ФГ БОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201
«Управление и информатика в технических системах», 140604
«Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика»,
110302 «Электрификация и автоматизация сельского
хозяйства» очной формы обучения

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов,
А.В. Купцов

Met-F- N-p .rar	440 К байт	14.06.2011	уч.-изд. 3.1 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

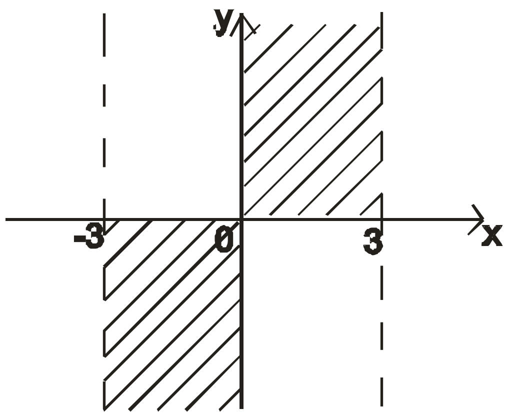
ФГ БОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201
«Управление и информатика в технических системах», 140604
«Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика»,
110302 «Электрификация и автоматизация сельского
хозяйства» очной формы обучения



Воронеж 2011

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов

УДК 517

Функции нескольких переменных**:** **м**етодические указания по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 « Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения / ФГ БОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2011. 51 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Met-F- N-p .rar »

Ил. 3. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. М.В. Юрьева

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме:“Функции нескольких переменных”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

В данной работе изложены основные понятия из теории функции нескольких переменных**.** Методическое указание содержит большое количество задач для проведения практических и индивидуальных занятий. К задачам даны ответы, большое количество пояснений дает возможность многие примеры выносить на самостоятельную работу.

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Область определения

Переменные x,y,z, …,t называются <u>независимыми</u> между собой, если каждая из них принимает любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.

Переменная величина u называется <u>однозначной функцией</u> независимых переменных (аргументов) x,y,z,…,t, если каждой совокупности их значений (x,y,z …,t) из области D соответствует <u>единственное</u> определенное <u>значение</u> $u \in U$. Функциональная зависимость обозначается так: u=f(x,y,z, …,t), или f: D→U, где U – множество значений функции f.

<u>Областью определения</u> (существования) D функции u=f (x,y,z,…,t) называется совокупность значений x,y,z,…,t, при которых функция определена, то есть принимает определенные действительные значения.

Так, <u>для функции двух переменных</u> z=f (x, y) областью определения является совокупность точек (x,y) координатной плоскости XOY, в которых функция определена (существует). Эта область определения представляет собой конечную или бесконечную часть плоскости XOY, ограниченную одной или несколькими кривыми (границей области D).

Аналогично, для функции трех переменных u=f(x,y,z) областью определения служит некоторое тело в пространстве OXYZ.

Рассмотрим примеры нахождения областей определения функций.

<u>Пример 1.</u> $z = \arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{x \cdot y}$

<u>Решение.</u> Первое слагаемое функции определено при $-1 \le \frac{x}{3} \le 1$, или $-3 \le x \le 3$. Второе слагаемое имеет действительные значения, если $x \cdot y \ge 0$, то есть при $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ или при $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$. Значит, область определения всей функции есть множество точек (x,y) двух полос плоскости XOY: При $y \ge 0$ между прямыми x = 0, x = 3, y = 0 и при $y \le 0$ между прямыми x = -3, x = 0, y = 0, включая сами эти прямые (рис. 1).

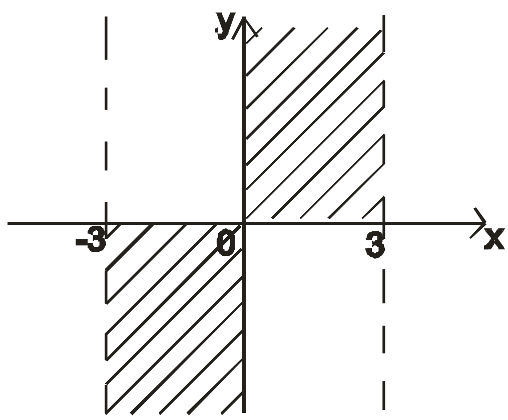


Рис. 1

Пример 2. $z = \ln(y + x^2)$,

Решение. Так как логарифм не существует при нуле и отрицательных значениях, то должно выполняться неравенство $y + x^2 > 0$, то есть $y > -x^2$. Значит, область определения функции есть часть плоскости, расположенной над параболой $y > -x^2$, не включая саму границу, то есть точки кривой $y = -x^2$ (рис. 2).

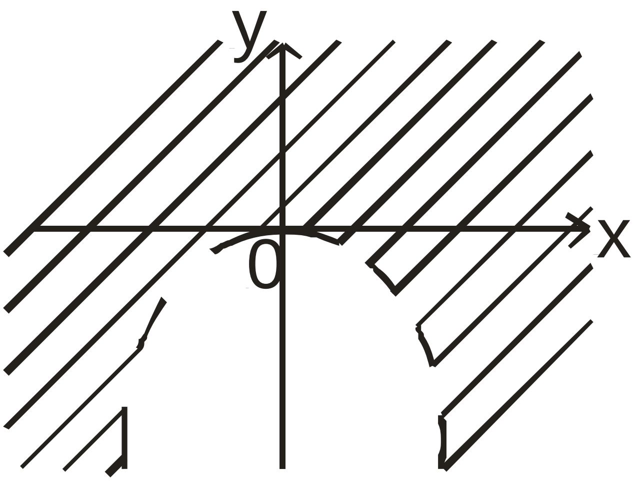


Рис. 2

1.2. Предел. Непрерывность.

Число А называется пределом функции $z = f(x,y)$ при стремлении точки M(x,y) к точке M_0(a,b), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, $d(e)$,что при $0 < r < d$, где $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ – расстояние между точками М и M_0, имеет место неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{M \to M_0} f(x,y) = A$, или $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = A$. Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке M_0(a,b), если предел функции $f(x,y)$ при стремлении точки M(x,y) к точке M_0(a,b) равен значению функции $f(a,b)$ в точке Мо, то есть:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Нарушение условий непрерывности для функции $f(x,y)$ может быть как в отдельных точках (<u>изолированная точка разрыва</u>), так и в точках, образующих одну или несколько линий (<u>линии разрыва</u>).

<u>Пример 3.</u> Найти пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x}$.

Решение:

а)

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy\cdot x}{y\cdot x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{x\to 2} x = 1\cdot 2 = 2,$$

где $\alpha = xy$. Здесь выполняется первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$. Рассмотрим изменение переменных x и y вдоль прямых $y = kx$] $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+kx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+k)x}{x} = 1+k$.

