ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий проектирования

220-2014

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы
по дисциплине «Оптимизация в САПР»
для студентов направления подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профиль «Системы автоматизированного проектирования
в машиностроении») заочной формы обучения

Воронеж 2014

Составитель канд. техн. наук О.В. Собенина

УДК 681.3

Методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Оптимизация в САПР» для студентов направления подготовки бакалавров 230100 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») заочной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. О.В. Собенина. Воронеж, 2014. 45 с.

Методические указания содержат необходимые для выполнения контрольной работы теоретические сведения, примеры выполнения контрольных заданий.

Предназначены для студентов 3 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе Word и содержатся в файле «Оптимизация в САПР Контрольная работа.doc».

Табл. 3. Ил. 52. Библиогр.: 4 назв.

Рецензент канд. физ-мат. наук, доц. В.Н. Дурова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. М.И. Чижов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется печатным способом.

2. На титульном листе работы должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, шифр группы, названии дисциплины, факультет, ВУЗ. В начале работы указывается вариант контрольной работы. В конце работы ставится дата ее выполнения и подпись студента.

3. В работу включаются все задачи, указанные в заданиях, и строго по положенному варианту.

4. Условия задач приводятся полностью. Решения излагаются подробно, объясняются все действия по ходу решения.

5. После получения проверенной работы исправляются все отмеченные рецензентом ошибки.

6. Выбор варианта контрольной работы производится по двум последним цифрам номера зачетной книжки в соответствии со следующей таблицей.

Предпоследняя цифра x совпадает с одной из цифр: 0, 2, 4, 6, 8	Предпоследняя цифра x совпадает с одной из цифр: 1, 3, 5, 7, 9
$x1$ – 1-й вариант	$x1$ – 11-й вариант
$x2$ – 2-й вариант	$x2$ – 12-й вариант
$x3$ – 3-й вариант	$x3$ – 13-й вариант
$x4$ – 4-й вариант	$x4$ – 14-й вариант
$x5$ – 5-й вариант	$x5$ – 15-й вариант
$x6$ – 6-й вариант	$x6$ – 16-й вариант
$x7$ – 7-й вариант	$x7$ – 17-й вариант
$x8$ – 8-й вариант	$x8$ – 18-й вариант
$x9$ – 9-й вариант	$x9$ – 19-й вариант
$x0$ – 10-й вариант	$x0$ – 20-й вариант

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача, математическая модель которой имеет вид:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min); \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i \in I,\ I \subseteq M = \{1, 2, ..., m\}; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i \in M; \quad (3)$$

$$x_j \ge 0,\ j \in J,\ J \subseteq N = \{1, 2, ..., n\}. \quad (4)$$

Система линейных уравнений (2) и неравенств (3), (4), определяющая допустимое множество решений задачи *W*, называется *системой ограничений задачи линейного программирования,* а линейная функция $f(X)$ называется *целевой функцией,* или *критерием оптимальности.*

В частном случае, если $I = \varnothing$, то система (2) - (3) состоит только из линейных неравенств, а если $I = M$, то — из линейных уравнений.

Рассмотрим процесс построения математических моделей задач линейного программирования на примере.

Пример. *Определение оптимального ассортимента продукции.* Предприятие изготавливает два вида продукции — П1 и П2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья — А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 16 и 12 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида П1 и вида П2 дан в таблице 1. Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию П1 никогда не превышает спроса на продукцию П2 более чем на 2 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию П2 никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 4 д. е. — для П1 и 6 д. е. для П2. Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Таблица 1

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	П1	П2	
A	3	4	16
B	3	3	12

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи начинается с ответов на следующие вопросы.

1. Для определения каких величин должна быть построена модель, т. е. как идентифицировать *переменные* данной задачи?

2. Какие *ограничения* должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

3. В чем состоит *цель задачи,* для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Для рассматриваемой задачи ответы на эти вопросы сформулируем так: предприятию требуется определить объемы производства каждого вида продукции в тоннах, максимизирующие доход в д. е. от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Для построения математической модели остается только идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции П1 и x_2 единиц продукции П2. Поскольку производство продукции П1 и П2 ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$3x_1 + 4x_2 \le 16;$ (ограничение запаса сырья А)

$3x_1 + 3x_2 \le 12;$ (ограничение запаса сырья В)

$x_1 - x_2 \le 2;$ (ограничение соотношения спроса на П1 и П2)

$x_2 \le 2;$ (ограничение спроса на продукцию П2)

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$ (условие неотрицательности объемов производства П1 и Р2)

Доход от реализации $\boldsymbol{x_1}$ единиц продукции П1 и $\boldsymbol{x_2}$ единиц продукции П2 составит $F = 4\,x_1 + 6\,x_2$. (целевая функция задачи). Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

1.1. Графическое решение задач линейного программирования

Графический способ решения используют для ЗЛП с двумя переменными, в которых ограничения выражены неравенства. Задача линейного программирования с двумя переменными:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \boldsymbol{max} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{6}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{7}$$

Каждое из неравенств (6) – (7) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2} = b_i$, $(i = \overline{1,m})$, $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$ В том случае, если система неравенств (6) – (7) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых решений является выпуклое множество, которое называется *многоугольником* решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки равенств.

Областью допустимых решений системы неравенств (6)–(7) может быть: выпуклый многоугольник, выпуклая многоугольная неограниченная область, пустая область, луч, отрезок, единственная точка.

Целевая функция (5) определяет на плоскости семейство параллельных прямых, каждой из которых соответствует определенное значение *f(X)*. Вектор $\overline{\boldsymbol{C}} = (c_1; c_2)$ с координатами $\boldsymbol{c_1}$ и $\boldsymbol{c_2}$, перпендикулярный этим прямым, указывает направление наискорейшего возрастания *f(X)*, а противоположный вектор – направление убывания *f(X)*.

Если в одной и той же системе координат изобразить область допустимых решений системы неравенств (6) – (7) и семейство параллельных прямых (5), то задача определения максимума функции *f(X)* сведется к нахождению в допустимой области точки, через которую проходит прямая из семейства *f(X)*=const, и которая соответствует наибольшему значению целевой функции *f(X)*. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение.

Для определения данной вершины построим линию уровня $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\overline{\boldsymbol{C}} = (c_1; c_2)$, и будем передвигать ее в направлении вектора $\overline{\boldsymbol{C}} = (c_1; c_2)$ до тех пор, пока она не коснется последней крайней (угловой) точки многоугольника решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальное решение данной задачи.

Замечание. Нахождение минимального значения $f(X)$ отличается от нахождения максимального значения тем, что линия уровня $f(X)$ передвигается не в направлении вектора $\overline{\boldsymbol{C}} = (c_1; c_2)$, а в противоположном направлении.

Для решения ЗЛП (6) – (7) необходимо следующее.

1. Построить прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (6) – (7) знаков неравенств на знаки равенств.

2. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Определить многоугольник решений.

4. Построить вектор $\overline{\boldsymbol{C}} = (c_1; c_2)$.

5. Построить прямую $f(X) = \boldsymbol{c_1}x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\overline{\boldsymbol{C}} = (c_1; c_2)$.

6. Передвигать прямую $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ в направлении вектора $\overline{\boldsymbol{C}}$, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность функции сверху на множестве решений.

7. Определить координаты точки максимума функции и вычислить значение целевой функции в этой точке.

1.2. Решение задачи об ассортименте продукции графическим методом

Рассмотрим решение задачи об ассортименте продукции графическим методом. Математическая постановка имеет следующий вид: целевая функция $f(X) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$;

ограничения:

$$3x_1 + 4x_2 \le 16; \quad (8)$$

$$3x_1 + 3x_2 \le 12; \quad (9)$$

$$x_1 - x_2 \le 2; \quad (10)$$

$$x_2 \le 2; \quad (11)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \quad (12)$$

Построим многоугольник решений (рис. 1). Для этого в системе координат на плоскости изобразим граничные прямые: $3x_1 + 4x_2 = 16$ - (L1); $3x_1 + 3x_2 = 12$ - (L2); $x_1 - x_2 = 2$ - (L3); $x_2 = 2$ - (L4).

