекул газа

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{n}\int_0^{\infty} \upsilon f(\upsilon) d\upsilon = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (2.9)$$

Эта скорость не совпадает с наиболее вероятной (рис. 2.1), т. к. функция распределения скоростей $f(\upsilon)$ несимметрична.

Средняя квадратичная скорость молекул газа

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\int_0^{\infty} \upsilon^2 f(\upsilon) d\upsilon} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (2.10)$$

Она совпадает со значением, найденным из уравнения

$$\frac{m\upsilon_{кв}^2}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

2.3. Идеальный газ в поле сил тяжести. Распределение Больцмана

Если идеальный газ находится в поле тяжести, то на каждую молекулу действует сила $\vec{F} = m\vec{g}$. Выделим в газе элементарный объём *dV* высотой *dh* с единичной площадью основания. Условие равновесия этого объёма:

$$P_1 = P_2 + nmgdh,$$

где P_2-давление у верхнего основания объёма *dV*, P_1-у нижнего, *m*-масса молекулы газа, *n*-концентрация молекул. Отсюда $dP = P_2 - P_1 = -nmgdh$. Согласно уравнению (2.2) $dP = kTdn$. Тогда

$$k\,T\,dn = -\,n\,m\,g\,dh\,. \tag{2.11}$$

Решение дифференциального уравнения (2.11) имеет вид:

$$n = n_0 e^{\frac{-mg(h-h_0)}{kT}}\,. \tag{2.12}$$

Эта функция называется **функцией распределения Больцмана** ***и характеризует зависимость концентрации молекул от высоты*** для случая, когда молекулы находятся в поле тяжести (т. е. от их потенциальной энергии). При этом начальный уровень *h* =0 может быть выбран произвольно. Воспользовавшись уравнением (2.2), получим зависимость давления от высоты (**барометрическую формулу**):

$$p = p_0 e^{\frac{-mg(h-h_0)}{kT}}\,. \tag{2.13}$$

2.4. Эффективный диаметр и средняя длина свободного пробега молекул

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы *d*** (рис.2.3). В первом приближении эффективный диаметр можно считать постоянным, хотя он и зависит от скорости сталкивающихся молекул, т.е. от температуры газа.

Путь, пройденный молекулой между двумя последовательными столкновениями, имеет самые различные значения. Однако, при очень большом числе столкновений молекул, можно ввести понятие среднего значения, называя его **средней длиной свободного пробега λ.**

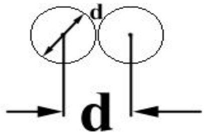


Рис.2.3

Для определения этой величины представим себе, что все, кроме одной, молекулы (число их в единице объёма равно n) неподвижны; это значит, что скорость этой молекулы равна относительной средней скорости $\overline{U}$.

За время Δt молекула перемещается на расстояние $\overline{U}$ Δt по отношению к другим молекулам. Все неподвижные молекулы, центры которых находятся внутри цилиндра радиусом d (рис. 2.4), входят при этом в сферу действия движущейся молекулы, т.е. сталкиваются с ней. Сечение этого цилиндра $\sigma = \pi d^2$ называется **эффективным сечением**.

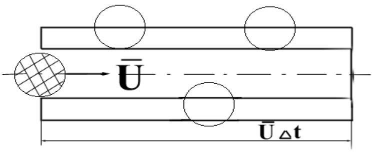


Рис.2.4

Число столкновений Z за время Δt равно числу неподвижных молекул, центры которых оказываются внутри цилиндра:

$$Z = \sigma \overline{U} n \Delta t.$$

За это время молекула проходит путь $\bar{v}\Delta t$ и испытывает Z столкновений, тогда

$$\lambda = \frac{\bar{v}\Delta t}{Z} = \frac{\bar{v}\Delta t}{\overline{U} n \sigma \Delta t} = \frac{\bar{v}}{\overline{U} n \sigma} \quad .$$

Учитывая, что средняя скорость молекул $\bar{\upsilon}$ и средняя скорость относительного движения $\overline{U}$ связаны между собой соотношением $\overline{U} = \sqrt{2}\bar{v}$, получим окончательно:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}. \qquad (2.14)$$

Таким образом, средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна их концентрации n, а при постоянной температуре, с учётом (2.14) , обратно пропорциональна давлению, т.е.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Средняя длина свободного пробега λ определяет такие свойства газов, как вязкость, теплопроводность и диффузия.

Явление диффузии ***состоит в самопроизвольном проникновении и перемешивании молекул соприкасающихся газов, жидкостей и даже твёрдых тел***. В химически однородном газе **перенос массы вещества** происходит при наличии градиента плотности и подчиняется закону Фика:

$$M = -D\frac{d\rho}{dx}St, \qquad (2.15)$$

где M -масса вещества, диффундирующего за время t через площадку S, расположенную перпендикулярно градиенту плотности $\frac{d\rho}{dx}$; D - коэффициент диффузии. Знак «минус» показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности.

Явление теплопроводности ***состоит в переносе количества теплоты в сторону убывания температуры***. Этот процесс подчиняется закону Фурье:

$$Q = -k\frac{dT}{dx}St, \qquad (2.16)$$

где Q - количество теплоты, переносимое через площадку S за время t при градиенте температуры $\frac{dT}{dx}$ в направлении нормали к этой площади; k - коэффициент теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности ***численно равен количеству теплоты, переносимой через единицу площади***

за единицу времени при температурном градиенте, равном единице.

Вязкость (внутреннее трение) ***связана с возникновением сил трения между слоями газа, перемещающимися параллельно друг другу с различными скоростями***. Механизм возникновения внутреннего трения между слоями газа связан с обменом молекул между слоями, в результате которого происходит перенос импульса упорядоченного движения молекул из одного слоя в другой, что в свою очередь, приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Внутреннее трение подчиняется закону Ньютона:

$$F = \eta \frac{dv}{dx} S , \qquad (2.17)$$

где η - коэффициент вязкости, $\frac{d\upsilon}{dx}$ - градиент скорости в направлении перпендикулярном площадке S.

Из формулы (2.17) следует, что **коэффициент вязкости** ***численно равен силе внутреннего трения, действующей на единицу площади поверхности слоя при градиенте скорости равном единице.***

Выражения для коэффициентов диффузии, теплопроводности и внутреннего трения выводятся из молекулярно-кинетической теории.

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \overline{v} \lambda \ , \qquad (2.18)$$

$$k = \frac{1}{3} \rho c_v \overline{v} \lambda \ , \qquad (2.19)$$

$$D = \frac{1}{3} \overline{v} \lambda \ , \qquad (2.20)$$

где ρ -плотность газа, c_v – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме, $\overline{v}$ - средняя арифметическая скорость молекул, λ -средняя длина свободного пробега.

Из формул (2.18) - (2.20) следуют простые зависимости между коэффициентами переноса:

$$\eta = \rho D \text{ и } k = c_v \eta . \qquad (2.21)$$

2.5. Внутренняя энергия идеального газа. Теплота и работа. Первое начало термодинамики

Внутренняя энергия системы - энергия, зависящая только от её внутреннего состояния; она складывается из кинетической энергии хаотического движения атомов или молекул, потенциальной энергии межмолекулярных взаимодействий и энергии внутриатомных движений и взаимодействий. Поскольку в модели идеального газа потенциальная энергия межмолекулярных взаимодействий полагается равной нулю, то **внутренняя энергия идеального газа** ***определяется кинетической энергией теплового движения его молекул***:

$$\overline{U} = N\overline{E},$$

где N - число молекул, $\overline{E}$ - средняя энергия одной молекулы.

Учитывая, что $N = \frac{m}{M} N_A$ и $E = \frac{i}{2} kT$, получим

выражение для внутренней энергии идеального газа:

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} N_A kT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT , \qquad (2.22)$$

и для её изменения

$$dU = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RdT . \qquad (2.23)$$

Таким образом, внутренняя энергия зависит от состояния системы (от её абсолютной температуры), изменяется при изменении состоянии системы и не зависит от того пути, по которому система пришла в это состояние. Поэтому внутреннюю энергию называют ***функцией состояния***.

Внутренняя энергия системы (её микроскопические параметры) может быть изменена только в результате взаимодействия системы с внешней средой. Такое взаимодействие может происходить двумя способами: путём теплообмена и путём совершения механической работы.

Теплообмен - самопроизвольный необратимый процесс передачи энергии, происходящий в неоднородном температурном поле.

Существуют следующие способы теплообмена:

а) **кондуктивный** (теплопроводность) - передача внутренней энергии от одних тел к другим при их соприкосновении, обусловленная тепловым движением атомов (молекул);

б) **конвективный** - перенос энергии, происходящий при перемешивании неодинаково нагретых слоев газа или жидкости под действием силы тяжести и выталкивающей силы;

в) **излучение** - передача внутренней энергии без участия промежуточной среды путём испускания и поглощения электромагнитного излучения.

Мерой энергии, передаваемой системе при теплообмене, служит ***количество теплоты Q***. Элементарное приращение количества теплоты $dQ > 0$, если оно передаётся системе, и $dQ < 0$, если система отдаёт энергию. Отношение элементарного количества теплоты dQ, сообщаемого системе при бесконечно малом изменении её состояния в каком-либо процессе, к соответствующему изменению dT её абсолютной температуры, называется ***теплоёмкостью системы***:

$$C = \frac{dQ}{dT}; \qquad [C] = \frac{Дж}{К}.$$

Таким образом, теплоёмкость системы численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить системе, для её нагревания на 1 *К*. **Удельная теплоёмкость** - физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить 1 *кг* вещества для нагревания на 1 *К*:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}; \qquad [c] = \frac{\ddot{A}æ}{\hat{e}\tilde{a}\cdot\hat{E}}.$$

Молярная теплоёмкость - теплоёмкость одного моля вещества:

$$C_m = cM = \frac{M}{m}\frac{dQ}{dT} = \frac{1}{\nu}\frac{dQ}{dT}; \qquad [C_m] = \frac{\text{Äæ}}{\text{ì î ëü} \cdot \text{Ê}}$$

Следует различать теплоёмкости c_p , C_P и c_v, C_V. Первые характеризуют теплообмен при постоянном давлении, а вторые - при постоянном объёме.

Так как количество теплоты Q не является параметром состояния термодинамической системы, то малое изменение количества теплоты является не полным дифференциалом, поэтому его обозначают δQ (сравните: внутренняя энергия системы - функция состояния; малое изменение внутренней энергии - полный дифференциал dU).

Но состояние системы можно изменить и другим способом, ***совершая над системой работу*** или ***давая ей возможность самой совершать работу***, то есть путём изменения макроскопических параметров системы.

В качестве системы рассмотрим идеальный газ в сосуде с подвижным поршнем (рис 2.5).

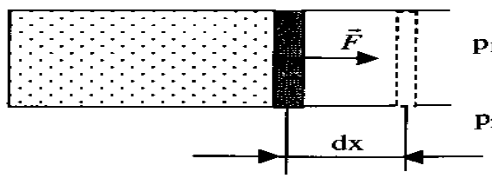


Рис.2.5

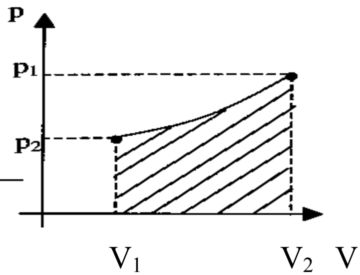


Рис.2.6

Если под действием силы F , с которой газ действует на поршень, последний переместился на расстояние dx, то газ совершил работу

$$\delta A = Fdx = PSdx = PdV ,$$

где P - давление газа, S - площадь поршня, $dV = S\ dx$ - приращение объёма газа.

Элементарное приращение работы δA - не полный дифференциал, так как работа зависит не только от начального и конечного состояния системы, но и от формы пути, по которому система переходит из одного состояния в другое, а значит A не является функцией состояния. Если газ расширяется, то $dV>0$ и, совершаемая им работа $\delta A > 0$, если сжимается - газ совершает отрицательную работу, $\delta A < 0$.

При расширении (сжатии) газа может изменяться не только объём, но и его давление. Поэтому, чтобы найти работу при конечном изменении объёма, нужно знать зависимость $p(V)$. Тогда работа определяется интегралом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \quad , \qquad (2.24)$$

который численно равен площади заштрихованной фигуры (рис.2.6).

Закон сохранения энергии в области тепловых явлений называется **первым началом термодинамики**: ***теплота, сообщаемая системе, затрачивается на увеличение внутренней энергии системы и на работу, которую система совершает над внешней средой***

$$\delta Q = dU + \delta A \, . \qquad (2.25)$$

2.6. Изопроцессы. Применение первого начала термодинамики к различным процессам. Адиабатный процесс

Изохорный процесс ($V = const$; $dV = 0$). Так как $dV = 0$, то работа при изохорном процессе δA = О. Из первого закона термодинамики следует, что

$$\delta Q = dU \, , \qquad (2.26)$$

то есть при изохорном процессе поступающая извне теплота δQ идёт только на приращение внутренней энергии dU системы. Учитывая, что $\delta Q = \nu C_V dT$, получаем

$$dU = \nu \cdot C_V dT \quad , \qquad (2.27)$$

C_V – молярная теплоёмкость при постоянном объеме.

Сопоставляя (2.23) и (2.27), найдем C_V

$$\nu \cdot C_V dT = \frac{i}{2} \nu \cdot R dT,$$

$$C_V = \frac{i}{2} R \quad . \tag{2.28}$$

Изобарный процесс ($P = const$, $dP = 0$). Передаваемое газу количество теплоты идёт на изменение его внутренней энергии и на совершение им работы при постоянном давлении:

$$\delta Q = dU + \delta A . \tag{2.29}$$

Пользуясь уравнением состояния, получим

$$\delta A = pdV = \nu RdT$$

Тогда, учитывая соотношение (2.27) и что $\delta Q = \nu C_p dT$, перепишем уравнение (2.29) в виде:

$$\nu C_p dT = \nu C_v dT + \nu RdT,$$

откуда

$$C_P = C_V + R, \tag{2.30}$$

Это выражение называют ***уравнением Майера***.

Из уравнения (2.30) следует, что $C_p > C_v$ $\left(C_P = \frac{i+2}{2} R \right)$.

При одном и том же δQ, изменение температуры dT при изобарном процессе меньше, чем при изохорном, и, следовательно, теплоемкость больше.

Изотермический процесс ($T = const$, $dT = 0$).

Так как $dT = 0$, то внутренняя энергия системы при изотермическом процессе не изменяется, и вся поступающая извне теплота идёт на совершение системой работы:

$$Q = A = \int_{V1}^{V2} pdV . \tag{2.31}$$

Учитывая, что согласно уравнению состояния идеального газа,

$$P = \frac{1}{V} \nu R T ,$$

получим

$$A = \nu \cdot RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \nu \cdot RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (2.32)$$

Адиабатный процесс - процесс без теплообмена с окружающей средой (δQ = 0). При δQ = 0 из (2.29) следует δA = - dU, то есть

$$PdV = -\nu C_v dT. \qquad (2.33)$$

Это означает, что ***система совершает работу за счёт убыли своей внутренней энергии***. При $\delta A > 0$ (газ расширяется) $dT < 0$ (он охлаждается). При δ А < 0 (газ сжимается) $dT > 0$ (он нагревается).

Зависимость какого-либо параметра адиабатного процесса от другого называется уравнением адиабаты. В выражение (2.33) входят все три параметра состояния, причём два из них в дифференциальной форме. Чтобы получить ***уравнение адиабаты,*** нужно один параметр, например P, исключить, используя уравнение состояния идеального газа. В результате получим:

$$\frac{\nu \cdot RT}{V}\cdot dV = -\nu \cdot C_V dT,$$

$$\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0.$$

Или на основании (2.30)

$$(\gamma - 1)\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0,$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{2}{i} = \frac{i+2}{i}$ - отношение теплоёмкостей при постоянном давлении и объеме.

Так как $\gamma = const$, то

$$TV^{\gamma - 1} = const. \qquad (2.34)$$

Пользуясь уравнением состояния идеального газа, это выражение можно представить в других переменных:

$$PV^{\gamma} = const \quad . \tag{2.35}$$

Из уравнений (2.34) и (2.35) следуют полезные соотношения между параметрами двух разных точек адиабаты:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

Уравнения (2.34) (2.35) - это различные формы уравнения адиабаты, в которых γ называют показателем адиабаты. Так как $\gamma>1$, то на диаграмме PV (рис.2.7) адиабата 1 круче, чем изотерма 2. Выражение для работы при адиабатном процессе следует из уравнения (2.33):

$$A = \nu \cdot C_v(T_1 - T_2) = \frac{\nu \cdot R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \quad . \tag{2.36}$$

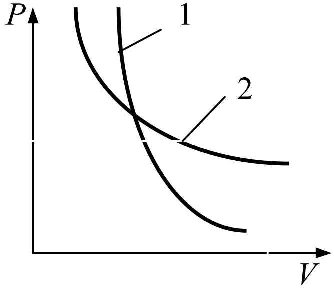


Рис.2.7

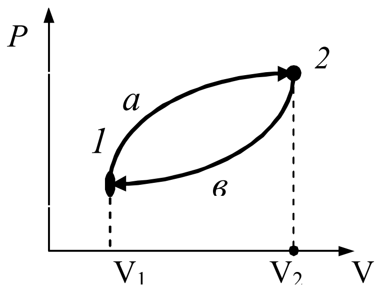


Рис.2.8

2.7. Круговые процессы. Цикл Карно. Второе начало термодинамики.

Круговым процессом или циклом называется процесс, при котором система, проходя через ряд состояний возвращается в исходное (рис.2.8). Цикл можно разбить на процессы расширения (1-*а*-2) и сжатия (2-*в*-1). Работа расширения положительна и равна площади под кривой 1-*а*-2, а работа сжатия отрицательна и равна площади под кривой 2-*в*-1. Следовательно, работа за цикл определяется площадью, охватываемой циклом. Если цикл протекает по часовой стрелке, то работа за цикл положительна ($A = \oint PdV > 0$). Такой **цикл** называется **прямым.** Если же цикл протекает против часовой стрелки, то он называется **обратным**, а работа за **цикл** отрицательна. Прямой цикл используется в тепловых двигателях, а обратный – в холодильных машинах.

В результате цикла полное изменение внутренней энергии газа равно нулю, поэтому работа за цикл равна количеству полученной извне теплоты. Однако, в круговом процессе термодинамическая система, получившая некоторое количество теплоты Q_1 от нагревателя, обязательно отдаёт часть теплоты Q_2 холодильнику.

Невозможен процесс единственным результатом которого было бы превращение всей полученной от нагревателя теплоты в работу.