Так как данное выражение $1+k$ может принимать различные значения в зависимости от числа k, то предела не существует.

1.3. Линии и поверхности уровня функции.

<u>Линией уровня</u> функции двух аргументов $z = f(x,y)$ называется такая линия $f(x,y) = C$ на плоскости XOY, в

точках которой функция принимает одно и то же значение $z = C$, где C – const.

Поверхностью уровня функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ называется такая поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция принимает постоянное значение $u = C$.

Пример 4. Выяснить характер поверхностей, изображаемых следующими функциями и построить их линии уровня: а) $z = x + y$; б) $z = x^2 + y^2$; в) $z = x^2 - y^2$.

Решение: а) плоскость; линии уровня – семейство прямых $x + y = C$, параллельных прямой $y = -x$, (при $\forall C \in R$).

б) параболоид вращения; линии уровня $x^2 + y^2 = C$ – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат ($\forall C > 0$).

в) гиперболический параболоид; линии уровня $x^2 - y^2 = C$ - семейство равносторонних гипербол $(\forall C \in R)$.

Дополнительные сведения.

Часть пространства, в котором происходит физическое явление, называется физическим полем. Существуют скалярное и векторное поля.

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, зависящей только от координат точек пространства, в котором это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функцией $f(x_1; y_1; z_1)$ трех независимых переменных. Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x, y, z)$ пространства R^3, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее это явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x, y, z)$, вычисленное в точке $P(x_1; y_1; z_1)$.

Примерами скалярного поля являются: поле электрического потенциала, давление в атмосфере и т.п. В скалярном поле поверхность уровня называется эквипотенциальной поверхностью, во все точках которой однозначная функция $f(x, y, z)$ сохраняет одно и то же значение.

Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково. Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид $f(x; y; z) = f(x_1; y_1; z_1)$.

2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

2.1. Частные производные первого порядка

Если $u = f(x, y, z)$ и одна из переменных, например x, получила приращение Δx (при постоянных других переменных y и z), то разность $\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$ называется частным приращением по x функции $f(x, y, z)$. Соответственно, имеем частные приращения функции по y и по z $\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)$, $\Delta_x u = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$

Частной производной от функции $u = f(x, y, z)$ по независимой переменной x называется производная

$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}$, или в более подробной записи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = f_x'(x, y, z),$$

вычисленная при постоянных y, z. Обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, u_x', f_x'. Аналогично, предел отношения $\frac{\Delta_y u}{\Delta y}$ при стремлении Δy к нулю называется частной производной функции по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} = f_y'(x, y, z).$$

Частная производная по z есть производная u_z', равная пределу

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z}$, то есть $\frac{\partial u}{\partial z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} = f_z'(x, y, z)$.

Очевидно, что для нахождения частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования; только следует иметь в виду, что при нахождении частной производной надо считать постоянными все независимые переменные, кроме той, по которой берется частная производная.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$u = x^2 y^3 z - 4xy + 3yz + z - 5x + 1.$$

Решение. Рассматривая переменные y, z как постоянные величины, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 z - 4y - 5$.

Считая x, z постоянными, дифференцируем функцию по y:

$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2z - 4x + 3z$. Аналогично, дифференцируем функцию по z,считая x, y постоянными: $\frac{\partial u}{\partial z} = x^2y^3 + 3y + 1$.

<u>Пример 2.</u> Показать, что функция $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

<u>Решение</u>: Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{\frac{y}{x}} + xe^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = x + xe^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x}$. Подставим найденные выражения в левую часть, а данную функцию z - в правую часть уравнения:

$$x \cdot \left(y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}}\right) + y \cdot \left(x + e^{\frac{y}{x}}\right) = xy + xy + xe^{\frac{y}{x}}.$$

Получим тождество; следовательно, функция z удовлетворяет данному уравнению, являясь его решением.

2.2. Полный дифференциал функции.

<u>Полным приращением</u> функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных в точке M(x,y) называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y), \tag{1}$$

где Δx и Δy – произвольные приращения аргументов.

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y), если в этой точке полное приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho), \qquad (2)$$

где слагаемое $o(\rho)$ есть бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть ее полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, то есть

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y .$$

Дифференциалы dx, dy независимых переменных x и y совпадают с их приращениями, то есть $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – это числа, равные между собой. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \text{ где } A = \frac{\partial z}{dx},\ B = \frac{\partial z}{dy} \qquad (3)$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \qquad (4)$$

Заметим, что в выражениях $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ скобки можно опустить, так как Δx, Δy рассматриваются как единый символ. Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Значит, если функция имеет полный дифференциал, то она дифференцируема.

Пример 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Решение: Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Следовательно, по формуле(3)

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Пример 4. Найти полное приращение и полный дифференциал для функции

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

Решение: Находим

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2$$

Далее по формуле (1) имеем

$$\begin{aligned}&\Delta f(x,y)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\\&=\left(\left(x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2\right)-\left(xy+\Delta x\cdot y+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y\right)+\right.\\&\left.+\left(y^2+2y\cdot\Delta y+\Delta y^2\right)\right)-\ldots..\end{aligned}$$

Собирая подобные члены при Δx и Δy, получим

$\Delta f(x,y)=(2x-y)\cdot\Delta x+(2x-y)\cdot\Delta y+\left(\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2\right)$ – полное приращение функции. Здесь выражение $df=(2x-y)\cdot\Delta x+(2x-y)\cdot\Delta y$ есть полный дифференциал функции, а $\left(\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2\right)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, при бесконечно малых Δx и Δy. Итак,

$$df=(2x-y)\cdot\Delta x+(2x-y)\cdot\Delta y,$$

$$\Delta f=df+\left(\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2\right)$$

2.3. Применения полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Имеем связь между полным дифференциалом функции и ее полным приращением:

$$\Delta z=dz+o(\rho) \qquad (5)$$

Вычисление Δz (приращения функции) представляет собой задачу, более трудоемкую, чем вычисление ее дифференциала dz, а потому в практических вычислениях с достаточной точностью при малых приращениях аргументов заменяют вычисление приращения функции вычислением ее дифференциала. При достаточно малых $|\Delta x|,|\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z\approx dz \text{ или } \Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Итак, на основании формулы (5) получаем $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx df$ или

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y, \quad (6)$$

где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$.

Это приближенное равенство тем более точно, чем меньше величины Δx, Δy.