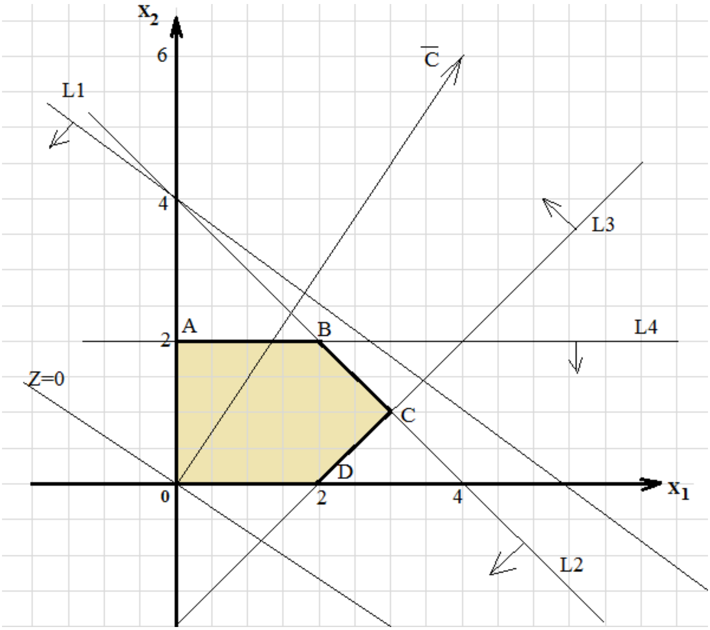


Рис. 1. Решение ЗЛП графическим методом

Взяв какую-либо точку, например, начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Полуплоскости, определяемые неравенствами, на рис. 1 показаны стрелками. Областью решений является многоугольник *OABCD.*

Для построения прямой $f(X)=4x_1+6x_2=0$ строим вектор-градиент $\overline{C}=(4;6)$ и через точку O=(0;0) проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую *f(X)*=0 перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{C}$. Из рис. 1 следует, что в точке B функция принимает максимальное значение. Точка B лежит на пересечении прямых L4 и L2. Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2=12; \\ x_2=2. \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи x_1= 2, x_2=2. Подставляя значения x_1 и x_2 в целевую функцию, получим: *f(X)*=4*2 + 6*2=20. Полученное решение означает, что объем производства продукции П1 должен быть равен 2 ед., продукции П2 — 2 ед. Доход, получаемый в этом случае, составит: *f(X)*=20 д. е.

1.3. Анализ моделей на чувствительность

Анализ моделей на чувствительность — это процесс, реализуемый после получения оптимального решения. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели. В задаче об ассортименте продукции может представлять интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение и уменьшение спроса на продукцию или запасов исходного сырья. Возможно, также потребуется анализ влияния рыночных цен на оптимальное решение. Для проведения анализа модели на чувствительность с успехом могут быть использованы графические методы.

Рассмотрим основные задачи анализа на чувствительность на примере задачи об ассортименте продукции.

Задача 1. Анализ изменений запасов ресурсов.

После нахождения оптимального решения необходимо выяснить, как отразится на этом решении изменение запасов ресурсов. Для этого необходимо ответить на два вопроса:

1. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции $f(X)$?

2. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции $f(X)$?

Ограничения классифицируют как связывающие (активные) или несвязывающие (неактивные). Прямая, представляющая связывающее ограничение, проходит через оптимальную точку, в противном случае, соответствующее ограничение будет несвязывающим. На рис. 1 связывающими ограничениями являются ограничения (9) и (11), представленные прямыми L2 и L4 соответственно. Ограничение (9) определяет запасы сырья *B*. Ограничение (11) определяет спрос на продукцию П2.

Если некоторое ограничение является связывающим, то соответствующий ресурс относят к разряду дефицитных ресурсов, так как он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение, следует отнести к разряду недефицитных ресурсов (т. е. имеющихся в некотором избытке). Здесь несвязывающими ограничениями являются (8) и (10). Следовательно, ресурс - сырье *A* - недефицитный, т. е. имеется в избытке, а соотношение спроса на продукцию П1 и П2 не существенно.

При анализе модели на чувствительность для правых частей ограничений определяют:

1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение;

2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

В данном случае сырье *B* и спрос на продукцию П2 являются дефицитными ресурсами. Рассмотрим ресурс - сырье В. На рис. 2 при увеличении запаса ресурса прямая L2 перемещается вверх, параллельно самой себе, до точки *K*, в которой пересекаются линии ограничений L1 и L4. В точке *K* ограничения (8) и (11) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка *K,* а пространством (допустимых) решений становится многоугольник *AKED0*. В точке *K* ограничение (9) (для В) становится избыточным, так как любой дальнейший рост запаса ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение.

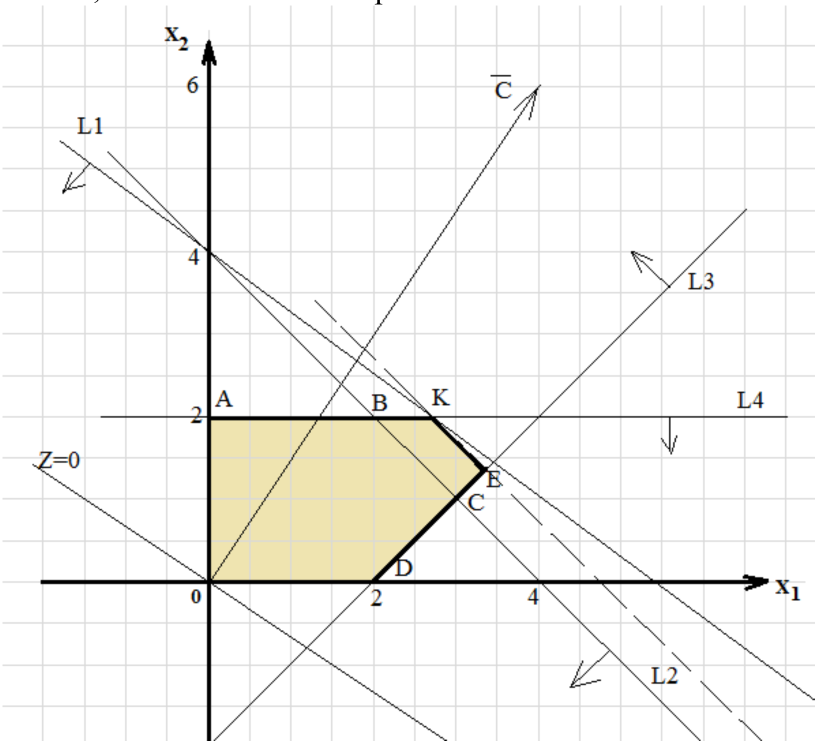


Рис. 2. Графическая интерпретация изменения ресурса В

Таким образом, объем ресурса В не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение становится избыточным, т. е. прямая (L2) проходит через новую оптимальную точку *К.* Установим координаты точки *К,* в которой пересекаются прямые L1 и L4, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 16; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

В результате получаем $\boldsymbol{x_1}$=8/3, $\boldsymbol{x_2}$=2. Подставив координат точки K в левую часть ограничения (9), определим максимально допустимый запас В: $3x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 8/3 + 3 \cdot 2 = 14.$

fmax=4*8/3 + 6*2 = 68/3=22,67.

На рис. 3 проиллюстрирована ситуация, когда рассматривается вопрос об изменении спроса на продукцию П2.

