Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания
к выполнению практических работ
для студентов, обучающихся по направлению
21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» всех форм обучения

Воронеж 2022

УДК 528
ББК 26.1

Составители: М.Б. Реджепов, Ю.С. Нетребина

Теория математической обработки геодезических измерений: метод. указания к выполнению практических работ по дисциплине «Теория математической обработки геодезических измерений» для студентов направления 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: М.Б. Реджепов, Ю.С. Нетребина. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. – 45 с.

Дана последовательность выполнения практических работ по всем разделам курса «Теория математической обработки геодезических измерений»: цель работы, соответствующие теоретические положения, порядок проведения вычислений, способы обработки результатов и описание используемых методик.

Предназначены для студентов по направлению 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» всех форм обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_ТМОГИ.pdf.

Ил. 4. Табл. 26. Библиогр.: 2 назв.

УДК 528
ББК 26.1

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

Рецензент – О.В. Есенников, к.т.н., ведущий инженер проектно-изыскательской группы №5 ООО НПО «Гидротехпроект»

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В теории погрешностей измерений на основе теории вероятностей с использованием методов математической статистики решают следующие задачи:

– изучение видов, причин возникновения и законов распределения погрешностей измерений и их свойств;

– нахождение по результатам измерений наиболее надежного значения измеряемой величины из результатов ее многократных измерений;

– установление критериев требуемой точности;

– оценка точности результатов измерений и функций измеренных величин;

– предвычисление ожидаемой точности измерений.

Цель практических работ: научится выполнять обработку результатов равноточных и неравноточных измерений, определять наиболее надежные значения измеренной величины, производить оценку точности результатов непосредственно выполненных наблюдений и их функций, устанавливать допуски, ограничивающие использование полученных результатов в заданных пределах точности.

В соответствии с этим выполнение расчетной работы предусматривает решение следующих задач:

1. Оценка точности многократно измеренной величины по истинным погрешностям;
2. Оценка точности функций независимых измеренных величин;
3. Обработка результатов равноточных измерений одной и той же величины;
4. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений;
5. Определение весов неравноточных измерений
6. Определение весов функций независимых измеренных величин;
7. Обработка результатов неравноточных измерений одной величины;
8. Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений;
9. Оценка точности измерений углов и превышений по невязкам в ходах и полигонах.

При выполнении работы следует использовать следующую литературу

1. Маслов, А.В. Геодезия: учеб. для вузов / А.В. Маслов, А.В. Гордеев, Ю.Г. Батраков – М.: Колос, 2006 (гл. 9, пп.9.1 – 9.23).

2. Поклад, Г.Г. Геодезия: учебное пособие / Г.Г. Поклад, С.П. Гриднев – М.: Академический проект, 2007 (часть II, гл. 1 – 4).

При выполнении работы студентам необходимо использовать инженерный микрокалькулятор.

Отчет по работе оформляется в рабочей тетради и должен содержать краткую пояснительную записку с изложением методики обработки данных наблюдений с результатами расчетов.

Теоретические сведения
теории погрешностей измерений

Основным содержанием геодезических работ является измерение физических величин (горизонтальных и вертикальных углов, длин линий и др.). ***Измерение*** представляет собой процесс сравнения данной величины с другой однородной величиной, принятой за единицу меры (эталон).

Любые измерения сопровождаются неизбежными погрешностями. ***Под истинной погрешностью измерения*** *величины Δ понимают отклонение результата измерения l от его точного (истинного) значения X, т. е.*

$$\Delta = l - X \ . \tag{1}$$

Величина погрешности характеризует степень приближения результата измерения к истинному значению измеряемой величины, или, как принято говорить, *точность измерения*.

По характеру действия погрешностей на результаты измерений их разделяют на *грубые*, *систематические* и *случайные*.

Грубые и систематические погрешности при обработке могут быть обнаружены, изучены и исключены из результатов измерений. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что на результаты измерений основное влияние оказывают случайные погрешности.

Основным критерием точности измерений является ***средняя квадратическая погрешность m***, определяемая по формуле Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\left[\Delta^2\right]}{n}} \ , \tag{2}$$

где Δ_i – истинные ошибки измерений; n – число измерений.

Средней погрешностью ϑ называется среднее арифметическое из абсолютных величин случайных погрешностей:

$$\vartheta = \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2| + \ldots + |\Delta_n|}{n} = \frac{\left[|\Delta|\right]}{n} \ . \tag{3}$$

Вероятной погрешностью r называется такое значение случайной погрешности Δ, больше или меньше которого по абсолютной величине погрешности в ряду измерений равновозможны, т.е.

$$P(\Delta < r) = P(\Delta > r) = 0{,}5 \ .$$

Вероятная погрешность r находится в середине ряда, в котором все ошибки располагают по убыванию или возрастанию их абсолютных значений.

Средняя квадратическая погрешность является более предпочтительной оценкой точности и достаточно надежно определяется даже при небольшом числе измерений ($n \geq 10$).

Поскольку ряд измерений, из которого определяется средняя квадратическая погрешность, является конечным, то значение самой этой случайной погрешности получается с некоторой погрешностью:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \qquad (4)$$

Величина m_m является оценкой точности (надежности) определения средней квадратической погрешности m.

При большом числе измерений существуют устойчивые зависимости между рассмотренными критериями точности:

$$m = 1{,}25\vartheta,\ (1{,}25 = k_1); \qquad m = 1{,}48r,\ (1{,}48 = k_2). \qquad (5)$$

Другой важной характеристикой точности измерений является ***предельная погрешность***, т.е. такое значение случайной погрешности, появление которого при данных условиях измерений маловероятно. При топографо-геодезических работах за предельную допустимую величину погрешности обычно принимают утроенную среднюю квадратическую погрешность, т.е.

$$m_{пред} = 3m.$$

При выполнении ответственных измерений предельную допустимую погрешность ограничивают величиной

$$m_{пред} = 2m.$$

По форме числового выражения все погрешности разделяют на *абсолютные* и *относительные*.

Абсолютные (средние, средние квадратические, вероятные и предельные) ***погрешности*** выражаются в тех же единицах, что и измеряемые величины; обычно они используются для оценки точности измерений, не зависящих от значения измеряемой величины (например, от величины измеряемого угла). Однако абсолютные погрешности не всегда наглядно характеризуют точность измерений, особенно результатов непосредственных измерений линейных величин, погрешности которых зависят от длин линий. В таких случаях используют понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к измеренной величине. Она выражается правильной дробью, числитель которой равен единице. Например, если линия длиной l измерена с абсолютной средней квадратической погрешностью m_l, то относительная погрешность

$$f_{отн} = \frac{m_l}{l} = \frac{1}{l : m_l} = \frac{1}{N}. \qquad (6)$$

В случае косвенных измерений конечный результат получают как функцию непосредственно измеренных величин.

Среднюю квадратическую погрешность функции общего вида $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументы которой $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимо измерены со средними квадратическими погрешностями $m_1, m_2, \dots, m_n$ определяют из выражения

$$M_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot m_n^2, \qquad (7)$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ – частные производные данной функции, вычисленные для соответствующих значений аргументов.

Все другие функции можно рассматривать как частные случаи функции общего вида. Рассмотрим погрешности некоторых простейших функций измеренных величин.

1. *Алгебраическая сумма измеренных величин* $y = x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$, причем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определены со средними квадратическими погрешностями $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

$$M_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2. \qquad (8)$$

В частном случае, если $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$,

$$M_y = m\sqrt{n}. \qquad (9)$$

2. *Произведение двух независимых величин* $y = x \cdot z$, где величины x и z определены соответственно с погрешностями m_x и m_z.

$$M_y^2 = x^2 \cdot m_z^2 + z \cdot m_x^2. \qquad (10)$$

Для произведения постоянного числа k на измеренную величину x, т.е. $y = k \cdot x$,

$$M_y = k \cdot m_x. \qquad (11)$$

3. *Частное двух независимых величин* $y = \frac{x}{z}$, где величины x и z определены соответственно с погрешностями m_x и m_z.

$$M_y^2 = \frac{1}{z^2} \cdot m_x^2 + \frac{x^2}{z^4} \cdot m_z^2 = \frac{z^2 \cdot m_x^2 + x^2 \cdot m_z^2}{z^4}. \qquad (12)$$

4. *Линейная функция* $y = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + \ldots + k_n \cdot x_n$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ − коэффициенты; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ − независимые величины, измеренные с погрешностями $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

$$M_y^2 = k_1^2 \cdot m_1^2 + k_2^2 \cdot m_2^2 + \ldots + k_n^2 \cdot m_n^2. \qquad (13)$$

С условиями измерений связаны понятия *равноточных* и *неравноточных* измерений. Измерения, выполняемые при неизменных условиях, позволяющих считать результаты измерений одинаково надежными, называют ***равноточны-***

ми. Если хотя бы один из факторов, определяющих содержание условий измерений, будет изменяться, то такие измерения называют ***неравноточными***.

Равноточные измерения. Для равноточных измерений наиболее надежным (вероятнейшим) значением измеренной величины является среднее арифметическое или простая арифметическая середина:

$$\bar{x} = \frac{[l]}{n}. \tag{14}$$

Поскольку измерения равноточны, т.е. $m_1 = m_2 = ... = m_n = m$, то средняя квадратическая погрешность арифметической середины

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{15}$$

Для определения средней квадратической погрешности отдельного измерения формула (2) Гаусса применима лишь в редких случаях, когда известно истинное значение измеряемой величины. На практике по результатам измерений обычно вычисляют среднее арифметическое (вероятнейшее) значение величины. В этом случае среднюю квадратическую погрешность отдельного результата вычисляют по их уклонениям от среднего арифметического $u = l - \bar{x}$ по формуле Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[u^2]}{n-1}}. \tag{16}$$

Величина m характеризуется средней квадратической погрешностью

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{17}$$

Тогда средняя квадратическая погрешность среднего арифметического будет

$$M = \sqrt{\frac{[u^2]}{n(n-1)}}.$$

Для оценки точности угловых измерений часто используют формулу Петерса

$$m = \frac{1,25[|u|]}{n-0,5}. \tag{18}$$

Неравноточные измерения. За характеристику надежности результата неравноточных измерений принимают величины, обратно пропорциональные квадратам их средних квадратических погрешностей **–** ***вес измерения***

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}, \tag{19}$$

где c – коэффициент пропорциональности, постоянный для всех измерений ряда; m_i – средняя квадратическая погрешность i-го результата измерений.

Обычно вес одного из результатов с погрешностью μ принимают за единицу и относительно его вычисляют веса остальных результатов измерений:

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2}; \quad \dots; \quad p_n = \frac{\mu^2}{m_n^2}. \tag{20}$$

где $\mu = m_1\sqrt{p_1} = m_2\sqrt{p_2} = ... = m_n\sqrt{p_n}$ – *средняя квадратическая погрешность единицы веса.*

Наиболее надежным значением измеряемой величины является общая арифметическая середина (весовое среднее)

$$\bar{X} = \frac{[pL]}{[p]}, \tag{21}$$

где L_i – значения неравноточных измерений; p_i – соответственно, их веса.