Это утверждение называют **вторым началом термодинамики.** Таким образом, К.П.Д. прямого кругового поцесса, т.е. тепловой машины, определяется выражением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \qquad (2.37)$$

Цикл называется **обратимым**, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлениях, при этом в окружающей среде и в самой системе не происходит никаких изменений. Процесс неудовлетворяющий этим условиям, является **необратимым**. Обратимые процессы – это идеализация реальных процессов.

Самым экономичным обратимым процессом является цикл Карно. Этот процесс состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис.2.9). В качестве рабочего тела в цикле Карно используется идеальный газ, заключённый в сосуде с подвижным поршнем. Схема работы тепловой машины по циклу Карно показана в таблице 2.1.

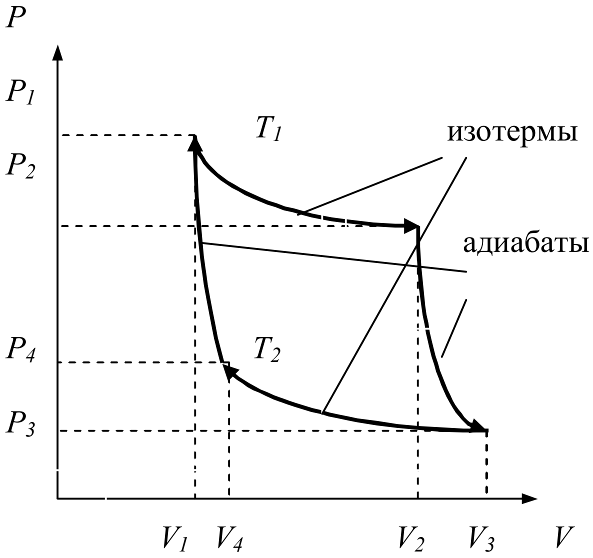


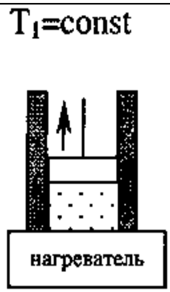
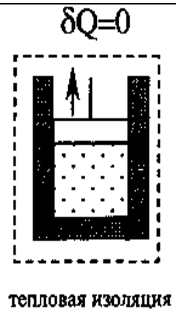
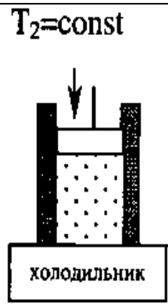
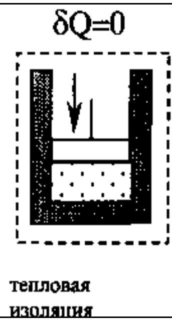
Рис.2.9

К.П.Д. цикла Карно определяется только температурой нагревателя T_1 и холодильника T_2:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (2.38)$$

К.П.Д. всякого реального теплового двигателя ввиду неизбежных тепловых потерь гораздо меньше, чем для цикла Карно.

Таблица 2.1

Процесс	1. Изотермическое расширение	2. Адиабатическое расширение	3. Изотермическое сжатие	4. Адиабатическое сжатие
				
Работа, совершаемая системой	$A_1 = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$	$A_2 = Cv \cdot (T_1 - T_2)$	$A_3 = -RT_2 \ln\frac{V_1}{V_2}$	$A_4 = -C_v \cdot (T_2 - T_1)$

2.8. Энтропия

Для обратимого цикла Карно из выражений (2.37) и (2.38) следует, что

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2},$$

или с учётом того, что Q величина алгебраическая, получим

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Величина $\dfrac{Q}{T}$ называется **приведённым количеством теплоты**. Следовательно, для цикла Карно сумма приведённых количеств теплоты равна нулю. Этот результат можно распространить на любые обратимые циклы, т.е.

$$\sum \frac{\delta Q_i}{T_i} = 0\,,$$

или в пределе

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0\,. \tag{2.39}$$

Полученный результат означает, что $\int\limits_1^2 \dfrac{\delta Q}{T}$ не зависит от пути интегрирования (последовательности промежуточных состояний), то есть величина $\dfrac{\delta Q}{T}$ является полным дифференциалом

$$dS = \frac{\delta Q}{T}\,, \tag{2.40}$$

Функция состояния S, дифференциалом которой является $\dfrac{\delta Q}{T}$, называется **энтропией**: $\left[S\right] = \dfrac{\text{Äæ}}{\text{ì îëü}\cdot \text{Ê}}$.

Изменение энтропии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 равно

$$S_2 - S_1 = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T}\,. \tag{2.41}$$

В частности, для идеального газа

$$\begin{gathered} S_2 - S_1 = \int\limits_1^2 \frac{dU + \delta A}{T} = \frac{m}{M} C_V \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \\ + \frac{m}{M} R \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right) \end{gathered}\,. \tag{2.42}$$

В изолированной системе, предоставленной самой себе, процессы происходят в направлении увеличения энтропии. Следовательно, состояние равновесия характеризуется максимальной энтропией, то есть *dS=0.* ***Обратимые адиабатические процессы,*** *для которых* $\delta Q=0$, характеризуются постоянной энтропией, $S = const$.

Все реальные процессы необратимы. Энтропия в них растет. Поэтому для всех возможных процессов в изолированной системе (включая и обратимый) получаем

$$\Delta S \geq 0 , \qquad (2.43)$$

то ***есть энтропия либо растёт, либо остаётся неизменной***. Этот результат является ещё одним выражением **второго начала термодинамики:** ***в любых процессах, протекающих в изолированных системах, энтропия не убывает***. Второй закон термодинамики определяет направленность тепловых процессов в изолированных системах: они всегда протекают в сторону увеличения энтропии. Если система не изолирована, то её энтропия может как возрастать, так и убывать в зависимости от знака

Как было установлено Больцманом, энтропия связана с термодинамической вероятностью системы *W* следующей формулой

$$S = k \ln W , \qquad (2.44)$$

где k – постоянная Больцмана.

Термодинамическая вероятность *W* - это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы. Чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия, т.е. наиболее вероятном состоянии, число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия. Следовательно, **энтропия *является мерой неупорядоченности системы.***

2.9. Примеры решения задач

Задача 1. В сосуде объёмом V=5 *л* находится азот массой m=1,4 *г* при температуре T=1800 *К*. Найти давление газа, имея в виду, что при этой температуре η=30% молекул диссоциировано на атомы.

Решение

Так как часть молекул диссоциирована на атомы, то в сосуде находится смесь двух газов с молярными массами M_1=28 *г* и $M_2 = M_1/2$ =14 *г*. Уравнения состояния обоих газов имеют вид:

$$P_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT, \tag{1}$$

$$P_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT = 2\frac{m_2}{M_1} RT, \tag{2}$$

где P_1 и P_2 – парциальные давления молекулярного (N_2) и атомарного (N_1) азота. Давление смеси газов подчиняется закону Дальтона:

$$P = P_1 + P_2.$$

Сложим уравнения (1) и (2):

$$\left(P_1 + P_2\right)V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{2m_2}{M_1}\right)RT$$

$$PV = \left(\left(m_1 + m_2\right) + m_2\right)\frac{RT}{M_1}$$

Так как m_1+m_2=m (масса газа), то

$$PV = \frac{m + m_2}{M_1} RT = \frac{mRT\left(1 + \dfrac{m_2}{m}\right)}{M_1} = \frac{mRT\left(1+\eta\right)}{M_1},$$

Отсюда,

$$P = \frac{mRT\left(1+\eta\right)}{VM_1} \approx 1{,}9 \cdot 10^5\, \text{Ï à}.$$

Ответ: $1{,}9 \cdot 10^5$ *Па*.

Задача 2. Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре Т=900 К, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более, чем на 5 *м/с*?

Решение.

Для решения задачи удобно воспользоваться распределением молекул по относительным скоростям u:

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Ne^{-u^2} u^2 du,$$

где $u = \dfrac{v}{v_в}$. Так как часть молекул обладает скоростями превышающими $v_в$, а часть меньшими, чем $v_в$, то $\Delta v = 10 м/с$. Наиболее вероятная скорость при Т=900 К

$$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 900}{0{,}002}} = 2{,}73 \cdot 10^3 м/с.$$

$$u = \frac{v}{v_в} \approx 1, \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_в},$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \cdot \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi} e} \cdot \frac{\Delta v}{v_в} \approx 0{,}003.$$

Ответ: 0,3 % молекул.

Задача 3. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Считать температуру воздуха везде одинаковой и равной 10^{O} *С*.

Решение

Зависимость давления от высоты имеет вид:

$$p = p_0 e^{\frac{-mg\,(h-h_0)}{kT}} = p_0 e^{\frac{-Mg\,(h-h_0)}{RT}}.$$

На уровне моря $h_0=0$, поэтому $\dfrac{p}{p_0} = e^{\frac{-Mgh}{RT}}$.

Прологарифмируем обе части

$$\frac{Mgh}{RT} = -\ln \frac{p}{p_0}.$$

Отсюда,

$$h=-\frac{RT}{Mg}\ln\frac{p}{p_0}=-\frac{8{,}31\cdot 283}{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}81}\ln 0{,}6\approx 4{,}22\cdot 10^3\, м.$$

Ответ: $h=4{,}22\cdot 10^3\, м$.

Задача 4. Найти среднюю продолжительность $\langle\tau\rangle$ свободного пробега молекул кислорода при температуре *T*=250 *К* и давлении Р=100 *Па.*

Решение

Средняя продолжительность $\langle\tau\rangle$ свободного пробега молекул – величина, обратная среднему числу столкновений, происходящих за 1 секунду:

$$\langle\tau\rangle=\frac{1}{\langle z\rangle}.$$

Так как $\langle z\rangle=\sqrt{2}\pi d^2 n\cdot\langle v\rangle$, то

$$\langle\tau\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n\cdot\langle v\rangle}.$$

Здесь $\langle v\rangle$ - средняя арифметическая скорость молекул кислорода

$$\langle v\rangle=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

где n – концентрация молекул кислорода.

Из уравнения состояния идеального газа

$$n=\frac{p}{kT},$$

$$\langle\tau\rangle=\frac{k\sqrt{MT}}{4\sqrt{\pi R}d^2 p}.$$

Эффективный диаметр молекул кислорода (величина справочная) $d=0{,}36\, нм=3{,}6\cdot 10^{-10}\, м$.

$$\langle\tau\rangle = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\sqrt{29\cdot 10^{-3}\cdot 250}}{4\sqrt{\pi\cdot 8{,}31}\cdot 3{,}6^{2}\cdot 10^{-20}\cdot 100} = 2{,}88\cdot 10^{-7}\,c.$$

Ответ: $\langle\tau\rangle = 2{,}88\cdot 10^{-7}\,c.$

Задача 5. Идеальный газ с γ=1,4 расширяется изотермически от объёма V_1 = 0,1 $м^3$ до объёма V_2 = 0,3 $м^3$. Конечное давление газа $P_2 = 2\cdot 10^5$ *Па*. Определить приращение внутренней энергии газа, совершённую газом работу и количество теплоты, полученное газом.

Решение

Так как температура газа не изменится, то приращение его внутренней энергии ΔU=0. Тогда первое начало термодинамики запишется в виде:

$$Q = A.$$

Работа при изотермическом процессе $A = \nu RT \ln\dfrac{V_2}{V_1}$.

Значение νRT найдём из уравнения состояния идеального газа $p_2V_2 = \nu RT$.

Тогда $A = p_2V_2\ln\dfrac{V_2}{V_1} = 2\cdot 10^5\cdot 0{,}3\ln\dfrac{0{,}3}{0{,}1} \approx 6{,}6\cdot 10^4$ *Дж*.

$$Q = A = 6{,}6\cdot 10^4\ Дж.$$

Ответ: $\Delta U = 0,\ A = Q = 6{,}6\cdot 10^4$ *Дж.*

Задача 6. Определить отношение удельных теплоёмкостей γ для смеси газов, содержащей гелий массой m_1=8 *г* и водород массой m_2 = 2 *г*.

Решение

Для нагревания смеси газов массой $m = m_1 + m_2$ на ΔT при постоянном объёме ей необходимо сообщить количество теплоты $Q = c_v m\Delta T$, где c_v - удельная теплоёмкость смеси.

Часть этого количества теплоты, $Q_1 = c_{v_1} m_1 \Delta T$ пойдёт на нагревание гелия, другая часть $Q_2 = c_{v_2} m_2 \Delta T$ - на нагревание водорода. Тогда

$$Q = c_{v_1} m_1 \Delta T + c_{v_2} m_2 \Delta T \ ,$$

$$c_v m \Delta T = c_{v_1} m_1 \Delta T + c_{v_2} m_2 \Delta T.$$

Отсюда

$$c_v = \frac{c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2}{m_1 + m_2} \ .$$

Аналогично находим c_p смеси:

$$c_p = \frac{c_{p_1} m_1 + c_{p_2} m_2}{m_1 + m_2} \ .$$

Здесь c_{v_1}, c_{p_1} и c_{v_2}, c_{p_2} - удельные теплоёмкости гелия и водорода соответственно:

$$c_{v_1} = \frac{i_1}{2}\frac{R}{M_1}; c_{v_2} = \frac{i_2}{2}\frac{R}{M_2}; c_{p_1} = \frac{i_1 + 2}{2}\frac{R}{M_1}; c_{p_2} = \frac{i_2 + 2}{2}\frac{R}{M_2}.$$

Так как гелий – газ одноатомный, то i_1=3, водород – газ двухатомный, следовательно, i_2=5.

Отношение удельных теплоёмкостей:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_{p_1} m_1 + c_{p_2} m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2} = \frac{c_{p_1} m_1 + c_{p_2} m_2}{c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2}.$$

Подставляя выражение для удельных теплоёмкостей, получим:

$$\gamma = \frac{(i_1 + 2)\frac{Rm_1}{M_1} + (i_2 + 2)\frac{Rm_2}{M_2}}{i_1 \frac{m_1}{M_1} + i_2 \frac{m_2}{M_2}} = 1,55 \cdot$$

Ответ: $\gamma = 1{,}55$.

Задача 7. При адиабатном расширении (ν = 2 моль) кислорода, находящегося при нормальных условиях, его объём увеличился в n = 3 раза. Определить изменение внутренней энергии газа и работу расширения газа.

Решение

Первый закон термодинамики для адиабатного процесса имеет вид:

$$\Delta U = -A.$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \nu c_v \Delta T = \nu \cdot \frac{i}{2} R(T_2 - T_1).$$

Конечную температуру найдём из уравнения адиабаты:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}\,;\ T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

Так как $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ и газ двухатомный, то

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}.$$

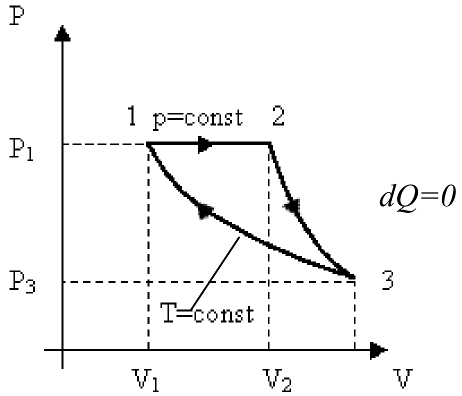
Тогда $\Delta U = \nu \cdot \dfrac{i}{2} R T_1\left[\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \approx -4030\ Дж.$

$$A = -\Delta U = 4030\ Дж.$$

Ответ: $\Delta U = -4030\ Дж, \quad A = 4030\ Дж.$

Задача 8. Вычислить *К.П.Д.* цикла, состоящего из изобарного, адиабатного и изотермического процессов, если в результате изобарного процесса газ нагревается от T_1=300 *К* до T_2=600 *К*.

Решение



В процессе изобарного нагревания 1-2 газ расширяется за счёт поступившего от нагревателя количества тепла Q_{12}, в процессе адиабатного расширения 2-3 dQ=0, в процессе изотермического сжатия газ отдаёт количество теплоты Q_{31} холодильнику. К.п.д. любого цикла определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_{12} - Q_{31}}{Q_{12}}.$$

$$Q_{12} = \nu \cdot c_p R(T_2 - T_1) = \nu \cdot \frac{i+2}{i} R(T_2 - T_1).$$

Первый закон термодинамики для процесса 3-1 имеет вид: $Q_{31} = A$. Так как работа при изотермическом процессе равна

$$A = \nu \cdot RT_1 \ln\frac{V_3}{V_1}, \text{ то } Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \ln\frac{V_3}{V_1}.$$

Объём газа в состоянии 1 найдём из уравнения изобары $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$; $V_1 = \frac{V_2 T_1}{T_2}$.

$$Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \ln\frac{V_3 T_2}{V_2 T_1}$$

Отношение объёмов $\frac{V_3}{V_2}$ найдём из уравнения адиабаты

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \ ; \ \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Тогда

$$Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \ln\left[\frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]$$

и с учётом того, что $T_3 = T_1$, получим

$$Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \ln\left[\frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] = \nu \cdot RT_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \nu \cdot RT_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Так как $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = \dfrac{i+2}{i}$, то $\dfrac{\gamma}{\gamma-1} = \dfrac{i+2}{2}$.

$$Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \frac{i+2}{2} \ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$\eta = \frac{T_2 - T_1 - T_1 \ln\dfrac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1} \approx 0{,}307.$$

Ответ: $\eta = 30{,}7$ %.

Задача 9. Найти изменение энтропии при следующих процессах:

а) при нагревании 100 *г* воды от 0^O C до 100^O *C* и последующем превращении воды в пар той же температуры;

б) при изотермическом расширении 10 *г* кислорода от объёма 25 *л* до объёма 100 *л.*

Решение

а) Полное изменение энтропии ΔS равно сумме изменения энтропии при нагревании воды ΔS_1 и изменения энтропии при превращении воды в пар ΔS_2:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2.$$

Пользуясь определением изменения энтропии, найдём:

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = mc\ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T_2}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T_2},$$

где $Q = rm$ - количество теплоты, переданное при превращении нагретой воды в пар той же температуры, r – удельная теплота парообразования.

$$\Delta S_2 = \frac{rm}{T_2},$$

Тогда

$$\Delta S = mc\ln\frac{T_2}{T_2} + \frac{rm}{T_2} = 0{,}1\cdot 4{,}2\cdot 10^3 \ln\frac{100+273}{0+273} +$$

$$+\frac{22{,}6\cdot 10^5\cdot 0{,}1}{100+273} = 737\frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

б) при изотермическом процессе температура остаётся постоянной, поэтому $\dfrac{1}{T}$ можно вынести за знак интеграла:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}.$$

Согласно I начала термодинамики

$$Q = A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

$$\Delta S = \frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{10^{-2}}{32\cdot 10^{-3}}\cdot 8{,}31\cdot\ln\frac{0{,}1}{0{,}025} = 3{,}6\frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: а) 737 *Дж/К*; б) 3,6 *Дж/К*.