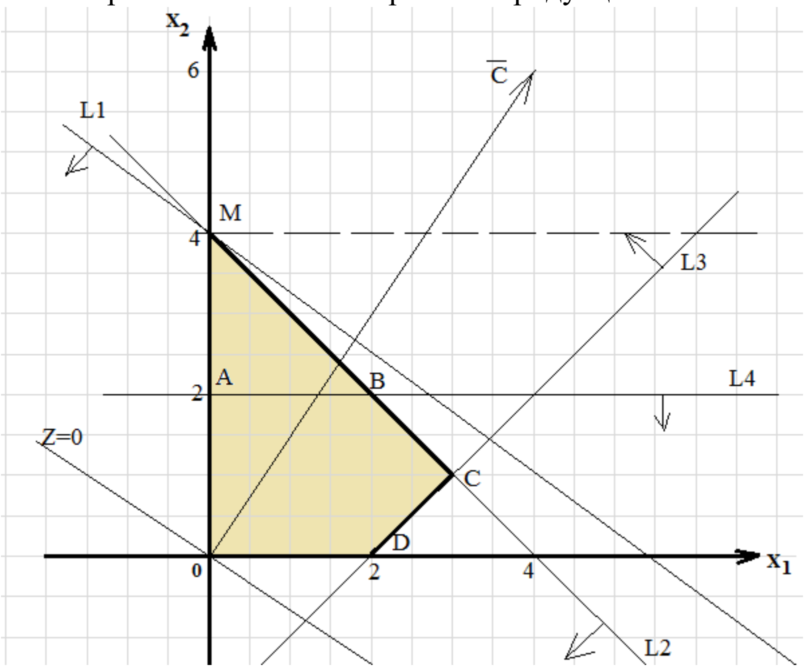


Рис. 3. Графическая интерпретация изменения спроса

Новой оптимальной точкой становится точка *M*. где пересекаются прямые L1, L2 и ось OX2. Координаты данной точки находятся путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 16; \\ 3x_1 + 3x_2 = 12; \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

В результате получается $\boldsymbol{x_1}$=0, $\boldsymbol{x_2}$=4, причем спрос на продукцию П2 не должен превышать 4ед. Дальнейшее увеличение спроса на продукцию П2 не будет влиять на оптимальное решение. fmax=4*0 + 6*4 = 24.

Рассмотрим вопрос об уменьшении правой части несвязывающих ограничений. Ограничение (10) $\boldsymbol{x_1 - x_2} \le 2$ фиксирует предельный разрыв в спросе на продукции П1 и П2. Из рис. 1 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую L3 *(CD)* можно поднимать вверх до пересечения с оптимальной точкой *B*. Так как точка *B* имеет координаты $\boldsymbol{x_1}$=2, $\boldsymbol{x_2}$=2, уменьшение разрыва в спросе до величины 0 $(\boldsymbol{x_1 - x_2} \le 0)$ никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Рассмотрим ограничение (8). В этом случае правую часть — запасы сырья *А* — можно уменьшать до тех пор, пока прямая L1 не достигнет точки *B*. При этом правая часть ограничения (8) станет равной $\boldsymbol{3x_1} + \boldsymbol{4x_2} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 14$, что позволяет записать это ограничение в виде: $\boldsymbol{3x_1} + \boldsymbol{4x_2} \le 14$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если суточный запас ресурса А уменьшить на 2 ед. Результаты сведены в таблице 2:

Таблица 2

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, ед.	Максимальное увеличение дохода от изменения ресурса, у. д. е.
1(А)	Недеф.	14 – 16 =-2	20-20= 0
2 (В)	Дефицит.	14 - 12 = + 2	22,67-20 = +0,67
3	Недеф.	0 - 2 = -2	20-20= 0
4	Дефицит.	4 - 2 = +2	24 - 20 = +4

Задача 2. Определение наиболее выгодного ресурса.

В задаче 1 анализа на чувствительность исследовали влияние на оптимум увеличения объема дефицитных ресурсов. При ограничениях, связанных с дополнительным привлечением ресурсов, задают вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? Для этого введем характеристику ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражающуюся через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из таблицы 2. Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса *i* через $\mathrm{y_i}$. Величина y_i определяется из соотношения

$$\boldsymbol{y_i} = \frac{\text{Максимальное приращение Z}}{\text{Максимально допустимый прирост ресурса } \boldsymbol{i}}.$$

Результаты расчета ценности единицы каждого из ресурсов представлены в таблице 3.

Таблица 3

Ресурс *i*	Тип ресурса	Значение y_i
1 (A)	Недефицитный	0/(-2) = 0
2 (B)	Дефицитный	2,67/2 =1,33
3	Недефицитный	0/(-2) = 0
4	Дефицитный	4/2= 2

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение спроса на продукцию П2, и лишь затем — на увеличение запаса сырья В. Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

Задача 3. Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции.

Изменение коэффициентов целевой функции оказывает влияние на наклон прямой, которая представляет эту функцию в принятой системе координат. Вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статуса того или иного ресурса. При анализе модели на чувствительность рассмотрение коэффициентов целевой функции необходимо дополнить исследованием следующих вопросов:

1) каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

2) на сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным, и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Ответим на поставленные вопросы на нашем примере. Рассматривая первый вопрос, обозначим через $\boldsymbol{c_1}$ и $\boldsymbol{c_2}$ доходы предприятия от продажи единицы продукции П1 и П2 соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде $f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2$.

На рис. 1 видно, что при увеличении $\boldsymbol{c_1}$ или уменьшении $\boldsymbol{c_2}$ прямая, представляющая целевую функцию *f(X)*, вращается (вокруг точки *B*) по часовой стрелке. Если же $\boldsymbol{c_1}$ уменьшается или $\boldsymbol{c_2}$ увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении — против часовой стрелки. Таким образом, точка B будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых для ограничений (9) и (11).

Когда наклон прямой *f(X)* станет равным наклону прямой L2, получим две альтернативные оптимальные угловые точки - *C* и *B*. Аналогично, если наклон прямой *f(X)* станет равным наклону прямой для ограничения (11), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки *A* и *B*. Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение *f(X)* может достигаться при различных значениях переменных x_1 и x_2. Как только наклон прямой выйдет за пределы указанного выше интервала c_1, получим некоторое новое оптимальное решение.

Выясним, каким образом можно найти допустимый интервал изменения c_1, при котором точка *B* остается оптимальной. Исходное значение коэффициента $c_2 = 6$ оставим неизменным. На рис. 1 видно, что значение c_1 можно уменьшать до тех пор, пока прямая *f(X)* совпадет с прямой L4 (отрезок *AB*).

Это крайнее минимальное значение коэффициента c_1 можно определить из равенства углов наклонов прямой *f(X)* и прямой L4. Так как тангенс угла наклона для прямой *f(X)* равен $\frac{c_1}{6}$, а для прямой (4) равен $\frac{0}{1} = 0$, то минимальное значение c_1 определим из равенства $\frac{c_1}{6} = 0$, откуда min $c_1 = 0$. На рис 1 видно, что значение c_1 можно увеличивать беспредельно, так как прямая *f(X)* при $c_2 = 6$ и $c_1 \to +\infty$ не совпадает с прямой L2 (отрезок *BC* и, следовательно, точка В при всех значениях коэффициента $c_1 \geq 0$ будет единственной оптимальной.

Интервал изменения c_1, в котором точка В по-прежнему остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством $0 < c_1 < +\infty$. При $c_1 = 0$ оптимальными угловыми точками будут как точка *B*, так и точка *A*. Как только коэффициент c_1 становится меньше 0, оптимум смещается в точку *A*.

Можно заметить, что, как только коэффициент c_1 оказывается меньше 0, ресурс (9) становится недефицитным, а ресурс (11) - дефицитным. Для предприятия это означает следующее: если доход от продажи единицы продукции П1 станет меньше *0* д.е. (а меньше быть не может), то наиболее выгодная производственная программа предприятия должна предусматривать выпуск максимально допустимого количества продукции П2 (полностью удовлетворять спрос на продукцию П2). При этом соотношение спроса на продукцию П1 и П2 не будет лимитировать объемы производства, что обусловит не дефицитность ресурса (8). Увеличение коэффициента c_1 свыше 0 д. е. не снимает проблему дефицита ресурса (8). Точка B — точка пересечения прямых L2 и L4 - остается все время оптимальной.

Задание 1

Предприятие изготавливает два вида продукции – П1 и П2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используют два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют **C** и **D** единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида П1 и П2 дан в таблице.

Сырье	Расход сырья на 1 единицу продукции	
	П1	П2
A	R_{11}	R_{12}
B	R_{21}	R_{22}

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию П1 никогда не превышает спроса на продукцию П2 более чем на **M** единицу. Кроме того, известно, что спрос на продукцию П2 никогда не превышает **N** единиц в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: **K** денежных единиц для П1 и L денежных единиц для П2. Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Определить предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение? На сколько можно снизить запас недефицитного ресурса при сохранении полученного оптимального решения? Какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? Каков диапазон изменения цен на продукцию, при котором не происходит изменения оптимального решения? Решение провести графическим методом.