Пример 5. Вычислить приближенно величину $(1{,}02)^{3{,}01}$

Решение: Рассмотрим функцию $z = x^y$. Воспользуемся формулой (6). Имеем $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y_0 = 3$, $\Delta y = 0{,}01$ Значение функции z в точке (x_0, y_0): $z(1,3) = 1^3 = 1$. Вычисляем $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\,dy$, где $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$; откуда

$dz\big|_{(1,3)} = 3\cdot 1^2\cdot 0{,}02 + 1^3\cdot \ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06$. Значит, $(1{,}02)^{3{,}01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

Для самостоятельного решения: Вычислить приближенно: а) $(0{,}97)^{2{,}02}$; б) $\sqrt{\left((6{,}03)^2 + (8{,}04)^2\right)}$

Ответы: а) 0,94; б) 10,05.

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

3.1. Случай одной независимой переменной.

Если $z = f(x,y)$ есть дифференцируемая функция двух аргументов x и y в некоторой области D плоскости XOY, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t, то есть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то сложная функция $z = f\left(\varphi(t), \psi(t)\right) = \Phi(t)$ - есть функция одной переменной t и имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например, t=x, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}, \qquad (2)$$

и $\frac{dz}{dt}$ называется полной производной функции z по x.

<u>Пример 1.</u> Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$, где $x = \cos 2t$, $y = arctgt$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой (1). Предварительно находим

$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2$, $\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$. То-
гда $\frac{dz}{dt} = -2\left(5x^4 + 2y\right)\sin 2t + \left(2x - 3y^2\right) \cdot \frac{1}{1+t^2}$

<u>Пример 2.</u> Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$, где $y = e^x$.

<u>Решение.</u> Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}$. На основании формулы (2) находим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2ye^x}{x^2-y^2}=\frac{2\left(x-ye^x\right)}{x^2-y^2}$$

<u>Пример 3</u>. Движение точки в пространстве задано уравнениями $x=3t^2$, $y=2t^4$, $z=4t^6$, где t — параметр

С какой скоростью возрастает ее расстояние от начала координат?

<u>Решение.</u> Известно, что расстояние r точки M(x,y,z) от начала координат определяется формулой $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Скорость точки M(x,y,z) определяется полной производной

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial r}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt},$$ (см. формулу (1)).

Находим производные, входящие в эту формулу:

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{dr}{dy}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{dr}{dz}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{dx}{dt}=6t,\quad \frac{dy}{dt}=8t^3,\quad \frac{dz}{dt}=24t^5$$

Тогда скорость возрастания расстояния от точки O(0,0,0) равна

$$\frac{dr}{dt}=\frac{x\cdot 6t+y\cdot 8t^3+z\cdot 24t^5}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9t^4+4t^8+16t^{12}}}\cdot\left(3t^2\cdot 6t+2t^4\cdot 8t^3+4t^6\cdot 24t^5\right)=$$

$$= \frac{18t + 16t^5 + 96t^9}{\sqrt{9 + 4t^4 + 16t^8}},$$ где t — время.

3.2. Случай нескольких независимых переменных.

Если z есть сложная функция нескольких переменных, например $z = f(x, y)$, где аргументы x, y, так называемые промежуточные переменные, являются функциями независимых переменных u, v: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то сложная функция $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \Phi(u, v)$ фактически является функцией двух «конечных» переменных u, v.

Если функции f, φ, ψ — дифференцируемые функции, то частные производные по u, v выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \text{ или } z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \text{ или } z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v \quad (3)$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Пример 4. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = 3^{x^2} \cdot arctgy$, $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$

Решение: Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 3 \cdot arctgy$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3^{x^2} \cdot \frac{1}{1 + y^2}$; $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}$; $\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$; $\frac{\partial y}{\partial u} = v$; $\frac{\partial y}{\partial v} = u$;

Подставляя полученные выражения в формулы (3), имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x'_u+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y'_u=3^{x^2}\cdot\frac{1}{v}\left(2x\ln 3\cdot arctg y\right)+3^{x^2}\frac{v}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x'_v+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y'_v=-3^{x^2}\cdot\frac{u}{v^2}\left(2x\ln 3\cdot arctg y\right)+3^{x^2}\frac{u}{1+y^2}.$$

Ответ можно оставить в такой форме или выразить через u и v. В результате получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3^{\frac{u^2}{v^2}}\cdot\left(\frac{2u\ln 3 arctg(uv)}{v^2}+\frac{v}{1+u^2v^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=3^{\frac{u^2}{v^2}}\cdot\left(-\frac{2u^2\ln 3 arctg(uv)}{v^2}+\frac{u}{1+u^2v^2}\right).$$

3.3. Инвариантность формы полного дифференциала.

Отметим важное свойство инвариантности формы полного дифференциала. Во всех рассматриваемых выше случаях справедлива формула:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \qquad (*)$$

Действительно, дифференциал сложной функции $z=f(x,y)$, где переменные $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ есть функции от новых независимых переменных u и v, можно получить, если в формуле (*) дифференциалы dx и dy заменить (по определению):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\,;\; dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\,.$$

В результате подстановки и перегруппировки членов при du и dv получим:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\,,$$

где $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$,

полученная формула $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv$ показывает, что форма первого дифференциала не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других независимых переменных. Это свойство называется инвариантностью (неизменяемостью) формы первого дифференциала.

4. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ И ЕГО СВОЙСТВО

1. Производной от функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ по данному направлению вектора $\bar{l} = \overline{MM_1}$ называется $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{M_1M \to 0}\dfrac{f(M_1) - f(M)}{M_1M} = \lim\limits_{r \to 0}\dfrac{\Delta z}{r}$, где $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $f(M)$ и $f(M_1)$- значения функции в точках M и M_1.

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема, то производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ (по направлению $\bar{l}$) вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha\ , \qquad (1)$$

где α- угол, образованный вектором $\bar{l}$ с осью OX. В случае функции трёх переменных $U=f(x,y,z)$ производная по направлению $\bar{l}$ определяется аналогично и вычисляется по формуле $\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$,

(2)

где $\alpha=\angle(\bar{l},x)$, $\beta=\angle(\overline{l,y})$, $\gamma=\angle(\overline{l,z})$, т.е. α,β, γ-углы между направлением $\bar{l}$ и соответствующими координатными осями, а $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$- направляющие косинусы вектора $\bar{l}$, причём $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. <u>Производная от функции в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении</u>. Производная $\frac{\partial U}{\partial l}$ равна нулю по любому направлению, касательному к поверхности уровня (см. п. 1.3). Производная $\frac{\partial U}{\partial l}$ достигает своего <u>наибольшего значения по направлению нормали</u> (см. п. 6) к поверхности уровня.

<u>Пример 1.</u> Найти производную функции $z=2x^2-3y^2$ в точке M(1;0) по направлению, составляющему с OX угол в 120^0.

Решение. Найдём частные производные и их значения в данной точке М: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -6y$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 0$.