2.10 Задачи для контрольных заданий

2.1. Плотность смеси азота и водорода при температуре t = 47 °С и давлении Р = $2\cdot10^5$ Па равна ρ = 0,3 *г/л.* Найти концентрации молекул азота (n_1) и водорода (n_2) в смеси.

2.2. В баллоне емкостью 2 *дм*^{3} содержится смесь азота N_2 и окиси азота *NO*. Определить массу окиси азота, если масса смеси равна 14 *г,* температура 300 *К* и давление $0{,}6\cdot10^6$ *Па*.

2.3. Найти плотность газовой смеси, состоящей по массе из одной части водорода и восьми частей кислорода при давлении P = 100 *кПа* и температуре T = 300 *К*.

2.4. В баллоне, объём которого 0,25 *м*^{3}, находится газ, состоящий из смеси CO_2 и паров воды. Температура газа 327°*С*. Число молекул углекислого газа $N_1 = 6{,}6\cdot10^{21}$. Найти давление и молярную массу газовой смеси.

2.5. Определить давление и молекулярную массу смеси газов, состоящей из 10*г* кислорода и 10*г* азота, которые занимают объём 20 *л* при температуре 150°*С*.

2.6. Какому давлению необходимо подвергнуть углекислый газ при температуре T = 300*К*, чтобы его плотность оказалась равной ρ = 500 *г/л*?

2.7. На какой высоте h плотность кислорода уменьшается на 1 % ? Температура кислорода 27 °*С*.

2.8. На сколько уменьшится атмосферное давление P = 100 *кПа* при подъёме наблюдателя над поверхностью Земли на высоту h = 200 *м*? Считать, что температура воздуха T = 290 *К* и не изменяется с высотой.

2.9. Масса m каждой из пылинок, взвешенных в воздухе, равна 1*г*. Отношение концентрации n_1 пылинок на высоте h_1=1 *м* к концентрации n_0 их на высоте h_0=0 равна 0,787. Температура воздуха Т=300 *К*. Найти по этим данным значение постоянной Авогадро.

2.10. Установленная вертикально закрытая с обоих концов труба наполнена кислородом. Высота трубы h = 200 *м*, объем $V = 200$ *л*. Стенки трубы имеют всюду одинаковую температуру $T = 293$ *К*. Давление газа внутри трубы, вблизи ее основания равно $P_0 = 10^5$ *Па*. Определить количество молекул кислорода, содержащихся в трубе.

2.11. Вычислить наиболее вероятную, среднюю и средне квадратичную скорости молекул газа, плотность которого при нормальном атмосферном давлении $\rho = 1{,}0$ *г/л*.

2.12. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более, чем на $\Delta\eta = 1\%$ от наиболее вероятной скорости.

2.13. Какая часть молекул кислорода при 0 °*С* обладает скоростью от 100 *м/с* до 110 *м/с*?

2.14. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более, чем на $\Delta\eta = 1{,}5\%$ от средней квадратичной скорости.

2.15. Какая часть молекул газа имеет скорости, превышающие наиболее вероятную скорость?

2.16. Азот находится при нормальных условиях. Найти: а) число столкновений, испытываемых в среднем каждой молекулой за одну секунду; б) число всех столкновений, происходящих между молекулами в 1 $см^3$ азота, ежесекундно. Эффективный диаметр молекул принять равным $3{,}75\cdot10^{-10}$ *м*.

2.17. Найти число столкновений, которые происходят в течение секунды между всеми молекулами, находящимися в объёме $V = 1{,}0$ $мм^3$ водорода при нормальных условиях. Принять для водорода $d = 2{,}3\cdot10^{-10}$ *м*.

2.18. Какова плотность разреженного водорода, если средняя длина свободного пробега молекул равна 1 *см*.

2.19. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул равна 2.5 *см*, если его температура 68°*С*?

2.20. Найти среднюю длину свободного пробега и частоту столкновений молекул при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы воздуха $d = 3\cdot10^{-10}$*м*, масса одного моля $M = 29$ *г/моль*.

2.21. Газообразный водород, находившийся при нормальных условиях в закрытом сосуде объемом V = 5,0 *л*, охладили на ΔT = 55 *К*. Найти приращение внутренней энергии газа и количество отданного им тепла.

2.22. Идеальный газ с γ = 1,4 расширяется изотермически от объема V_1 = 0,1 $м^3$ до объема V_2 = 0,3 $м^3$. Конечное давление газа P_2 = $2{,}0\cdot10^5$ *Па*. Определить приращение внутренней энергии газа, совершенную газом работу и количество полученного газом тепла.

2.23. При изобарном нагревании от 0 до 100 °*С* моль идеального газа поглощает Q = 3,35 *кДж* тепла. Определить:
1) значение γ; 2) приращение внутренней энергии газа ΔU;
3) работу, совершенную газом.

2.24. При адиабатном сжатии кислорода массой m = 20 *г* его внутренняя энергия увеличилась на ΔU = 8 *кДж* и температура повысилась до T_2 = 900 *К*. Найти: 1) повышение температуры ΔT; 2) конечное давление газа P_2, если начальное давление P_1 = 200 *кПа*.

2.25. Какое количество теплоты выделяется при изотермическом сжатии 10*л* газа, находившегося под давлением $1{,}5\cdot10^5$ *Па,* до объёма 2 *л*?

2.26. Чему равны удельные теплоемкости C_v и C_p некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях равна ρ_0 = 1,43 $кг\cdot м^3$? Какой это газ?

2.27. Определить удельные теплоёмкости C_p и C_v для газа, состоящего по массе из 85 % O_2 и 15 % озона (O_3).

2.28. 25 % молекул кислорода диссоциировано на атомы. Определить удельные теплоемкости C_v и C_p такого газа.

2.29. Азот занимает объём V_1=2 $м^3$ и находится под давлением P_1=10^5 *Па*. Газ нагревают сначала при постоянном объёме до давления P_2=$5\cdot10^5$ *Па*, а затем при постоянном давлении до объёма V_2=4 $м^3$. Масса азота m=3 *кг*. Определить изменение внутренней энергии газа, совершенную работу и количество тепла, переданное газу.

2.30. Воздух, занимавший объём V_1= 10 *л* при давлении P_1=100 *кПа*, был адиабатно сжат до объёма V_2=1 *л*. Под каким давлением P_2 находится воздух после сжатия?

2.31. Идеальный двухатомный газ в количестве ν =0,001 *кмоль* совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объём газа 10 *л*, наибольший – 20 л, наименьшее давление $2{,}46 \cdot 10^5$ *Па*, наибольшее – $4{,}1 \cdot 10^5$ *Па*. Начертить график цикла. Определить температуры газа для характерных точек цикла и его КПД.

2.32. Один моль идеального двухатомного газа, находящийся под давлением P_1 = 0,1 *МПа* при температуре T_1 = 300 *К*, нагревают при постоянном объеме до давления P_2 = 0,2 *МПа*. После этого газ изотермически расширяется до начального давления и затем изобарически сжимается до начального объема. Начертить график цикла. Определить температуру газа для характерных точек цикла и его КПД.

2.33. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя равна 470 *К*, температура T_2 холодильника – 270 *К*. При изотермическом расширении газ совершает работу *А* = 100 *Дж*. Определить КПД цикла и количество теплоты Q_2, которое газ отдаёт охладителю при изотермическом сжатии.

2.34. Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа A_1 изотермического расширения газа равна 5*Дж*. Определить работу A_2 изотермического сжатия, если КПД цикла 0,2.

2.35. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 2/3 количества теплоты Q_1, полученного от нагревателя, отдаёт холодильнику. Температура холодильника 275 *К*. Определить температуру нагревателя.

2.36. Найти изменение энтропии при следующих процессах: а) при превращении 1 *кг* воды при 0 °*C* в пар при 100 °*C*; б) при превращении 30 *г* льда в пар при 100 °C, если начальная температура льда - 40 °*C*.

2.37. Найти приращение энтропии одного моля углекислого газа при увеличении его абсолютной температуры в n = 2 раза, если процесс нагревания: а) изохорный; б) изобарный.

2.38. Гелий массой m = 1,7 *г* адиабатически расширили в n = 3 раза и затем изобарически сжали до первоначального объема. Найти приращение энтропии газа в этом процессе.

2.39. Смешали воду массой M_1=5*кг* при температуре T_1=280*К* с водой массой M_2=10*кг* при температуре T_2=350*К*. Найти: 1)температуру смеси; 2) изменение энтропии, происходящее при смешивании.

2.40. Кислород массой M=2кг увеличил свой объём в N=5 раз. Один раз изотермически, другой адиабатически. Найти изменение энтропии в каждом из двух процессов.

3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатика изучает свойства и взаимодействие обладающих электрическим зарядом тел и частиц.

3.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона

В природе существуют два типа электрических зарядов: ***положительные*** **и** ***отрицательные***. Электрический заряд любого тела дискретен, т.е. кратен ***элементарному электрическому заряду*** e ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл*). Электрон и протон являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

Электронейтральность тел и систем объясняется равным количеством положительно и отрицательно заряженных частиц в них. Отрицательный заряд у тел объясняется избыточным количеством электронов в них по сравнению с числом протонов, а положительный – их недостатком.

Распределение макроскопического заряда в пространстве характеризуется введением понятия объемной ρ, поверхностной δ и линейной λ плотности:

$$\rho = \frac{dq}{dV}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \lambda = \frac{dq}{d\ell}, \tag{3.1}$$

где dq – заряд, заключённый соответственно в объёме dV, на поверхности dS и длине dl.

В случае неоднородного распределения заряда, величина q находится путём интегрирования соответствующей плотности:

$$q = \int_V \rho dV \ ; \quad q = \int_S \sigma dS \ ; \quad q = \int_L \lambda \, d\ell \ . \tag{3.2}$$

Все изменения в макро- и микромире происходят с соблюдением **закона сохранения электрического заряда**, согласно которому ***в изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается неизменной***

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = const \,. \tag{3.3}$$

Наличие у тела электрического заряда проявляется во взаимодействии его с другими заряженными телами. Разноименные заряды **притягиваются**, одноименные – **отталкиваются.** Основным законом электростатики является **закон Кулона**, который определяет силу взаимодействия точечных зарядов. **Точечным называется заряд**, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует.

Закон Кулона*:* ***сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме (воздухе) прямо пропорциональна произведению модулей зарядов*** q_1 ***и*** q_2 ***и обратно пропорциональна квадрату расстояния*** r ***между ними***

$$F = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \,, \tag{3.4}$$

где k – коэффициент пропорциональности, величина которого зависит от выбора системы единиц;

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \, {Нм^2}/{Кл^2}, \qquad \text{здесь} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \, {Ф}/{м} \quad -$$

электрическая постоянная.

В векторной форме закон Кулона имеет вид

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^3} \cdot \vec{r} \;, \tag{3.5}$$

где r – вектор, проведенный от одного заряда к другому и имеющий направление к тому из зарядов, к которому приложена сила (рис.3.1).

Силы кулоновского взаимодействия являются **центральными,** т.е. направлены вдоль прямой, соединяющей заряды.

3.2.Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции полей

Взаимодействие зарядов осуществляется посредством ***электрического поля*** – одного из видов материи. Оно существует вокруг заряженных тел и действует на заряды, помещенные в поле, с некоторой силой. Поле, создаваемое неподвижными зарядами и не изменяющееся со временем, **называется *электростатическим.***

Силовой характеристикой электрического поля является **напряженность** $\vec{E}$ ***– это векторная физическая величина, численно равная силе, с которой поле действует на единичный положительный пробный заряд*** q_0***, помещенный в данную точку поля, и направленная в сторону действия силы*** ($[E] = \frac{В}{м} = \frac{Н}{Кл}$):

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \tag{3.6}$$

Словами “**пробный заряд**” подчеркивается то обстоятельство, что он не участвует в создании исследуемого поля и не искажает его, т.е. что он достаточно мал и не вызывает перераспределения зарядов, создающих поле.

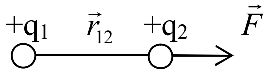


Рис. 3.1

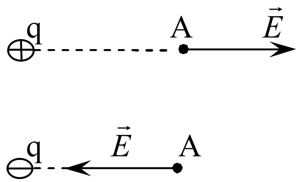


Рис. 3.2

Если поле создано положительным зарядом, то вектор $\vec{E}$ направлен вдоль радиуса-вектора от заряда; если поле создано отрицательным зарядом, то вектор $\vec{E}$ направлен к заряду (рис. 3.2).

Для поля точечного заряда q сила $\vec{F}$, действующая на пробный заряд q_0 со стороны поля, будет равна

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Тогда в соответствии с формулой (3.6) ***напряженность поля точечного заряда***

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}\,, \tag{3.7}$$

а модуль этого вектора будет равен

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\,, \tag{3.8}$$

где r – расстояние до заряда, создающего поле.

Из определения напряженности (3.6) следует, что сила, действующая на всякий точечный заряд q, в точке поля с напряженностью $\vec{E}$ будет равна

$$\vec{F} = q\vec{E}\,. \tag{3.9}$$

Если $q > 0$, то $\vec{F}$ и $\vec{E}$ сонаправлены, если $q < 0$, то направление векторов $\vec{F}$ и $\vec{E}$ противоположны.

Если поле создано системой точечных зарядов q_1, q_2, …, q_n, то из принципа независимости действия сил следует, что результирующая сила $\vec{F}$, действующая со стороны исследуемого поля на пробный заряд q_0, равна векторной сумме сил $\vec{F}_i$, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов q_i:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \; . \tag{3.10}$$

Учитывая, что $\vec{F} = q_0\vec{E}$, $\vec{F}_i = q_0\vec{E}_i$, где $\vec{E}$ – напряженность результирующего поля, $\vec{E}_i$ – напряженность поля, создаваемого одним зарядом q_i, и подставляя эти выражения в (3.10), получим **принцип суперпозиции электростатических полей**

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \; , \tag{3.11}$$

напряжённость Е результирующего электрического поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых в данной точке каждым из этих зарядов в отдельности.

Принцип суперпозиции (3.11) можно использовать для расчета любых электрических полей.

3.3. Линии напряжённости. Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса

Для графического изображения электрических полей применяют ***силовые линии*** (***линии напряжённости***).

<u>**Линии напряжённости**</u> – ***это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора*** $\vec{E}$ (рис. 3.3).

Рис.3.3

Силовые линии электрического поля не замкнуты, они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, они непрерывны и не пересекаются.

Густота линий напряжённости выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную силовым линиям, было равно числовому значению вектора $\vec{E}$.

Рассмотрим некоторую поверхность S, пронизываемую силовыми линиями электрического поля. На этой поверхности выделим элементарную площадку dS, нормаль $\vec{n}$ к которой образует угол α с вектором $\vec{E}$ в окрестности этой площадки (рис.3.4). Число линий $\vec{E}$, пересекающих данную площадку, равно

$$d\Phi = EdS \cdot \cos\alpha = E_n dS \ ,$$

где $E_n = E\cos\alpha$ - проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль к площадке.

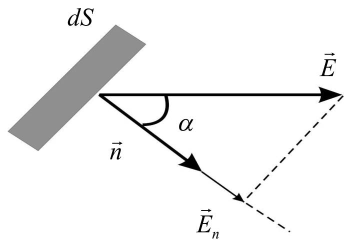


Рис. 3.4

Величина $d\Phi$ называется **потоком вектора** $\vec{E}$ сквозь элементарную площадку dS. Полный поток через поверхность S определяется путём интегрирования по заданной поверхности

$$\Phi = \int_S E_n dS \,. \qquad (3.12)$$

Физический смысл потока: ***Φ - число пересечений силовых линий с данной поверхностью.***

Поток вектора $\vec{E}$ есть ***величина алгебраическая***, знак его зависит от выбора направления нормали к элементарным площадкам, на которые разбивается поверхность S. В случае замкнутых поверхностей под нормалью к dS понимается обращенная наружу, т.е. внешняя нормаль. Поэтому в тех местах, где вектор $\vec{E}$ направлен наружу (т.е. силовые линии выходят из объема, охватываемого поверхностью) E_n и соответственно $d\Phi$ положителен, где вектор $\vec{E}$ направлен внутрь - поток $d\Phi$ будет отрицателен (рис.3.5)

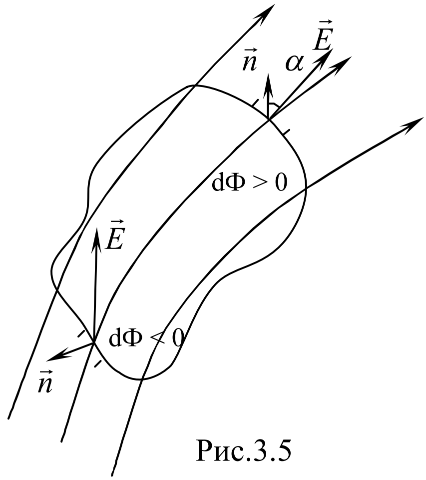


Рис.3.5

Поток вектора $\vec{E}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность зависит только от алгебраической суммы зарядов, охватываемых этой поверхностью.

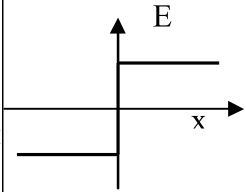
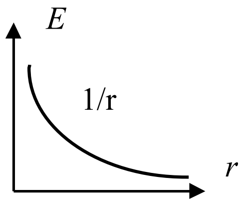
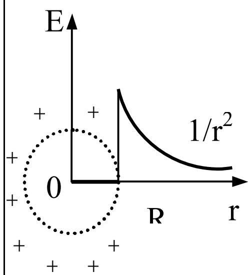
Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме*: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на* ε_0**.**

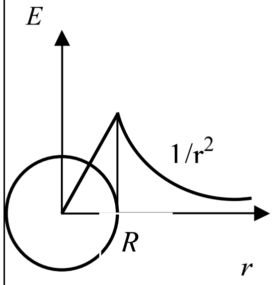
$$\Phi = \oint E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \ . \qquad (3.13)$$

Теорему Гаусса используют для расчета симметричных электрических полей.

В таблице 1 приведены формулы расчета напряжённостей некоторых симметричных полей, полученные с помощью теоремы Гаусса.

Таблица 1.1

№ п/п	Электрическое поле	Формулы напряженности	Графики
1	2	3	4
1	Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости	$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, где σ - поверхностная плотность заряда	
2	Поле бесконечно длинной равномерно заряженной нити	$E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$, r - расстояние от нити, τ - линейная плотность заряда	
3	Равномерно заряженная сферическая поверхность	E=0, r<R где R - радиус сферы, r - расстояние от центра сферы, σ - поверхностная плотность заряда $\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2} \\ или \\ E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} r \geq R$	

1	2	3	4
4	Поле объемно заряженного шара	$E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r,\ r < R$ $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2},\ r \geq R$ где R - радиус шара, r - расстояние от центра шара, ρ - объёмная плотность заряда	

3.4. Работа сил электрического поля. Потенциал

Вычислим работу, совершаемую силами поля неподвижного точечного заряда q над перемещающимся в этом поле точечным зарядом q_0 (рис.3.6). Работа на элементарном пути dl равна

$$dA = F \cdot dl \cdot \cos\alpha = F \cdot dr,$$

где $dr = dl \cdot \cos\alpha$ – изменение радиуса – вектора движущегося заряда.