Веса измерений удобно выражать не через средние квадратические погрешности, которые обычно неизвестны, а через другие числовые характеристики измерений: например, число измерений, число приемов, числа, обратно пропорциональные числу станций или длине хода и т.д.

Погрешность единицы веса определяется по формуле Бесселя для неравноточных измерений

$$\mu = \sqrt{\frac{[pu^2]}{n-1}}, \tag{22}$$

где u – уклонения от весового среднего.

Средняя квадратическая погрешность весового среднего

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[pu^2]}{[p]\cdot(n-1)}}. \tag{23}$$

Средняя квадратическая погрешность функции общего вида $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, аргументы которой измерены с весами $p_1, p_2, ..., p_n$, определяется по формуле (7), а обратный вес функции

$$\frac{1}{P_y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_2} + \ ... \ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_n}. \tag{24}$$

Частные случаи функции общего вида:

1. Алгебраическая сумма измеренных величин $y = x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ \dots \ + \frac{1}{p_n}. \tag{25}$$

2. *Произведение двух независимых величин* $y = x \cdot z$:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{p_x} \cdot z^2 + \frac{1}{p_z} \cdot x^2 . \qquad (26)$$

Для частного случая функции $y = k \cdot x$, где k – постоянная величина:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{p_x} \cdot k^2 . \qquad (27)$$

3. *Частное двух независимых величин* $y = \frac{x}{z}$:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{p_x} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{p_z} \cdot \frac{x^2}{z^4} . \qquad (28)$$

4. *Линейная функция* $y = k_1 \cdot x_1 \pm k_2 \cdot x_2 \pm \ldots \pm k_n \cdot x_n$:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{p_1} \cdot k_1^2 + \frac{1}{p_2} \cdot k_2^2 + \ \ldots \ + \frac{1}{p_n} \cdot k_n^2 . \qquad (29)$$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практическое занятие №1

«Оценка точности многократно измеренной величины по истинным погрешностям»

Данный способ оценки используют при исследовании точности технических средств измерений (например, мерных лент и рулеток, теодолитов, нивелиров и др. приборов).

Порядок оценки точности результатов равноточных геодезических измерений рассмотрен на примерах 1 и 2.

Пример 1

Длина линии измерена мерной лентой 15 раз (табл. 1). Эта же линия была измерена светодальномером; при этом получено точное (истинное) значение ее длины $L=181,216$ м. Требуется: найти оценку систематической погрешности, среднюю квадратическую погрешность одного измерения m, оценить точность вычисления средней квадратической погрешности m_m, определить предельную погрешность $m_{пред}$ и относительную среднюю квадратическую погрешность измерений $f_{отн}$., проверить значимость вычисленной систематической погрешности.

Таблица 1

Результаты измерения длины линии мерной лентой

Номер измерений	Результаты измерений l_i,м	Номер измерений	Результаты измерений l_i,м	Номер измерений	Результаты измерений l_i,м
1	181,22	6	181,28	11	181,20
2	181,23	7	181,21	12	181,27
3	181,28	8	181,25	13	181,23
4	181,26	9	181,28	14	181,21
5	181,27	10	181,25	15	181,24

Порядок решения:

1. Результаты измерений сводят в табл. 2.

2. Для оценки систематической погрешности находят отклонения $\varepsilon_i = l_i - L$.

3. Оценку систематической погрешности получают как $\Theta = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{44,0}{15} = 2,9$см.

4. Находят истинные погрешности $\Delta_i = \varepsilon_i - \Theta$.

Таблица 2

Вычисления, выполняемые при решении задачи

Номер измерений	Результаты измерений l_i,м	ε_i, см	Δ_i, см	Δ_i^2	ε_i^2
1	181,22	+0,4	–2,5	6,4	0,2
2	181,23	+1,4	–1,5	2,4	2,0
3	181,28	+6,4	+3,5	12,0	41,0
4	181,26	+4,4	+1,5	2,2	19,4
5	181,27	+5,4	+2,5	6,1	29,2
6	181,28	+6,4	+3,5	12,0	41,0
7	181,21	–0,6	–3,5	12,5	0,4
8	181,25	+3,4	+0,5	0,2	11,6
9	181,28	+6,4	+3,5	12,0	41,0
10	181,25	+3,4	+0,5	0,2	11,6
11	181,20	–1,6	–4,5	20,6	2,6
12	181,27	+5,4	+2,5	6,1	29,2
13	181,23	+1,4	–1,5	2,4	2,0
14	181,21	–0,6	–3,5	12,5	0,4
15	181,24	+2,4	–0,5	0,3	5,8
	$l_{ср}$ = 181,25	$[\varepsilon]$ = 44,0	$[\Delta]$ = 0,0	$[\Delta^2]$ = 107,8	$[\varepsilon^2]$ = 236,8

5. Среднюю квадратическую погрешность отдельного измерения находят как

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{107,8}{15}} = 2,68 \text{ см},$$

т.е. с учетом совместного влияния ошибок случайного и систематического характера

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n} - \left(\frac{[\varepsilon]}{n}\right)^2} == \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n} - \Theta^2} = \sqrt{\frac{236,8}{15} - \left(\frac{44,0}{15}\right)^2} = 2,68 \text{ см}.$$

6. Оценивают точность (надежность) полученной средней квадратической погрешности:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{2,68}{\sqrt{2 \cdot 15}} = 0,49 \text{ см}.$$

Из последнего следует, что величине m следует оставлять только две значащих цифры, т.е. средняя квадратическая погрешность одного измерения длины линии мерной лентой равна $m \approx 2,7$ см.

7. Предельную среднюю квадратическую погрешность рассчитывают, приняв $\tau = 3$ для топографо-геодезических работ

$$m_{пред} = \tau \cdot m = 3m = 8,1 \text{ см}.$$

8. Относительная средняя квадратическая погрешность будет

$$f_{отн} = \frac{m}{l} = \frac{1}{l:m} = \frac{1}{181{,}2:0{,}027} \approx \frac{1}{6700}.$$

9. Для решения вопроса о значимости величины систематической погрешности используют критерий

$$\Theta \le t_\beta \frac{m}{\sqrt{n}},$$

где $t\beta$ выбирается из таблицы распределения коэффициентов Стьюдента (прил. VI) при n = 15, и по вероятности $\beta = \Phi'(t)$. Находят для $\beta = 0{,}95$ $t_\beta = 2{,}1$. Тогда

$$t_\beta \frac{m}{\sqrt{n}} = 2{,}1 \cdot \frac{2{,}7}{\sqrt{15}} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Как видно, $\Theta = 2{,}9$см > $1{,}5$см, следовательно, систематические погрешности в данных измерениях значимы.

Пример 2

В табл. 3 приведены невязки суммы углов в треугольниках триангуляции 2-го разряда. Требуется вычислить: среднюю квадратическую погрешность суммы углов в одном треугольнике и оценить точность ее получения, среднюю и вероятную погрешности той же суммы и среднюю квадратическую погрешность одного угла.

Таблица 3

Вычисления, выполняемые при решении задачи

Номер невязки	f_β, ″	f_β^2	Номер невязки	f_β, ″	f_β^2	Номер невязки	f_β, ″	f_β^2
1	+10	100	11	+3	9	21	−31	961
2	+2	4	12	−4	16	22	+23	529
3	+33	1089	13	+28	784	23	+15	225
4	+1	1	14	−7	49	24	−24	576
5	+1	1	15	−5	25	25	−3	9
6	+38	1444	16	+32	1024	26	+1	1
7	+35	1225	17	−13	169	27	+11	121
8	−12	144	18	+6	36	28	−19	361
9	−18	324	19	+31	961	29	−25	625
10	+23	529	20	−10	100	30	−35	1225

Порядок решения:

1. Невязки треугольников f_β можно считать истинными погрешностями Δ, т.к. сумму углов в треугольнике можно рассматривать как измеренную величину, истинное значение которой равно 180°. Находят ряд сумм, необходимых для дальнейших вычислений:

$$\left[f_\beta^2 \right] = \left[\Delta^2 \right] = 12667, \qquad \left[\left| f_\beta \right| \right] = \left[\left| \Delta \right| \right] = 499''.$$

2. Рассчитывают среднюю квадратическую погрешность суммы углов в одном треугольнике:

$$m = \sqrt{\frac{\left[\Delta^2\right]}{n}} = \sqrt{\frac{12667}{30}} = 20,5'' \approx 20''.$$

3. Оценивают точность полученной средней квадратической погрешности:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{20,5}{\sqrt{2 \cdot 30}} = 2,6''.$$

4. Вычисляют среднюю погрешность ϑ:

$$\vartheta = \frac{\left[|\Delta|\right]}{n} = \frac{499}{30} = 16,6'' \approx 17''.$$

Эта же погрешность может быть найдена как $\vartheta = \frac{m}{1,25} = \frac{20}{1,25} = 16''$.

5. Для определения вероятной погрешности *r* располагают истинные погрешности в ряд по возрастанию их абсолютных величин: +1, +1, +1, +2, +3, −3, −4, −5, +6, −7, +10, −10, +11, −12, −13, +15, −18, −19, +23, +23, −24, −25, +28, +31, −31, +32, +33, +35, −35, +38. Тогда по погрешностям, расположенным в середине ряда, находят

$$r = \frac{|\Delta|_{15} + |\Delta|_{16}}{2} = \frac{13+15}{2} = 14''.$$

Данная погрешность может быть найдена как $r = \frac{m}{1,48} = \frac{20}{1,48} = 13,5'' \approx 14''$.

6. Находят среднюю квадратическую погрешность измерения угла в треугольнике:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11,5'' \approx 12''.$$

Заданием предусмотрено решение двух нижеприведенных задач 1 и 2.

Задача 1

Для исследования теодолита 3Т5КП им многократно измерен один и тот же горизонтальный угол. Результаты измерений приведены в табл. 4. Тот же угол был измерен высокоточным теодолитом Т1. Приняв результат измерения теодолитом Т1 за точный, требуется вычислить: систематическую, среднюю квадратическую и предельную погрешности измерения горизонтального угла; оценить точность (надежность) вычисленной средней квадратической погрешности, после чего правильно произвести ее округление; проверить значимость вычисленной систематической погрешности.

Таблица 4

Результаты измерения горизонтального угла теодолитом 3Т5КП

Номер измерений	Угол		Номер измерений	Угол		Номер измерений	Угол	
	°	′		°	′		°	′
1	65	16,8	11	65	16,9	21	65	16,3
2	65	16,8	12	65	16,9	22	65	16,1
3	65	15,9	13	65	16,8	23	65	15,5
4	65	16,8	14	65	17,1	24	65	15,8
5	65	16,0	15	65	15,7	25	65	16,4
6	65	16,7	16	65	17,3	26	65	15,8
7	65	16,9	17	65	16,4	27	65	16,8
8	65	16,0	18	65	17,1	28	65	16,1
9	65	17,1	19	65	16,5	29	65	16,9
10	65	16,4	20	65	16,0	30	65	16,5

Примечание. Каждому студенту значение угла, измеренного высокоточным теодолитом, выбрать из табл. 5 в соответствии с номером своего варианта.