Далее определяем $\cos\alpha = \cos(90^0 + 30^0) = -0{,}5$, $\sin\alpha = \sin 120^0 = \sin(90^0 + 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Применяя формулу (1), получим искомую производную $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_M = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -2$. Знак минус показывает, что функция в данной точке по данному направлению убывает. Известно, что направляющие косинусы вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{\kappa} = \{a_x, a_y, a_z\}$ находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|};\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|},$$

где $|\bar{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$

Пример 2. Найти производную функции $f=xy^2z^3$ в точке М(3;2;1) в направлении, от этой точки к точке N(5;4;2).

Решение. Вычислим значения частных производных в точке М:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = y^2x^3;\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy^2;\qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 3xy^2z^2;$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M = 4;\ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_M = 12;\ \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_M = 36.$$

Найдём вектор $\bar{l} = \overline{MN}$ и его направляющие косинусы:

$\bar{l} = \overline{MN}$ ={5-3;4-2;2-1}={2;2;1};

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{2}{3}; \cos\beta = \dfrac{2}{3}; \cos\gamma = \dfrac{1}{3}$.

Применяя формулу (2), находим искомую производную $\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)_M = 4\cdot\dfrac{2}{3} + 12\cdot\dfrac{2}{3} + 36\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{68}{3} = 22\dfrac{2}{3}$.

2. Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется вектор, выходящий из точки M и имеющей своими координатами частные производные функции, т.е.

$gradz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\bar{j} = \left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right\}$. На основании этого определения проекции вектора $gradz$ на координатной оси записывается так: $Пp_{OX}(gradz) = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $Пp_{OY}(gradz) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Предполагается при этом, что функция $z = f(x,y)$ - однозначная непрерывная, имеющая непрерывные частные производные, т.е. дифференцируемая. Значит, производная данной функции в направлении $\bar{l}$ связана с градиентом функции следующей формулой: $\dfrac{\partial z}{\partial l} = Пp_l(gradz)$, т.е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования. Градиент функции двух переменных в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции (см.п.1.3). Значит направление вектора $gradz$ в каждой точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т.е. при $\bar{l} = gradz$ производная $\left(\dfrac{\partial z}{\partial l}\right)$ принимает наибольшее значение, равное модулю вектора $gradz$, т.е.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{Наиб.} = \left|grad z\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\text{, при } \bar{l} = grad z\,. \qquad (3).$$

В этом состоит основное свойство градиента: градиент указывает направление наибольшего роста функции в данной точке. Аналогично определяется градиент функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$. Он равен $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$.

Градиент функции трёх переменных в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку (см.п.1.3)

Отметим, что градиентные методы получили широкое применение в теории оптимизации.

5. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

5.1. Частные производные высших порядков.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)\,; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)\,.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и выше третьего порядков; например:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y)\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) \text{ и т.п.}$$

Символ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ обозначает частную производную третьего порядка функции $z = f(x, y)$, вычисленную три раза по x; символ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ обозначает, что от функции z взята частная производная третьего порядка, причём она вычисляется два раза по x и от полученной производной $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ вычислена один раз производная по y. Имеет место такая важная теорема: если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования. Таким образом, так называемые смешанные производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования , равны между собой, если они непрерывные функции, например: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Пример 1. Найти частные производные второго порядка от следующих функций: а) $z=2xy$; б) $z=ln(x^2+y^2)$; в) $z = arcctg\,\dfrac{x}{y}$/

Решение. Находим сначала частные производные первого порядка. Затем их дифференцируем вторично:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)'_x = (2y)'_x = 0$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_x\right)'_y = (2y)'_y = 2$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z'_y\right)'_y = (2x)'_y = 0$.

б)Находим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$; далее

находим $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)' = \dfrac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2x \cdot 2x}{x^2 + y^2} = \dfrac{2\left(y^2 - x^2\right)}{x^2 + y^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{-2x\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

в) Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arcctg\,\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arcctg\,\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2};$$

Теперь находим: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(z'_y\right)'_x = \frac{\left(y^2-x^2\right)}{(x^2+y^2)^2}.$$

<u>Пример 2.</u> Проверить, что $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$, где $z = x^2y^3$.

<u>Решение.</u> Находим последовательно

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^3\right) = 2y^3;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \left(2y^3\right)'_y = 6y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3\right) = 6xy^2;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) = \left(6xy^2\right)'_x = 6y^2;$$

Получили требуемое равенство: $z'''_{xxy} = z'''_{xyx}$.

Для самостоятельного решения примеры:

<u>Пример 3</u>. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если а) $z = \sqrt{2xy+y^2}$.

<u>Пример 4.</u> Найти $f''_{xx}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yy}(0,0)$, если $f(x,y) = (1+x)^m\cdot(1+y)^n$.

Пример 5. Показать, что функция $u = arctg\,\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5.2. Дифференциалы высших порядков.

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от её полного дифференциала (первого порядка), т.е. $d^2 z = d(dz)$.

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше второго , например: $d^3 z = d(d^2 z)$, т.е. дифференциалом третьего порядка от функции z есть дифференциал от её дифференциала второго порядка.

Вообще, $d^n z = d(d^{n-1} z)$, $\forall\, n \in N$.

Если $z = f(x, y)$, где аргументы x и y –независимые переменные и функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам: $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$ (1)

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Вообще, при наличии соответствующих производных справедлива символическая формула для дифференциала порядка n : $d^n z = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y} \right)^n z$, которая формально раскрывается по биноминальному закону.

Если $z = f(x, y)$, где аргументы x и y являются функциями одного или нескольких независимых переменных, то

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y \qquad (2).$$

Если x и y – независимые переменные, то dx и dy - величины постоянные, поэтому $d^2 x = d(dx) = 0$, $d^2 y = d(dy) = 0$ и формула (2) становится тождественной формуле (1). Заметим, что следующая запись означает $dx^2 = (dx)^2 = dx \times dx$, выражение $\frac{\partial^3}{\partial x^2} dx^2 \frac{\partial}{\partial y} dy \times z$ следует понимать, как выражение $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy$ и т.д.

Кроме способа вычисления дифференциалов функции по формулам, есть другой способ нахождения дифференциалов высших порядков, который даёт возможность определить их, минуя вычисление частных производных; далее по известному выражению дифференциала мы сможем находить и частные производные. Этот способ состоит в последовательном дифференцировании. Рассмотрим следующий пример.

<u>Пример 6.</u> Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = 2x^2 - 3xy - y^2$.

<u>Решение.</u> Способ 1. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y$ поэтому $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (4x - 3y)dx - (3x + 2y)dy$. Далее находим $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x - 3y)'_x = 4$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x - 3y)'_y = -3$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -(3x+2y)'_y = -2$. Откуда, применяя формулу (1), имеем: $d^2z = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$.