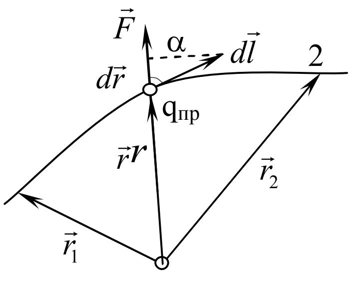


Рис.3.6

Учитывая, что $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q \cdot q_0}{r^2}$, получим

$$dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot dr \; .$$

Выражение для работы на пути 1 – 2 будет иметь вид

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \qquad (3.14)$$

Таким образом, работа сил электростатического поля не зависит от пути перемещения электрического заряда, а зависит лишь от начального и конечного положения этого заряда (r_1 и r_2). Следовательно, силы, действующие на заряд q_0 в поле неподвижного заряда q, являются ***консервативными.*** Полученный вывод справедлив для любого электростатического поля.

Работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю, т.е.

$$A = \oint F dl \cos\alpha = 0 \; .$$

Учитывая, что $F = q{\cdot}E$, а $E{\cdot}cos\alpha = E_l$ – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения dl, получим $A = q\oint E_l dl = 0$. Так как $q \neq 0$, то

$$\oint E_l dl = 0 \; . \qquad (3.15)$$

Соотношение (3.15), называемое **<u>теоремой о циркуляции вектора</u>** $\vec{E}$, **выполняется для любого замкнутого контура, и его следует рассматривать как критерий потенциальности электрического поля**: ***циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.***

Тело, находящееся в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией, за счет которой совершается работа силами поля. Следовательно

$$A_{12} = -\Delta W_p = W_{p_1} - W_{p_2} \; . \qquad (3.16)$$

Из сравнения (3.16) и (3.14) следует, что потенциальная энергия заряда q_0 в поле заряда q на расстоянии r от него имеет вид

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r}. \quad (3.17)$$

Энергетической характеристикой поля является <u>потенциал φ</u> – ***это физическая величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля***

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0}. \quad (3.18)$$

Подставляя в (3.18) значение потенциальной энергии (3.17), получим выражение для потенциала поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}. \quad (3.19)$$

Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, ***равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности:***

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \quad (3.20)$$

или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}. \quad (3.21)$$

Из соотношения (3.18) вытекает, что заряд q_0, находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией

$$W_p = q_0 \cdot \varphi. \quad (3.22)$$

Следовательно, работа сил поля над зарядом q_0 может быть выражена через разность потенциалов

$$A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.23)$$

Таким образом, **работа, совершаемая над зарядом силами поля,** ***равна произведению величины заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.***

Если заряд q_0 из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где потенциал равен нулю), то работа сил поля будет равна

$$A_\infty = q_0 \cdot \varphi \,. \tag{3.24}$$

Отсюда следует, что **потенциал численно равен работе*****, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки поля в бесконечность***

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0} \,. \tag{3.25}$$

3.5. Эквипотенциальные поверхности. Связь между напряженностью и потенциалом

Для графического изображения электростатических полей наряду с силовыми линиями используют эквипотенциальные поверхности. **Эквипотенциальная поверхность –** ***это поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал***. Линии напряженности всегда *перпендикулярны* к эквипотенциальным поверхностям.

Эквипотенциальные поверхности условились проводить с такой густотой, чтобы потенциалы двух смежных эквипотенциальных поверхностей отличались на единицу потенциала, тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине напряжённости электростатического поля. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше. Зная расположение линий напряженности можно построить эквипотенциальные поверхности и, наоборот, по известному расположению эквипотенциальных поверхностей можно определить в каждой точке поля величину и направление напряженности поля.

Величина, характеризующая быстроту изменения потенциала в пространстве, носит название градиента потенциала **(** $gr\vec{a}d\varphi$ **).**

Градиент потенциала ***есть вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности от меньшего значения потенциала к большему.*** Тогда

$$\vec{E} = -gr\vec{a}d\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \quad . \tag{3.26}$$

Знак минус в формуле (3.26) показывает, что вектор напряженности электрического поля направлен в сторону убывания потенциала.

По формуле (3.26), зная потенциал поля, можно найти вектор напряженности поля $\vec{E}$. В тоже время можно решить и обратную задачу, т.е. по заданным значениям $\vec{E}$ в каждой точке
найти разность потенциалов между произвольными точками поля. Для этого учтём, что работа, совершаемая силами поля над зарядом q_0 при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть вычислена по одной из формул:

$$A_{12} = \int_1^2 q_0 E_l dl \ , \qquad A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) \ .$$

Приравнивая эти выражения и сокращая на q_0, получим

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 E_l dl \quad . \tag{3.27}$$

Интеграл в правой части можно брать по любому пути, соединяющему точки 1 и 2, так как работа сил поля не зависит от формы пути.

Используя формулу (3.27) для вычисления разности потенциалов между двумя точками, взятыми в однородном поле напряженности E, получим

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = Ed \quad , \tag{3.28}$$

где под d следует понимать проекцию расстояния l_{12} на направление вектора $\vec{E}$ (рис. 3.7).

3.6. Проводники в электрическом поле

Проводники – это материалы, в которых присутствуют свободные электрические заряды, способные перемещаться под действием сил поля. Поэтому равновесие зарядов в проводнике может наблюдаться лишь при выполнении следующих условий:

1. Напряженность поля всюду внутри проводника должна быть равна нулю ($E=0$).
2. На поверхности проводника напряженность поля в каждой точке должна быть направлена по нормали к поверхности ($E = E_n$).

Из этих условий следует, что проводник представляет собой эквипотенциальную область, т. е . в объёме и на поверхности проводника $\varphi = const$. Если проводящему телу сообщить некоторый заряд q,то он распределится так, чтобы соблюдались условия равновесия. Выполнение этих условий приводит к тому, что все заряды распределяются по поверхности проводника с некоторой плотностью σ. Напряженность поля вблизи поверхности заряженного металлического проводника пропорциональна поверхностной плотности заряда:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{3.29}$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Плотность зарядов на поверхности проводника зависит от величины и направления кривизны поверхности – она растёт с увеличением положительной кривизны (выпуклости) и убывает с ростом отрицательной кривизны (вогнутости) рис.3.9.

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение и у концов проводника возникают ***индуцированные заряды***

противоположного знака. Поле индуцированных зарядов направлено противоположно внешнему. Перераспределение зарядов происходит до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника перпендикулярными к его поверхности (рис. 3.9).

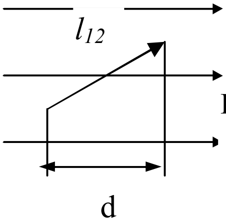


Рис.3.7

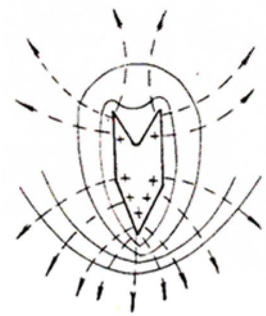


Рис. 3.8

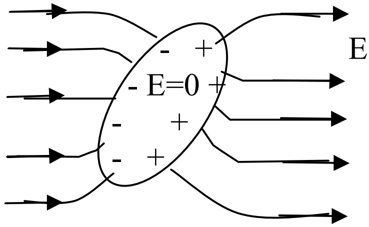


Рис. 3.9

Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности: они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных. На этом основывается **электростатическая защита**.

3.7. Диэлектрики в электрическом поле

Диэлектрики - вещества, в которых при не слишком высоких температурах и в отсутствие сильных электрических полей нет свободных зарядов, способных проводить электрический ток.

Молекулы диэлектрика электрически нейтральны, но в зависимости от положения центров положительных зарядов ядер и отрицательных зарядов всех электронов различают полярные и неполярные молекулы.

К **полярным относятся несимметричные молекулы** (*CO, NH, HCl* и др.) у которых центры тяжести зарядов разных знаков сдвинуты друг относительно друга (рис.3.10). Они обладают собственным **дипольным моментом**

$$\vec{p} = q\vec{l} \ , \tag{3.30}$$

где l – плечо диполя.

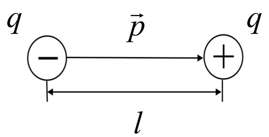
К неполярным молекулам относятся симметричные молекулы (H_2, N_2, O_2 и т.д.), у которых в отсутствие внешнего электрического поля центры положительных и отрицательных зарядов совпадают. Такие молекулы не обладают собственным дипольным моментом.

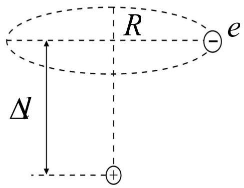
При внесении неполярной молекулы во внешнее электрическое поле в ней **индуцируется (наводится) дипольный момент** за счет смещения плоскости орбиты электрона на малое расстояние Δl (рис.3.11). Величина дипольного момента пропорциональна напряженности внешнего поля *E,* а направление вектора $\vec{p}$ совпадает с направлением вектора $\vec{E}$:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \beta \ \vec{E} \ , \tag{3.31}$$

где β – поляризуемость молекулы – величина, пропорциональная объему молекулы; ε_0 – электрическая постоянная.

Действие внешнего поля на полярную молекулу сводится к повороту диполя $\vec{p}$ в направлении поля (рис.3.12).





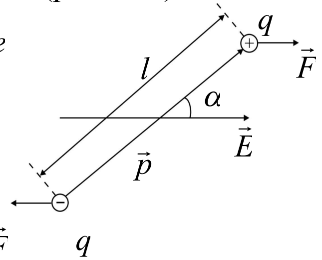


Рис.3.10 Рис. 3.11 Рис. 3.12

Вращающий момент $\vec{M}$, действующий на диполь, равен векторному произведению векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$

$$\vec{M} = \left[\vec{p}\vec{E}\right], \tag{3.32}$$

а модуль механического момента

$$M = pE\sin\alpha\,. \tag{3.33}$$

В отсутствие внешнего электрического поля суммарный дипольный момент как полярных, так и неполярных диэлектриков равен нулю. При внесении диэлектрика во внешнее электростатическое поле происходит его поляризация, приводящая к возникновению некоторого суммарного электрического момента молекул. Существует **три типа поляризации**: ***ориентационная***, ***электронная*** *и* ***ионная***.

Ориентационная поляризация характерна для диэлектриков с полярными молекулами. Под действием поля жесткие диполи стремятся повернуться таким образом, чтобы дипольные моменты совпадали с направлением вектора напряженности поля $\vec{E}$. Этому препятствует тепловое движение молекул, поэтому степень преимущественной ориентации их дипольных моментов уменьшается с повышением температуры.

Электронная поляризация наблюдается в диэлектриках с неполярными молекулами. В электрическом поле неполярные молекулы приобретают индуцированные дипольные моменты (3.31), направленные вдоль поля. Данный вид поляризации не зависит от теплового движения молекул, а, следовательно, и от температуры.

Ионная поляризация имеет место в кристаллических диэлектриках с ионными решетками типа $NaCl$. Под действием поля положительные ионы смещаются вдоль поля, а отрицательные – против поля. Это приводит к возникновению электрического момента у диэлектрика.

Рассмотренные типы поляризации могут сочетаться друг с другом.

Количественной мерой поляризации диэлектрика служит **вектор поляризации** – ***электрический момент единицы объема диэлектрика***

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\ , \qquad (3.34)$$

где n – число диполей, содержащихся в объеме V, диэлектрика; $\vec{p}_i$ – электрический момент i – го диполя.

В слабых электрических полях для диэлектриков любого типа

$$\vec{P} = \varepsilon_0 æ \vec{E}\ , \qquad (3.35)$$

где æ (капа) – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Благодаря поляризации диэлектрика (при любом ее типе) у той его поверхности, в которую входят силовые линии внешнего поля, получается избыток отрицательных зарядов (отрицательно заряженных концов молекул-диполей). У противоположной поверхности, из которой выходят силовые линии, возникает избыточный положительный заряд (рис.3.13).

Эти так называемые поляризационные или связанные заряды распределяются по поверхности диэлектрика с поверхностной плотностью σ'.

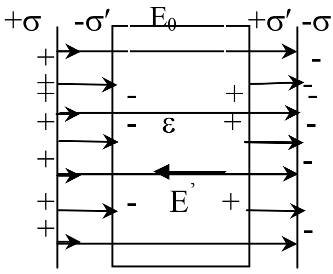


Рис. 3.13

Поверхностная плотность поляризованных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации.

$$\sigma' = P_n\ .$$

Выразив P через E (3.35), приходим к формуле

$$\sigma' = \varepsilon_0 æ E_n\ ,$$

где E_n – нормальная составляющая напряженности поля внутри диэлектрика.

Образование поляризованных зарядов приводит к возникновению дополнительного электрического поля $\vec{E}'$, которое направлено против внешнего поля E_0 и ослабляет последнее. Поэтому результирующее поле $\vec{E}$ внутри диэлектрика в силу принципа суперпозиции равно

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \text{ или } E = E_0 - E'. \qquad (3.36)$$

Учитывая, что

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0} = æ\frac{\varepsilon_0 E'}{\varepsilon_0} = æE,$$

будем иметь

$$E = E_0 - æE \quad \text{или} \quad E(1 + æ) = E_0.$$

Величина $1 + æ = \varepsilon$, называемая относительной **диэлектрической проницаемостью среды,** ***показывает во сколько раз поле в диэлектрике меньше чем в вакууме, т.е.***

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \qquad (3.37)$$

Густота силовых линий в диэлектрике также в ε раз меньше, чем в вакууме, поскольку на границе диэлектрика часть силовых линий заканчивается на связанных зарядах

Для простоты описания поля в диэлектрике вводят **вектор электрического смещения** $\vec{D}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \qquad (3.38)$$

Вектор $\vec{D}$ совпадает с вектором $\vec{E}$ и характеризует то электрическое поле, которое создаётся только свободными зарядами (т.е. в вакууме), но при таком их расположении в пространстве, какое имеет место в присутствии диэлектрика. Густота силовых линий $\vec{D}$ на границе диэлектриков с разными значениями ε остается неизменной. Поэтому при наличии диэлектрика электрическое поле удобнее изображать с помощью линий электрического смещения.

Вектор электрического смещения можно выразить и через вектор поляризации диэлектрика

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{3.39}$$

Теорема Гаусса для потока вектора смещения $\vec{D}$ электрического поля в любой среде записывается в виде

$$\oint D_n dS = \sum q, \tag{3.40}$$

и формулируется следующим образом: ***поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, заключённых внутри этой поверхности.***

Расчёт симметричных полей в диэлектриках наиболее просто осуществлять с помощью теоремы Гаусса (3.40) при этом сначала определяют электрическое смещение D, а затем на основании (3.38) – напряжённость E. Далее на основании (3.26) можно исследовать потенциал поля.

3.8. Электроемкость уединенного проводника. Конденсаторы

При сообщении проводнику электрического заряда потенциал поля возрастает не только возле проводника, но и на его поверхности прямо пропорционально величине заряда. Коэффициент пропорциональности **называется электрической емкостью проводника**

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{3.41}$$

Электроемкость проводника численно равна величине заряда, который нужно сообщить данному проводнику для увеличения его потенциала на единицу.

В СИ за единицу электроемкости принимают ёмкость **1 фарада** – ***это емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.***

Электроемкость уединенного проводника зависит от его формы и размеров, а также от диэлектрической проницаемости окружающей среды. Емкость не зависит ни от заряда проводника, ни от его потенциала, так как с увеличением q во столько же раз увеличивается φ.

Емкость проводника, имеющего форму шара радиуса R, погруженного в однородный диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью ε, равна

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\ . \qquad (3.42)$$

При сообщении проводнику A заряда q окружающие его проводники ***заряжаются через влияние***, причем ближайшими к наводящему заряду q оказываются заряды противоположного знака (рис.3.13). Эти заряды ослабляют поле, созданное зарядом q. Таким образом они понижают потенциал проводника A, а следовательно повышают его емкость. Идя по этому пути можно создавать приборы большой емкости, называемые **конденсаторами.**

Конденсатор – система, состоящая из двух проводников (обкладок) с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами, форма и расположение которых таковы, что поле сосредоточено в узком зазоре между обкладками.

Ёмкость конденсатора численно равна заряду, который нужно перенести с одного проводника на другой для изменения разности потенциалов между ними на единицу

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}\ . \qquad (3.43)$$

Она зависит от формы, размеров и взаимного расположения проводников, а также от диэлектрической проницаемости среды.

В зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на плоские, сферические, цилиндрические.

Плоский конденсатор состоит из двух проводящих плоских пластин площадью S каждая, пространство между которыми заполнено диэлектриком с проницаемостью ε. Если линейные размеры пластин велики по сравнению с расстоянием d между ними, то электростатическое поле между пластинами можно считать однородным. Емкость плоского конденсатора рассчитывается по формуле:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \tag{3.44}$$

Емкость **цилиндрического конденсатора**

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(r_2/r_1\right)}, \tag{3.45}$$

где l – длина обкладок конденсатора, r_1 и r_2 – радиусы каоксиальных цилиндров.

Для получения нужной емкости конденсаторы соединяют параллельно или последовательно в батареи. При параллельном соединении (рис.3.14) $U = const$, а $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$, поэтому

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i, \tag{3.46}$$

где C_i – емкость i – го конденсатора, n – число конденсаторов.

При последовательном соединении (рис.3.15) $q = const$, $U = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$, тогда

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_1}. \tag{3.47}$$

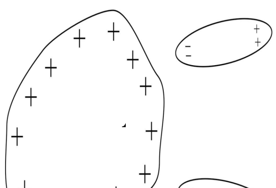


Рис. 3.13

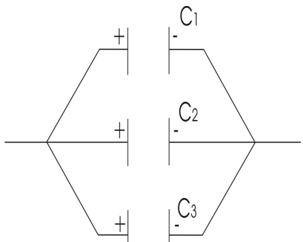


Рис. 3.14

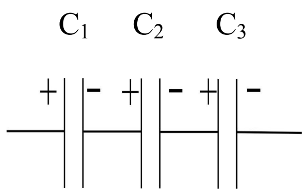


Рис. 3.15

3.9. Энергия электрического поля

Потенциальную энергию взаимодействия двух зарядов можно выразить через потенциалы полей этих зарядов

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_q}{r} = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2), \qquad (3.48)$$

где φ_1 – потенциал, создаваемый вторым зарядом в точке расположения первого заряда; φ_2 – потенциал, создаваемый первым зарядом в точке расположения второго.