Вариант	R_{11}	R_{12}	R_{21}	R_{22}	**C**	**D**	**K**	**L**	**M**	**N**
1	3	2	2	3	12	8	3	4	1	2
2	4	2	3	3	10	12	5	3	1	2
3	2	4	3	3	15	11	5	4	2	3
4	3	1	2	4	8	10	4	5	2	3
5	4	2	3	3	10	12	4	3	2	2
6	3	2	4	2	10	13	5	3	1	2
7	3	2	3	3	9	12	6	4	2	2
8	5	4	3	3	15	11	6	4	2	3
9	3	2	4	4	8	14	4	5	2	3
10	4	3	3	2	10	12	4	3	2	2
11	3	4	2	3	15	12	5	4	1	2
12	4	2	3	3	11	14	5	3	2	1
13	2	4	3	3	14	9	6	4	2	3
14	1	2	2	4	12	14	3	5	2	3
15	3	4	3	3	16	12	4	6	2	2
16	3	2	4	3	10	15	5	4	1	2
17	3	2	4	3	15	13	6	4	2	1
18	5	4	4	3	14	11	6	5	2	2
19	3	2	4	4	11	14	5	4	2	3
20	4	4	3	2	14	12	4	3	2	2

2. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

В процессе управления производством зачастую возникают задачи назначения исполнителей на различные виды работ, например, подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложении между различными проектами научно-технического развития и т.п.. Задачу о назначениях можно сформулировать следующим образом. Необходимо выполнить N различных работ. Для их выполнения можно привлечь N рабочих. Каждый рабочий за определенную плату готов выполнить любую работу. Выполнение любой работы следует поручить одному рабочему. Любой рабочий может выполнить только одну работу. Требуется так распределить работы между рабочими, чтобы общие затраты на выполнение всех работ были минимальными.

Задача о назначениях в стандартной форме. При рассмотрении задачи о назначениях в стандартной форме предполагается, что количество рабочих равно количеству работ.

Введем обозначения:

c_{ij} — показатель эффективности назначения i-го рабочего на j-ю работу, например, издержки выполнения i-м рабочим j-й работы;

x_{ij} — переменная модели ($x_{ij} = 1$, если i-й рабочий используется на j-й работе, и $x_{ij} = 0$ в противном случае).

Математическая модель задачи о назначениях:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \qquad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}; \qquad (14а)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (14б)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (15)$$

Здесь (13) - целевая функция (минимум издержек на выполнение всех работ); (14) – система ограничений, отражающая следующие условия: а) – каждый рабочий может быть привлечен к одной работе; б) – каждая работа должна быть выполнена одним рабочим; (15) – условия двоичности переменных.

При решении задачи о назначениях исходной информацией является таблица задачи о назначениях с=$\{c_{ij}\}$, элементами которой служат показатели эффективности назначений. Для задачи о назначениях, записанной в стандартной форме, количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов.

Результатом решения задачи о назначениях (13) – (15) является вектор $x^* = \{ x^*_{ij} \}$, компоненты которого – целые числа. Решение задачи о назначениях (13) – (15) можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна 1. Такую матрицу также называют матрицей перестановок. Значение целевой функции (13), соответствующее оптимальному назначению, называют *эффективностью назначений.*

В комбинаторной интерпретации задача о назначениях заключается в определении такой перестановки исполнителей $\{1,2,\ldots,n\}$, которая обеспечивает минимальную суммарную стоимость назначений. Очевидно, что решение такой задачи может быть получено перебором, однако существует ряд эффективных алгоритмов.

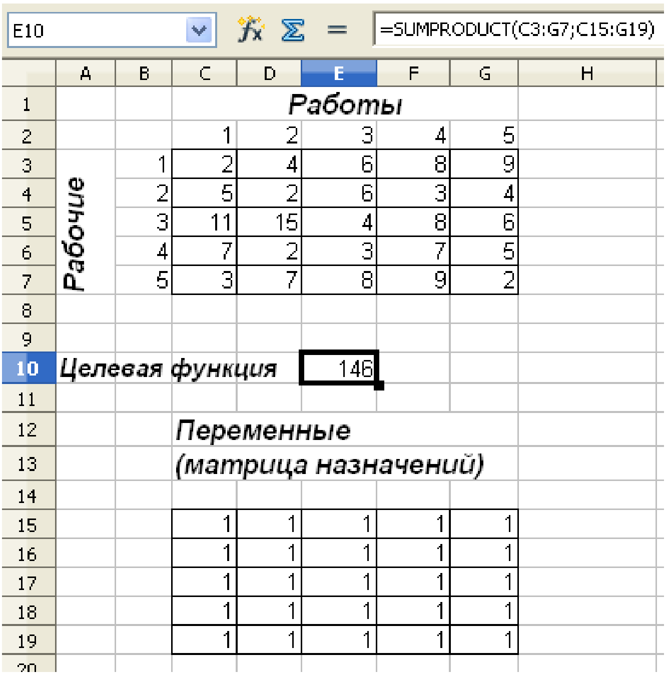
При решении задачи о назначениях в OpenOffice.orgCalc используются возможности самой программы – инструмент для поиска решений уравнений и задач оптимизации.

Следующая последовательность шагов описывает процесс решения задачи о назначениях в OpenOffice.orgCalc.

Шаг 1. Открываем электронную таблицу OpenOffice.orgCalc. Вводим в некоторый диапазон ячеек матрицу весов заданную в условии задачи (рис.4). Делаем необходимые подписи.

Шаг 2. Заполняем диапазон ячеек единицами, равный по размеру заданной матрице весов, но расположенный таким образом, чтобы он не перекрывал матрицу весов. Эта матрица назначений (переменные задачи), предварительно заполненная единицами. Расставляем необходимые подписи.

Шаг 3. Вычисляем значение целевой функции (13) и помещаем его в некоторую ячейку. Целевая функция равна сумме произведений значений из диапазона, заданного в шаге 1 и диапазона, заданного в шаге 2. Для этого вызываем мастер функций соответствующей кнопкой (или из меню Функции\Вставить функцию) и выбираем функцию SUMPRODUCT. В полях «Массив 1» вводим диапазон ячеек из шага 1, делая на них ссылку, а в «Массив 2» вводим диапазон из шага 2. Нажимаем кнопку «ОК» (рис. 4).

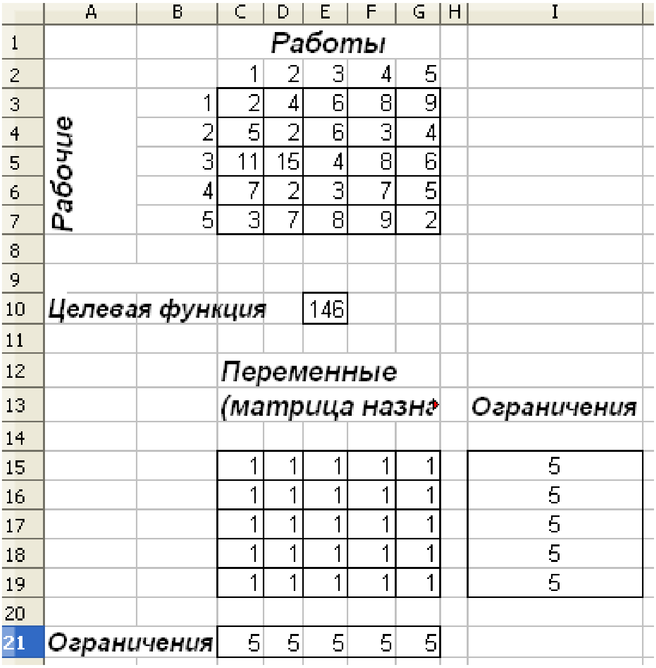


	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Работы					
2			1	2	3	4	5	
3	Рабочие	1	2	4	6	8	9	
4		2	5	2	6	3	4	
5		3	11	15	4	8	6	
6		4	7	2	3	7	5	
7		5	3	7	8	9	2	
8								
9								
10	Целевая функция				146			
11								
12			Переменные					
13			(матрица назначений)					
14								
15			1	1	1	1	1	
16			1	1	1	1	1	
17			1	1	1	1	1	
18			1	1	1	1	1	
19			1	1	1	1	1	

Рис. 4. Ввод матрица весов, переменных и вычисление целевой функции

Шаг 4. Вводим левые части ограничений (14а)-(14б). Для этого выполняем суммирование значений элементов первого столбца матрицы, полученной в шаге 2, и размещаем результат, например, под первым столбцом матрицы весов. Заполняем с помощью операции автозаполнения ячейки под всеми остальными столбцами матрицы весов.