Способ 2. Дифференцированием функции, приводя подобные члены при dx и dy, находим

$$dz = d(2x^2 - 3xy - y^2) = 2d(x^2) - 3d(x \cdot y) - d(y^2) =$$
$$= 4xdx - 3(ydx + ydy) - 2ydy = (4x - 3y)dx - (3x + 2y)dy;$$

Дифференцируя ещё раз и помня, что dx и dy - постоянные величины, не зависящие от x и y, с учётом свойств $d(u \cdot v) = udv + vdu$, $d(u - v) = du - dv$, имеем

$$d^2z = d(dz) = d[(4x - 3y)dx] - d[(3x + 2y)dy] =$$
$$= d(4x - 3y)dx + (4x - 3y)d(dx) - d(3x + 2y)dy - (3x + 2y)d(dy) =$$
$$= (4dx - 3dy)dx + (4x - 3y)\cdot 0 - (3dx + 2dy)dy - (3x + 2y)\cdot 0,$$

или, окончательно, $d^2z = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$, что совпадает с ранее найденным дифференциалом второго порядка.

Примеры для самостоятельного решения:

Пример 7. Вычислить $df(1,2)$ и $d^2f(1,2)$, если $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

Пример 8. Найти d^2z, если а) $z = f(x,y)$, где $x = au$, $y = bv$; б) $z = \varphi(t)$, где $t = x^2 + y^2$.

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

6.1. Случай одной независимой переменной.

Пусть $y = y(x)$ -неявная функция, т.е. она определяется из уравнения $F(x,y) = 0$, не разрешённого относительно y.

Это значит, что при каждом значении x_0, при котором неявная функция определена, она принимает единственное значение y_0 так, что $F(x_0, y_0) = 0$.

Если $F(x, y)$-дифференцируемая функция переменных x и y, то производная неявной функции $y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y) = 0$, может быть найдена по формуле

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad (1)$$

при условии, что $F'_y(x, y) \neq 0$. Формула (1) позволяет находить производную от y по x, не решая самого уравнения.

<u>Пример 1</u>. Найти y'_x, если функция $y(x)$ задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где a-величина постоянная.

<u>Решение.</u> Обозначим левую часть данного уравнения $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$. Найдём её частные производные

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay,\; F'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax.$$

Применив формулу (1), получаем

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

6.2. Случай нескольких независимых переменных.

Если функция z от двух независимых переменных x и y задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, не разрешённым относительно z, то говорят, что z(x,y) есть неявная функция переменных x и y.

Если $F(x, y, z)$-дифференцируемая функция переменных x , y и z и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (2)$$

Существует ещё другой способ нахождения производных от неявно заданной функции z, без использования формулы (3). Для этого нужно продифференцировать уравнение: $dF(x,y,z)=0$; считая переменные равноправными $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$. Из этого уравнения найти dz: $dz = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy$, а следовательно, будем знать $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, (см. формулы (2)). Чтобы найти вторую производную, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, надо продифференцировать по независимой переменной x найденную первую производную, учитывая при этом, что z есть функция, зависящая от x.

Пример 2. Функция z независимых переменных x и y задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (a - const). Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение. Первый способ. Перенесём a^2 в левую часть данного уравнения и обозначим её через $F(x,y,z)$. Тогда имеем $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

Находим $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$.

Подставляя эти значения в формулы (2), будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{y}{z}.$$

Второй способ. Продифференцируем данное уравнение $d\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right)=0$; получим $2xdx+2ydy+2zdz=0$. Отсюда находим

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy. \qquad (3)$$

С другой стороны, знаем, что дифференциал функции $z=z(x,y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (4)$$

Сравнивая формулу (4) с полученным выражением (3) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=-\frac{x}{z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=-\frac{y}{z}.$$

Теперь найдём производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\left(\frac{x}{z}\right)'_x=-\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=-\frac{z-x\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3}.$$

Дифференцируя по y выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$ и учитывая, что при дифференцировании по y переменная x, стоящая в числителе, рассматривается как величина постоянная (ибо x,y независимые друг от друга переменные), получим смешанную производную

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{x}{z}\right)'_y=\frac{x}{z^2}z'_y=\frac{x}{z^2}\left(-\frac{y}{z}\right)=-\frac{xy}{z^3},$$

Этот же результат получили, если бы нашли производную по x от $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(-\frac{y}{z}\right)'_x=\frac{y}{z^2}z'_x=\frac{x}{z^2}\left(-\frac{y}{z}\right)=-\frac{xy}{z^3}$$

т.к. смешанные производные равны, их значения не зависят от порядка дифференцирования. Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(-\frac{y}{z}\right)'_y=-\frac{1\cdot z-y\cdot z'_y}{z^2}=-\frac{z-y\left(-\frac{y}{z}\right)}{z^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}$$

Пример 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dz для неявной функции $z(x,y)$, определяемой уравнением

$$z^3+3x^2y+xz+y^2z^2+y-2x=0.$$

Решение. Находим dz вторым способом:

$$d\left(z^3+3x^2y+xz+y^2z^2+y-2x\right)=0,$$

или

$$3z^2dz+6xydx+3x^2dy+zdx+xdz+2yz^2dy+2y^2zdz-2dx+dy=0$$

Из уравнения находим dz, группируя соответствующие члены:

$\left(3z^2+x+2y^2z\right)dz=\left(-6xy-z+2\right)dx-\left(3x^2+2yz^2+1\right)dy$, получаем

$$dz=\frac{2-6xy-z}{3z^2+x+2y^2z}dx-\frac{3x^2+2yz^2+1}{3z^2+x+2y^2z}dy,$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-6xy-z}{3z^2+x+2y^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3x^2+2yz^2+1}{3z^2+x+2y^2z}$.

7. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Касательной плоскостью к поверхности в точке М(точка касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к различным кривым, проведённым на поверхности через эту точку М.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания М.

А. Если уравнение поверхности в декартовой системе координат задано в явной форме $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ - дифференцируемая функция, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M \cdot (y - y_0), \qquad (1)$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = f'_x(x_0, y_0)$,

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = f'_y(x_0, y_0)$, а x, y, z -текущие координаты касательной плоскости, x_0, y_0, z_0 – координаты точки касания M_0.

Уравнения нормали к поверхности имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1} \qquad (2)$$

Б. В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявной форме, т.е. в виде уравнения $F(x, y, z) = 0$ и $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ плоскости имеет вид:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0, \qquad (3)$$

Уравнение нормали к поверхности записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}, \qquad (4)$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ -значения частных производных функции $F(x,y,z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, x, y, z-текущие координаты касательной плоскости.

