Введение

В работе изложена программа по 4-й части курса математики, который изучается студентами-заочниками во втором семестре. Здесь же приведены задачи для выполнения контрольных работ.

К четвертой части отнесены следующие темы: дифференциальные уравнения (контрольная работа № 8), ряды (контрольная работа № 9).

Материал следует изучать по вопросам, указанным в программе. Там же вы найдете указания на страницы учебников и номера задач, которые рекомендуется рассмотреть.

К экзамену необходимо выполнить и получить зачет по двум контрольным работам. Каждая работа выполняется в отдельной тетради. Оформление должно быть аккуратным, записи четкими, а решение должно сопровождаться подробными пояснениями с необходимыми ссылками на теорию.

Приступать к выполнению контрольных работ следует после изучения необходимого теоретического материала и разбора решения нескольких аналогичных задач с помощью приведенных ниже учебников и методических указаний.

Библиографический список рекомендуемой литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2-х т. Т. 2.:– М.: Интеграл – Пресс, 2001. – 544 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - СПб.: Профессия, 2001. – 432 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. – М.: Высшая школа, 2003. – 416 с.
4. Шипачев В. С. Высшая математика: Учеб. – М.: Высшая школа, 2003. – 480 с.
5. Дифференциальные уравнения: Методические указания и задания по математике / Воронежский гос. арх.-строит. ун.-т; Сост.: Дементьева А. М., Святская Т.Г., Глазкова М. Ю., Чернышова Р. В. – Воронеж, 2004.–32 с.
6. Методические указания и контрольные задания к типовому расчету №6 по курсу высшей математики по теме “Ряды” / Воронежский гос. арх.-строит. ун.-т; Сост.: Кущев А. Б., Потапов А.М., Борисович А.Ю. – Воронеж, 1998. – 36 с.

Указания по обращению к рекомендуемой литературе даны в тексте программы. Номер источников из приведенного выше списка пишут в квадратных скобках. Например: [4 гл. 14, §§1 – 5] обозначает учебник Шипачева В. С. ”Высшая математика”, глава 14, §§1 –5.

Программа 4-ой части курса математики.

Раздел I. Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения. Общие понятия и определения.
2. Дифференциальные уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (метод вариации произвольной постоянной).
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (метод Бернулли).
6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Общие понятия и определения.
7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие непосредственное интегрирование. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.
8. Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие искомой функции. Уравнение вида $y'' = f(x, y')$.
9. Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие независимой переменной. Уравнение вида $y'' = f(y, y')$.
10. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства решений. Теорема об общем решении этого уравнения.
11. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
12. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае различных действительных корней характеристического уравнения.
13. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае равных действительных корней характеристического уравнения.
14. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных и чисто мнимых корней характеристического уравнения.
15. Неоднородные линейные уравнения второго порядка. Теорема об общем решении этого уравнения.
16. Метод вариации произвольных постоянных при решении неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка.
17. Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

18. Принцип наложения решений.
19. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Литература: [2, гл. XIV, §1, №4025-4046, §3, №4183-4199, 4208-4217, §4, №4268- 4275,4283 – 4287, §5, №4324]; [3, гл. IV, §1, №515-538, 550-563, 603-624, §2, №644-648, 651-655, 659-665, 668-671, §3, №696-709, 721-739, §5, №778, 779, 783, 797, 800, 801, 804,805]; [1, гл. XIII, §§1 – 9, 16 – 18, 20-25, 29, 30]; [4, гл. 15, §§1.1 – 1.7., §§2 – 4]; [5].

Раздел 2. Ряды

1. Определение числового ряда. Сходимость ряда геометрической прогрессии.
2. Свойства сходящихся числовых рядов.
3. Необходимый признак сходимости числового ряда.
4. Признак сравнения знакоположительных рядов.
5. Признак Даламбера сходимости знакоположительных рядов.
6. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда.
7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда.
8. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
9. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.
10. Функциональные ряды. Основные понятия.
11. Степенные ряды. Теорема Абеля.
12. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
13. Ряды Тейлора и Маклорена.
14. Разложение в ряд Тейлора (Маклорена) элементарных функций.
15. Применение степенных рядов для приближенного вычисления значений функций и определенных интегралов.
16. Применение степенных рядов для решения дифференциальных уравнений.
17. Тригонометрические ряды. Коэффициенты и ряд Фурье для функций, имеющих период 2π .
18. Ряды Фурье для четных и нечетных функций с периодом 2π .
19. Ряды Фурье для функций с периодом $2l$.
20. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $[0,l]$.