Выполняем суммирование значений элементов первой строки матрицы, полученной в шаге 2, и размещаем результат, например, за последним элементом первой строки матрицы весов. Заполняем с помощью операции автозаполнения ячейки за всеми остальными строками матрицы весов (рис. 5).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Работы						
2			1	2	3	4	5		
3	Рабочие	1	2	4	6	8	9		
4		2	5	2	6	3	4		
5		3	11	15	4	8	6		
6		4	7	2	3	7	5		
7		5	3	7	8	9	2		
8									
9									
10	Целевая функция				146				
11									
12			Переменные						
13			(матрица назн						Ограничения
14									
15			1	1	1	1	1		5
16			1	1	1	1	1		5
17			1	1	1	1	1		5
18			1	1	1	1	1		5
19			1	1	1	1	1		5
20									
21	Ограничения		5	5	5	5	5		

Рис. 5. Добавление ограничений

Шаг 5. Выполняем команду Сервис\Решатель… . На экране появится окно, представленное на рис. 6. Необходимо заполнить следующие данные:

1) в поле «Целевая ячейка» даем ссылку на ячейку из шага 3, т.е. ячейку, в которой вычисляется значение целевой функции;

2) установить точку на переключателе «Минимум»;

3) в поле «Изменяя ячейки» даем ссылку на диапазон ячеек таблицы из шага 2 (матрицы назначений).

4) ввести ограничения задачи (2) – (4) в поле «Ограничительные условия». Вводим 3 группы ограничений, как показано на рис. 6.

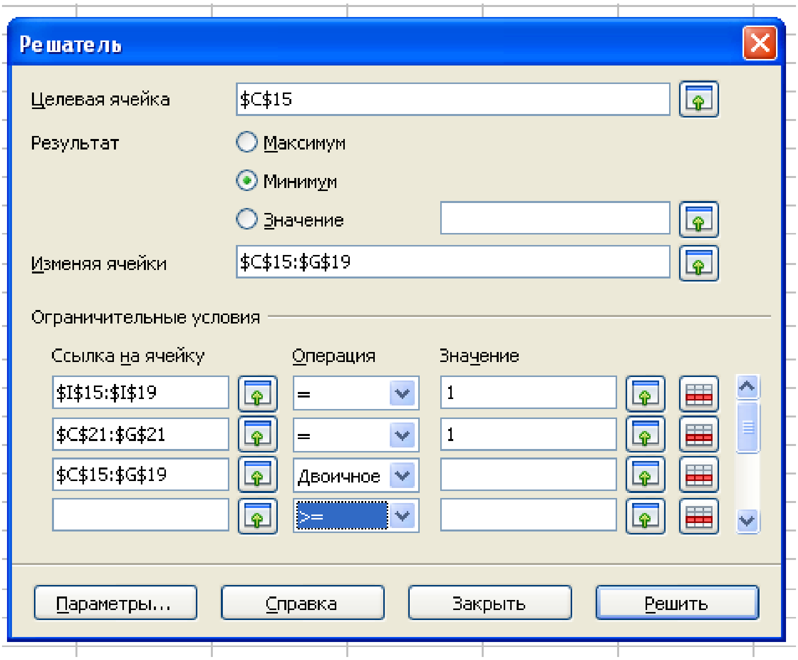


Рис. 6. Окно «Решатель…»

5) Нажимаем «Решить». После чего в матрице назначений будет представлено решение задачи, а в целевой ячейке будет показано значение целевой функции, соответствующее оптимальному назначению (рис.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			**Работы**						
2			1	2	3	4	5		
3	**Рабочие**	1	2	4	6	8	9		
4		2	5	2	6	3	4		
5		3	11	15	4	8	6		
6		4	7	2	3	7	5		
7		5	3	7	8	9	2		
8									
9									
10	**Целевая функция**				13				
11									
12			**Переменные**						
13			**(матрица назначен**						**Ограничения**
14									
15			1	0	0	0	0		1
16			0	0	0	1	0		1
17			0	0	1	0	0		1
18			0	1	0	0	0		1
19			0	0	0	0	1		1
20									
21	**Ограничения**		1	1	1	1	1		

Рис. 7. Результат

2.1. Пример решения задачи о назначениях

Цеху металлообработки нужно выполнить срочный заказ на производство деталей. Каждая деталь обрабатывается на 4-х станках C_1, C_2, C_3 и C_4. На каждом станке может работать любой из четырех рабочих A, B, C и D. Однако, каждый из них имеет на каждом станке различный процент брака. Из документации ОТК имеются данные о проценте брака каждого рабочего на каждом станке:

Рабочие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	2,3	1,9	2,2	2,7
B	1,8	2,2	2,0	1,8
C	2,5	2,0	2,2	3,0
D	2,0	2,4	2,4	2,8

Необходимо так распределить рабочих по станкам, чтобы суммарный процент брака, который равен сумме процентов брака всех 4-х рабочих, был минимален. Чему равен этот процент?

РЕШЕНИЕ.

Обозначим за x_{ij} (i,j=1,2,3,4, i соответствует рабочим A, B, C, D, а индекс j - станкам C_1, C_2, C_3, C_4) переменные, которые принимают значение 1, если i-й рабочий назначается для работы на j-ом станке. Если данное условие не выполняется, то x_{ij}=0. Целевая функция имеет вид:

$$2{,}3x_{11}+1{,}9x_{12}+2{,}2x_{13}+2{,}7x_{14}+1{,}8x_{21}+2{,}2x_{22}+2x_{23}+1{,}8x_{24}+$$
$$+2{,}5x_{31}+2x_{32}+2{,}2x_{33}+3x_{34}+2x_{41}+2{,}4x_{42}+2{,}4x_{43}+2{,}8x_{44}\to min.$$

Введем ограничения. Каждый рабочий может работать только на одном станке, т. е.

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1, \quad \boldsymbol{i=1,...,4.}$$

Каждый станок обслуживается только одним рабочим:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}=1, \quad \boldsymbol{j=1,...,4.}$$

$$x_{i,j}=\{0,1\}.$$

Решим задачу с помощью средств OpenOffice.orgCalc.

Исходные данные для решения задачи представлены на рис. 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1			Станки					Переменные				Ограничения
2			C1	C2	C3	C4		C1	C2	C3	C4	
3	Рабочие	A	2,3	1,9	2,2	2,7		1	1	1	1	4
4		B	1,8	2,2	2	1,8		1	1	1	1	4
5		C	2,5	2	2,2	3		1	1	1	1	4
6		D	2	2,4	2,4	2,8		1	1	1	1	4
7								4	4	4	4	
8												
9	Целевая функция				36,2							

Рис.8. Исходные данные задачи

Результат решения представлены на рис. 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1			Станки					Переменные				Ограничения
2			C1	C2	C3	C4		C1	C2	C3	C4	
3	Рабочие	A	2,3	1,9	2,2	2,7		0	1	0	0	1
4		B	1,8	2,2	2	1,8		0	0	0	1	1
5		C	2,5	2	2,2	3		0	0	1	0	1
6		D	2	2,4	2,4	2,8		1	0	0	0	1
7								1	1	1	1	
8												
9	Целевая функция				7,9							
10												

Рис.9. Результат решения задачи

ОТВЕТ: Из таблицы переменных, определяем, что рабочий A должен работать на втором станке (C2), рабочий B – на станке C4, рабочий C – на станке C3, рабочий D – на станке C1. Суммарный процент брака при таком распределении рабочих по станкам равен 7,9 (значение целевой функции).

Задание 2. Решить задачу о назначениях средствами OpenOffice.orgCalc.

Варианты 1-8. Цеху металлообработки нужно выполнить срочный заказ на производство деталей. Каждая деталь обрабатывается на 4-х станках C_1, C_2, C_3 и C_4. На каждом станке может работать любой из четырех рабочих A, B, C и D. Однако, каждый из них имеет на каждом станке различный процент брака. Из документации ОТК имеются данные о проценте брака каждого рабочего на каждом станке, которые представлены в таблице. Необходимо так распределить рабочих по станкам, чтобы суммарный процент брака, который равен сумме процентов брака всех 4-х рабочих, был минимален. Чему равен этот процент?