Таблица 5

Результаты измерения горизонтального угла теодолитом Т1

Номер варианта	Угол			Номер варианта	Угол			Номер варианта	Угол		
	°	′	″		°	′	″		°	′	″
1	65	16	0	11	65	16	20	21	65	16	40
2	65	16	2	12	65	16	22	22	65	16	42
3	65	16	4	13	65	16	24	23	65	16	44
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	65	16	6	14	65	16	26	24	65	16	46
5	65	16	8	15	65	16	28	25	65	16	48
6	65	16	10	16	65	16	30	26	65	16	50
7	65	16	12	17	65	16	32	27	65	16	52
8	65	16	14	18	65	16	34	28	65	16	54
9	65	16	16	19	65	16	36	29	65	16	56
10	65	16	18	20	65	16	38	30	65	16	58

Задача 2

В табл. 6 приведены истинные погрешности округлений некоторой величины. Вычислить: среднюю квадратическую, предельную, среднюю и вероятную погрешности округлений. Оценить точность (надежность) получения средней квадратической погрешности.

Таблица 6

Истинные погрешности округлений

Номер п/п	Δ_i, см	Номер п/п	Δ_i, см	Номер п/п	Δ_i, см	Номер п/п	Δ_i, см	Номер п/п	Δ_i, см
1	+0,01	7	+0,00	13	+0,18	19	+0,44	25	–0,10
2	–0,15	8	+0,37	14	–0,24	20	–0,29	26	–0,25
3	–0,46	9	–0,27	15	+0,05	21	+0,47	27	+0,03
4	–0,04	10	+0,38	16	–0,36	22	–0,03	28	–0,07
5	+0,30	11	+0,28	17	–0,02	23	–0,33	29	+0,30
6	–0,11	12	+0,10	18	–0,03	24	+0,07	30	–0,14

Примечание. Каждому студенту исключить из данных таблицы истинные погрешности с номерами №, №+1, №+2, где № - номер варианта (например, для варианта 15 следует исключить погрешности с номерами 15, 16, 17).

Практическое занятие №2

«Оценка точности функций независимых измеренных величин»

В геодезической практике часто значения искомых величин (например, приращений координат точек, площадей, превышений и т.п.) находят по результатам непосредственных измерений углов, линий и др. Очевидно, что если непосредственные измерения (аргументы) сопровождаются случайными погрешностями, то и результаты косвенных измерений как функции этих аргументов будут иметь погрешности. При этом величина средней квадратической погрешности функции измеренных величин зависит не только от погрешностей аргументов, но и от вида функции, связывающей непосредственные измерения с косвенными (см. формулы (7) – (13)).

Ниже приведены примеры решения некоторых геодезических задач.

Пример 3

Угол измерен двумя полуприемами, в результате чего получены значения угла $\beta_{КЛ}$ и $\beta_{КП}$. Средняя квадратическая погрешность измерения угла в полуприеме равна $1'$, т.е. $m'_{\beta_{КЛ}} = m'_{\beta_{КП}} = 1'$. Требуется определить среднюю квадратическую погрешность m_β угла, измеренного полным приемом.

Выражение для вычисления среднего значения угла можно записать в виде

$$\beta = \frac{1}{2}\beta_{КЛ} + \frac{1}{2}\beta_{КП}.$$

Согласно формуле (13)

$$m_\beta^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 m'^2_{\beta_{КЛ}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m'^2_{\beta_{КП}}.$$

Поскольку $m'_{\beta_{КЛ}} = m'_{\beta_{КП}} = m'_\beta$, то

$$m_\beta^2 = \frac{1}{2} m'^2_\beta \quad \text{и} \quad m_\beta = \frac{m'_\beta}{\sqrt{2}} = \frac{1'}{\sqrt{2}} = 0{,}7'.$$

Пример 4

Длины сторон $a = 62$ м и $b = 46$ м земельного участка прямоугольной формы измерены с относительной погрешностью $f_{отн}=1:1000$. Найти абсолютную и относительную средние квадратические погрешности определения площади участка.

Площадь участка $S = ab = 62 \cdot 46=2852$ $м^2$.

Поскольку $f_{отн} = \frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{1}{1000}$, то абсолютные погрешности измерения длин сторон $m_a = 0{,}062$ м, $m_b = 0{,}046$ м.

Согласно формуле (10)

$$m_S^2 = b^2 \cdot m_a^2 + a^2 \cdot m_b^2.$$

Тогда $m_S^2 =46^2 \cdot 0{,}062^2+62^2 \cdot 0{,}046^2=17{,}0$ $м^4$, $\quad m_S = 4{,}1$ $м^2$.

$$f_{отн} = \frac{m_S}{S} = \frac{4{,}1 м^2}{2852 м^2} = \frac{1}{700}.$$

Пример 5

Найти погрешность определения приращения координаты Δx, вычисленного по формуле $\Delta x = d \cdot cos\ \alpha$, если длина стороны $d = 150{,}0$ м измерена со средней квадратической погрешностью $m_d = 0{,}1$ м, а дирекционный угол $\alpha = 60^\circ 02'$ определен с погрешностью $m_\alpha = 1'$.

Исходя из выражения (7)

$$m_{\Delta x}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)^2 m_d^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial d} = cos\,\alpha; \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -d sin\,\alpha;$$

$$m_{\Delta x}^2 = \left(cos\,\alpha \cdot m_d\right)^2 + \left(d sin\,\alpha \cdot \frac{m_\alpha}{\rho'}\right)^2;$$

$$m_{\Delta x}^2 = \left(0{,}4995 \cdot 0{,}1\right)^2 + \left(150 \cdot 0{,}8663 \cdot \frac{1'}{3438'}\right)^2 = 0{,}00392;$$

$$m_{\Delta x} = \sqrt{0{,}00392} = 0{,}06 \text{ м}.$$

Заданием предусмотрено решение задач 3 – 7.

Задача 3

Вычислить среднюю квадратическую и предельную погрешности суммы углов полигона, имеющего n углов, если известно, что погрешность измерения одного угла составляет $m_\beta = 0{,}5'$.

Примечание. Каждому студенту количество углов в полигоне n взять равным *5*+№, где № – номер варианта; например, для варианта №*15* n будет равно *5+15=20* углов.

Задача 4

Угол измерен тремя приемами. Вычислить среднюю квадратическую погрешность измерения угла, если погрешность угла, измеренного одним полуприемом, равна $m'_\beta = 10''$.

Примечание. Каждому студенту погрешность измерения угла одним полуприемом m принять равной *10″*+№, где № – номер варианта; например, для варианта №*5* m'_β будет равно *10″+5=15″*.

Задача 5

По плану масштаба *1:5000* измерены две стороны прямоугольного участка a и b (табл. 7). Измерения выполнялись линейкой с миллиметровыми делениями. Найти площадь этого участка S и среднюю квадратическую погрешность площади m_S, если СКП совмещения нулевого штриха линейки с началом стороны участка равна $m_н = 0{,}3$ мм, а СКП отсчитывания по линейке в конце стороны участка равна $m_к = 0{,}5$ мм. Ответ выразить в гектарах.

Таблица 7

Результаты измерения сторон прямоугольного участка

Номер варианта	Длины, см		Номер варианта	Длины, см		Номер варианта	Длины, см	
	a	*b*		*a*	*b*		*a*	*b*
1	10,85	19,69	11	10,23	19,37	21	10,37	19,51
2	10,44	19,27	12	10,23	19,74	22	10,74	19,59
3	10,16	19,57	13	10,78	19,43	23	10,83	19,76
4	10,45	19,75	14	10,75	19,24	24	10,64	19,43
5	10,48	19,44	15	10,85	19,40	25	10,75	19,79
6	10,72	19,70	16	10,41	19,19	26	10,30	19,83
7	10,61	19,75	17	10,63	19,54	27	10,79	19,88
8	10,62	19,78	18	10,50	19,26	28	10,22	19,71
9	10,77	19,67	19	10,57	19,55	29	10,78	19,63
10	10,48	19,87	20	10,53	19,39	30	10,34	19,15

Задача 6

В треугольнике измерены длины двух сторон d_1, d_2 со средними квадратическими погрешностями m_1, m_2 и горизонтальный угол между ними β с погрешностью m_β (табл. 8). Вычислить по измеренным величинам площадь треугольника S и среднюю квадратическую m_S и относительную f_S погрешность площади. Ответ выразить в гектарах.

Задача 7

Превышение между точками местности определялось электронным тахеометром методом тригонометрического нивелирования; при этом были измерены(табл. 9): наклонное расстояние D со средней квадратической погрешностью m_D , угол наклона визирной оси ν при наведении на центр отражателя с погрешностью m_ν , высота прибора $i = 1{,}65$ м и высота визирной цели (отражателя) $V = 1{,}50$ м с погрешностями $m_i = m_V = 0{,}005$ м. Вычислить превышение, его среднюю квадратическую и предельную погрешности.

Таблица 8

Результаты измерений в треугольнике

Номер вар.	Длины сторон, d				Угол, β			Номер вар.	Длины сторон, d				Угол, β		
	d_1, м	m_1, см	d_2, м	m_2, см	°	′	m_β′		d_1, м	m_1, см	d_2, м	m_2, см	°	′	m_β′
1	92,48	6,5	162,66	2,0	46	47,0	0,6	16	102,63	7,0	182,44	4,0	53	56,1	0,4
2	79,55	8,0	153,57	8,0	63	29,3	0,9	17	134,53	6,5	125,12	5,5	73	52,9	0,3
3	98,18	2,5	124,25	7,0	38	32,3	0,6	18	125,99	4,5	183,62	6,5	94	09,1	0,9
4	102,10	3,5	132,53	4,0	74	22,6	0,6	19	134,32	2,5	174,88	6,5	42	34,3	0,3
5	142,80	8,0	156,50	4,0	94	18,9	0,8	20	100,44	2,5	174,67	8,0	81	34,8	0,3
6	85,43	4,0	174,99	4,0	89	18,7	0,7	21	114,35	2,5	177,98	6,5	72	24,6	0,8
7	121,60	1,5	117,31	4,5	95	21,2	0,5	22	100,48	8,0	165,39	3,0	55	52,3	0,6
8	110,45	2,0	100,45	8,5	80	27,2	0,4	23	93,23	1,5	107,26	5,0	87	42,7	0,9
9	150,06	5,5	118,36	5,0	78	12,3	0,1	24	129,35	3,0	125,04	5,5	79	34,9	0,2
10	88,25	2,0	170,39	2,5	55	06,9	0,5	25	113,03	4,5	118,60	7,0	88	43,3	0,9
11	136,16	8,5	135,48	7,0	63	49,1	0,3	26	140,61	3,0	134,74	8,0	92	37,0	0,9
12	112,91	8,0	107,91	5,5	51	00,8	0,6	27	124,85	8,0	175,92	6,5	63	44,6	0,5
13	141,07	5,5	185,30	6,5	86	09,9	0,1	28	116,08	2,5	169,97	2,5	37	14,1	0,3
14	96,38	8,0	176,11	7,5	43	22,7	0,7	29	110,22	5,5	192,82	4,5	40	18,2	0,1
15	116,70	4,5	179,97	5,0	71	07,2	0,6	30	100,52	6,5	185,56	2,5	53	33,8	0,8