Литература: [2, гл. IX, §1, №2737-2784, §2, №2802-2816]; [3, гл. I I I, §1, №316-335, §2, №347-349, §3, №368-377]; [1, гл. XVI, §§1 – 10, 15 – 17]; [4 гл. 14, §§1 – 5]; [6].

Контрольная работа № 8
Дифференциальные уравнения
Вариант 1

I. Найти общее решение:

$$1.\ xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2.\ y'' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x.$$

$$3.\ xy'' - y' + \frac{1}{x} = 0.$$

$$4.\ (e^{2x} + 4)dy - ye^x dx = 0.$$

$$5.\ y''(4 + y) = 2(y')^2.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' + y' - 2y = (16x + 22)e^{4x};\ \ y(0) = 3;\ \ y'(0) = 5.$$

$$2.\ y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x;\ \ y(0) = 0.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x,\ x(0) = 2;\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

I. Найти общее решение:

$$1.\ x\sqrt{4 + y^2}\,dx - y\sqrt{x^2 + 1}\,dy = 0.$$

$$2.\ x^3 y'' + x^2 y' = -1.$$

$$3.\ y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5\frac{y}{x} + 5.$$

$$4.\ y' - 3y\,ctg(x) = \sin 2x.$$

$$5.\ y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' = \cos x + e^{-x};\ \ y(\pi) = 1;\ \ y'(\pi) = -e^{-\pi}.$$

$$2.\ 2yy'' = (y')^2 + 1;\ \ y(0) = 2;\ \ y'(0) = 1.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \ \ x(0) = 5; \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y, \quad y(0) = 8. \end{cases}$$

Вариант 3

I. Найти общее решение:

$$1.\ \sqrt{1-x^2}\,y' - xy^2 - x = 0.$$

$$2.\ y'' - 2y'tgx = \sin x.$$

$$3.\ y'' = \ln x.$$

$$4.\ xy' = \frac{4y^3 + 8x^2 y}{3y^2 + 4x^2}.$$

$$5.\ y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ yy'' - 2\left(y'\right)^2 = 0;\ \ y(0) = 1;\ \ y'(0) = 2.$$

$$2.\ y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x;\ \ y(e) = \frac{e^2}{2}.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - y, \ \mathrm{x}(0) = 3;\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Вариант 4

I. Найти общее решение:

$$1.\ y' + 4\frac{y}{x} + x = 0.$$

$$2.\ \frac{xy' - y}{x} = tg\frac{y}{x}.$$

$$3.\ y(4 - e^x)dy + e^x dx = 0.$$

$$4.\ y'' = x\sin x.$$

$$5.\ y''tgx = y' + 1.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x;\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 2.$$

$$2.\ y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0;\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 3.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y,\ \ x(0) = 4;\ \ y(0) = 1. \end{cases}$$

Вариант 5

I. Найти общее решение:

$$1.\ y'y\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - y^2}} + 1 = 0.$$

$$2.\ y'' - \frac{y'}{x - 1} = x(x - 1).$$

$$3.\ xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}.$$

$$4.\ y'(x^2 + 4) - xy = \sqrt{x^2 + 4}.$$

$$5.\ y''' = xe^{-x}.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ 2yy'' = (y')^2;\ \ y(0) = y'(0) = 1.$$

$$2.\ y''+10y'+34y = -9e^{5x};\ \ y(0) = y'(0) = 6.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y,\ \ x(0) = 0;\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Вариант 6

I. Найти общее решение:

$$1.\ y'x^3 = y(x^2 + y^2).$$

$$2.\ y'(1+x^2) + y = atctgx.$$

$$3.\ y''ctg2x + 2y' = ctg2x.$$

$$4.\ y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x.$$

$$5.\ tgx \cdot \sin^2 y + y'\cos^2 x \cdot ctgy = 0.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' = \sin^3 x;\ \ y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{7}{9}; y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$2.\ y''(1+y) = (y')^2 + y';\ \ y(0) = y'(0) = 2.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y,\ \ x(0) = 1;\ \ y(0) = -2. \end{cases}$$

Вариант 7

I. Найти общее решение:

$$1.\ y'' = xe^{-x}.$$

$$2.\ y''x + y' = 1.$$

$$3.\ \sin^2 x\cos^2 y dx - \cos^2 x dy = 0.$$

$$4.\ y'(x^2 - 2xy) = xy - y^2.$$

$$5.\ y'' - 4y' + 5y = (24\sin x + 8\cos x)e^{-2x}.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ yy'' - (y')^2 = 0;\ \ y(0) = 1; y'(0) = 2.$$

$$2.\ xy' + y + xe^{-x^2} = 0;\ \ y(1) = \frac{1}{2e}.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y,\ \ x(\dfrac{\pi}{2}) = y(\dfrac{\pi}{2}) = e^{\pi}. \end{cases}$$