Вариант 1.

Рабо-чие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	1,3	1,9	1,2	1,7
B	1,8	2,2	2,0	1,8
C	1,5	2,0	2,2	2,3
D	2,0	2,4	2,4	1,8

Вариант 2.

Рабо-чие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	2,7	1,9	2,2	2,8
B	1,8	2,2	2,4	1,8
C	2,5	2,4	2,7	3,1
D	2,6	2,5	2,4	2,8

Вариант 3.

Рабо-чие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	2,3	1,3	1,2	1,7
B	1,8	1,2	2,0	1,8
C	1,5	2,0	2,2	1,0
D	2,0	1,4	2,4	1,8

Вариант 4.

Рабо-чие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	2,3	1,9	2,2	2,5
B	3,8	2,6	2,8	1,8
C	2,5	2,3	2,1	3,0
D	2,4	2,4	2,4	2,8

Вариант 5.

Рабо-чие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	3,1	2,9	2,2	2,4
B	2,8	2,5	3,0	2,8
C	2,9	2,7	2,2	3,2
D	2,2	2,4	2,4	2,8

Вариант 6.

Рабо-чие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	2,4	2,2	3,1	2,9
B	2,8	3,0	2,8	2,5
C	3,2	2,2	2,9	2,7
D	2,8	2,4	2,2	2,4

Вариант 7.

Рабо-чие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	2,4	2,2	3,1	2,9
B	1,8	1,2	2,0	1,8
C	2,3	1,3	1,2	1,7
D	1,5	2,0	2,2	1,0

Вариант 8.

Рабо-чие	Станки			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A	2,0	2,2	2,2	1,8
B	2,3	1,3	1,2	1,7
C	2,2	2,0	1,3	2,3
D	1,2	1,9	2,0	1,7

Варианты 9-14. На предприятии имеется 5 автомобилей разных моделей. Необходимо в разные районы области перевести 5 грузов. Затраты по перевозке каждого груза каждым автомобилем различны и приведены в таблице. Выбрать автомобиль для каждого вида груза так, чтобы затраты на перевозку были минимальными. Определить эти затраты.

Вариант 9

Авто-моби-ли	Грузы				
	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
А1	37	17	52	73	72
А2	11	39	70	20	27
А3	12	21	25	11	30
А4	49	35	36	35	74
А5	40	31	78	66	79

Вариант 10

Авто-моби-ли	Грузы				
	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
А1	42	35	26	64	38
А2	27	39	70	41	27
А3	38	21	25	39	46
А4	51	35	36	35	57
А5	29	31	52	66	62

Вариант 11

Авто-моби-ли	Грузы				
	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
А1	37	17	52	73	72
А2	52	36	62	46	47
А3	37	45	38	33	44
А4	57	47	32	35	59
А5	43	31	58	29	35

Вариант 12

Авто-моби-ли	Грузы				
	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
А1	49	35	36	35	74
А2	40	31	78	66	79
А3	12	21	25	11	30
А4	11	39	70	20	27
А5	37	17	52	73	72

Вариант 13

Авто-моби-ли	Грузы				
	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
А1	73	72	52	37	36
А2	20	27	70	39	45
А3	11	30	25	21	62
А4	35	74	36	35	59
А5	66	79	78	31	48

Вариант 14

Авто-моби-ли	Грузы				
	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
А1	35	35	36	37	49
А2	20	27	70	39	45
А3	11	21	25	21	12
А4	66	31	78	35	40
А5	73	17	52	31	37

Варианты 15-20. В организации есть четыре вакантных места и четыре претендента на эти места. Руководителем организации был проведен анализ всех кандидатур, в результате которого были получены оценки предпочтительности для каждого претендента на каждое вакантное место (10 означает "наибольшую предпочтительность", а 1 – "наименьшую предпочтительность"). Предпочтения показаны в таблице. Требуется назначить на каждое вакантное место претендента так, чтобы в максимальной степени были учтены оценки предпочтительности.

Вариант 15.

Претенденты	Вакансии			
	1	2	3	4
П-1	3	2	4	5
П-2	4	8	5	2
П-3	5	7	6	3
П-4	8	4	10	5

Вариант 16.

Претенденты	Вакансии			
	1	2	3	3
П-1	3	7	6	8
П-2	6	4	10	3
П-3	5	7	6	8
П-4	6	4	10	3

Вариант 17.

Претенденты	Вакансии			
	1	2	3	3
П-1	7	2	4	5
П-2	4	8	5	10
П-3	5	7	6	2
П-4	6	4	8	5

Вариант 18.

Претенденты	Вакансии			
	1	2	3	3
П-1	5	4	6	3
П-2	4	8	10	2
П-3	3	2	4	5
П-4	8	3	7	5

Вариант 19.

Претенденты	Вакансии			
	1	2	3	3
П-1	10	7	4	5
П-2	4	8	5	9
П-3	5	7	6	3
П-4	8	4	7	5

Вариант 20.

Претенденты	Вакансии			
	1	2	3	3
П-1	6	9	4	5
П-2	3	8	5	2
П-3	7	5	6	10
П-4	8	3	7	4

3. МОДЕЛИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Нередко приходится рассматривать задачи, в которых неизвестные величины могут принимать только целочисленные значения. Например, задачи, связанные с определением необходимого числа рабочих мест или количества дорогостоящих станков. При решении таких задач с целочисленными переменными методы линейного программирования неприменимы.

Другая сфера применения целочисленных моделей — выбор вариантов. В соответствующих задачах все или некоторые переменные могут принимать только два значения: 0 или 1. Такие переменные называют булевыми.

Задача линейного целочисленного программирования формулируется следующим образом: найти такое решение, при котором линейная функция

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

принимает максимальное или минимальное значение при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i \in I,\ I \subseteq M = \{1, 2, \ldots, m\};$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i \in M;$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}.$$

$$x_j \text{ - целые числа } j = \overline{1, n}.$$

Наиболее известные методы решения целочисленных задач — метод отсечения и метод ветвей и границ. В Mathcad нет реализаций методов решения задач целочисленного линейного программирования. Существуют задачи, в которых можно определить пределы изменения значений переменных из системы ограничений, при этом полученные диапазоны изменения значений переменных позволяют получить решение задачи, осуществив полный перебор всех возможных значений переменных. Учитывая небольшое количество возможных вариантов, а также использование программных средств для автоматизации вычислений будем решать такие задачи методом полного или сплошного перебора.

Метод заключается в переборе всех возможных вариантов сочетаний допустимых значений, проверке выполнения для каждого из ограничений и вычислении в удовлетворительных случаях соответствующих значений целевой функции. Из полученного множества значений выбирается максимальное (или минимальное), а набор значений переменных для него и будет решением задачи. Данный метод имеет простой алгоритм и может быть легко реализован с использованием средств программирования пакета Mathcad.

3.1. Решение задачи целочисленного линейного программирования в Mathcad

Если вычисление функции требует выполнения нескольких операторов, то в этом случае необходимо использовать операторы из палитры программирования (рис. 10). Составление программы начинается с нажатия кнопки Add line (Добавить строку), после чего в появившиеся шаблоны можно вставлять операторы программирования. Реализуем поэтапно, например, программу вычисления функции, которая задает единичный скачок в точке а (рис. 11).

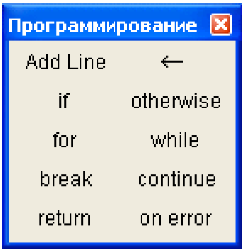


Рис. 10. Панель программирования

$$f1(x,a) := \left|\begin{array}{l} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array}\right. \qquad f1(x,a) := \left|\begin{array}{l} \blacksquare \ \text{if} \ \blacksquare \\ \blacksquare \end{array}\right. \qquad f1(x,a) := \left|\begin{array}{l} 1 \ \text{if} \ x \ge a \\ \blacksquare \end{array}\right.$$

$$f1(x,a) := \left|\begin{array}{ll} 1 & \text{if} \ x \ge a \\ \blacksquare & \text{otherwise} \end{array}\right. \qquad f1(x,a) := \left|\begin{array}{ll} 1 & \text{if} \ x \ge a \\ 0 & \text{otherwise} \end{array}\right.$$

$$f1(0,1) = 0 \qquad f1(2,1) = 1$$

Рис. 11. Создание программы вычисления функции

В этом примере вначале набрано имя функции с двумя формальными параметрами *x* и *a*, затем оператор присвоения и нажата кнопка Add line. На втором этапе в первый шаблон вставлен оператор if (если). На следующем этапе в шаблоны оператора if вставлено значение функции при $x>a$. Затем нажата кнопка otherwise (иначе), и в шаблон этого оператора вставлено нулевое значение функции, которое она принимает при $x<a$. Обращение к функции с фактическими параметрами дает требуемые значения функции.