Таблица 9

Результаты измерений при определении превышения

Номер вар.	Расстояние, м		Угол наклона ν			Номер вар.	Расстояние, м		Угол наклона ν		
	D	m_d	°	′	m_ν′		D	m_d	°	′	m_ν′
1	112,79	0,04	+2	25,7	0,5	16	115,97	0,03	+4	04,3	0,3
2	149,83	0,03	−3	37,9	0,5	17	107,93	0,04	+19	56,5	0,1
3	87,88	0,04	+13	14,5	0,4	18	137,22	0,03	+10	52,4	0,2
4	89,58	0,03	−6	09,5	0,1	19	84,03	0,02	+7	24,5	0,5
5	154,54	0,02	−16	36,7	0,4	20	84,09	0,01	+13	21,6	0,3
6	129,82	0,01	+3	01,2	0,2	21	154,02	0,02	+0	11,1	0,3
7	147,85	0,02	−16	42,4	0,3	22	123,49	0,03	−14	14,5	0,4
8	148,81	0,04	+7	28,5	0,1	23	113,90	0,03	+18	25,6	0,3

9	98,20	0,03	−18	49,0	0,4	24	109,96	0,02	−12	42,0	0,2
10	124,23	0,01	−14	43,5	0,4	25	146,69	0,02	−1	41,3	0,1
11	144,51	0,04	−7	15,5	0,1	26	95,69	0,04	−14	13,3	0,2
12	78,16	0,03	−11	31,1	0,5	27	96,48	0,02	−10	52,6	0,3
13	88,35	0,01	−16	57,4	0,2	28	89,50	0,01	+9	04,1	0,1
14	118,15	0,02	+17	42,2	0,5	29	83,76	0,02	+13	18,5	0,5
15	129,12	0,03	−9	16,4	0,5	30	109,80	0,03	−7	26,6	0,5

Практическое занятие №3

Обработка результатов равноточных измерений одной и той же величины

Обработка результатов измерений одной и той же величины имеет целью нахождение наиболее надежного значения измеренной величины и оценку точности этого результата.

Пусть выполнен ряд равноточных измерений некоторой величины, истинное значение которой X неизвестно. В результате измерений получены значения l_i , свободные от систематических погрешностей. Обработку ряда равноточных измерений проводят в следующей последовательности.

1. Находят наиболее надежное (вероятнейшее) значение измеренной величины, которым является простая арифметическая середина или среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{[l]}{n} = l_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{30}$$

где l_0 – приближенное значение результата измерений, близкое к арифметической середине; ε – "остатки", определяемые как

$$\varepsilon_i = l_i - l_0 . \tag{31}$$

В качестве l_0 рекомендуется выбирать наименьший результат из ряда измерений $l_1, l_2, \dots , l_n$; в этом случае всегда остатки $\varepsilon \geq 0$.

2. Вычисляют уклонения каждого измерения от среднего арифметического:

$$u_i = l_i - \bar{x}.$$

3. Найденные значения среднего арифметического $\bar{x}$ и уклонений u_i контролируют равенством $[u] = 0$.

Если значение среднего арифметического получено с округлением, то

$$[u] = -n \cdot \omega_{окр} , \tag{32}$$

где $\omega_{окр}$ – погрешность округления $\bar{x}.$

4. Вычисляют и контролируют величину $[u^2]$ по формуле

$$\left[u^2\right]=\left[\varepsilon^2\right]-\frac{\left[\varepsilon\right]^2}{n}. \qquad (33)$$

5. Вычисляют среднюю квадратическую погрешность отдельного измерения по формуле Бесселя

$$m=\sqrt{\frac{[u^2]}{n-1}}.$$

6. Определяют надежность средней квадратической погрешности отдельного результата измерений:

$$m_m=\frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

7. Вычисляют среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического:

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\left[u^2\right]}{n(n-1)}}.$$

8. Определяют надежность средней квадратической погрешности среднего арифметического:

$$m_M=\frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

Пример 6

Горизонтальный угол измерен 8-ю приемами (табл. 10). Выполнить математическую обработку результатов равноточных независимых измерений.

Таблица 10

Обработка результатов равноточных измерений

Номер приема	Результат измерения l_i	Остатки $\varepsilon_i=l_i-l_0$	ε^2	Уклонения u	u^2	$u\varepsilon$
1	75° 27′ 18,8″	+0,2″	0,04	−0,2″	0,04	−0,04
2	19,4	+0,8	0,64	+0,4	0,16	+0,32
3	18,6	0,0	0,00	−0,4	0,16	0,00
4	19,1	+0,5	0,25	+0,1	0,01	+0,05
5	19,3	+0,7	0,49	+0,3	0,09	+0,21
6	18,8	+0,2	0,04	−0,2	0,04	−0,04
7	19,0	+0,4	0,16	0,0	0,00	0,00
8	75° 27′ 19,2	+0,6	0,36	+0,2	0,04	+0,12
	l_0 = 75° 27′ 18,6″	$\sum$ = +3,4	1,98	+0,2	0,54	+0,62

$$\bar{x} = l_0 + \frac{[\varepsilon]}{n} = 75^\circ 27'18{,}6'' + \frac{3{,}4''}{8} = 75^\circ 27'19{,}025''\,; \qquad \omega_{окр} = -\,0{,}025'';$$

Контроль: $[u] = -n\omega_{окр} = -8\cdot(-0{,}025'') = +0{,}2''$;

$$[u^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 1{,}98 - \frac{3{,}4^2}{8} = 0{,}54\,;$$

$$m = \sqrt{\frac{[u^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}54}{8-1}} = 0{,}28'' \approx 0{,}3''\,; \qquad M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}28}{\sqrt{8}} = 0{,}10'' \approx 0{,}1''\,;$$

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0{,}28}{\sqrt{2(8-1)}} = 0{,}07'' \approx 0{,}1''\,; \qquad m_M = \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0{,}10}{\sqrt{2\cdot 7}} = 0{,}03''\,.$$

Ответ: 75° 27′ 19,0″; M = 0,1″.

Заданием предусмотрено решение задач 8 и 9.

Задача 8

Длина стороны теодолитного хода была измерена 30 раз. Результаты измерений приведены в табл. 11. Выполнить математическую обработку данного ряда измерений:

- определить окончательный результат измерений (среднее арифметическое);
- вычислить среднюю квадратическую погрешность отдельного результата измерения длины и ее надежность;
- вычислить среднюю квадратическую погрешность окончательного результата измерений (среднего арифметического) и ее надежность;
- рассчитать относительную погрешность измерения длины.

Таблица 11

Результаты измерений длины стороны теодолитного хода

Номер измерения	Длина, м	Номер измерения	Длина, м	Номер измерения	Длина, м	Номер измерения	Длина, м	Номер измерения	Длина, м
1	156,36	7	156,36	13	156,39	19	156,46	25	156,45
2	156,46	8	156,45	14	156,46	20	156,43	26	156,42
3	156,36	9	156,38	15	156,38	21	156,35	27	156,42
4	156,34	10	156,44	16	156,34	22	156,33	28	156,31
5	156,35	11	156,33	17	156,34	23	156,48	29	156,40
6	156,44	12	156,46	18	156,45	24	156,31	30	156,39

Примечание. Каждому студенту следует исключить из таблицы результаты (или результат) измерений, номера которых (которого) совпадают с цифрами варианта.

Задача 9

Для исследования полярного планиметра было произведено 30 измерений площади участка на плане масштаба 1:2000. Результаты измерений приведены в табл. 12. Произвести математическую обработку данного ряда измерений. Ответ выразить в гектарах.

Таблица 12

Результаты измерений площади участка планиметром

№ п/п	Площадь, см^2	№ п/п	Площадь, см^2	№ п/п	Площадь, см^2	№ п/п	Площадь, см^2	№ п/п	Площадь, см^2
1	233,29	7	233,62	13	232,89	19	232,80	25	232,31
2	232,83	8	232,88	14	232,68	20	232,97	26	232,47
3	232,74	9	233,44	15	232,58	21	232,26	27	233,66
4	232,46	10	233,20	16	233,04	22	233,58	28	232,83
5	232,84	11	232,44	17	233,52	23	233,17	29	233,21
6	233,31	12	232,40	18	232,73	24	233,13	30	232,55

Примечание. Каждому студенту следует исключить из таблицы результаты (или результат) измерений, номера которых (которого) совпадают с цифрами варианта.

Практическое занятие №4

Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений

В практике производства геодезических работ приходится измерять большие группы однородных величин, причем каждую величину для контроля и повышения точности измеряют дважды. Такие измерения принято называть *двойными (парными)*.

Пусть имеем ряд парных равноточных измерений l_1' и l_1'', l_2' и l_2'', …, l_n' и l_n'' ($m_1' = m_1'' = m_2' = m_2'' = ... = m_n' = m_n'' = m_l$) некоторых однородных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$.

1. Вычисляют разности двойных измерений по каждой паре:

$$d_i = l_i' - l_i'' \tag{34}$$

2. Наиболее надежные, окончательные значения определяемых величин находят как

$$l_{ср} = \frac{l' + l''}{2}.$$

3. Для определения значимости (допустимости) систематической погрешности используют критерий

$$|[d]| \le 0,25\left[|d|\right]. \tag{35}$$

4. Если условие (35) выполняется, то делают вывод о том, что систематическими погрешностями можно пренебречь. В противном случае делают за-

ключение о значимости систематических погрешностей и необходимости их учета при оценке точности измерений.

При отсутствии (допустимости) систематических погрешностей значения разностей можно рассматривать как истинные погрешности самих разностей, так как истинное значение разностей равно нулю. Тогда среднюю квадратическую погрешность одной такой разности можно определить по формуле Гаусса как

$$m_d = \sqrt{\frac{\left[d^2\right]}{n}} \quad \text{или} \quad m_d = m_l\sqrt{2},$$

где n − число всех разностей; m_l – погрешность отдельного измерения l_i' или l_i''.

5. Вычисляют погрешность m_l отдельного результата измерений:

$$m_l = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\left[d^2\right]}{2n}}. \tag{36}$$

6. Учитывая, что измерения равноточны, т.е. $m_i' = m_i'' = m_l$, находят среднюю квадратическую погрешность наиболее надежных значений определяемых величин:

$$m_{l_{cp}} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left[d^2\right]}{n}}. \tag{37}$$

Если в результатах измерений присутствуют систематические погрешности, т.е. неравенство (35) не выполняется, то из каждой разности двойных измерений исключают остаточное влияние систематических погрешностей.

7. Величину остаточной систематической погрешности определяют как среднее арифметическое

$$\delta_c = \frac{[d]}{n}. \tag{38}$$

8. Исключают из каждой разности систематическую погрешность δ_c:

$$d_i' = d_i - \delta_c, \tag{39}$$

где d_i' – уклонения разностей от их арифметической середины δ_c.