Энергия взаимодействия точечных зарядов, в силу её аддитивности, равна сумме энергий каждой пары зарядов и определяется выражением

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i, \qquad (3.49)$$

где φ_I - потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме q_i, в точке нахождения заряда q_i.

Используя формулу (3.49), определим энергию заряженного проводника и конденсатора. Так как проводник является эквипотенциальным, то

$$W = \frac{1}{2}\varphi\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{2}q\varphi. \qquad (3.50)$$

С учётом (3.41) можно получить и другие выражения для энергии заряженного проводника

$$W = \frac{1}{2}q\varphi = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \qquad (3.51)$$

Аналогичным образом, для энергии заряженного конденсатора в соответствии с (3.49) будем иметь

$$W = \frac{1}{2}[(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qU}{2}$$

а, следовательно, и другие выражения

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \qquad (3.52)$$

Электрическая энергия, определяемая формулой (3.52), может рассматриваться как энергия электростатического поля, существующего в конденсаторе. Поэтому есть смысл выразить эту энергию через напряжённость $\vec{E}$, характеризующую это поле. На основании соотношений

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \qquad \text{и} \qquad U = Ed\ ,$$

получим

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S(Ed)^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V.$$

Поскольку поле плоского конденсатора однородно, то его объёмная плотность энергия определяется следующими выражениями

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}\ . \tag{3.53}$$

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно путём интегрирования найти энергию поля, заключённого в любом объёме V:

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV$$

3.10. Примеры решения задач

Задача 1. Три одинаковых положительных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = q = 1\,нКл$ расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд q_0 нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах.

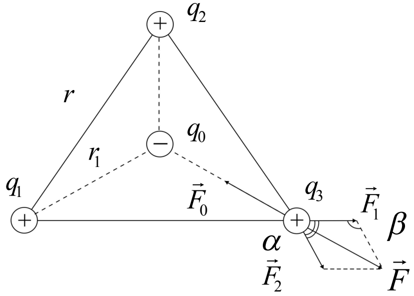
Решение

Все три заряда, расположенные в вершинах треугольника, находятся в одинаковых условиях, поэтому достаточно рассмотреть условие равновесия одного из трех зарядов, например q_3.

В соответствии с принципом суперпозиции на заряд q_3 действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд q_3 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F} + \vec{F}_0 = 0, \tag{1}$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_0$ – силы, с которыми соответственно действуют на заряд q_3 заряды q_1, q_2 и q_0; $\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_1$.



Так как силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_0$ направлены по одной прямой, то векторное равенство (1) можно заменить скалярной суммой:

$$F - F_0 = 0 \text{ или } F = F_0.$$

Выразив F через F_1 и F_2 и учитывая, что $F_1 = F_2$, получим

$$F_0 = F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta} = F_1\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $q_1 = q_2 = q_3 = q$, найдем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{\varepsilon \cdot r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{\varepsilon \cdot r}\sqrt{2(1+\cos\alpha)},$$

откуда

$$q_0 = \frac{qr_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,. \qquad (2)$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos 30^0} = \frac{r}{\sqrt{3}}, \quad \cos\alpha = \cos 60^0 = \frac{1}{2}\,.$$

С учетом этого формула (2) примет вид

$$q_0 = q/\sqrt{3}\,.$$

После подстановки числовых значений получим

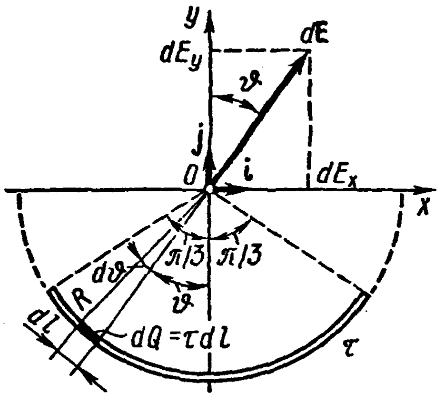
$$q_0 = 0{,}58\ \textit{нКл}.$$

Задача 2. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности, равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ =10 *нКл/м.* Определить напряженность E и потенциал φ электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина l нити составляет 1/3 длины окружности и равна 15 *см*.

Решение

Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпало с центром кривизны дуги, а ось Oy была бы симметрично расположена относительно концов дуги. На нити выделим элемент длины dl. Заряд $\mathrm{d}Q = \tau \mathrm{d}l$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным.

Определим напряженность электрического поля в точке O. Для этого найдем сначала напряженность dE поля, создаваемого зарядом dQ:



$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента dl к точке, в которой вычисляется напряженность.

Выразим вектор $d\boldsymbol{E}$ через проекции $d\boldsymbol{E}_x$ и $d\boldsymbol{E}_y$ на оси координат:

$$d\vec{E} = \vec{i}dE_x + \vec{j}d\vec{E}_y,$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы направлений (орты).

Напряженность E найдем интегрированием. Интегрирование ведется вдоль дуги длиной l.

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i}\int_l dE_x + \vec{j}\int_l dE_y.$$

В силу симметрии $\int_l dE_x = 0$. Тогда

$$\vec{E} = \vec{j}\int_l dE_y, \tag{1}$$

где $\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\vartheta = \tau \mathrm{d}l\cos\vartheta/(4\pi\varepsilon_0 r^2).$

$$\mathrm{d}E_y = \frac{\tau R\mathrm{d}\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\vartheta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta.$$

Так как $r=R=\mathrm{const}$, $dl = Rd\vartheta$, то

Подставим dE_y в выражение (1) и, приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси Oy, пределы интегрирования возьмем от 0 до $\pi/3$, а результат удвоим:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{j}}\frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/3}\cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta = \vec{\mathbf{j}}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sqrt{3}/2.$$

Выразив радиус R через длину l нити ($3l=2\pi R$), получим

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{j}}\frac{\tau}{6\varepsilon_0 l}\sqrt{3}. \tag{2}$$

Из этой формулы видно, что напряженность поля по направлению совпадает с осью *Oy*.

Найдем потенциал электрического поля в точке *O*. Сначала найдем потенциал $d\varphi$, поля создаваемого точечным зарядом dQ в точке O:

$$d\varphi = \tau\, dl /(4\pi\varepsilon_0\, r).$$

Заменим *r* на *R* и проведем интегрирование:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^l \mathrm{d}l = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Так как $l = 2\pi R/3$, то

$$\varphi = \tau /(6\varepsilon_0). \qquad (3)$$

Произведем вычисления по формулам (2) и (3):

$$E = \frac{10^{-8} * 1,73}{6 * 8,85 * 10^{-12} * 0,15}\text{ В/м} = 2,18\text{ кВ/м},$$

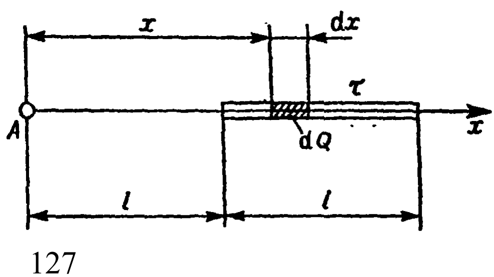
$$\varphi = \frac{10^{-8}}{6 * 8,85 * 10^{-12}}\text{ В} = 188\text{ В}.$$

Задача 3. На тонком стержне длиной *l* равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ =10 *нКл/м.* Найти потенциал φ, созданный распределенным зарядом в точке А, расположенной на оси стержня и удаленной от его ближайшего конца на расстояние *l*.

Решение

В задаче рассматривается поле, создаваемое распределенным зарядом. В этом случае поступают следующим образом. На стержне выделяют малый участок длиной $\mathrm{d}x$. Тогда на этом участке будет сосредоточен заряд $dQ = \tau\, dx$, который можно считать точечным.

Потенциал $d\varphi$, создаваемый этим точечным зарядом в точке А, можно определить по формуле



$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\tau \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, потенциал электрического поля, создаваемого заряженным стержнем в точке А, найдем интегрированием этого выражения:

$$\varphi = \int_l^{2l} \frac{\tau \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_l^{2l} \frac{\mathrm{d}x}{x}; \qquad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln x \Big|_l^{2l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2.$$

Подставим числовые значения физических величин в СИ (τ=10·10^{-9} *Кл/м*, 1/(4πε$_0$)=9·10^9 *м/Ф*) и произведем вычисления:

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}693 = 62{,}4\ В.$$

Задача 4. Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд $q_0 = 10^{-6}$ *Кл* из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии *l=10 см* от поверхности металического шарика? Потенциал шарика $\varphi_0 = 200$ *В*, радиус его *R=2 см*. Шарик находится в воздухе.

Решение

Искомая работа с учетом того, что потенциал в бесконечности равен нулю, определяется по формуле:

$$A = q(\varphi - \varphi_\infty) = q\varphi,$$

где φ – потенциал поля в данной точке.

Этот потенциал найдем по формуле для поля точечного заряда как если бы заряд Q, находящийся на поверхности шара, был расположен в центре шара

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R + l)}.$$

Потенциал на поверхности шарика φ_0 связан с электроемкостью шара ($C = 4\pi\varepsilon_0 R$) формулой

$$\varphi_0 = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

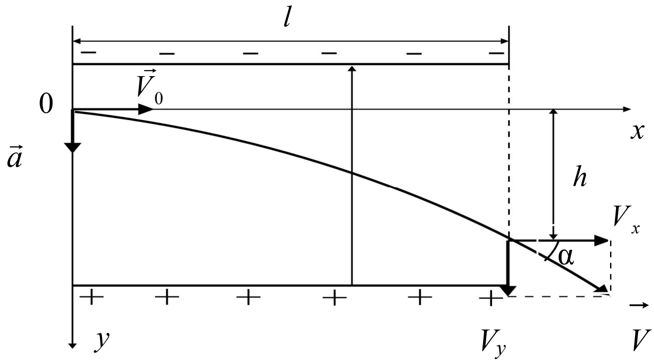
Отсюда, $Q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi_0$. Таким образом, $\varphi = \dfrac{R\varphi_0}{R+l}$.

Следовательно, искомая работа $A = \dfrac{qR\varphi_0}{R+l} = 33$ *мкДж*.

Задача 5. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $\upsilon_0 = 10^7 \, м/с$. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100\, В/см$, длина конденсатора l = *5см*. найти модуль и направление скорости электрона в момент вылета из конденсатора. На сколько отклонится электрон от первоначального направления?

Решение

Совместим начало координат с точкой, где находился электрон в момент его попадания в поле конденсатора. Движение электрона в конденсаторе можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений: равномерного движения со скоростью $\upsilon_x = \upsilon_0$ в горизонтальном направлении и равноускоренного движения с некоторым ускорением $\vec{a}$ вдоль оси ОУ.



Ускорение вдоль оси ОУ создает электростатическая сила (силой тяжести по сравнению с электростатической пренебрегаем)

$$a = \frac{eE}{m},$$

где e – заряд электрона, E – напряженность поля.

Тогда уравнения, определяющие зависимость координат x и y и проекций скорости υ_x и υ_y от времени, будут иметь вид:

$$x = V_0 t\,,\quad y = \frac{at^2}{2} = \frac{eEt^2}{2m}, \tag{1}$$

$$V_x = V_0,\; V_y = at = \frac{eEt}{m}. \tag{2}$$

В момент вылета из конденсатора $x = l$, $y=h$, $t = t_1$. Тогда получим

$$t_1 = \frac{l}{\upsilon_0};\; V_y = \frac{eEl}{m\upsilon_0};\; h = \frac{eEl^2}{2m\upsilon_0^2}. \tag{3}$$

В момент вылета модуль скорости $\vec{\upsilon}$ равен

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2} = \sqrt{\upsilon_0{}^2 + \left(\frac{eEl}{m\upsilon_0}\right)^2}\,. \tag{4}$$

Направление вектора определяется углом α, для которого, как видно из рисунка,

$$tg\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_0} = \frac{eEl}{m\upsilon_0{}^2}. \tag{5}$$

Подставляя числовые значения величин в выражения (3) – (5) и учитывая, что заряд электрона $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ *Кл*, его масса $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг*, получим

$$h = 2{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{м},\ V = 1{,}3\cdot 10^{7}\ \text{м}/\text{с};\ tg\alpha = 0{,}9;\ \alpha \approx 42^0.$$

Задача 6. Конденсатор емкостью C_1=3*мкФ* был заряжен до разности потенциалов U_1=40*В*. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью C_2=5*мкФ*. Какая энергия *W'* израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

Решение

Энергия, израсходованная на образование искры,

$$W' = W_1 - W_2, \qquad (1)$$

где W_1 – энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; W_2 – энергия, которую имеет батарея, составленная из двух конденсаторов.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = 1/2CU^2 , \qquad (2)$$

где *C* – емкость конденсатора или батареи конденсаторов.

Выразив в формуле (1) энергии W_1 и W_2 по формуле (2) и приняв во внимание, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, получим

$$W' = \tfrac{1}{2} C_1 U_1^2 - \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2) U_2^2, \qquad (3)$$

где U_2 – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}. \qquad (4)$$

Подставив выражение U_2 в (3), найдем

$$W' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2},$$

или

$$W' = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2.$$

Произведем вычисления:

3.11. Задачи для контрольных заданий

$$W' = \frac{1}{2}\frac{3 * 10^{-6} * 5 * 10^{-6}}{3 * 10^{-6} + 5 * 10^{-6}} * 1600 \text{Дж} = 1,5 \ \text{мДж}.$$

3.1. Четыре одинаковых точечных заряда q=10 *нКл* расположены в вершинах квадрата со стороной *a*=10 см. Найти силу, действующую со стороны трех зарядов на четвертый.

3.2. Четыре одинаковых по модулю точечных заряда |q|=20 *нКл,* два из которых положительны, а два отрицательны, расположены в вершинах квадрата со стороной *a* =20 *см*. Найти силу, действующую на помещенный в центр квадрата положительный точечный заряд *Q* =20 *нКл*.

3.3. Три одинаковых точечных заряда *q* =$20 \cdot 10^{-9}$ *Кл* расположены в вершинах равностороннего треугольника. На каждый заряд действует сила *F* =10 *мН*. Найти длину *a* стороны треугольника.

3.4. Три одинаковых точечных заряда *q* =9 *нКл* расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой точечный заряд q_0 нужно поместить в центре треугольника, чтобы система находилась в равновесии?

3.5. Два положительных точечных заряда находятся на расстоянии 0,5 *м* один от другого. Один заряд вдвое больше другого. На прямой, их соединяющей, находится в равновесии заряженный шарик. Найти расстояние от этого шарика до большего заряда. Будет ли равновесие устойчивым?

3.6. Заряды q_1 = 40 *нКл* и q_2 = -10 *нКл* расположены на расстоянии *r* =10 *см* друг от друга. Какой надо взять третий заряд и где следует его поместить, чтобы система находилась в равновесии?

3.7. Два шарика массой *m* =0,1 *г* каждый подвешены в одной точке на нитях длиной *l* =20 *см* каждая. Получив одинаковые заряды, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол $2\alpha = 60^{o}$. Найти заряд каждого шарика.

3.8. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α. Шарики погружаются в масло с плотностью ρ_o =$8 \cdot 10^2$ *кг/м*^{3}. Определить диэлектрическую проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло останется неизменным. Плотность материала шариков ρ =$1{,}6 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

3.9. Два одинаковых шарика подвешены в воздухе на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После того, как каждому шарику был сообщен заряд q =0,4 *мкКл*, шарики разошлись на угол $2\alpha = 60^o$. Найти массу шариков, если расстояние от центров шариков до точки подвеса l =0,2 *м*.

3.10. Маленький шарик массой m =0,01 *мг*, несущий заряд q =10 *нКл*, помещен в однородное электрическое поле, направленное горизонтально. Шарик приходит в движение без начальной скорости и через время t = 4 *с* приобретает скорость υ =50 *м/с*. Найти напряженность поля.

3.11. Расстояние d между точечными положительными зарядами $q_1 = 9q$ и $q_2 = q$ равно 8 *см*. На каком расстоянии r от первого заряда находится точка, в которой напряженность E поля зарядов равна нулю? Где находилась бы эта точка, если бы второй заряд бал отрицательным?

3.12. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами q_1 =40 *нКл* и q_2 = -10 *нКл*, находящимися на расстоянии d =10 *см* друг от друга. Определить напряженность E в точке, удаленной от первого заряда на r_1 = 12 *см* и от второго на r_2 = 6 *см*.

3.13. В вершинах квадрата со стороной a =5 *см* находятся одинаковые положительные заряды q = 2 *нКл*. Определить напряженность поля в середине одной из сторон квадрата.

3.14. Электростатическое поле создано двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными с поверхностной плотностью σ_1 =1 *нКл/м*^{2} и σ_2 = -2 *нКл/м*^{2}. Определить напряженность электростатического поля:

1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей. Построить график *E(x)*.

3.15. Одинаковые по модулю, но разные по знаку заряды |q|=18 нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной а=2 м. Найти напряженность поля Е в третьей вершине треугольника.

3.16. В однородном электрическом поле с напряженностью $E = 10^6$ *В/м*, направленной под углом $\alpha = 30^o$ к вертикали, висит на нити шарик массой $m = 2$ *г*, несущий заряд $q = 10$ *нКл*. Найти силу натяжения нити.

3.17. В двух вершинах равностороннего треугольника помещены одинаковые заряды $q_1 = q_2 = q = 5$ *мкКл*. Какой точечный заряд необходимо поместить в середину стороны, соединяющей заряды q_1 и q_2, чтобы напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника оказалась равной нулю?

3.18. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими одинаковый равномерно распределенный по площади заряд ($\sigma = 1$ *нКл/м²*). Определить напряженность *E* поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

3.19. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1$*нКл/м²* и $\sigma_2 = 3$*нКл/м²*. Определить напряженность *E* поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

3.20. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 10$ *нКл/м²* и $\sigma_2 = -30$ нКл/м². Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S, равную 1*м²*.

3.21. По кольцу радиусом *R* равномерно распределен заряд q_0. Какую работу нужно совершить, чтобы перенести заряд q из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии R от его центра.

3.22. Два точечных заряда $q_1 = 4 \cdot 10^{-8}$ *Кл* и $q_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ *Кл* находятся в воздухе на расстоянии r_1=1 *м* друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния r_2 = 0,2 *м*?

3.23. Шарик массой 1 *г* и зарядом 10^{-8} *Кл* перемещается из точки А, потенциал которой равен 600 *В*, в точку С, потенциал которой равен нулю. Чему была равна скорость в точке А, если в точке С она стала равной 20 *м/с*?