Пример 1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 3y^2$ в точке, для которой x=1,y=1.

Решение. Прежде всего найдём аппликату точки касания $z_0 = z(x_0, y_0) = z(1,1) = 4$.

Итак, точка касания есть M(1,1,4). Находим частные производные данной поверхности, заданной в явной форме: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 6y$ и вычислим их значения в точке М с координатами $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 4$: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 6$.

Отсюда, применяя формулы (1) и (2), будем иметь $z - 4 = 2(x-1) + 6(y-1)$,или $2x + 6y - z - 4 = 0$-уравнение касательной плоскости, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}$-уравнение нормали.

8. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными всех порядков до (n+1)-го порядка включительно в окрестности точки (a,b). Тогда в рассматриваемой окрестности справедлива формула Тейлора:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}[f'_x(a,b)\cdot(x-a)+f'_y(a,b)\cdot(y-b)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+$$

$$+f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+f''_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\cdot f(a,b)+R_n(x,y),$$

где $R_n(x,y)$ -остаточный член.

Формулу Тейлора можно представить в других обозначениях, если обозначить приращение функции в виде $\Delta f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x,y)$, где h и k-соответствующие приращения аргументов x и y. Тогда

$$\Delta f(x,y)=df(x,y)+\frac{1}{2!}d^2f(x,y)+\frac{1}{3!}d^3f(x,y)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x,y)+R_n,$$

где $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k)$, $0<\theta<1$.

Частный случай формулы Тейлора при a=b=0 называется формулой Маклорена.

Примеры для самостоятельного решения.

Пример 1. Найти приращение функции, получаемое ею при переходе от значений x=1,y=1 к значениям $x_1=1+h$, $y_1=1+k$, если $f(x,y)=x^2y$.

Ответ: $\Delta f(x,y)=2h+k+h^2+2hk+h^2k$.

Пример 2. Разложить по формуле Маклорена до членов третьего порядка включительно функцию $f(x,y)=e^x\sin y$.

Ответ: $y+xy+\frac{1}{3!}(3x^2y-y^3)$.

9. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1. Основные теоретические сведения.

Говорят, что функция $u = f(x, y, z, ..., t)$ при некоторой системе значений $x_0, y_0, z_0, ..., t_0$ независимых переменных имеет максимум (минимум), если приращение функции

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, ..., t_0 + \Delta t) - f(x_0, y_0, z_0, ..., t_0)$$

отрицательно (положительно) при всевозможных, достаточно малых по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных значениях приращений аргументов

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, ..., \Delta t$.

Максимум или минимум функции называется экстремумом. Экстремум здесь понимается в локальном смысле. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ удобно определение локального экстремума следующее:

Определение. Функция $f(x, y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0, y_0)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x, y)$ в достаточно малой окрестности точки M_0, то есть, $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (или соответственно $f(x_0, y_0) < f(x, y)$) для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию $|M_0M| < \delta$, где δ – достаточно малое положительное число.

Аналогично определение экстремума функции трех и большего числа переменных, используя понятие многомерного пространства.

Необходимые условия экстремума.

Если дифференцируемая функция $u = f\left(x, y, z, \ldots, t\right)$ достигает экстремума в точке $M_0\left(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0\right)$, то или ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0\right)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0\right)}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0\right)}{\partial z} = 0; \ldots; \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0\right)}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

или частные производные при этих значениях не существуют. Система равенств (1) эквивалентна одному уравнению:

$$df\left(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0\right) = 0, \qquad (2)$$

Итак, в точке экстремума первый дифференциал функции равен нулю или не существует. Количество уравнений в системе (1) равно числу независимых переменных.

Точки, в которых вычисляются равенства (1), называются стационарными (или критическими) точками. Эти точки являются только подозрительными на экстремум, так как не всякая стационарная точка является точкой экстремума. Поэтому, равенства (1) выражают необходимое, но недостаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

Достаточные условия экстремума.

Для того, чтобы решить вопрос, какие стационарные точки, получаемые из решения системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \ldots; \ \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

доставляют функции максимум или минимум, или ни то, ни другое, обращаются к исследованию дифференциала второго порядка этой функции.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0, ..., t_0)$ - стационарная точка функции $f(x, y, z, ..., t)$, то есть выполняется равенство (2). Тогда если дифференциал второго порядка сохраняет постоянный знак при всевозможных достаточно малых по модулю приращениях аргументов, то функция в точке M_0 имеет экстремум, причем максимум будет в том случае, когда $d^2 f(M_0) < 0$, а минимум – когда $d^2 f(M_0) > 0$.

Если дифференциал второго порядка $d^2 f(M_0)$ не сохраняет постоянного знака, то функция в точке M_0 не имеет ни максимума, ни минимума. Если же $d^2 f(M_0)$ обратится в нуль, то решение вопроса об экстремуме требует исследования дифференциалов порядка выше, чем второй.

9.2 Правило определения экстремума функции двух независимых переменных.

Чтобы исследовать на экстремумы функцию $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x, y, следует:

1) Определить стационарные точки, в которых функция может достигать экстремума. Для этого надо решить систему уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (необходимые условия экстремума)

2) Найти частные производные второго порядка

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислить значения вторых частных производных в каждой стационарной точке. Достаточные условия экстремума выражаются с помощью определителя второго порядка.

Например, пусть $M_0(x_0, y_0)$ - найденная стационарная точка данной функции. Принято обозначать числа следующими буквами

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2};\; B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y};\; C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

3) Составить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ для каждой стационарной точки. При этом,

а) если $\Delta = AC - B^2 > 0$ то экстремум в стационарной точке есть: при A>0 (или C>0) будет минимум, а при A<0 (или C<0) будет максимум;

б) если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то экстремума в рассматриваемой стационарной точке нет;

в) если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума функции в стационарной точке остается открытым (требуется дальнейшее исследование функции с привлечением частных производных порядка выше второго, или, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$$

Решение: 1) Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y;\; \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x$$

Воспользуемся необходимым условием экстремума:

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$; составляем систему уравнений $\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$.

После сокращения на 6 имеем $\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$. Решаем систему.