9. Среднюю квадратическую погрешность одной разности двойных измерений находят по формуле Бесселя

$$m_{d'} = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}},$$

а погрешность отдельного измерения l:

$$m_l = \frac{m_{d'}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{2(n-1)}}. \tag{40}$$

10. Вычисляют среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического значения двойного измерения

$$m_{l_{ср}} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}}. \qquad (41)$$

11. Вычисление d' и суммы $\left[d'^2\right]$ контролируют по формулам:

$$\left[d'\right] = -n\omega_{окр}\ ; \qquad \left[d'^2\right] = \left[d^2\right] - \frac{\left[d\right]^2}{n}, \qquad (42)$$

где $\omega_{окр}$ – ошибка округления систематической погрешности δ_c.

Пример 7

Требуется определить средние квадратические погрешности одного превышения и среднего из превышений на станции по данным геометрического нивелирования трассы, выполненного двумя нивелирами (табл. 13).

Таблица 13

Оценка точности по разностям двойных измерений превышений

Номера станций	Превышения, *мм*		*d, мм*	d^2	d', *мм*	d'^2
	h'	h''				
1	+1607,5	+1602,5	+5,0	25,00	+3,6	12,96
2	−753,0	−750,0	−3,0	9,00	−4,4	19,36
3	−616,5	−614,0	−2,5	6,25	−3,9	15,21
4	+449,0	+451,0	−2,0	4,00	−3,4	11,56
5	−374,5	−379,5	+5,0	25,00	+3,6	12,96
6	−772,0	−774,5	+2,5	6,25	+1,1	1,21
7	−1344,5	−1348,5	+4,0	16,00	+2,6	6,76
8	+2115,5	+2117,0	−1,5	2,25	−2,9	8,41
9	+842,0	+840,0	+2,0	4,00	+0,6	0,36
10	+627,5	+623,0	4,5	20,25	+3,1	9,61
		∑	+14,0	118,00	0,0	98,40

$\delta_c = \frac{\left[d\right]}{n} = \frac{+14}{10} = +1{,}4\,мм;$

$\left|\left[d\right]\right| = 14{,}0 > 0{,}25\cdot\left[\left|d\right|\right] = 8$, следовательно, δ_c нужно исключить из значений разностей d.

$$m_{d'} = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}} = \sqrt{\frac{98{,}4}{10-1}} = 3{,}3мм, \quad m_h = \frac{m_{d'}}{\sqrt{2}} = \frac{3{,}3}{\sqrt{2}} = 2{,}3мм; \quad m_{h_{ср}} = \frac{m_h}{\sqrt{2}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{2}} = 1{,}6\,мм.$$

Контроль: $\left[d'^2\right] = \left[d^2\right] - \frac{\left[d\right]^2}{n}; \quad 98{,}4 = 118{,}0 - \frac{14^2}{10} = 98{,}4.$

Заданием предусмотрено решение задачи 10.

Задача 10

Произвести оценку точности угловых измерений, выполненных теодолитом 3Т5КП (табл. 14), по разностям двойных измерений направлений (круг право и круг лево).

Таблица 14

Результаты измерений горизонтальных направлений

№ п/п	Измеренные направления				№ п/п	Измеренные направления			
	КЛ		КП			КЛ		КП	
	°	′	°	′		°	′	°	′
1	154	37,8	334	37,6	16	48	28,8	228	28,5
2	202	48,6	22	48,4	17	82	50,9	262	51,5
3	48	30,3	228	30,1	18	72	54,0	252	53,8
4	26	53,6	206	54,3	19	216	59,6	37	0,0
5	58	58,2	238	58,3	20	47	51,3	227	51,1
6	151	12,7	331	12,5	21	209	25,9	29	25,9
7	192	32,4	12	32,1	22	97	59,3	277	59,1
8	203	52,8	23	52,7	23	217	45,3	37	45,8
9	191	52,4	11	52,5	24	103	59,5	283	59,6
10	179	49,4	359	49,8	25	116	51,3	296	51,8
11	64	28,6	244	28,6	26	38	56,7	218	57,3
12	213	41,5	33	41,2	27	161	04,1	341	04,4
13	153	47,7	333	47,8	28	206	28,9	26	29,5
14	142	01,6	322	01,4	29	206	38,9	26	39,0
15	83	52,5	263	52,2	30	128	43,6	308	43,5

Примечание. Каждому студенту следует исключить из таблицы результаты (или результат) измерений, номера которых (которого) совпадают с цифрами варианта.

Практическое занятие №5

Определение весов неравноточных измерений

Измерения, выполненные в неодинаковых условиях и характеризующиеся различными средними квадратическими погрешностями, называются ***неравноточными***. При определении наиболее надежного значения из ряда неравноточных измерений, нельзя пользоваться средним арифметическим, так как оно не учитывает степень надежности каждого отдельного измерения. Следует поступать так, чтобы большее влияние на окончательный результат оказывали измерения с меньшими погрешностями, т.е. обладающие большим весом.

Поскольку средние квадратические погрешности измерений обычно неизвестны, то на практике веса измерений выражают через другие числовые характеристики измерений.

Так, при обработке результатов геометрического нивелирования за веса принимают величины, обратно пропорциональные числу станций хода n_i, т.е.

$$p_i = \frac{c}{n_i}. \tag{43}$$

В случаях, когда число станций на 1 км в нивелирных ходах примерно одинаково, вместо числа станций используют число километров хода $L_{км}$, т.е.

$$p_i = \frac{c}{L_{i_{км}}}. \qquad (44)$$

За веса измеренных длин сторон полигонометрических ходов принимают величины, обратно пропорциональные длинам ходов L_i , т.е.

$$p_i = \frac{c}{L_i}. \qquad (45)$$

За веса превышений, полученных из результатов тригонометрического (геодезического) нивелирования, принимают величины, обратно пропорциональные квадратам длин сторон D_i, т.е.

$$p_i = \frac{c}{D_i^2}. \qquad (46)$$

Ниже приведены случаи определения весов измерений при решении некоторых геодезических задач.

Пример 8

Вес угла p_i равен 4. Найти среднюю квадратическую погрешность m_i этого угла, если средняя квадратическая погрешность единицы веса μ равна $12''$.

Из выражения (20) следует

$$m_i^2 = \frac{\mu^2}{p_i} \quad \text{или} \quad m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} = \frac{12''}{\sqrt{4}} = 6''.$$

Пример 9

Три горизонтальных угла были измерены одним и тем же теодолитом, но разным числом приемов: $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $n_3 = 2$. Найти веса средних значений каждого угла $p_{ср\ i}$, если вес измерения угла одним приемом принять равным единице $p_1 = 1$.

Согласно свойству весов измерений можем записать:

$$\frac{p_{ср\ i}}{p_1} = \frac{m_1^2}{m_{ср\ i}^2}, \qquad (47)$$

где m_1 – средняя квадратическая погрешность угла, измеренного одним приемом (*единицы веса*); $m_{ср\ i}$ – средняя квадратическая погрешность среднего значения i–го угла.

Известно, что $m_{ср}$ вычисляется как $m_{ср\ i} = \frac{m_1}{\sqrt{n_i}}$, или $m_{ср\ i}^2 = \frac{m_1^2}{n_i}$.

Учитывая сказанное, запишем $\frac{p_{ср\ i}}{1} = \frac{m_1^2}{m_1^2} n_i$, или окончательно $p_{ср\ i} = n_i$, т.е. вес среднего значения горизонтального угла равен числу приемов, которым этот угол был измерен. Следовательно: $p_{ср\,1} = 3$, $p_{ср\,2} = 5$, $p_{ср\,3} = 2$.

Заданием предусмотрено решение задач 11 – 14.

Задача 11

Вычислить веса превышений по ходам геометрического нивелирования соответственно длиной *10*, *20*, *30* км, приняв в качестве измерения с единичным весом превышение по ходу длиной c = № (км), (№ – номер варианта).

Задача 12

Результатам измерения горизонтальных углов соответствуют средние квадратические погрешности: $m_1 = 5''$, $m_2 = 15''$, $m_3 = 25''$. Вычислить их веса, если известно, что средняя квадратическая погрешность единицы веса μ = (5+№)″ (№ – номер варианта).

Задача 13

Приняв веса результатов измерений каждого из *10* углов теодолитного хода, равными *1*, вычислить вес суммы всех углов.

Примечание. Число углов в полигоне принять равным *7* + №, (№ – номер варианта).

Задача 14

Горизонтальный угол измерен n_1 раз теодолитом со средней квадратической погрешностью одного измерения μ_1. Сколько раз необходимо измерить этот же угол другим теодолитом, дающим среднюю квадратическую погрешность одного измерения μ_2, чтобы веса результатов измерений были одинаковы?

Значения n_1, μ_1, μ_2 выбрать в соответствии с номером варианта (табл. 15).

Таблица 15

Исходные значения n_1, μ_1 и μ_2

Номер варианта	n_1	μ_1''	μ_2''	Номер варианта	n_1	μ_1''	μ_2''	Номер варианта	n_1	μ_1''	μ_2''
1	21	5,4	4,7	11	16	4,1	3,1	21	19	3,1	2,5
2	9	3,8	6,1	12	23	2,2	1,6	22	16	4,8	4,2
3	22	5,1	3,1	13	14	4,7	5,5	23	15	2,6	1,9
4	11	6,0	7,2	14	7	2,9	3,6	24	7	3,6	5,6
5	19	5,1	3,3	15	12	4,8	5,9	25	24	4,1	2,4
6	9	5,7	5,0	16	23	4,1	3,1	26	8	3,8	5,7
7	23	4,2	2,9	17	15	5,0	6,3	27	21	2,0	1,4
8	21	2,2	1,8	18	20	5,0	3,2	28	17	5,3	4,1
9	7	4,9	7,6	19	15	5,1	6,3	29	21	3,1	1,8
10	23	4,3	3,4	20	24	4,7	3,2	30	15	4,8	6,1

Практическое занятие №6

Определение весов функций независимых измеренных величин

Для получения средней квадратической погрешности любого результата измерений, в том числе и функции измеренных величин, необходимо знать погрешность единицы веса μ и вес P этой функции. Значения весов функций определяют по формулам (24) – (29).

Примеры определения весов функций геодезических измерений рассмотрены ниже.

Пример 10

Найти веса следующих функций:

1. $y = 3x_1 - 0,3x_2 + 0,7x_3$; 2. $y = 3x_1^2 + 4x_2$,

если $p_{x_1} = 3$; $p_{x_2} = 0,4$; $p_{x_3} = 4$; $x_1 = 1$.

Решение:

1. $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3$; $\frac{\partial y}{\partial x_2} = -0,3$; $\frac{\partial y}{\partial x_3} = 0,7$;

$$\frac{1}{p_y} = 3^2 \cdot \frac{1}{p_{x_1}} + (-0,3^2) \cdot \frac{1}{p_{x_2}} + (0,7)^2 \cdot \frac{1}{p_{x_3}} = 3,3; \qquad p_y = \frac{1}{3,3} = 0,3.$$

2. $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1$; $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 4$;

$$\frac{1}{p_y} = (6x_1)^2 \cdot \frac{1}{p_{x_1}} + 4^2 \cdot \frac{1}{p_{x_2}} = 52; \qquad p_y = \frac{1}{52} = 0,02.$$

Пример 11

Найти вес p_β угла, полученного по равноточным измерениям из девяти приемов, приняв вес угла $p_{\beta'}$, измеренного одним полуприемом, равным единице.