3.24. На расстоянии r_1 = 4 *см* от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $2 \cdot 10^{-8}$ *Кл*. Под действием поля заряд перемещается до расстояния r_2 =2 *см*. При этом совершается работа $5 \cdot 10^{-6}$ *Дж*. Найти линейную плотность заряда нити.

3.25. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд $2 \cdot 10^{-8}$ *Кл*. Под действием поля заряд перемещается вдоль силовой линии на расстояние 2*см*. При этом совершается работа A=$5 \cdot 10^{-6}$ *Дж*. Найти поверхностную плотность заряда на плоскости.

3.26. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого d =1 *см*, находится заряженная капелька массой m =$5 \cdot 10^{-14}$*кг*. При отсутствии электрического поля капелька вследствие сопротивления воздуха падает с некоторой постоянной скоростью. Если к пластинам конденсатора приложена разность потенциалов U = 600 *В*, то капелька падает вдвое медленней. Найти заряд капельки.

3.27. Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно 4 *см*. Электрон начинает двигаться от отрицательной пластины в тот момент, когда от положительной пластины начинает двигаться протон. На каком расстоянии от положительной пластины они встретятся?

3.28. Какую работу необходимо совершить при переносе точечного заряда q_0 из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии r =10см от поверхности заряженного металлического шара? Потенциал на поверхности шара φ =200 *В*, радиус шара R =2 *см*.

3.29. Расстояние между пластинами плоского конденсатора d = 4 *см,* разность потенциалов между ними U = 12 *В*. Какую скорость получит электрон под действием поля, пройдя по силовой линии расстояние l = 6 *мм*?

3.30. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии d =1 *см* друг от друга. На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 = 0,2 $мкКл/м^2$ и σ_2 = -0,3 $мкКл/м^2$. Определить разность потенциалов между плоскостями.

3.31. Параллельно обкладкам плоского конденсатора введена металлическая пластинка толщиной 6 *мм*. Определить электроемкость конденсатора, если площадь каждой из обкладок 100 $см^2$, расстояние между ними 8 *мм*.

3.32. Один конденсатор заряжен до напряжения 50 *В*, другой конденсатор такой же емкости – до напряжения 150 *В*. Какое напряжение установится между обкладками конденсатора, если их соединить одноименно заряженными обкладками?

3.33. Два конденсатора емкостью 3 и 5 *мкФ* соединены последовательно и подсоединены к источнику постоянного напряжения 12 В. Определить заряд каждого конденсатора и разность потенциалов между его обкладками.

3.34. Между обкладками плоского конденсатора находится металлическая пластинка толщиной 4 *мм.* Как изменится электроемкость конденсатора, если эту пластинку убрать? Расстояние между обкладками 6 *мм*, площадь обкладок 100 $см^2$.

3.35. Найти напряжение на каждом из двух конденсаторов, если они соединены последовательно, имеют электроемкость 4 и 6 *мкФ* и присоединены к источнику постоянного напряжения 100 *В*.

3.36. Два конденсатора одинаковой электроемкости 6 *мкФ* каждый были заряжены – один до100*В*, другой до 200*В*. Затем конденсаторы соединили параллельно. Определить напряжение батареи после соединения и изменение энергии системы.

3.37. Два конденсатора одинаковой электроемкости 4 *мкФ* каждый заряжены – один до 100 *В*, другой до 200 *В*. Затем конденсаторы соединили последовательно. Определить изменение энергии системы.

3.38. Шару радиусом R_1 сообщили заряд q_1, а шару радиусом R_2 - заряд q_2. Расстояние между шарами много больше их радиусов. Найти отношение поверхностной плотности зарядов на шарах к их радиусам, если шары соединить тонкой металлической проволокой.

3.39. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 *мН*. Площадь S каждой пластины равна 200 $см^2$. Найти объемную плотность энергии поля конденсатора.

3.40. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластины S подключен к источнику тока с ЭДС ξ. Определить работу А внешних сил по раздвижению пластины от расстояния d_1 до d_2, если пластины перед раздвижением отключаются от источника.

3.41. Протон, начальная скорость υ которого равна 100 *км/с*, влетел в однородное электрическое поле (E = 300 *В/см*) так, что вектор скорости совпал с направлением линий напряженности. Какой путь l должен пройти протон в направлении линий поля, чтобы его скорость удвоилась?

3.42. Бесконечная плоскость заряжена отрицательно с поверхностной плотностью σ =35,4 $нКл/м^2$. По направлению силовой линии поля, созданного плоскостью, летит электрон. Определить минимальное расстояние l_{min}, на которое может подойти к плоскости электрон, если на расстоянии l_0 =5 *см* он имел кинетическую энергию $E_к$ = 80 *эВ*.

3.43. Электрон, летевший горизонтально со скоростью υ = 1,6 *Мм/с*, влетел в однородное электрическое поле с напряженностью E =90 *В/см*, направленное вертикально вверх. Какова будет по модулю и направлению скорость υ электрона через 1 *нс*?

3.44. Вдоль силовой линии однородного электрического поля движется протон. В точке поля с потенциалом φ_1 протон имел скорость υ_1 =0,1 *Мм/с*. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость протона возрастает в n = 2 раза. Отношение заряда протона к его массе e/m = 96 *МКл/кг*.

3.45. В однородное электрическое поле напряженностью E =1 *кВ/м* влетает вдоль силовой линии электрон со скоростью υ_0 =1 *Мм/с*. Определить расстояние l, пройденное электроном до точки, в которой его скорость υ_1 будет равна половине начальной.

3.46. Какой минимальной скоростью должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного до потенциала φ =100 *В* металлического шара радиусом R, если он находится от центра шара на расстоянии $4R$?

3.47. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом φ_1 =100*В* электрон имел скорость υ_1 = 6 *Мм/с*. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость υ_2 электрона будет равна 0,51 υ_1.

3.48. Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью υ =10 *Мм/с*, направленной параллельно пластинам. На сколько приблизится электрон к положительно заряженной пластине за время движения внутри конденсатора (поле считать однородным), если расстояние d между пластинами равно 16 *мм*, разность потенциалов U =30 *В* и длина l пластин равна 6 *мм*?

3.49. Электрон влетел в плоский конденсатор, имея скорость υ = 10 *Мм/с*, направленную параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло угол 35^{o} с первоначальным направлением скорости. Определить разность потенциалов U между пластинами (поле считать однородным), если длина l пластин равна 10 *см* и расстояние d между ними равно 2 *см.*

3.50. Электрон влетел в плоский конденсатор, находясь на одинаковом расстоянии от каждой пластины и имея скорость υ = 10 *Мм/с*, направленную параллельно пластинам, расстояние d между которыми равно 2 *см.* Длина l каждой пластины равна 10 *см*. Какую наименьшую разность потенциалов U нужно приложить к пластинам, чтобы электрон не вылетел из конденсатора?

4. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

4.1. Сила и плотность тока. Сторонние силы, ЭДС и напряжение

Электрическим током называют упорядоченное движение электрических зарядов. Направленное движение электрических зарядов под действием сил электрического поля называют **током проводимости**. Для появления и существования тока проводимости необходимы два условия:

1. Наличие в данной среде электрических зарядов. В металлах ими являются электроны проводимости; в жидких проводниках (электролитах) – положительные и отрицательные ионы; в газах – положительные ионы и электроны.
2. Наличие электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение электрических зарядов.

За направление электрического тока условно принимают **направление движения положительных зарядов**. Количественной характеристикой электрического тока является **сила тока** – заряд, протекающий через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad . \qquad (4.1)$$

Силу тока можно связать со средней скоростью υ упорядоченного движения зарядов. За время dt через поперечное сечение проводника площадью dS протечет заряд dq, заключенный в объеме проводника длиной $dl = \upsilon \cdot dt$, (рис.4.1)

$$dq = q_0 \cdot n \cdot dS \cdot dl,$$

где q_0 – заряд каждой частицы, n – концентрация частиц.

Тогда сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q_0 n dS dl}{dt} = q_0 n dS \upsilon . \qquad (4.2)$$

Плотность тока $\boldsymbol{j}$ – векторная физическая величина, численно равная силе тока, проходящего через единицу площади сечения проводника, проведенного перпендикулярно к направлению тока, и совпадающая с направлением тока

$$j = \frac{dI}{dS} = q_0 n \upsilon \; . \qquad (4.3)$$

Для того, чтобы ток был длительным, необходимо устройство, в котором какой-либо вид энергии непрерывно преобразовывался бы в энергию электрического поля. Такое устройство называется **источником тока**. В источнике тока перемещение носителей происходит против сил поля, а это возможно лишь благодаря силам неэлектростатического происхождения, называемых **сторонними силами.**

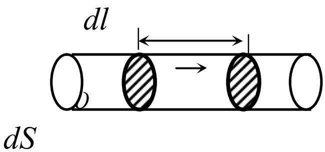


Рис.4.1

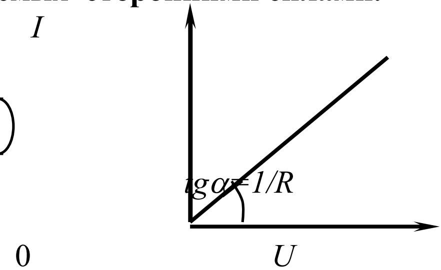


Рис.4.2

Величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, называется **электродвижущей силой (ЭДС)** $\boldsymbol{\xi}$, действующей в цепи или на ее участке

$$\xi = \frac{A_{ст}}{q} \;, \quad [\xi] = \frac{Äæ}{Êë} = \hat{A} . \qquad (4.4)$$

Стороннюю силу, действующую на заряд, можно представить через напряжённость поля сторонних сил

$$\vec{F}_{cò} = q\vec{E}', \tag{4.5}$$

тогда ЭДС для замкнутой цепи определяется выражением

$$\xi = \oint E'_{\ell} d\ell . \tag{4.6}$$

Следовательно, ***ЭДС, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряжённости поля сторонних сил.***

Величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи, называется **напряжением:**

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = q\int(\vec{E} + \vec{E}')d\ell = (\varphi_1 - \varphi_2) + \xi_{12} . \tag{4.7}$$

4.2 Обобщённый закон Ома. Дифференциальная форма закона Ома

Для каждого проводника – твердого, жидкого и газообразного – существует определенная зависимость силы тока от приложенного напряжения – **вольт - амперная характеристика (ВАХ).** Наиболее простой вид она имеет у металлических проводников и растворов электролитов (рис.4.2) и определяется законом Ома.

Согласно закону Ома для однородного (не содержащего сторонних сил) участка цепи, сила тока прямо пропорциональна приложенному напряжению U и обратно пропорциональна сопротивлению проводника R

$$I = \frac{U}{R} . \tag{4.8}$$

Единицей сопротивления является Ом ([**R**] = 1 Ом). Ом – ***сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1В течет ток 1А.***

Сопротивление зависит от свойств проводника, формы и его геометрических размеров. Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad , \qquad (4.9)$$

где l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения, ρ - **удельное сопротивление** (***сопротивление проводника длиной 1м и площадью поперечного сечения 1м^2)*** зависит от природы проводника и температуры ([ρ] = $Ом \cdot м$).

Величина, обратная удельному сопротивлению, называется **удельной электропроводностью**: $\sigma = 1/\rho$.

Для **неоднородного участка цепи**, т.е. участка, содержащего ЭДС (рис.4.3), с учётом (4.7) и (4.8) получим

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \xi_{12}}{R}. \qquad (4.10)$$

Данное выражение получило название **обобщённого закона Ома в интегральной форме.**

Получим закон Ома для **однородного участка цепи в дифференциальной** форме. Для этого выделим в окрестности некоторой точки внутри проводника элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными вектору плотности тока j в данной точке (рис. 4.4).

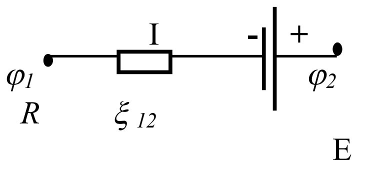


Рис. 4.3

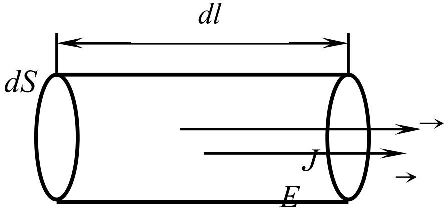


Рис. 4.4

Через поперечное сечение цилиндра течет ток силой $I=jdS$. Напряжение, приложенное к цилиндру, равно

$$U=Edl,$$

где E – напряженность поля в данной точке.

Сопротивление цилиндра $R = \rho \dfrac{dl}{dS}$. Подставляя I, U и R в формулу (4.8) и учитывая, что направления векторов $\vec{j}$ и $\vec{E}$ совпадают, получим закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E} . \qquad (4.11)$$

Закон Ома для неоднородного участка цепи в **дифференциальной форме** запишется следующим образом:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}\,') , \qquad (4.12)$$

где $\vec{E}\,'$ - напряженность поля сторонних сил.

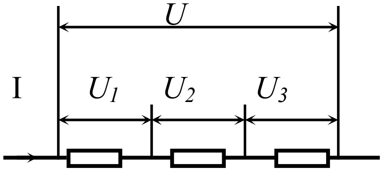
Проводники и источники тока в электрических цепях могут соединяться последовательно и параллельно.

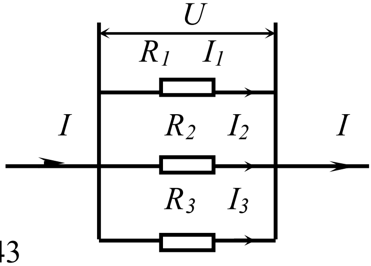
Последовательным называется такое соединение проводников, когда конец одного проводника соединяется с началом другого (рис.4.5). При этом выполняются соотношения:

$$I = I_1 = I_2 = \ldots = I_n;$$
$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$
$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \qquad (4.13)$$

Параллельным называется такое соединение, когда одни концы проводников соединяются в один узел, а другие концы - – в другой (рис.4.6). При этом выполняются соотношения:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$
$$U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n.$$
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} . \qquad (4.14)$$





R_1 R_2 R_3

Рис. 4.5 Рис. 4.6

При **последовательном соединении нескольких одинаковых источников тока** (рис.4.7) полная ЭДС батареи равна алгебраической сумме ЭДС всех источников, а суммарное сопротивление равно сумме внутренних сопротивлений:

$\xi_б = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $r_б = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$.

При ***параллельном подключении*** n ***источников*** с одинаковыми ЭДС - ξ и внутренними сопротивлениями – r (рис.4.8) ЭДС батареи равна ЭДС одного источника *($\xi_б = \xi$)*, а внутреннее сопротивление батареи $r_б = r/n$.

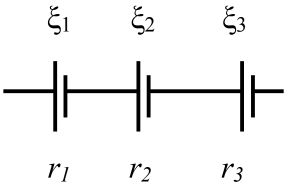


Рис.4.7

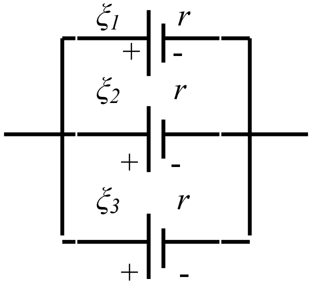


Рис.4.8

4.3. Работа тока. Закон Джоуля - Ленца

Работу сил электрического поля по перемещению заряженных частиц, т.е. созданию электрического тока, называют **работой тока.** Работа электрического поля по перемещению заряда

$$dA = dq \cdot U.$$

Если за время dt через поперечное сечение проводника сопротивлением R проходит заряд dq, то с учетом (4.1) и закона Ома (4.8) выражение для **работы электрического тока** примет вид

$$dA = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt \quad . \qquad (4.15)$$

Мощность электрического тока Р равна отношению работы тока A ко времени, за которое работа совершена. С учетом (4.15) получим

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad . \qquad (4.16)$$

Если на участке цепи под действием электрического поля не совершается механическая работа и не происходят химические превращения веществ, то работа электрического поля приводит только к нагреванию проводника. При этом работа электрического тока равна количеству теплоты, выделяемому проводником с током

$$dQ = dA = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt \, . \qquad (4.17)$$

Количество теплоты, выделившееся за конечный промежуток времени t, можно рассчитать по формуле

$$Q = \int_0^t I^2(t) R dt \quad . \qquad (4.18)$$

В частности, если $I = const$, то

$$Q = I^2 R\, t. \qquad (4.19)$$

Соотношения (4.17- 4.19) носят название **закона Джоуля- - Ленца**.

Полная электрическая цепь состоит из источника ЭДС с внутренним сопротивлением r и внешнего сопротивления R (рис.4.9).

Общее количество теплоты, выделяющейся в полной цепи при протекании постоянного тока, равно

$$dQ_{полн} = I^2 Rdt + I^2 rdt = I^2 (R+r)dt. \qquad (4.20)$$

Если под действием электрического тока не совершается механическая работа

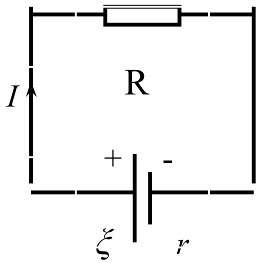


Рис.4.9

и не происходят химические превраще- ния веществ, то работа электрического тока равна количеству теплоты, выделяемому проводником с током в электрической цепи

$$dA = dQ_{полн}\,.$$

Тогда с учетом соотношений (4.4), (4.1) и (4.20) найдем

$$I\xi = I^2(R+r)\,,$$

или

$$I = \frac{\xi}{R+r}\,. \qquad (4.21)$$

Полученное выражение называется **законом Ома для полной цепи.**

От формулы (4.20), определяющей тепло, выделяемое во всей цепи, можно перейти к выражению, характеризующему выделение тепла в различных местах проводника. Для этого выделим в проводнике, как это было сделано при выводе закона Ома, элементарный объем в виде цилиндра (рис.4.4). Согласно закону Джоуля - Ленца за время dt в этом объеме выделится тепло

$$dQ = I^2\,Rdt = \rho\,\frac{dl}{dS}\,(j\cdot dS)^2\,dt = \rho\,j^2\,dV\cdot dt,$$

где $dV = dS\cdot dl$ – величина элементарного объема.

Количество тепла dQ, выделяемого за единицу времени в единице объема, называют **удельной тепловой мощностью тока** ω**.**

$$\omega = \frac{dQ}{dVdt} = \rho j^2\,.$$

Используя соотношения $j = \sigma E$ и $\sigma = 1/\rho$, получим **закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме**:

$$\omega = jE = \sigma E^2\,. \qquad (4.22)$$

4.4. Правила Кирхгофа и их применение к расчёту электрических цепей

Для расчета разветвленных электрических цепей постоянного тока применяют **правила Кирхгофа**.