Вариант 8

I. Найти общее решение:

$$1.\ y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\frac{y}{x} + 5.$$

$$2.\ .y' - \frac{y}{\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} = 0.$$

$$3.\ 2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0.$$

$$4.\ y''x^2 + xy' = 1.$$

$$5.\ y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74.$$

I I. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' = 1-(y')^2;\ \ y(0) = \ y'(0) = 0.$$

$$2.\ y'' = \frac{tgx}{\cos^2 x};\ \ y(0) = \frac{1}{2};\ \ y'(0) = 0.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y,\ x(0) = 1;\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Вариант 9

I . Найти общее решение:

$$1.\ y'' - 2y'ctgx = \sin^3 x.$$

$$2.\ y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$3.\ y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}.$$

$$4.\ y''x\ln x = 2y'.$$

$$5.\ 3(x^2 y + y)dy = -\sqrt{2+y^2}\,dx.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ \left(y'\right)^4 + 2yy'' = 0;\ \ y(0) = y'(0) = 1.$$

$$2.\ y''+3y' = (40x+58)e^{2x};\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 2.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y,\ \ x(0) = 1;\ \ y(0) = 0. \end{cases}$$

Вариант 10

I. Найти общее решение:

$$1.\ y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5.$$

$$2.\ 2y' = \frac{y^2 + 6xy + 3x^2}{x^2}.$$

$$3.\ y''x - y' = 2x^2 e^x.$$

$$4.\ y'' - 10y' + 25y = (x-2)e^{5x}.$$

$$5.\ \sqrt{4-y^2}\,dx - 2(x^2 y + y)dy = 0.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ yy'' - (y')^2 = y^2;\ \ y(0) = 1;\ \ y'(0) = 1.$$

$$2.\ y'' = arctgx;\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 0.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x,\ x(0) = 0;\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Вариант 11

I. Найти общее решение:

$$1.\ \ln x \cdot \sin^3 y dx + x\cos y dy = 0.$$

$$2.\ y''(1-x^2) - 2xy' = 12x^3.$$

$$3.\ xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$4.\ y'\cos x - y\sin x = \cos^2 x.$$

$$5.\ y'' tgy = 2(y')^2.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' = \frac{1}{1+x^2};\ \ y(0)=0; y'(0)=0.$$

$$2.\ y''-2y'+5y=5x^2+6x-12;\ \ y(0)=0; y'(0)=2.$$

$$3.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=6x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=5x+2y,\ \ x(0)=1;\ \ y(0)=7.\end{cases}$$

Вариант 12

I. Найти общее решение:

$$1.\ \sqrt{4-y^2}\,dx-2(x^2y+y)dy=0.$$

$$2.\ x^2y'-2xy=3.$$

$$3.\ y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}.$$

$$4.\ y''(2y+3)-2(y')^2=0.$$

$$5.\ xy''-y'=x^2e^x.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y''-2y'+10y=74\sin 3x;\ \ y(0)=6;\ \ y'(0)=3.$$

$$2.\ xy''=1;\ \ y(1)=0;\ \ y'(1)=2.$$

$$3.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x-3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y,\ \ x(0)=y(0)=0.\end{cases}$$

Вариант 13

I. Найти общее решение:

$$1.\ xy''+y'=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$2.\ \sqrt{1+y^2}-\sqrt{1-x^2}\,yy'=0.$$

$$3.\ y'\cos x=(y+1)\sin x.$$

$$4.\ xy^2dy=(x^3+y^3)dx.$$

$$5.\ yy''+(y')^2+1=0.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y''-2y'+y=12e^x;\ \ y(0)=1;\ \ y'(0)=2.$$

$$2.\ y''=arctgx;\ \ y(0)=0;\ \ y'(0)=0.$$

$$3.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-y,\ \ x(0)=4;\ y(0)=6.\end{cases}$$

Вариант 14

I. Найти общее решение:

$$1.\ 2xy'=\sqrt{y^2-x^2}+2y.$$

$$2.\ y(1+\ln y)+xy'=0.$$

$$3.\ y''+\frac{1}{x}y'=x^2.$$

$$4.\ y'x-y=x^2\sin x.$$

$$5.\ (y')^2+3yy''=0.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' = xe^{-2x};\ \ y(0) = \frac{1}{4};\ \ y'(0) = -\frac{1}{4}.$$

$$2.\ y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x;\ y(0) = 2;\ \ y'(0) = 7.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y,\ \ x(0) = 1;\ \ y(0) = 6. \end{cases}$$