Так как каждый прием состоит из двух полуприемов, то для угла измеренного девятью приемами запишем

$$\beta = \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}\beta_i'$$

Тогда

$$\frac{1}{p_\beta} = \left(\frac{1}{18}\right)^2 \sum_{1=i}^{18}\frac{1}{p_{\beta_i'}} = \left(\frac{1}{18}\right)^2 \cdot 18; \qquad p_\beta = 18.$$

Заданием предусмотрено решение задач 15 – 17.

Задача 15

Два угла треугольника измерены соответственно n_1 и n_2 приемами, а третий получен из вычислений. Найти вес третьего угла, если вес угла, измеренного одним приемом, принят равным единице.

Примечание. Каждому студенту принять $n_1 = (3 + №)$ и $n_2 = (33 - №)$, где № – номер варианта.

Задача 16

Найти вес площади прямоугольника, если его ширина a получена с весом p_a, а длина b – с весом p_b.

Примечание. Каждому студенту принять: $a = 6$; $b = 10$; $p_a = (3 + №)$; $p_b = (33 - №)$, где № – номер варианта.

Задача 17

Найти длину d и вес p_d гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами x и y, приняв за измерение с весом, равным единице, линию длиной c.

Решение выполнить по одному из вариантов, приведенных в табл. 16.

Таблица 16

Длины катетов x, y и линии с весом, равным единице

Номер варианта	x, м	y, м	c, м	Номер варианта	x, м	y, м	c, м	Номер варианта	x, м	y, м	c, м
1	17	33	20	11	23	28	30	21	25	29	30
2	22	34	10	12	42	58	30	22	19	28	30
3	41	22	10	13	27	25	30	23	31	26	40
4	20	27	30	14	47	35	20	24	45	28	40
5	34	42	30	15	13	55	30	25	34	21	20
6	16	68	30	16	38	39	20	26	35	47	30
7	18	40	40	17	39	40	30	27	17	52	20
8	35	65	10	18	10	30	40	28	37	38	20
9	34	24	40	19	32	29	10	29	33	37	30
10	33	59	10	20	41	40	40	30	47	47	20

Практическое занятие №7

Обработка результатов неравноточных измерений одной величины

Обработку ряда неравноточных измерений одной и той же величины выполняют в следующей последовательности.

1. Находят веса результатов измерений. Если средние квадратические погрешности результатов измерений m_i известны заранее, то веса вычисляют как

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}.$$

Если средние квадратические погрешности результатов не известны, то в качестве весов принимают численные характеристики ряда измерений (число измерений в отдельных сериях измерений, число станций в ходах, длины ходов и т.п.)

2. Вычисляют наиболее надежное значение измеряемой величины по формуле для общей арифметической середины (весового среднего)

$$\bar{X} = \frac{[pl]}{[p]} = l_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}. \tag{48}$$

где ε – остаток, определяемый как разность между результатом каждого измерения и выбранной величиной, т.е. $\varepsilon_i = l_i - l_0$.

3. Вычисляют уклонения результатов измерений от весового среднего:

$$u_i = l_i - \bar{X}.$$

Значения уклонений u и весового среднего $\bar{X}$ контролируют равенством $[pu]=0$.

Если значение $\bar{X}$ дается с округлением, то контроль выполняют по формуле

$$[pu] = -[p] \cdot \omega_{окр}, \tag{49}$$

где $\omega_{окр}$ – погрешность округления $\bar{X}$.

4. Вычисляют и контролируют величину $[pu^2]$ по формуле

$$[pu^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon^2]}{[p]}. \tag{50}$$

5. Определяют среднюю квадратическую погрешность единицы веса и оценивают ее надежность:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pu^2]}{n-1}}; \qquad m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{51}$$

6. Находят среднюю квадратическую погрешность весового среднего и ее надежность:

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}; \qquad m_{M_0} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \tag{52}$$

7. Если средние квадратические погрешности отдельных измерений заранее не были известны, то их вычисляют по формуле

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}.$$

Пример 12

Угол измерен различным числом приемов n_i в четырех сериях. Известны средние арифметические значения угла в каждой серии измерений $\bar{x}_i$. Произвести полную математическую обработку результатов измерений по данным, приведенным в табл. 17.

Таблица 17

Обработка результатов неравноточных измерений угла

Номер серии	Среднее арифметическое значение угла в серии $\bar{x}_i$	Число приемов n_i	Вес $p=\frac{n}{2}$	ε''	$p\varepsilon''$	$p\varepsilon^2$	u''	pu''	pu^2	m''_{β_i}
1	68º 13′ 10″	12	6	0	0	0	–4,0	–24,0	96,0	4,3
2	16	10	5	+6	+30	180	+2,0	+10,0	20,0	4,7
3	12	6	3	+2	+6	12	–2,0	–6,0	12,0	6,0
4	24	4	2	+14	+28	392	+10,0	+20,0	200,0	7,4
$l_0 = 68^\circ 13' 10''$			16		+64	584		0	328,0	

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = \frac{+64}{16} = 4{,}0''; \qquad \omega_{окр} = 0.$$

$$\bar{X} = l_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 68^\circ 13' 10'' + 4{,}0'' = 68^\circ 13' 14{,}0''.$$

$$Контроль\text{:}\ \left[pu^2\right] = \left[p\varepsilon^2\right] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} = 584 - \frac{64^2}{16} = 328.$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pu^2\right]}{N-1}} = \sqrt{\frac{328{,}0}{4-1}} = 10{,}5'' \approx 10''; \qquad m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(N-1)}} = \frac{10{,}5}{\sqrt{6}} = 4{,}3'' \approx 4'';$$

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{10{,}5}{\sqrt{16}} = 2{,}6'' \approx 3''; \qquad m_{M_0} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1''.$$

Ответ: $68^\circ 13' 14''$, $M_0 = 3''$.

Заданием предусмотрено решение задач 18 и 19.

Задача 18

Линия измерена мерной лентой шесть раз различным числом приемов n_i. Результаты измерений приведены в табл. 18. Выполнить математическую обработку данного ряда измерений по одному из вариантов:

- определить наиболее надежное значение результата измерений (общую арифметическую середину);
- вычислить среднюю квадратическую погрешность единицы веса и ее надежность;

– вычислить среднюю квадратическую погрешность окончательного результата измерений и ее надежность;
– вычислить средние квадратические погрешности каждого из шести измерений;
– рассчитать относительную погрешность измерения длины линии.

Таблица 18

Результаты многократных измерений длины линии

Номер варианта	Длина линии, м						Количество измерений					
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	191,30	191,31	191,27	191,30	191,25	191,19	5	2	6	6	8	6
2	176,13	176,05	176,03	175,96	176,00	176,01	10	4	6	8	7	5
3	171,75	171,81	171,74	171,71	171,64	171,64	9	9	8	4	4	2
4	193,90	193,96	193,96	193,90	193,94	194,02	4	4	10	2	8	6
5	157,16	157,19	157,21	157,16	157,11	157,15	6	5	3	6	6	3
6	193,94	194,01	193,95	193,87	193,85	193,92	5	8	2	3	4	4
7	168,58	168,53	168,52	168,56	168,48	168,53	4	4	7	6	7	8
8	161,29	161,23	161,26	161,18	161,23	161,28	4	4	2	5	5	7
9	172,81	172,91	172,95	172,97	172,88	172,96	2	6	10	6	6	6
10	174,43	174,35	174,42	174,41	174,49	174,49	2	4	6	7	6	6
11	163,53	163,52	163,43	163,42	163,43	163,34	4	10	9	7	10	2
12	178,35	178,38	178,41	178,35	178,34	178,38	4	9	4	10	2	10
13	194,37	194,36	194,42	194,47	194,39	194,49	3	6	10	5	8	8
14	188,17	188,15	188,19	188,11	188,01	188,05	7	7	6	3	6	9
15	189,08	188,98	189,00	189,07	188,97	188,89	5	9	3	2	8	5
16	188,83	188,74	188,70	188,80	188,82	188,89	6	8	8	6	8	8
17	175,63	175,68	175,63	175,65	175,59	175,56	6	9	3	7	5	8
18	161,30	161,38	161,37	161,35	161,25	161,19	8	4	9	7	6	5
19	168,33	168,31	168,31	168,22	168,17	168,08	10	5	4	7	8	8
20	157,52	157,52	157,45	157,43	157,52	157,49	2	3	9	4	9	5
21	192,39	192,40	192,37	192,34	192,32	192,33	6	10	5	9	8	9
22	186,53	186,49	186,42	186,34	186,44	186,53	2	10	8	7	7	2
23	171,36	171,27	171,36	171,41	171,34	171,41	6	9	2	9	4	9
24	191,31	191,32	191,34	191,37	191,37	191,28	9	5	2	3	3	10
25	175,43	175,40	175,34	175,44	175,45	175,52	10	4	5	6	10	6
26	181,35	181,27	181,24	181,27	181,18	181,12	6	8	7	5	10	3
27	198,28	198,22	198,25	198,18	198,23	198,30	10	3	2	10	3	6
28	189,16	189,24	189,14	189,09	189,08	189,06	4	5	7	7	3	10
29	194,37	194,34	194,37	194,45	194,47	194,42	4	4	2	10	6	7
30	166,37	166,31	166,39	166,42	166,36	166,44	10	2	8	5	5	8

Задача 19

На узловой репер по шести ходам геометрического нивелирования с различным числом станций передана высота. Произвести математическую обработку выполненного ряда измерений по одному из вариантов в табл. 19.