Первое правило относится к **узлам цепи**. ***Узлом называется точка, в которой сходятся три и более проводников с токами.*** Токи, подходящие к узлу, условно принимаются положительными, а отходящие от узла – отрицательными.

Первое правило Кирхгофа: ***алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю***

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \qquad (4.23)$$

где n – число проводников с током, сходящихся в узле.

Для узла, изображенного на рис.4.10, первое правило запишется следующим образом:

$$-I_1+I_2+I_3-I_4-I_5+I_6=0.$$

Второе правило Кирхгофа является обобщением закона Ома на разветвленные электрические цепи: ***в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС в контуре***

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \quad , \qquad (4.24)$$

где n – число ветвей, входящих в контур.

Ветвью, называется заключенный между двумя узлами участок цепи, по которому течет ток.

Для составления уравнений (4.24) ***необходимо выб-рать направление обхода контура*** (по часовой стрелке или против нее). ***Выбор этого направления произволен.*** Токи I_k берутся со знаком «+», если они совпадают с направлением обхода контура. ЭДС ξ_K считаются положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура, т.е. направление обхода контура совпадает с направлением действия сторонних сил.

В качестве примера запишем второе правило Кирхгофа для замкнутого контура, изображенного на рис.4.11:

$I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3.$

При расчете цепей по правилам Кирхгофа рекомендуется следующая последовательность действий:

1) произвольно задать направление токов в ветвях;
2) выбрать направление обхода контуров;
3) составить m-1 уравнений по первому правилу Кирхгофа, где m- число узлов;
4) составить [p-(m-1)] независимых уравнений по вто-рому правилу Кирхгофа, где p - число ветвей. Все ЭДС и все сопротивления, содержащиеся в рассматриваемой цепи, должны входить в систему уравнений.

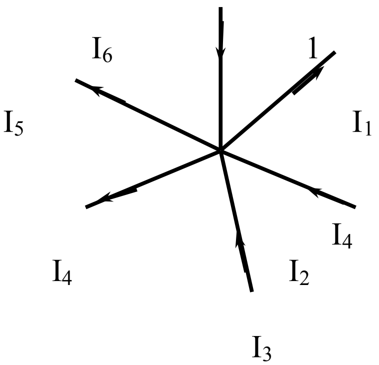


Рис.4.10

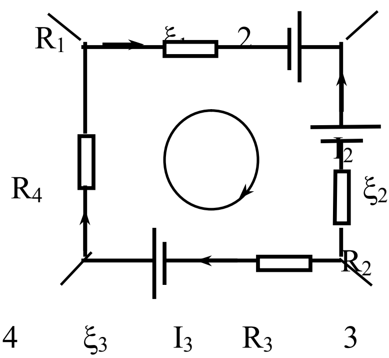


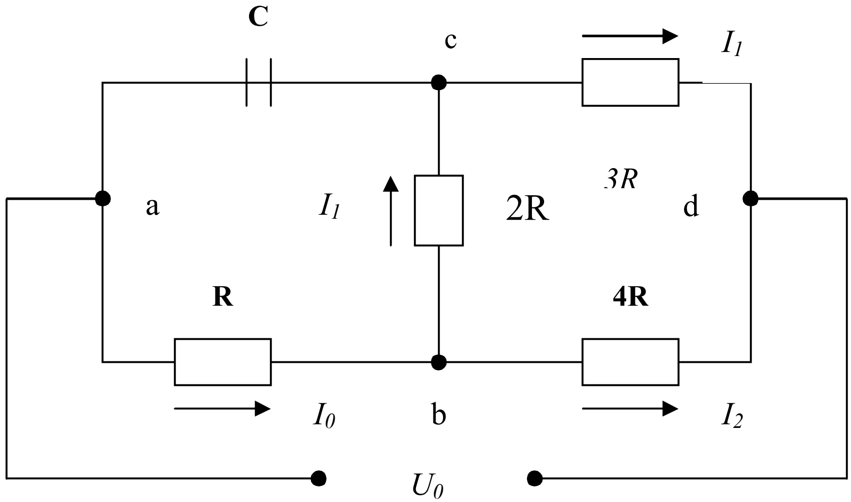
Рис.4.11

Решение системы алгебраических уравнений, составленных на основе первого и второго правил Кирхгофа, позволяет найти токи во всех ветвях по известным значениям сопротивлений и ЭДС.

Если в результате расчета получится отрицательное значение силы тока в какой-либо ветви, то это означает, что в действительности ток на этом участке течет в направлении, противоположном выбранному.

4.5. Примеры решения задач.

Задача1. Найдите заряд на конденсаторе в схеме, изображенной на рисунке.



Решение

Постоянный ток через конденсатор не проходит и в ветви, где он включен, тока нет. Поэтому ток I_0, идущий от источника напряжения U_O, пойдет по резистору R и разветвится в точке b на токи I_1 и I_2, не заходя в ветвь ac. Заряд на конденсаторе

$$q = C{\cdot}U_{ac}\,, \tag{1}$$

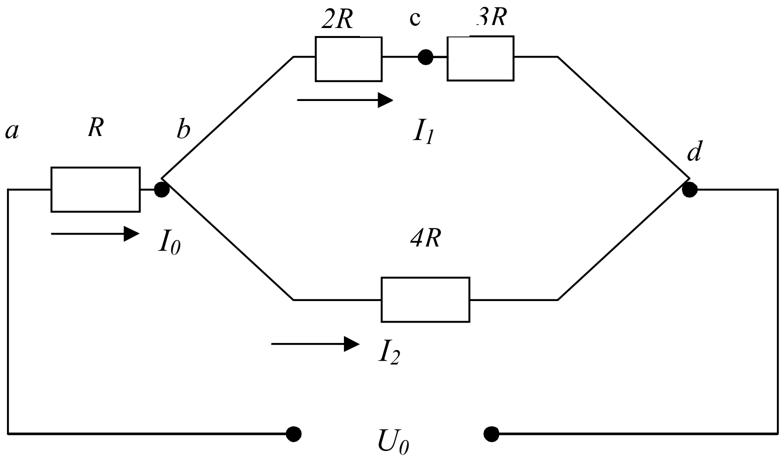
где

$$U_{ac} = U_1 + U_2\,. \tag{2}$$

Здесь U_1 и U_2 - падения напряжений на резисторах сопротивлением R и $2R$ соответственно:

$$U_1 = I_0 \cdot R\ , \qquad U_2 = I_1 \cdot 2R\ .$$

Для их нахождения воспользуемся правилами расчета последовательной и параллельной цепей, упростив схему.



Применим закон Ома ко всей цепи

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{\text{ýêâ}}} = \frac{U_0}{R + \dfrac{(2R+3R)\cdot 4R}{2R+3R+4R}} = \frac{9}{29}\cdot\frac{U_0}{R}\ . \qquad (3)$$

Для параллельных ветвей ***bcd*** и ***bd*** можно записать:

$$I_1(2R + 3R) = I_2 \cdot 4R\ .$$

Отсюда $I_2 = 5/4\ I_1$. В то же время

$$I_0 = I_1 + I_2 = I_1 + \frac{4}{5} I_1 = \frac{9}{4} I_1,$$

$$I_1 = \frac{4}{9} I_0 = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{29}\frac{U_0}{R} = \frac{4}{29}\frac{U_0}{R},$$

$$U_2 = I_1 2R = \frac{4}{29}\cdot\frac{U_0}{R}\cdot 2R = \frac{8}{29}\cdot U_0,$$

$$U_1 = I_0 R = \frac{9}{29}\cdot\frac{U_0}{R}\cdot R = \frac{9}{29} U_0.$$

На основании (2)

$$Uac = \frac{2}{29}U_0 + \frac{8}{29}U_0 = \frac{17}{29}U_0$$

Подставляя это выражение в (1), получим

$$q = \frac{17}{29}CU_0.$$

Задача 2. По проводнику сопротивлением R = 3 *Ом* течет ток, сила которого возрастает. Количество теплоты Q, выделившееся в проводнике за время $\tau = 8c$, равно 200 *Дж*. Определить количество электричества q, протекшее за это время по проводнику. В момент времени, принятый за начальный, сила тока в проводнике равна нулю.

Решение

Из условия равномерности возрастания тока следует $I=kt$ или $dq/dt = kt$, где k - коэффициент пропорциональности.

Отсюда следует $dq = k\cdot t\cdot dt,$ а $q = k\int_0^{\tau} t \cdot dt.$

Значение k найдем из выражения количества теплоты, выделившейся в проводнике:

$$dQ = I^2 r dt = k^2\, r\, t^2\, dt.$$

Интегрируя, получим

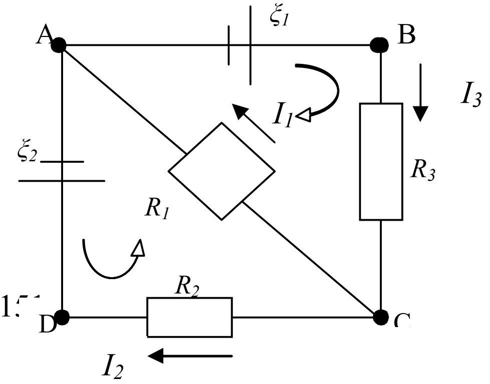
$$Q = k^2 r \int_0^{\tau} t^2 \cdot dt = \frac{1}{3}k^2\tau^3 r$$

Отсюда $k = \sqrt{3Q/(\tau^3 r)}$.

После подстановки получим

$$q = \sqrt{3Q\tau / r} = 20\ \text{Кл}.$$

Задача3. Найти силу тока во всех участках цепи, представленной на рисунке. *(ξ_1 = 2,1 В, ξ_2 = 1,9 В, R_1 = 45 Ом, R_2 = 10 Ом и*



R_3 = 10 Ом). Внутренним сопротивлением элементов пренебречь.

Решение

Для расчета данной *р*азветвленной цепи применим ***законы Кирхгофа.***

Для этого выберем направления токов в ветвях и покажем их стрелками на схеме. Узлы схемы обозначим точками А и С. Так как число узлов равно двум, то запишем одно уравнение по первому закону Кирхгофа, например, для узла С

$$I_3=I_1+I_2 \ . \qquad (1)$$

Запишем второй закон Кирхгофа для контуров АВС и ACD, выбрав направления обхода контуров.

$$I_3R_3 + I_1R_1 = \xi_1, \qquad (2)$$

$$I_1R_1 - I_2R_2 = \xi_2 \ . \qquad (3)$$

Вместо контура ACD или АВС можно было взять контур ABCD.

Имеем три уравнения с тремя неизвестными*:* I_1, I_2, I_3. При решении этой системы уравнений целесообразно в уравнения подставить числовые коэффициенты. Тогда уравнения примут вид:

$$I_3=I_1+I_2$$

$$10I_3+45I_1=2.1$$

$$45I_1 – 10\ I_2=1.9$$

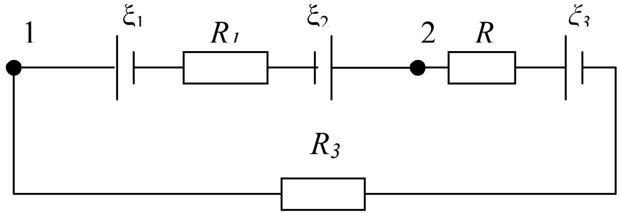
Решая эти уравнения, получим, $I_1=0,04A$, $I_2 = -0,01\ A$, $I_3 = 0,03\ A$. Отрицательный знак у тока I_2 указывает на то, что направление этого тока было выбрано нами неверно. В действительности ток *,* I_2 течет от *D к С.*

4.6. Задачи для контрольных заданий

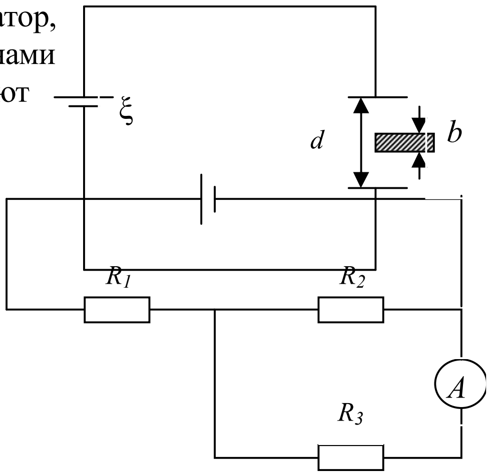
4.1. ЭДС батареи равна 20 В. Сопротивление R внешней цепи равно 2 Ом, сила тока I = 4 А. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления R КПД будет равен 99%?

4.2. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС ξ батареи равна 24В, внутреннее сопротивление r = 1 *Ом.* Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность Р = 80 Вт. Вычислить силу тока I в цепи и КПД нагревателя.

4.3. Определить разность потенциалов между точками 1 и 2 представленной цепи, если ξ_1 = 2 *В*, ξ_2 = 5 *В,* ξ_3 = 2 *В*, R_1 = 1 *Ом*, R_2 = 2 *Ом*, R_3 = 2 *Ом.*



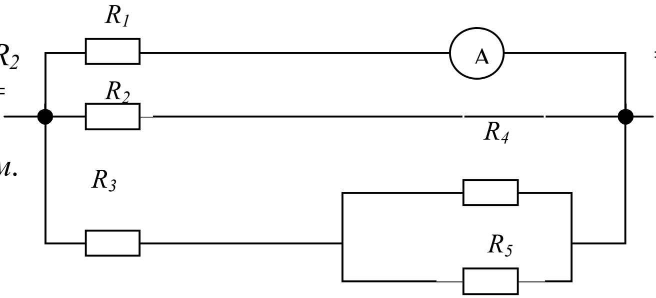
4.4. В плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого d=5*мм*, вдвигают стеклянную пластинку (ε =7) с постоянной скоростью υ =50 *мм/с.* Ширина пластинки b = 4,5 *мм*, ЭДС батареи ξ = 220 *В*. Определить силу тока в цепи.



4.5. Определить силу тока, протекающего через амперметр Напряжение на зажимах элемента в замкнутой цепи равно 2,1 *В;* R_1= 5*Ом*, R_2= 6*Ом*, R_3 = 3*Ом.*
Сопротивлением ампер- метра пренебречь.

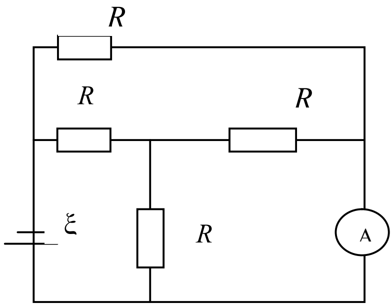
4.6. Амперметр, включенный в участок цепи, показывает силу тока I_1 = 0,5*А*. Найти силу тока, протекающего через R_4

если $R_2 = 4$ *Ом*, $R_1 = R_4 = 2$ *Ом*, $R_3 = R_5 = 1$*Ом*.

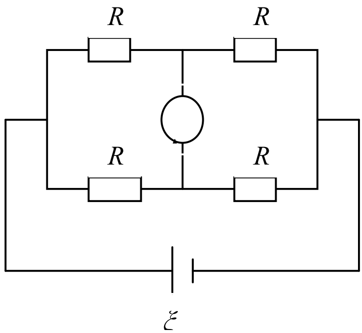


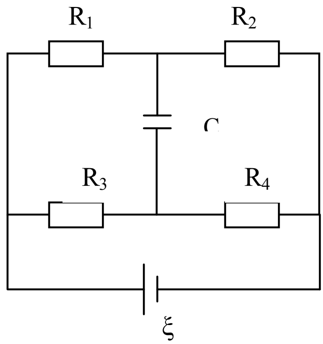
Сопротивлением амперметра пренебречь.

4.7. Найти показание амперметра в схеме представленной на рисунке. Сопротивления амперметра и источника пренебрежимо малы. R = 10 *Ом*, ξ=30*В*.



4.8. Какой ток будет идти через амперметр, если ЭДС источника равна ξ, $R_1 = R_4 = R$, а $R_2 = R_3 = 2R$? Внутренними сопротивлениями амперметра и источника пренебречь





4.9. Вольтметр, подключенный к зажимам источника тока, показал U_1 =6 *В*. Когда к тем же зажимам подключили лампочку, вольтметр стал показывать U_2 = 3*В*. Что покажет вольтметр, если вместо одной подключить две такие же лампочки, соединенные последовательно?

4.10. Определить заряд конденса- тора в электрической цепи, представлен -ной на рисунке, если R_1 = 20 *Ом*, R_2=30*Ом*, R_3=10*Ом*, R_4=40*Ом*, ξ=10*В*, *С*=2 *мкФ*. Сопротивлением источника пренебречь.

4.11. Сила тока в проводнике сопротивлением *R* =100 *Ом* равномерно нарастает от I_0 = 0 до $I_{\text{мах}}$ = 10 *А* в течение времени τ = 30 *с*. Определить количество теплоты *Q*, выделившееся за это время в проводнике.

4.12 Сила тока в проводнике сопротивлением *R* = 12 *Ом* равномерно убывает от I_0 = 5 *А* до *I* = 0 в течение времени τ = 10 *с*. Какое количество теплоты Q выделится в этом проводнике за указанный промежуток времени?

4.13. Обкладкам конденсатора емкостью *С* = 2 *мкФ* сообщают заряды величиной q_o = 1 *мКл*, затем обкладки замыкают через сопротивление *R* = 5000 *Ом*. Найти: а) закон изменения тока, текущего через сопротивление; б) заряд, протекший через сопротивление за 2*мс*; в) количество тепла, выделившееся в сопротивлении за то же время.

4.14. Сила тока в проводнике сопротивлением *R* = 15*Ом* равномерно возрастает от I_0 = 0 до некоторого максимального значения в течение времени *t* = 5*с*. За это время в проводнике выделилось количество теплоты *Q* = 10 *кДж*. Найти среднюю силу тока в проводнике за этот промежуток времени.

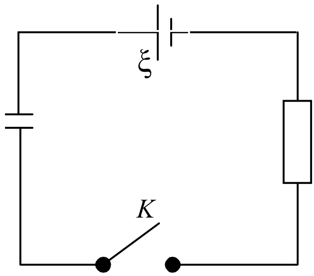
4.15. Сила тока в резисторе линейно нарастает за 4 *с* от 0 до 8 *А*. Сопротивление резистора 10 *Ом*. Определить количество теплоты, выделившееся в резисторе за первые 3 *с*.