Из первого уравнения находим $y = \dfrac{x^2}{6}$, подставляя его во второе уравнение, получим $x^4 - 216x = 0$, или $x\left(x^3 - 6^3\right) = 0$, или $x(x - 6)\left(x^2 + 6x + 36\right) = 0$. Откуда имеем $x_1 = 0$; $x_2 = 6$ (остальные два корня уравнения $x^2 + 6x + 36$ будут комплексными, нас они не интересуют); далее из уравнения $y = \dfrac{x^2}{6}$ находим $y_1 = 0$ при $x_1 = 0$ и $y_2 = 6$ при $x_2 = 6$. Итак, получим две стационарные точки $M_1(0,0)$, $M_2(6,6)$

2) Для исследования достаточных условий экстремума нашли частные производные второго порядка

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y$ и составляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ для каждой стационарной точки а) $M_1(0,0)$:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0; \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -36; \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0$$

Получим число $\Delta = AC - B^2 = -(-36)^2 = -36 < 0$. Следовательно, в точке $M_1(0,0)$ нет экстремума (ни максимума, ни минимума);

б) $M_2(6,6)$: $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_2=6\\ y_2=6}} = 72 > 0$;

$B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x_2=6\\ y_2=6}} = -36$; $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_2=6\\ y_2=6}} = 72$. Получим число

$\Delta = AC - B^2 = 72 \cdot 72 - 36^2 = 3888 > 0$.

Следовательно, экстремум есть в точке $M_2(6,6)$, причем минимум, так как A>0. Минимум этот равен значению функции при x=6, y=6: $z_{\min} = z(6,6) = -2$.

<u>Пример 2</u>. Найти экстремум функции трех переменных. $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z$.

<u>Решение:</u> Рассмотрим <u>необходимые условия</u> экстремума. Найдем частные производные

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 1$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + x + 1$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2$ и решим систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0; \\ 2y + x + 1 = 0; \\ 2z - 2 = 0; \end{cases}$ откуда x = 1, y = -1, z = 1.

Получаем одну стационарную точку $M_0(1,-1,1)$. Рассмотрим <u>достаточные условия</u> экстремума. Для этого обратимся к исследованию дифференциала второго порядка данной функции. Известно, что дифференциал первого порядка

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

Дифференциал второго порядка

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 u =,$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + $$
$$;$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz$$

У нас:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0;$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$. Поэтому второй дифференциал имеет вид

$$d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2dxdy = 2\left(dx^2 + dxdy + dy^2\right) + 2dz^2$$

Он сохраняет постоянный знак, ибо выражение, стоящее в скобке не отрицательно при любых dx и dy: $\left(a^2 + b^2\right) \ge -ab$, последнее слагаемое положительно.

Следовательно, $\partial^2 u > 0$ при любых приращениях независимых переменных $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$ Значит, данная функция в точке $M_0(1,-1,1)$ достигает минимум, причем $u_{\min} = -2$.

Приведем достаточные условия экстремума для функции трех независимых переменных, которые выражаются с помощью определителя третьего порядка.

9.3 Достаточные условия экстремума для функции трех независимых переменных .

Эти условия выражаются с помощью определителя уже третьего порядка. Пусть дважды дифференцируемая функция $u = f(x, y, z)$ трех переменных имеет стационарную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, найденную из системы уравнений:

$\frac{\partial u}{\partial x}=0$; $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $\frac{\partial u}{\partial z}=0$; (необходимое условие экстремума)

Составляем определитель третьего порядка

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

и вычисляем его для каждой стационарной точки. Имеем следующее правило: Для того, чтобы функция $u=f(x,y,z)$ имела экстремум в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, достаточно, чтобы четный минор был <u>положителен,</u> а знаки нечетных миноров совпадали со знаком $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то есть минор второго порядка $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}>0$ в точке M_0, причем: Если $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0}>0$ и $J(M_0)>0$ то имеем минимум функции в точке M_0, если $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0}<0$ и $J(M_0)<0$ то имеем максимум функции в точке M_0. <u>Замечание</u>: достаточно определить знак главного минора второго порядка.

<u>Пример 3</u>. Найти экстремум функции $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

<u>Решение</u>. а) <u>необходимое условие</u> экстремума.

Находим $\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y \\ u'_y = 2y + 12x \\ u'_z = 2z + 2 \end{cases}$ и решаем систему уравнений

$\begin{cases} x^2 + 4y = 0 \\ y + 6x = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$. Получим две стационарные точки $M_1(0,0,1)$ и $M_2(24,-144,-1)$.

б) <u>достаточные условия экстремума</u>

Находим $u''_{xx} = 6x$, $u''_{xy} = 12$, $u''_{xz} = 0$, $u''_{yy} = 2$, $u''_{yz} = 0$, $u''_{zz} = 2$ и составляем определитель

$$J = \begin{vmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Исследуем на экстремум точку $M_1(0,0,1)$: четный минор $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = -144 < 0$. Значит, в этой точке M_1 экстремума нет.

Исследуем точку $M_2(24,-144,-1)$ на экстремум. Ее четный минор $\Delta = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0$, а знаки нечетных миноров

$J_{M_2} = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$ и $u''_{xx}(M_2) = 144 > 0$,т.е. совпадают.

Следовательно, в точке M_2 есть экстремум, причем минимум $u_{\min} = u(24,-144,-1) = -6913$.

10. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

10.1 Условный экстремум.

Во многих задачах на отыскание экстремума функции ее переменные оказываются не независимыми переменными, а связанными друг с другом некоторыми добавочными условиями (так называемыми уравнениями связи). Здесь мы имеем дело с задачами на условный экстремум.

Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ двух переменных называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что аргументы x, y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (уравнение связи). Для отыскания условного экстремума функции $f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ применяют метод Лагранжа:

Составляют функцию Лагранжа. Обозначается Ф или L.

$L(x, y, \alpha) = f(x, y) + \alpha \cdot \varphi(x, y)$ где α - неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции $L(x, y, \alpha)$.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \alpha \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \alpha \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Из этой системы трех уравнений можно найти неизвестные x, y и α .

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа

$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy$, для найденных значений x, y и λ, полученных из системы уравнений (1), при условии, что dx и dy связаны уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0 \quad \left(dx^2 + dy^2 \neq 0\right).$$

А именно, функция $f(x, y)$ имеет условный максимум, если $d^2L < 0$ и условный минимум, если $d^2L > 0$.

В частности, если дискриминант $\Delta > 0$ для функции Лагранжа (3) в стационарной точке, то в этой точке имеется условный экстремум данной функции $f(x, y)$, причем условный максимум $f(x, y)$, если A<0 (или C<0), и условный минимум $f(x, y)$, если A>0 (C >0), где $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}$.

Аналогично находится условный экстремум функции трех и большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределённых множителей, сколько имеется уравнений связи.

Пример 1. Определить условный экстремум функции

$z = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Геометрически данная задача сводиться к нахождению наибольшего и наименьшего значений аппликаты z плоскости $z = 6 - 4x - 3y$ для точек пересечения её с прямым круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$. Составим функцию Лагранжа $L(x,y)=6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1)$, где λ - неопределённый множитель; $x^2+y^2-1=0$ -уравнение связи.