Таблица 19

Результаты определения высоты узлового репера

Номер варианта	Высота репера, м						Число станций					
	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
1	25,618	25,621	25,607	25,599	25,599	25,588	29	33	39	28	39	23
2	12,664	12,645	12,635	12,644	12,627	12,628	40	31	20	18	36	29
3	33,204	33,199	33,200	33,210	33,206	33,211	37	30	37	29	34	23
4	26,260	26,258	26,250	26,233	26,251	26,239	27	15	37	23	24	40
5	14,974	14,973	14,983	15,001	14,992	15,009	31	20	20	17	37	22
6	10,812	10,813	10,794	10,792	10,779	10,792	16	16	19	29	35	16
7	37,383	37,395	37,400	37,387	37,391	37,391	29	34	29	26	39	28
8	33,277	33,258	33,252	33,257	33,256	33,269	40	19	15	35	23	32
9	24,468	24,464	24,468	24,470	24,475	24,481	30	31	22	39	17	28
10	20,704	20,684	20,689	20,697	20,705	20,710	37	36	17	36	34	37
11	37,165	37,146	37,160	37,157	37,168	37,185	19	20	32	15	30	34
12	22,235	22,217	22,200	22,215	22,207	22,190	15	32	39	32	16	33
13	23,900	23,920	23,915	23,927	23,923	23,916	24	25	16	38	33	22
14	35,536	35,548	35,530	35,550	35,542	35,523	15	32	25	24	32	30
15	12,356	12,363	12,353	12,351	12,360	12,376	37	37	40	26	34	22
16	32,621	32,637	32,618	32,637	32,622	32,608	38	17	33	25	20	37
17	14,668	14,686	14,679	14,693	14,706	14,709	25	22	24	16	31	21
18	12,356	12,367	12,349	12,360	12,354	12,371	19	34	31	25	23	39
19	35,958	35,947	35,945	35,934	35,943	35,946	18	21	28	31	37	18
20	39,052	39,045	39,042	39,047	39,035	39,016	19	36	35	25	38	38
21	32,979	32,999	33,005	33,018	33,029	33,018	36	40	31	36	19	33
22	13,535	13,529	13,546	13,560	13,575	13,578	34	35	35	16	36	19
23	12,680	12,662	12,655	12,671	12,653	12,659	23	34	37	30	25	18
24	18,181	18,183	18,197	18,185	18,195	18,189	24	31	35	21	35	33
25	34,208	34,204	34,218	34,201	34,199	34,206	16	26	28	16	39	33
26	14,421	14,425	14,445	14,452	14,467	14,448	19	37	31	31	28	30
27	23,617	23,610	23,622	23,611	23,608	23,624	25	39	39	36	21	34
28	33,344	33,345	33,342	33,324	33,333	33,322	21	27	16	19	25	38
29	34,360	34,365	34,376	34,379	34,374	34,360	30	15	36	15	18	38
30	37,904	37,910	37,919	37,931	37,919	37,932	17	27	24	25	36	30

Практическое занятие №8

Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений

Пусть имеем ряд парных результатов измерений l'_1 и l''_1, l'_2 и l''_2, …, l'_n и l''_n; в каждой паре результаты равноточны (имеют один и тот же вес p_l), но каждая пара в ряде измерений неравноточна другим парам, т.е. $m'_1 = m''_1 \neq m'_2 = m''_2 \neq ... \neq m'_n = m''_n$ и $p'_1 = p''_1 \neq p'_2 = p''_2 \neq ... \neq p'_n = p''_n$.

1. Вычисляют разность для каждой пары измерений:

$$d_i = l_i' - l_i''.$$

2. Рассматривая разность как алгебраическую сумму измеренных величин, с учетом выражения (25) определяют вес каждой пары:

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{l_i'}} + \frac{1}{p_{l_i''}} = \frac{2}{p_i}, \quad \text{или} \quad p_d = \frac{p_i}{2}. \tag{53}$$

3. Наиболее надежные, окончательные значения определяемых величин находят как среднее арифметическое.

4. Для определения значимости (допустимости) систематической погрешности используют критерий

$$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| \le 0{,}25 \cdot \left[\left|d\sqrt{p}\right|\right]. \tag{54}$$

5. Если условие (54) выполняется, то делают вывод о том, что систематическими погрешностями можно пренебречь. В противном случае делают заключение о значимости систематических погрешностей и необходимости их учета при оценке точности измерений.

При отсутствии (допустимости) систематических погрешностей, значения разностей рассматривают как истинные погрешности Δ.

6. Применяя формулу Гаусса для неравноточных измерений, рассчитывают среднюю квадратическую погрешность единицы веса:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pd^2\right]}{2n}}. \tag{55}$$

7. Рассчитывают среднюю квадратическую погрешность одного измерения:

$$m_l = \frac{\mu}{\sqrt{p_l}}, \tag{56}$$

8. Находят среднюю квадратическую погрешность наиболее надежных значений определяемых величин

$$m_{l_{ср}} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_l}}. \tag{57}$$

Если в результатах измерений присутствуют систематические погрешности, т.е. неравенство (54) не выполняется, то из каждой разности двойных измерений исключают остаточное влияние систематических погрешностей.

9. Определяют величину остаточной систематической погрешности:

$$\delta_c = \frac{[pd]}{[p]}. \tag{58}$$

10. Исключают из каждой разности систематическую погрешность

$$d_i' = d_i - \delta_c.$$

11. Рассматривая полученные разности d_i' как вероятнейшие погрешности измерений с весами $p_i/2$, определяют среднюю квадратическую погрешность единицы:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pd'^2\right]}{2(n-1)}}. \tag{59}$$

12. Определяют надежность вычисления средней квадратической погрешности единицы веса:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

13. Среднюю квадратическую погрешность одного измерения и наиболее надежных значений определяемых величин находят по формулам (56, 57).

Пример 13

Даны разности d двойных измерений некоторых величин и веса измерений. Выполнить оценку точности результатов двойных измерений по данным, приведенным в табл. 20.

Таблица 20

Оценка точности результатов двойных измерений

Номер разности	Разности d_i	Веса измерений $p_{l_i'} = p_{l_i''} = p_i$	$p_i d_i$	$d_i\sqrt{p_i}$	$p_i d_i^2$
1	+0,7	1,09	+0,8	+0,73	0,53
2	+5,1	0,24	+1,2	+2,50	6,24
3	−3,7	0,44	−1,6	−2,45	6,02
4	−2,1	1,08	−2,3	−2,18	4,76
5	−0,1	0,62	−0,1	−0,08	0,01
6	+4,6	1,09	+5,0	+4,80	23,06
7	−7,0	0,30	−2,1	−3,83	14,70
8	−3,2	0,31	−1,0	−1,78	3,17
9	+0,2	0,34	+0,1	+0,12	0,01
10	+5,8	0,32	+1,9	+3,28	10,76
		$[p]$ = 5,83	$[pd]$ = +1,9	$\left\|\left[d\sqrt{p}\right]\right\|$ = 1,10	$\left[pd^2\right]$ = 69,29

$$\delta_c = \frac{[pd]}{[p]} = \frac{+1,9}{5,95} = +0,3;$$

$$\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right] = 21,76$$

$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| = 1,10 < 0,25 \cdot \left[\left|d\sqrt{p}\right|\right] = 5,44$, следовательно, систематическая погрешность допустима;

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pd^2\right]}{2n}} = \sqrt{\frac{69,29}{20}} = 1,9; \qquad m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}} = \frac{1,9}{\sqrt{20}} = 0,4;$$

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} = \frac{1,9}{\sqrt{1,09}} = 1,8; \qquad m_{1_{ср}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_1}} = \frac{1,9}{\sqrt{2,18}} = 1,3.$$

Пример 14

Выполнить оценку точности результатов двойных измерений линий по данным, приведенным в табл. 21.

Таблица 21

Оценка точности результатов двойных измерений линий

Номер разности	D_i', м	D_i'', м	Разности d_i, см	Веса p_i, $c = 100$м	$d_i\sqrt{p_i}$	δ_{ci}, см	d_i', см	$p_i d_i'^2$
1	100,84	100,73	+11	0,99	+10,96	+4	+7	48,62
2	252,05	251,96	+9	0,40	+5,67	+10	–1	0,40
3	131,69	131,59	+10	0,76	+8,72	+5	+5	18,99
4	208,21	208,19	+2	0,48	+1,39	+8	–6	17,29
5	184,03	183,91	+12	0,54	+8,85	+7	+5	13,59
6	208,72	208,69	+3	0,48	+2,08	+8	–5	11,98
7	298,29	298,31	–2	0,34	–1,16	+12	–14	65,71
8	232,38	232,25	+13	0,43	+8,53	+9	+4	6,89
9	253,32	253,20	+12	0,39	+7,54	+10	+2	1,58
10	234,22	234,07	+15	0,43	+9,80	+9	+6	15,38
Σ	*2103,33*		*+85*	*5,24*	*+62,37*	*82*	*3*	*200,41*

$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| = 62,37 > 0,25 \cdot \left[\left|d\sqrt{p}\right|\right] = 16,17$ – систематическая погрешность значима.

Определяют коэффициент остаточного систематического влияния:

$$\theta = \frac{[d]}{[D]} = \frac{+0,85}{2103} = +4,04 \cdot 10^{-4};$$

и систематические погрешности $\delta_{c_i} = \theta \cdot D_i$

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pd'^2\right]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{200,41}{18}} = 3,34см; \qquad m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}} = \frac{3,34}{\sqrt{20}} = 0,79см;$$

$$m_{1м} = \frac{\mu}{\sqrt{c}} = \frac{3,34}{\sqrt{100}} = 0,33см$$

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} = \frac{3,34}{\sqrt{0,99}} = 3,35 см; \qquad m_{1_{ср}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_1}} = \frac{3,34}{\sqrt{1,98}} = 2,37 см.$$

Заданием предусмотрено решение задачи 20.

Задача 20

В табл. 22 приведены результаты геометрического нивелирования секций с различным числом станций в прямом и обратном направлениях. Произвести оценку точности результатов двойных измерений превышений.

Примечание. Каждому студенту следует исключить из таблицы результаты (или результат) измерений, номера которых (которого) совпадают с цифрами варианта.

Таблица 22

Результаты двойных измерений превышений

Номер сек-ций	Превышение, м		Число стан-ций	Номер сек-ций	Превышение, м		Число стан-ций	Номер сек-ций	Превышение, м		Число стан-ций
	прямо	обрат-но			прямо	обрат-но			прямо	обрат-но	
1	+0,382	–0,390	7	11	–1,356	+1,348	13	21	–1,131	+1,136	5
2	+2,618	–2,622	4	12	+4,912	–4,907	4	22	+1,481	–1,480	11
3	–3,493	+3,489	10	13	–3,222	+3,213	13	23	+1,394	–1,392	6
4	–1,109	+1,114	6	14	–1,822	+1,812	6	24	+0,673	–0,677	5
5	+3,261	–3,260	7	15	–2,043	+2,040	7	25	+0,742	–0,744	12
6	+1,159	–1,168	9	16	–2,253	+2,247	6	26	+4,276	–4,283	5
7	+2,275	–2,279	10	17	–1,889	+1,890	4	27	+4,679	–4,687	4
8	–1,841	+1,842	15	18	+3,074	–3,076	5	28	+0,503	–0,513	12
9	+0,934	–0,942	7	19	–0,872	+0,871	4	29	+4,203	–4,204	10
10	–1,461	+1,455	13	20	–0,535	+0,536	11	30	+2,271	–2,272	10

Практическое занятие №9

Оценка точности измерений углов и превышений по невязкам в ходах и полигонах

Поскольку невязки определяются по тому же принципу, что и истинные погрешности, их используют для оценки точности выполненных измерений. При этом, как уже отмечалось ранее, веса измерений выражают обычно не через средние квадратические погрешности, а через другие числовые характеристики измерений: например, число углов в полигоне, длины нивелирных ходов, выраженных числом станций (штативов) или в километрах и т.п. В качестве измерения с весом, равным единице, принимают измерение одного угла, превышения на одной станции или в ходе длиной 1км и т.д.