4.16. В течение 5 *с* по резистору сопротивлением 10 *Ом* течет ток, сила которого равномерно возрастает. В начальный момент сила тока равна нулю. Определить заряд, протекший за 5 *с,* если количество теплоты, выделившееся за это время, равно 500 *Дж.*

4.17. Сила тока в резисторе равномерно возрастает от нулевого значения в течение 10 *с.* За это время выделилось количество теплоты 500 *Дж.* Определить скорость возрастания тока, если сопротивление резистора 10 *Ом.*

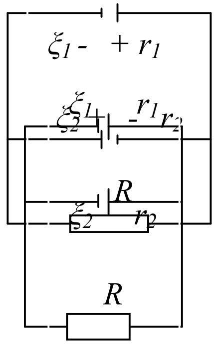
4.18. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 20 *Ом* нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ *с* по линейному закону от $I_0 = 0$ до I_{max}=6*А*. Найти отношение количеств тепла, выделившихся в этом проводнике за первую и вторую секунды (Q_1/Q_2).

4.19. К источнику с ЭДС ξ подключены последовательно конденсатор емкостью С и резистор *R*. Найти закон изменения со временем заряда на обкладках конденсатора. Определить работу, совершаемую источником при зарядке конденсатора, и количество теплоты, выделяющейся при этом в цепи.

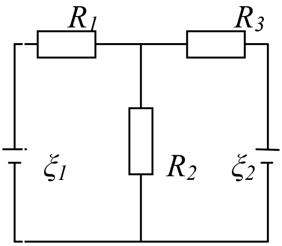


4.20. В резисторе сопротивлением 20 *Ом* сила тока за время $\Delta t = 5$ *с* линейно возросла от 5 до 15 *А*. Какое количество тепла выделилось за это время?

4.21. Две батареи аккумуляторов (ξ_1= 10*В*, r_1 = 1*Ом*, ξ_2 = 8*В*, r_2 = 2 *Ом*) и реостат сопротивлением R = 6 *Ом* соедине- ны как показано на рисунке. Найти силу тока в батареях и реостате.

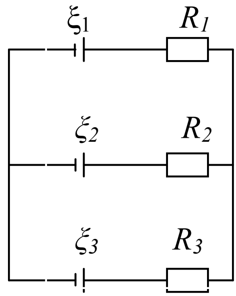


4.22. Два источника тока ($\xi_1 = 8$ В, $r_1 = 2$ *Ом*, $\xi_2 = 6$ *В*, $r_2 = 1{,}5$ *Ом*) и реостат сопротивлением $R = 6$ *Ом* соединены как показано на рисунке. Вычислить силу тока, текущего через реостат

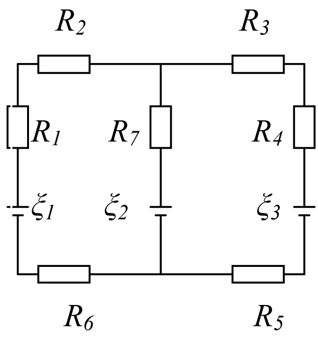


4.23. Определить силу тока I_3 в резисторе сопротивлением R_3 и напряжение U_3 на концах резистора, если $\xi_1 = 4$ *В*, $R_1 = 2$ *Ом*, $\xi_2 = 3$*В*, $R_2 = 6$ *Ом*, $R_3 = 1$ *Ом*. Внутренними сопротивле-ниями амперметра и источников тока пренебречь.

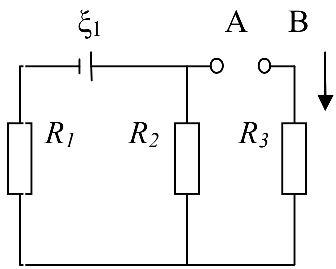
4.24. Три источника тока с $\xi_1 = 11$*В*, $\xi_2 = 4$ *В*, $\xi_3 = 6$ *В* и три реостата с сопротивлениями $R_1 = 5$ *Ом*, $R_2 = 10$ *Ом*, $R_3 = 2$ *Ом* соединены как показано на рисунке. Определить силы токов в реостатах. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.



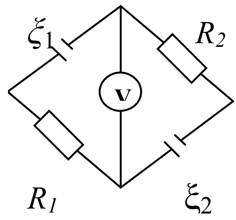
4.25. В схеме, изображенной на рисунке, $\xi_1 = 10$ *В*, $\xi_2 = 20$ *В*, $\xi_3 = 30$ *В*, $R_1 = 1$ *Ом*, $R_2 = 2$ *Ом*, $R_3 = 2$ *Ом*, $R_4 = 4$ *Ом*, $R_5 = 5$ *Ом*, $R_6 = 6$ *Ом*, $R_7 = 7$ *Ом*. Внутрен-ние сопротивления источников малы. Найти силы токов.



4.26. Три сопротивления $R_1 = 5$ *Ом*, $R_2 = 5$ *Ом* и $R_3 = 3$ *Ом*, а также источник тока с ЭДС $\xi = 1{,}4$ *В* соединены, как показано на рисунке. Определить ЭДС источника тока, который надо подключить в цепь



между точками A и B, чтобы сила тока через сопротивлении R_3 составляла $I = 1A$. Направление тока указано на рисунке стрелкой. Сопротивлением источника тока пренебречь

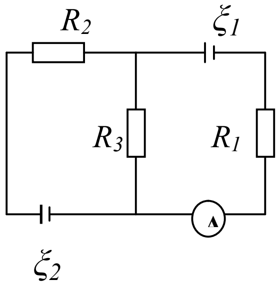


4.27. В схеме, представленной на рисунке, $\xi_1 = \xi_2 = 110$ *В*, $R_1 = R_2 = 200$ *Ом*, сопротивление вольтметра R_V=1000*Ом*. Найти показание вольтметра. Сопротивлением источников пренебречь.

4.28. В схеме к задаче 4.27 , $\xi_1 = \xi_2$, $R_2 = 2R_1$. Во сколько раз ток, текущий через вольтметр, больше тока, текущего через R_2? Сопротивлением источников пренебречь.

4.29. В схеме, к задаче 4.27, R_1=R_2=100 *Ом*. Вольтметр показывает 50*В*, сопротивление вольтметра равно 150*Ом*. Найти ЭДС батарей. Сопротивлением источников пренебречь.

4.30. В схеме представленной на рисунке, ξ_1=110 *В*, ξ_2 = 220 *В*, $R_1 = R_2 = 100$ *Ом*, $R_3 = 500$ *Ом*. Найти показание амперметра. Внутренними сопротивлениями амперметра и элементов пренебречь.



5. Варианты контрольных заданий

Таблица 1

№ варианта	Номера задач							
1	1.1	1.51	1.69	2.1	2.21	3.11	3.21	4.11
2	1.3	1.53	1.67	2.2	2.22	3.12	3.22	4.12
3	1.5	1.55	1.65	2.3	2.23	3.13	3.23	4.13
4	1.7	1.57	1.63	2.4	2.24	3.14	3.24	4.14
5	1.9	1.59	1.61	2.5	2.25	3.15	3.25	4.15
6	1.11	1.21	1.49	2.6	2.26	3.16	3.26	4.16
7	1.13	1.33	1.47	2.7	2.27	3.17	3.27	4.17
8	1.15	1.41	1.37	2.8	2.28	3.18	3.28	4.18
9	1.17	1.45	1.35	2.9	2.29	3.19	3.29	4.19
10	1.19	1.59	1.39	2.10	2.30	3.20	3.30	4.20

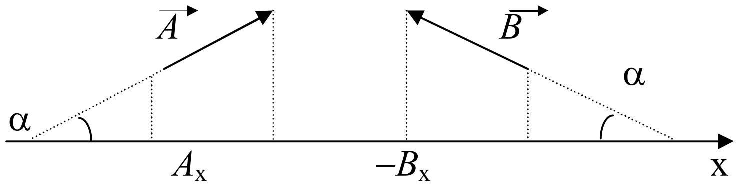
Таблица 2

№ варианта	Номера задач						
1	1.2	1.52	1.70	2.11	2.31	3.1	3.41	4.21
2	1.4	1.54	1.68	2.12	2.32	3.2	3.42	4.22
3	1.6	1.56	1.66	2.13	2.33	3.3	3.43	4.23
4	1.8	1.60	1.64	2.14	2.34	3.4	3.44	4.24
5	1.10	1.24	1.62	2.15	2.35	3.5	3.45	4.25
6	1.12	1.22	1.50	2.16	2.36	3.6	3.46	4.26
7	1.14	1.30	1.48	2.17	2.37	3.7	3.47	4.27
8	1.16	1.32	1.46	2.18	2.38	3.8	3.48	4.28
9	1.18	1.44	1.40	2.19	2.39	3.9	3.49	4.29
10	1.20	1.58	1.38	2.20	2.40	3.10	3.50	4.30

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.
Элементы векторной алгебры

П. 1.1. Проекция вектора на ось

$$A_x = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha , \qquad B_x = \left|\vec{B}\right| \cos\alpha .$$



П. 1.2. Выражение вектора через проекции на координатные оси:

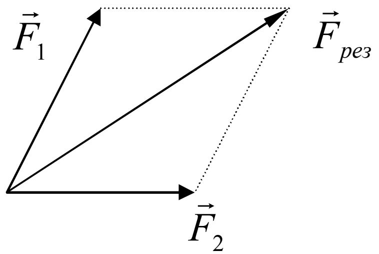
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} ,$$

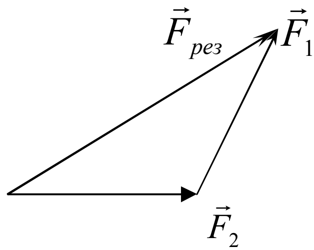
где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы соответствующих координатных осей.

П. 1.3. Сложение векторов:

$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

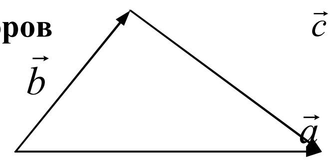
а) правило параллелограмма; в) правило треугольника.





П. 1.4. Вычитание векторов

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$



П. 1.5. Скалярное произведение двух векторов

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha ,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **.**

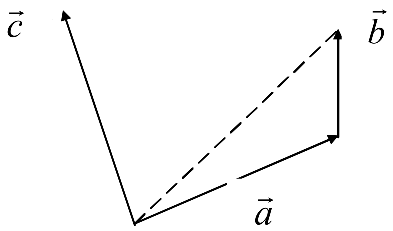
В декартовой системе координат

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

П. 1.6. Векторное произведение двух векторов

$$\vec{c} = \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right], \quad |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha ,$$

где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ..



Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости в которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ причем, три вектора ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) образуют правую тройку векторов (правило правого винта).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

П. 2.1. Производная от функции $y = f(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Геометрический смысл производной – она численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x. Если $f'(x) > 0$, то при увеличении x функция $f(x)$ – возрастает, если $f'(x) < 0$, то при возрастании x функция $f(x)$ – уменьшается.

П. 2.2. Таблица простейших производных.

Функция	C	x	x^n	e^x	a^x	lnx	sinx	cos x	tg x	ctg x
Производная	0	1	nx^{n-1}	e^x	$a^x \ln a$	1/x	cosx	-sin x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

П. 2.3. Дифференциал функции $y = f(x)$

$$dy = y'(x)\ dx.$$

Полный дифференциал функции нескольких переменных $U = f(x, y, z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz ,$$

где $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ – частные производные.

П. 2.4. Правила вычисления дифференциалов

1) $d(C u) = C\, du \quad (C\text{- const}),$
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$,
3) $d(u v) = u\, dv + v\, du$,
4) $d(u/v) = (v\, du - u\, dv) / v^2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Элементы интегрального исчисления

Интегрирование– ***действие обратное дифференцированию***

$$\int df(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}).$$

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F_x + C\,,$$

где F_x – первообразная функция $(F'(x) = f(x))$, C – некоторая постоянная.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ – называется сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \;\; 0} \sum_{i=1}^{n \;\; \infty} f(x_i)\,\Delta x_{\mathrm{I}}.$$

Геометрический смысл определенного интеграла – это число, равное площади под кривой $y = f(x)$, ограниченной ординатами: a – нижний, b – верхний пределы.

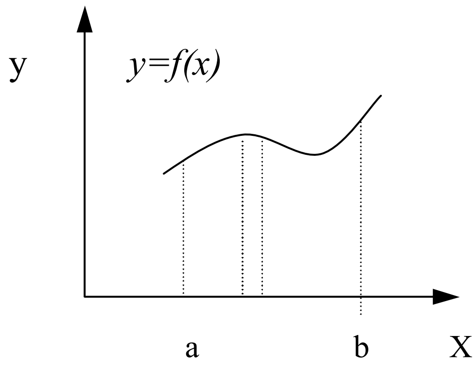


Таблица интегралов

Интеграл	$\int x^n dx$	$\int \frac{dx}{x}$	$\int \sin x dx$	$\int \cos x dx$	$\int tgx dx$	$\int ctgx dx$	$\int e^x dx$
Первообразные	$x^{n+1}/n+1$; $n \neq 1$	$\ln x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\ln\cos x$	$\ln \sin x$	e^x

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
Понятие градиента физической величины.

Градиент некоторой физической величены U – это вектор, совпадающий с нормалью $\vec{n}$ к поверхности одинакового значения $U(x,y,z)$, направленной в сторону его возрастания и имеющий величину $\partial U / \partial n$.

В декартовой системе

$$\overrightarrow{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla} U ,$$

где $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ оператор Гамильтона(Набла).

ПРИЛОЖЕНИЕ 5
Некоторые астрономические величины

Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ *м*
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ *кг*
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^{8}$ *м*
Масса Солнца	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ *кг*
Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ *м*
Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ *кг*
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ *м*
То же до центра Луны	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ *М*
Период обращения Луны вокруг Земли	27,3 СУТОК = $= 2{,}36 \cdot 10^{6}$ С

ПРИЛОЖЕНИЕ 6
Основные физические постоянные

Нормальное ускорение свободного падения	g = 9,81 *м/с*^{2}
Гравитационная постоянная	G = 6,67·10^{-11} *м*^{3}*/(кг с*^{2}*)*
Постоянная Авогадро	N_A = 6,02·10^{23} *моль*$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R = 8,31 *Дж/(К моль)*
Постоянная Больцмана	k = 1,38·10^{-23} *Дж/К*
Атомная единица массы	1 а.е.м .= 1,66·10^{-27}кг
Элементарный заряд	e = 1,6·10^{-19} *Кл*
Масса электрона	m = 9,11·10$^{- 31}$ *кг*
Масса протона	m = 1,67·10$^{- 27}$ *кг*
Удельный заряд электрона	e/m = 1,76·10^{11} *Кл/кг*
Скорость света в вакууме	C = 3,00·10^{8} *м/с*
Постоянная Стефана - Больцмана	σ = 5,67·10^{-8} *Вт/(м*^{2} *К*^{4}*)*
Постоянная Планка	h = 6.63·10^{-34} *Дж с*
Постоянная Ридберга	R' = 1,10·10^{7} *м*$^{-1}$ R = 3,29·10^{15} *с*$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	r = 5.29·10^{-11} *м*
Комптоновская длина волны электрона	λ_c = 2,43·10 $^{-12}$ *м*
Магнетон Бора	μ_B= 9,27·10^{-24} *Дж/Тл*
Энергия ионизации атома водорода	E_i = 2,16·10^{-18} *Дж*
Ядерный магнетон	μ_N =5,05·10^{-27} *Дж/Тл*

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Плотности ρ твёрдых тел, жидкостей и газов

Твердые тела	$кг/м^3 \cdot 10^3$
Алюминий	2,70
Висмут	9,80
Вольфрам	19,3
Железо (чугун, сталь)	7.87
Золото	19.3
Каменная соль	2.20
Латунь	8,55
Марганец	7.40
Медь	8.93
Никель	8.80
Платина	21.4
Свинец	11.3
Серебро	10.5
Уран	18.7

Жидкости при 15 ^0C	$кг/м^3 \cdot 10^3$
Вода (дисциллированная при 15 ^{0}С)	1,00
Глицерин	1.26
Керосин	0,8
Масло (оливковое, смазочное)	0,9
Масло касторное	0.96
Ртуть	13,6
Сероуглерод	1,26
Спирт	0,8
Эфир	0,7

Газы при нормальных условиях	*кг/м*^{3}
Азот	1,25
Аргон	1,78
Водород	0,09
Воздух	1,29
Гелий	0,18
Кислород	1,43

ПРИЛОЖЕНИЕ 8
Диэлектрическая проницаемость ε

Вода	81
Масло (трансформаторное)	2,2
Парафин	2,0
Слюда	7,0
Стекло	7,0
Фарфор	5,0
Эбонит	3,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 9
Удельное сопротивление ρ и температурный коэффициент α проводимости

Вещество	ρ при 20^0C, $нОм \cdot м$	α, $^0C^{-1}$
Железо	98	$6{,}2 \cdot 10^{-3}$
Медь	17	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$
Алюминий	26	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
Графит	$3{,}9 \cdot 10^3$	$-0{,}8 \cdot 10^3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, завершено конспективное изложение первой части курса общей физики, в котором представлены основы механики, молекулярной физики, термодинамики и электродинамики. Авторы считали главной своей задачей не только обратить внимание читателя на физический смысл рассматриваемых понятий и законов, но и научить применять их на практике. С этой целью после каждого из изучаемых разделов подробно рассматриваются методы решения типовых задач, что должно было оказать существенную помощь в выполнении контрольных заданий.

Необходимо, однако, учитывать, что в пособии изложены всего лишь основы физической науки. Для получения более полной информации следует дополнительно обращаться к основным учебникам, список которых даётся ниже.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев И.В. Курс физики/ И.В. Савельев.- М.: Наука, 1989. Т.1-3
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики / А.А Детлаф., Б.М Яворский.- М.:Высшая школа, 1989. 607с
3. Иродов И.Е. Основные законы механики/ И.Е. Иродов.- М.: Высшая школа, 1985. 247 с
4. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма/ И.Е. Иродов.- М.: Высшая школа, 1983. 279 с
5. Яворский Б.М. Справочник по физике/ Б.М. Яворский, А.А. Детлаф.- М.: Наука, 1987. 511 с

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ФИЗИКА

Часть 1

МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, ТЕРМОДИНАМИКА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Москаленко Александр Георгиевич
Гаршина Мария Николаевна
Сафонов Игорь Александрович
Тураева Татьяна Леонидовна

В авторской редакции

Компьютерный набор И.А. Сафонова

Подписано к изданию 18.11.2006.
Уч. – изд. л. 7.9.

ГОУВПО “Воронежский государственный технический университет”
394026 Воронеж, Московский просп.,14

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(кафедра общей физики технологического профиля)

А.Г.Москаленко, М.Н. Гаршина, И.А. Сафонов, Т.Л. Тураева.

ФИЗИКА

Часть 1

МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, ТЕРМОДИНАМИКА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебное пособие

Физика Ч.1 для заочников.doc.	4,82 МБ.	16.11.2006 г.	7.9. уч. изд. л.
------------------------------	----------------	-----------	----------------
(наименование файла)	(объём файла)	(дата)	(объём издания)