Находим $\dfrac{\partial L}{\partial x}=-4+2\lambda x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=-3+2\lambda y$.

Необходимые условия экстремума для функции L получаем из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} -4+2\lambda x=0 \\ -3+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Решая эту систем, получаем два решения $\lambda_1=\dfrac{5}{2}$, $x_1=\dfrac{4}{5}$, $y_1=\dfrac{3}{5}$ и $\lambda_2=-\dfrac{5}{2}, x_2=-\dfrac{4}{5}, y_2=-\dfrac{3}{5}$. Далее, находим $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0, \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda$. Значит, $d^2L=2\lambda(dx^2+dy^2)$.

При $\lambda_1=\dfrac{5}{2}$, $x_1=\dfrac{4}{5}$, $y_1=\dfrac{3}{5}$ имеем $d^2L>0$ и, следовательно, в этой точке функция имеет условный минимум: $z_{\min}=z\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)=6-\dfrac{16}{5}-\dfrac{9}{5}=1$.

При $\lambda_2=-\dfrac{5}{2}, x_2=-\dfrac{4}{5}, y_2=-\dfrac{3}{5}$ имеем $d^2L<0$ и, следовательно, в этой точке функция имеет условный максимум: $z_{\max}=z\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{3}{5}\right)=6+\dfrac{16}{5}+\dfrac{9}{5}=11$.

10.2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней своего наибольшего и наименьшего значений или во внутренних точках этой области, являющимися стационарными точками или в точках, лежащих на границе области.

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, надо:

1) Найти стационарные точки, расположенные внутри данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание 1. В данном случае нет необходимости исследовать функцию на экстремум с помощью частных производных второго порядка. Требуется найти лишь стационарные точки и значения функции в них.

Замечание 2. Для функции $z = f(x, y)$ линии границы области являются функцией одной переменной: либо $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, либо $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$,

поэтому на соответствующих участках границы данная функция является функцией одной переменной.

Несколько уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходиться вводить в функцию Лагранжа столько неопределённых множителей, сколько имеется уравнений связи.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ внутри замкнутого треугольника $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$ (рис.3).

Решение.1) Находим стационарные точки внутри ΔAOB. Имеем : частные производные $z'_x = 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y)$;

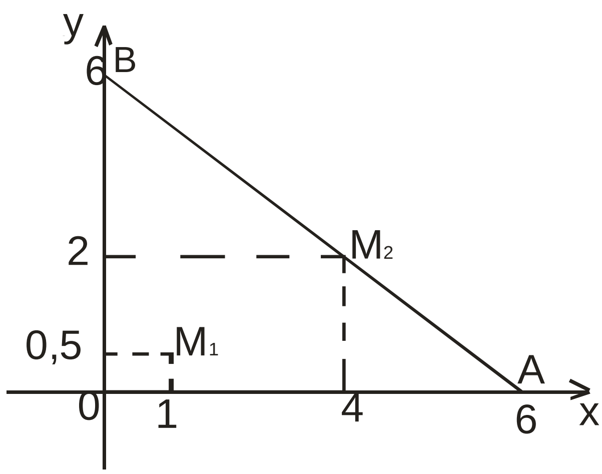


Рис. 3.

Приравнивая эти производные к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy(4-3x-2y)=0 \\ x^2(2-x-2y)=0 \end{cases}$$

Так как $x>0$, $y>0$ для нахождения стационарных точек внутри ΔAOB, имеем систему $\begin{cases} 4-3x-2y=0 \\ 2-x-2y=0 \end{cases}$, откуда $x_1=1;\ y_1=0{,}5$, из которой находим единственную стационарную точку $M_1(1;0{,}5)$, где значение функции $z(1;0{,}5)=\dfrac{1}{4}$.

2) Переходим к исследованию функции $z(x;y)$ на границах области, которая состоит из отрезков ОА оси ОХ, ОВ оси ОУ и отрезка АВ прямой.

а) На оси ОХ отрезок ОА: $y=0$, и заданная функция $z\big|_{y=0}=z(x{,}0)=0$, $0\le x\le 6$; аналогично, на оси ОУ отрезок ОВ: $y=0$, где также заданная функция $z\big|_{x=0}=z(0,y)=0$, $0\le y\le 6$.

б) Исследуем функцию на отрезке АВ: где прямая АВ задана уравнением $x+y=6$, $0\le x\le 6$. Поэтому функция на этой прямой будет зависеть от одной переменной x, где $y=6-x$:

$z\big|_{AB} = z(x) = x^2(6-x)\cdot(2-x-(6-x)) = -4x^2(6-x)\,,0 \le x \le 6$.

На концах отрезка [0,6]: $z(0) = z(6) = 0$.

Находим критические точки функции $z(x) = -24x^2 + 4x^3$.

Имеем $z'_x = -48x + 12x^2$. Решая уравнение $12x(x-4) = 0$, получаем $x_2 = 4$; соответственно, $y_2 = 6-4 = 2$. Итак $M_2(4;2)$ -критическая точка на отрезке AB; значение функции $z\big|_{M_2} = z(4,2) = -128$.

Следовательно, $z = \dfrac{1}{4}$ внутри ΔAOB в точке $M_1(1;0{,}5)$; $z = 0$ на сторонах OB и OA и в вершинах ΔAOB; $z = -128$ на стороне AB. Итак, наибольшего значения функция достигла $z_{наиб} = z(1;0{,}5) = \dfrac{1}{4}$ в точке $M_1(1;0{,}5)$, а наименьшего значения $z_{наим.} = z(4;2) = -128$ на границе области в точке $M_2(4;2)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С Ч 1. Дифференциальные и интегральные исчисления Москва 2001 г.
2. Данко Л.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./Л.Е. Данко, А.Т. Попов, Т.Я. Кожевникова. Ч.1.М.:Высш. шк. 1987 г.
3. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики/В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. М.: Наука, 1976.
4. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике/А.А. Гусак. Минск : БГУ,1976.
5. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике часть 2/И.А. Каплан. Харьков: ХГУ, 1973.
6. Шипачёв В.С. Высшая математика. Учебник для вузов/В.С. Шипачёв.М.: Высш. шк. 2002.
7. Задачи и упражнения по математическому анализу. Для вузов. Под редакцией Б.П. Демидовича М.: Наука, 1966.

СОДЕРЖАНИЕ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей220201
«Управление и информатика в технических системах», 140604
«Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика»,
110302 «Электрификация и автоматизация сельского
хозяйства» очной формы обучения

Составители: Федотенко Галина Федоровна,
Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.06. 2011.
Уч.-изд. л. 3,1 «С»

ФГ БОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14