В более сложных программах необходима операция присвоения. Оператор присвоения в палитре программирования изображен в виде стрелки, направленной влево: ←.

Рассмотрим пример использования оператора цикла for (для), показанный на рис. 12. После ввода оператора присвоения нажать кнопка Add line дважды.

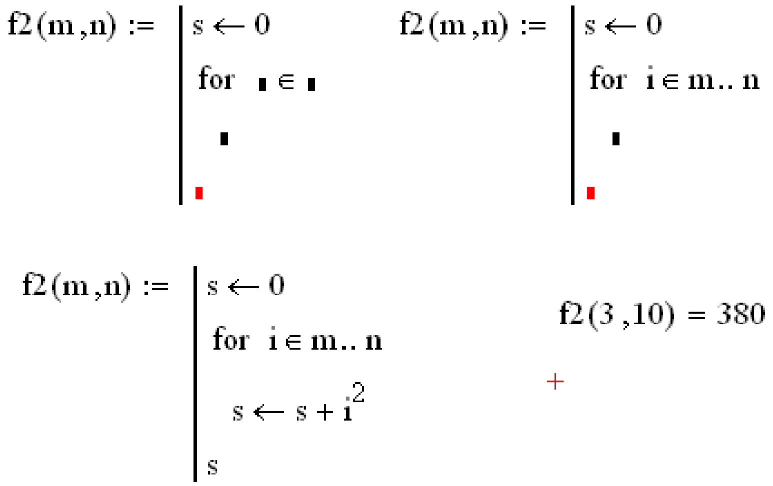


Рис. 12. Программа с оператором цикла for

На первом этапе обнуляем переменную суммирования *s* и вводим во вторую строку программы оператор for, получая в результате и третью строку - шаблон для тела цикла. Далее вставляем в шаблоны для оператора цикла имя циклической переменной и пределы ее изменения. На следующем этапе вводим оператор тела цикла, осуществляющий суммирование квадратов целых чисел и, добавляя еще одну строку нажатием Add line, в последнюю строку программы вводим имя переменной *s* как результат выполнения программы - суммы квадратов всех целых чисел от *m* до *n*.

3.2. Пример решения задачи целочисленного линейного программирования в Mathcad

Предприниматель для приобретения оборудования выделяет 40 денежных единиц. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 100 кв. м. Предприниматель может заказать оборудование трех типов, стоимость, занимаемая производственная площадь и производительность которых приведены в таблице:

Типы оборудования	Стоимость	Площадь	Производительность
1	5	3	10
2	4	5	8
3	6	4	12

Составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что количество единиц 1-го типа оборудования должно быть не меньше, чем количество единиц 2-го типа.

РЕШЕНИЕ.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2, x_3 количество единиц оборудования соответственно 1, 2 и 3 типа. Математическая модель задачи примет вид:

$$10x_1 + 8x_2 + 12x_3 \to max$$

при ограничениях:

$$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 40,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 100,$$

$$x_2 \le x_1,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ - целые}.$$

Это задача целочисленного линейного программирования. Найдем решение задачи средствами Mathcad. Будем использовать средства программирования пакета Mathcad для реализации метода полного или сплошного перебора. Для этого определим пределы изменения переменных. Из ограничений получим, что $0 \le x_1 \le 8$, $0 \le x_2 \le 8$, а $0 \le x_3 \le 6$.

Протокол решения задачи в Mathcad приведен ниже.

ORIGIN := 1

```
R :=  f ← 0
      for x1 ∈ 0..8
        for x2 ∈ 0..8
          for x3 ∈ 0..6
            if (5·x1 + 4·x2 + 6·x3 ≤ 40) ∧ (3·x1 + 5·x2 + 4·x3 ≤ 100) ∧ (x2 ≤ x1)
              s ← 10·x1 + 8·x2 + 12·x3
              if s > f
                f ← s
                K ← (x1, x2, x3)ᵀ
            s ← 0  otherwise
      K
```

$$R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad W := R \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} *$$

$W = 80$

Ответ. Максимальную производительность 80 можно получить приобретением 2 единиц 1-го типа оборудования и 5 единиц 3-го типа оборудования.

Задание 3.

Построить математическую модель задачи. Решить задачу целочисленного линейного программирования средствами Mathcad.

Вариант 1. Для приобретения оборудования выделено 34 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60 кв. м. Можно заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа А стоимостью 3 ден. ед, требующие производственную площадь 3 кв. м (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену 200 единиц продукции, и более мощные машины типа В стоимостью 4 ден.ед., занимающие площадь 5 кв.м. и обеспечивающие производительность за смену 300. Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что фермер может приобрести не более 8 машин типа В.

Вариант 2. Для приобретения оборудования выделено 38 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 50 кв. м. Можно заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа А стоимостью 3 ден. ед, требующие производственную площадь 3 кв. м (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену 150 единиц, и более мощные машины типа В стоимостью 4 ден.ед., занимающие площадь 4 кв.м. и обеспечивающие производительность за смену 100. Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что фермер может приобрести не более 8 машин типа В.

Вариант 3. Для приобретения оборудования выделено 40 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60 кв. м. Можно заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа А стоимостью 3 ден. ед, требующие производственную площадь 4 кв. м (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену 120 единиц, и более мощные машины типа В стоимостью 4 ден.ед., занимающие площадь 5 кв.м. и обеспечивающие производительность за смену 130. Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что можно приобрести не более 8 машин типа В.

Варианты 4-10. Предприниматель для приобретения оборудования выделяет **С** денежных единиц. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей **S** кв. м. Предприниматель может заказать оборудование трех типов, стоимость, занимаемая производственная площадь и производительность которых приведены в таблице. Составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что количество единиц 1-го типа оборудования должно быть не меньше, чем количество единиц 2-го типа.

Вариант 4.

Типы оборудования	Стоимость	Площадь	Производительность
1	5	3	9
2	4	5	7
3	6	4	11
	C=35	S=80	

Вариант 5.

Типы оборудования	Стоимость	Площадь	Производительность
1	3	4	14
2	5	3	9
3	4	6	12
	C=50	S=90	

Вариант 6.

Типы оборудования	Стоимость	Площадь	Производительность
1	2	3	7
2	4	2	6
3	3	4	9
	C=30	S=70	

Вариант 7

Типы оборудования	Стоимость	Площадь	Производительность
1	5	6	10
2	4	5	8
3	3	4	12
	C=40	S=80	

Вариант 8.

Типы оборудования	Стоимость	Площадь	Производительность
1	5	3	8
2	4	4	10
3	6	5	12
	C=45	S=85	

Вариант 9.

Типы оборудования	Стоимость	Площадь	Производительность
1	5	4	13
2	4	3	10
3	6	5	11
	C=35	S=75	

Вариант 10.

Типы оборудования	Стоимость	Площадь	Производительность
1	5	3	8
2	4	4	10
3	6	5	12
	C=50	S=90	

Варианты 11-17.Имеется четыре инвестиционных проекта, каждый из которых требует затрат материальных и трудовых ресурсов. Расходы ресурсов и получение прибыли приведены в таблице. Количество ресурсов ограничено и не позволяет реализовать все проекты сразу. Выбрать для реализа-

ции оптимальные по суммарному экономическому эффекту проекты.

Вариант 11.