1. *Сеть теодолитных ходов*. В результате угловых измерений в N полигонах с числом углов $n_1, n_2, \ldots, n_N$ получены невязки f_{β_1}, f_{β_2}, …, f_{β_N} в каждом полигоне.

Полученные невязки являются истинными погрешностями сумм углов в каждом полигоне, поэтому для оценки точности измерений используют формулу Гаусса для неравноточных измерений

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[p\Delta^2\right]}{n}}. \tag{60}$$

Заменив Δ на f_β, а число погрешностей n на число невязок (полигонов) N получим

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pf_\beta^2\right]}{N}}. \tag{61}$$

Приняв вес измерения угла равным единице, вес невязки каждого полигона будет

$$p_i = \frac{1}{n_i}.$$

Тогда среднюю квадратическую погрешность измерения одного угла определяют как

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right]}{N}}. \tag{62}$$

В случае, если сеть состоит из треугольников (сеть триангуляции), $n_1 = n_2 = \ldots = 3$

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[f_\beta^2\right]}{3N}}. \tag{63}$$

2. *Сеть нивелирных полигонов (ходов)*. В сети геометрического нивелирования, состоящей из N полигонов, получены невязки f_{h_1}, f_{h_2}, …, f_{h_N}, периметры которых L_1, L_2, …, L_N (в километрах). Невязки f_{h_i} являются истинными погрешностями соответствующих сумм превышений. Приняв вес превышения в ходе длиной 1 км равным единице, вычисляют веса сумм превышений в каждом полигоне:

$$p_i = \frac{1}{L_i}.$$

Тогда, как и в предыдущем примере, среднюю квадратическую погрешность единицы веса определяют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{L}\right]}{N}}\,, \qquad (64)$$

где L – длина хода, км.

Для системы из N полигонов тригонометрического нивелирования за веса превышений принимают величины, обратно пропорциональные квадратам длин сторон D_i, т.е.

$$p_i = \frac{c}{D_i^2}\,.$$

Тогда

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{D^2}\right]}{N}}\,, \qquad (65)$$

где D – периметр полигона, км.

Пример 15

Вычислить среднюю квадратическую погрешность измерения горизонтального угла по невязкам в N полигонах, приведенным в табл. 23.

Таблица 23

Результаты угловых измерений в полигонах

Номер полигона	Невязка, f_β'	Число углов, n	$\frac{f_\beta^2}{n}$	Номер полигона	Невязка, f_β'	Число углов, n	$\frac{f_\beta^2}{n}$
1	−1,3	17	0,10	6	+2,4	30	0,19
2	+1,4	26	0,08	7	+1,0	21	0,05
3	−1,2	20	0,07	8	−2,5	26	0,24
4	−2,0	25	0,16	9	−1,8	15	0,22
5	+1,5	16	0,14	10	+1,5	24	0,09
			[0,55]				[0,79]

$$\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right] = 1{,}34\,;$$

$$\mu_\beta = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right]}{N}} = \sqrt{\frac{1{,}34}{10}} = 0{,}37' \approx 0{,}4'\,; \qquad m_{\mu_\beta} = \frac{\mu_\beta}{\sqrt{2N}} = \frac{0{,}37}{\sqrt{20}} = 0{,}08'\,.$$

Пример 16

Произвести оценку точности результатов геометрического нивелирования по невязкам в N полигонах, приведенных в табл. 24, и исследовать систематические погрешности.

Таблица 24

Результаты геометрического нивелирования

Номер полигона	Невязка f_h, мм	Длина L, км	$\frac{f_h^2}{n}$	Номер полигона	Невязка f_h, мм	Длина L, км	$\frac{f_h^2}{n}$
1	+9	9	9,0	6	+6	9	4,0
2	–23	5	105,8	7	–43	10	184,9
3	+17	10	28,9	8	–1	5	0,2
4	–23	6	88,2	9	+15	12	18,8
5	–7	10	4,9	10	–16	14	18,3
	[–27]	[40]	[236,8]		[–39]	[50]	[226,1]

Находят систематическую погрешность определения превышения на 1 км хода

$$\theta = \frac{[f_h]}{[L]} = \frac{-66}{90} = -0{,}73 мм/км.$$

$$\mu_{h\ 1км} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{L}\right] - \theta^2_{h\ 1км}[L]}{N-1}} = \sqrt{\frac{414{,}5}{9}} = 6{,}79 мм \approx 7 мм;$$

$$m_{\mu_h} = \frac{\mu_h}{\sqrt{2(N-1)}} = \frac{6{,}79}{\sqrt{18}} = 1{,}60 мм.$$

Значимость систематической погрешности оценивают, используя критерий

$$|\theta_{h\ 1км}| < \frac{2\mu_h}{\sqrt{[L]}}.$$

Если условие выполняется, делают вывод о незначимости систематических погрешностей, в противном случае – систематические погрешности существенны. В нашем случае

$|\theta_{h\ 1км}| = 0{,}73 мм/км < \frac{2\mu_h}{\sqrt{[L]}} = 1{,}43 мм/км$ – систематические погрешности незначимы.

Заданием предусмотрено решение задач 21 и 22.

Задача 21

По невязкам в треугольниках триангуляции, приведенным в табл. 25, произвести оценку точности угловых измерений и исследовать систематические погрешности.

Таблица 25

Невязки в треугольниках триангуляции

Номер треугольника	Невязка, f_β''	Номер треугольника	Невязка, f_β''	Номер треугольника	Невязка, f_β''
1	–8	11	–12	21	+4
2	+3	12	–11	22	–14
3	–5	13	+2	23	+7
4	+18	14	+19	24	+12
5	–3	15	+18	25	+9
6	+3	16	–20	26	–7
7	+9	17	–12	27	+13
8	–10	18	–16	28	–6
9	–8	19	–10	29	+11
10	+6	20	–10	30	–11

Каждому студенту следует исключить из таблицы результаты (или результат) измерений, номера которых (которого) совпадают с цифрами варианта.

Задача 22

Произвести оценку точности результатов геометрического нивелирования по невязкам в N полигонах, приведенных в табл. 26, и исследовать систематические погрешности.

Таблица 26

Невязки в полигонах

Номер полигона	Невязка f_h, мм	Число штативов в полигоне, n	Номер полигона	Невязка f_h, мм	Число штативов в полигоне, n	Номер полигона	Невязка f_h, мм	Число штативов в полигоне, n
1	–13	21	11	–17	27	21	–15	17
2	–7	12	12	–3	11	22	+30	22
3	+17	18	13	+9	24	23	–21	14
4	+8	18	14	+7	18	24	+24	22
5	+19	20	15	+36	28	25	+36	14
6	+24	27	16	+23	10	26	–18	21
7	+10	30	17	–8	25	27	+21	22
8	–15	21	18	+23	10	28	+7	10
9	–23	25	19	–11	19	29	–11	25
10	+23	14	20	+39	22	30	–14	12

Примечание. Каждому студенту следует исключить из таблицы результаты (или результат) измерений, номера которых (которого) совпадают с цифрами варианта.

Вопросы самоконтроля

1. Дайте понятие измерения.
2. Какие измерения называют равноточными и неравноточными?
3. Какие измерения называют необходимыми и избыточными?
4. Что называется истинной погрешностью?
5. Приведите классификацию погрешностей измерений.
6. Назовите свойства случайных погрешностей.
7. Перечислите основные критерии оценки точности результатов измерений.
8. Какие погрешности являются абсолютными?
9. Что называется относительной погрешностью?
10. Напишите формулу для средней квадратической погрешности, выраженной через истинные погрешности измерений.
11. Напишите формулу для вычисления относительной погрешности.
12. Напишите выражение для средней квадратической погрешности m_y функции вида $y = l_1 + l_2$.
13. Напишите выражение для средней квадратической погрешности m_y функции вида $y = l_1 - l_2$.
14. Напишите выражение для средней квадратической погрешности m_y произведения
    $y = a \cdot l$ постоянной a на непосредственно измеренную величину l.
15. Напишите выражение для средней квадратической погрешности m_y алгебраической суммы $y = l_1 \pm l_2 \pm \ldots \pm l_n$, n измеренных величин $l_1, l_2, \ldots , l_n$.
16. Напишите выражение для средней квадратической погрешности m_y линейной функции вида $y = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots + a_n l_n$.
17. Напишите выражение для средней квадратической погрешности m_y функции общего вида $y = F(l_1, l_2, l_3, \ldots , l_n)$ непосредственно измеренных величин $l_1, l_2, l_3, \ldots , l_n$.
18. Укажите формулу для нахождения среднего арифметического.
19. С какой целью определяется арифметическая середина?
20. Напишите формулу для вычисления средней квадратической погрешности отдельного измерения выраженной через уклонения от арифметической середины.
21. Напишите формулу для средней квадратической погрешности арифметической середины.

22. Напишите формулу для средней квадратической погрешности измерения m_l, определяемой по разностям двойных равноточных измерений $l_1, l_2, l_3, ..., l_n; l'_1, l'_2, l'_3, ..., l'_n$.
23. Дайте понятие веса измерения
24. Для чего находят среднюю квадратическую погрешность единицы веса μ.
25. Какими свойствами обладают веса измерений?
26. Напишите выражение для вычисления веса P_y функции вида $y = al$.
27. Напишите выражение для вычисления веса P_y алгебраической суммы $y = l_1 \pm l_2$ двух неравноточно измеренных величин.
28. Напишите выражение для вычисления веса P_y алгебраической суммы $s = l_1 \pm l_2$ двух равноточно измеренных величин, т.е. $p_1 = p_2 = p$.
29. Напишите выражение для вычисления веса P_y функции вида $s = l_1 \pm l_2 \pm l_3 \pm ... \pm l_n$.
30. Напишите выражение для вычисления веса P_y функции вида $y = a_1l_1 \pm a_2l_2 \pm ... \pm a_nl_n$.
31. Напишите выражение для веса P_y функции общего вида $y = F(l_1, l_2, l_3, ... , l_n)$ непосредственно измеренных величин $l_1, l_2, l_3, ... , l_n$ с весами $p_1, p_2, p_3, \dots , p_n$.
32. Напишите формулу для нахождения общей арифметической середины.
33. Напишите формулу для нахождения средней квадратической погрешности единицы веса, выраженной через уклонения от среднего весового.
34. Чему равен вес общей арифметической середины?
35. Как вычисляется средняя квадратическая погрешность общей арифметической середины?
36. Как вычисляется средняя квадратическая погрешность μ измерения, вес которого равен единице, и определяемая по разностям двойных неравноточных измерений $l_1, l_2, l_3, ..., l_n; l'_1, l'_2, l'_3, ..., l'_n$, с весами $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$?
37. Напишите выражения для оценки точности угловых и высотных измерений по невязкам в полигонах и ходах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания
к выполнению лабораторных и практических работ
для студентов направления 21.03.03
«Геодезия и дистанционное зондирование»
всех форм обучения

Составители: Реджепов Максат Бекиевич, Нетребина Юлия Сергеевна

Подписано в печать ___________. Формат 60×84 1/16. Уч.-изд. л. __.
Тираж ____ экз. Заказ №____
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026 Воронеж, Московский просп., 14