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д.е./ед.	120	80	90	110	
Материальные ресурсы	180	180	240	200	700
Трудовые ресурсы	14	15	22	26	60

Вариант 12

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д.е./ед.	65	80	90	210	
Материальные ресурсы	200	180	240	250	800
Трудовые ресурсы	10	15	22	28	50

Вариант 13

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д.е./ед.	65	80	150	180	
Материальные ресурсы	180	160	200	220	650
Трудовые ресурсы	15	10	18	20	40

Вариант 14

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д.е./ед.	85	70	90	130	
Материальные ресурсы	210	180	240	200	750
Трудовые ресурсы	10	15	20	18	50

Вариант 15

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д.е./ед.	130	100	90	190	
Материальные ресурсы	200	180	240	250	800
Трудовые ресурсы	20	15	22	28	60

Вариант 16

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д.е./ед.	75	80	120	170	
Материальные ресурсы	200	210	220	230	700
Трудовые ресурсы	10	15	22	28	50

Вариант 17

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д.е./ед.	100	80	140	190	
Материальные ресурсы	200	170	220	230	750
Трудовые ресурсы	12	10	22	24	50

Вариант 18. Автомобилестроительный завод выпускает три модели автомобилей, которые изготавливаются последовательно в трех цехах. Мощность цехов составляет 300, 250 и 200 человекодней в декаду. В первом цехе для сборки одного автомобиля первой модели требуется 6 человекодней, второй модели — 4 и третьей модели — 2 человекодня в декаду соответствен-

но. Во втором цехе трудоемкость равна 3,4 и 5 человекодней соответственно, в третьем — по 3 человекодня на каждую модель. Прибыль, получаемая заводом от продажи одного автомобиля каждой модели, составляет соответственно 15, 13 и 10 ден. ед. Определить оптимальный план выпуска автомобилей.

Вариант 19. Автомобилестроительный завод выпускает три модели автомобилей, которые изготавливаются последовательно в трех цехах. Мощность цехов составляет 270, 230 и 210 человекодней в декаду. В первом цехе для сборки одного автомобиля первой модели требуется 6 человекодней, второй модели — 4 и третьей модели — 2 человекодня в декаду соответственно. Во втором цехе трудоемкость равна 3,4 и 5 человекодней соответственно, в третьем — по 3 человекодня на каждую модель. Прибыль, получаемая заводом от продажи одного автомобиля каждой модели, составляет соответственно 18, 13 и 12 ден. ед. Определить оптимальный план выпуска автомобилей.

Вариант 20. Автомобилестроительный завод выпускает три модели автомобилей, которые изготавливаются последовательно в трех цехах. Мощность цехов составляет 330, 250 и 230 человекодней в декаду. В первом цехе для сборки одного автомобиля первой модели требуется 7 человекодней, второй модели — 5 и третьей модели — 3 человекодня в декаду соответственно. Во втором цехе трудоемкость равна 3,4 и 5 человекодней соответственно, в третьем — по 3 человекодня на каждую модель. Прибыль, получаемая заводом от продажи одного автомобиля каждой модели, составляет соответственно 20, 15 и 10 ден. ед. Определить оптимальный план выпуска автомобилей.

4. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В оптимизационных задачах нелинейного программирования (НЛП) математические модели содержат нелинейные зависимости от переменных. Источники нелинейности относятся в основном к одной из двух категорий:

1) реально существующие и эмпирически наблюдаемые нелинейные соотношения, например: непропорциональные зависимости между объемом производства и затратами; между количеством используемого в производстве компонента и некоторыми показателями качества готовой продукции; между затратами сырья и физическими параметрами (давление, температура и т.п.) соответствующего производственного процесса; между выручкой и объемом реализации и др.;

2) установленные (постулируемые) руководством правила поведения или задаваемые зависимости, например: формулы или правила расчета с потребителями энергии или других видов услуг; эвристические правила определения страховых уровней запаса продукции; гипотезы о характере вероятностного распределения рассматриваемых в модели случайных величин и др.

В отличие от задач линейного программирования, любая из которых может быть решена симплекс-методом, не существует одного или нескольких алгоритмов, эффективных для решения любых нелинейных задач. Эффективность алгоритма может даже существенно зависеть от постановки задачи, например, от изменения масштабов измерения тех или иных переменных. Поэтому алгоритмы разрабатываются для каждого класса (типа) задач.

4.1. Пример решения задачи нелинейного программирования в Mathcad

Для решения задач оптимизации используется блок решения, начинающийся словом Given (дано). До этого ключевого слова должны быть определены начальные значения переменных и целевая функция. После слова Given формируется система ограничений на переменные задачи.

Для задач оптимизации имеются функции Minimize(*f, x, y ...)* и Maximize(*f', x, y...),* решающие задачи минимума и максимума соответственно, где *f* – оптимизируемая функция, остальные параметры - переменные этой функции.

Пример задачи. Известен рыночный спрос на определенное изделие в количестве 180 штук. Это изделие может быть изготовлено двумя предприятиями по различным технологиям. При производстве x_1 первым предприятием его затраты составят $(4x_1 + x_1^2)$руб., а при изготовлении x_2 изделий вторым предприятием они составят $(8x_2 + x_2^2)$ руб. Определить сколько изделий, изготовленных по каждой технологии, может предложить концерн, чтобы общие издержки его производства были минимальными. Решить задачу средствами Mathcad.

Протокол решения задачи в Mathcad приведен ниже.

$K(x1, x2) := 4x1 + x1^2 + 8x2 + x2^2$

$x1 := 0$

$x2 := 0$

Given

$x1 + x2 = 180$

$x1 \geq 0$

$x2 \geq 0$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \text{Minimize}(K, x1, x2)$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 \\ 89 \end{pmatrix}$

$K(x1, x2) = 1.728 \times 10^4$ Общие затраты на производство

Ответ. На первом предприятии надо произвести 91 изделие, на втором предприятии - 89 изделий.

Задание 4. Решить задачу нелинейного программирования в Mathcad.

Варианты 1-5. Известен рыночный спрос на определенное изделие в количестве **N** штук. Это изделие может быть изготовлено двумя предприятиями по различным технологиям. При производстве x_1 первым предприятием его затраты составят F руб., а при изготовлении x_2 изделий вторым предприятием они составят **G** руб. Определить сколько изделий, изготовленных по каждой технологии, может предложить концерн, чтобы общие издержки его производства были минимальными.

Вариант	**N**	**F**	**G**
1	150	$(3x_1+2x_1^2)$	$(6x_2+x_2^2)$
2	160	$(3x_1+2x_1^3)$	$(x_2+x_2^2)$
3	170	$(3x_1{}^2+2x_1^2)$	$(2x_2+x_2^2)$
4	165	$(4x_1{}^2+x_1)$	$(3x_2+5x_2^2)$
5	145	$(3x^3{}_1+2x_1^2)$	$(x_2+x_2^2)$

Варианты 6-10. На двух предприятиях холдинга необходимо изготовить **N** изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на первом предприятии, равны **F** руб., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на втором предприятии, составляют **G** руб. Определить сколько изделий следует произвести на каждом из предприятий, чтобы общие затраты на производство необходимой продукции были минимальными.

Вариант	**N**	**F**	**G**
6	210	$4x_1^2$	$(20x_2+6x_2^2)$
7	220	$4x_1^3$	$(17x_2+4x_2^2)$
8	170	$(3x_1{}^2+2x_1^2)$	$(22x_2+x_2^2)$
9	190	$(4x_1{}^2+x_1)$	$(30x_2+5x_2^2)$
10	180	$(3x^3{}_1+2x_1^2)$	$(10x_2+x_2^2)$

Варианты 11-15. Найти максимум производственной функции $z=2x_1^2-x_2$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases} x_1-x_2\le 2, \\ x_2\le 4, \\ x_1+x_2-x_1x_2\ge 0, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$$

Варианты 16-20. Найти минимум производственной функции $z=2+(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 4, \\ x_1\le 2x_2, \\ x_2\le 2x_1, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Батищев Д. И. Оптимизация в САПР: учебник / Д.И. Батищев, Я.Е. Львович, В.Н. Фролов – Воронеж: Изд-во Воронежского государственного университета, 1997. – 416 с.

2. Аттетков Методы оптимизации / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – 2001.

3. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. М.: Физматмет, 2000. – 264 с.

4. Плис А.И. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы
по дисциплине «Оптимизация в САПР»
для студентов направления подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профиль «Системы автоматизированного проектирования
в машиностроении») заочной формы обучения

Составитель
Собенина Ольга Валерьевна

В авторской редакции
Компьютерный набор О.В. Собениной

Подписано к изданию 22.09.2014.
Уч.-изд. л. 2,8. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14