Вариант 15

I. Найти общее решение:

$$1.\ \sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0.$$

$$2.\ 4y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6\frac{y}{x} + 2.$$

$$3.\ y'(4+x^2) - xy = \sqrt{x^2+4}.$$

$$4.\ y'' - 2y'tg(x) = \sin x.$$

$$5.\ 5(y')^2 - y''(1+y) = 0.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' = \sin^2 3x;\ \ y(0) = -\frac{\pi^2}{16};\ \ y'(0) = 0.$$

$$2.\ y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1;\ \ y(0) = y'(0) = 2.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y,\ \ x(\dfrac{\pi}{2}) = 2;\ \ y(\dfrac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

Вариант 16

I. Найти общее решение:

$$1.\ \ln\cos y dx + x tg y dy = 0.$$

$$2.\ xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}.$$

$$3.\ xy' + y = x + 1.$$

$$4.\ y''tgx = y' + 2.$$

$$5.\ y''(1+y) = 5(y')^2.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y'' - y' - 2y = 3xe^{-x};\ \ y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

$$2.\ y'' = 3\cos^2 x \sin x;\ \ y(0) = -\frac{5}{9}; y'(0) = -\frac{2}{3}.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y, \end{cases}\ x(0) = 2;\ \ y(0) = 3.$$

Вариант 17

I. Найти общее решение:

$$1.\ (1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx.$$

$$2.\ y' - \frac{y}{x} = 3\ln^2 x.$$

$$3.\ xy' = \sqrt{4x^2 + y^2} + y.$$

$$4.\ y'' - 2ctg(x)y' = \sin^3 x.$$

$$5.\ y'''\sin^4 x = \sin 2x.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ y''+2y'-8y=(12x+20)e^{2x};\ \ y(0)=0;\ \ y'(0)=1.$$

$$2.\ y''+y(y')^3=0;\ \ y(0)=1;\ \ y'(0)=2.$$

$$3.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y,\ \ x(0)=2;\ \ y(0)=0.\end{cases}$$

Вариант 18

I. Найти общее решение:

$$1.\ xy'-y=\frac{x}{arctg\dfrac{y}{x}}.$$

$$2.\ y\ln^3 y+y'\sqrt{x+1}=0.$$

$$3.\ y''ctgx-y'+\frac{1}{\cos x}=0.$$

$$4.\ y'+\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}e^x.$$

$$5.\ y'''=\cos^2 x.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ 4(y'')^2=1+(y')^2;\ \ y(0)=1;\ \ y'(0)=0.$$

$$2.\ y''-2y'+5y=xe^{2x};\ \ y(0)=1;\ \ y'(0)=0.$$

$$3.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y,\ \ x(\pi)=e^{\pi};\ \ y(\pi)=0.\end{cases}$$

Вариант 19

I. Найти общее решение:

$$1.\ 2xyy' = 2y^2 + x^2 tg\frac{y^2}{x^2}.$$

$$2.\ xy'\ln x = y + \ln x.$$

$$3.\ y''tgy = 2(y')^2.$$

$$4.\ y'' = \frac{8}{y^3}.$$

$$5.\ y'' - 2y'ctgx = \sin^3 x.$$

II. Решить задачи Коши:

$$1.\ 3e^x tgydy + (1+e^x)\sec^2 ydy = 0;\ \ y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$2.\ y'' - 4y' + 4y = xe^{2x};\ \ y(0) = 1;\ y'(0) = 2.$$

$$3.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y, \end{cases}\ \ x(0) = 2;\ \ y(0) = 4.$$

Вариант 20

I. Найти общее решение:

$$1.\ xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}.$$

$$2.\ y' - \frac{y}{\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} = 0.$$

$$3.\ \ln x\sin^3 ydx + x\cos ydy = 0.$$

$$4.\ y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$$

$$5.\ y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

II. Решить задачи Коши:

1. $xy' = y(3+\ln y - \ln x);\ \ y(1) = \dfrac{1}{e}.$

2. $y''+12y'+36y = 72x^3 - 18;\ \ y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y, \end{cases}\ \ x(\pi) = e^{-2\pi};\ \ y(\pi) = \dfrac{1}{5}e^{-2\pi}.$

Контрольная работа № 9

1. Исследовать на сходимость числовые ряды (*а*- *д*), определить вид сходимости (*д*).

1. $а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/3};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)};$

$г)\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{3/n}-1\right)^2;\ д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}.$

2. $а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(n+1)!};\ б)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln^3 n};\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ln n}\right)^n;\ г)\sum_{n=1}^{\infty}\sin^5\frac{3}{n^{1/4}};$

$д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n}{7n-1}.$

3. $а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{7n-1}\right)^n;\ в)\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}^3\frac{1}{\sqrt{n+1}};\ г)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{n\ln^4 n};$

$д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n^2-5}.$

4. $а)\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^3\frac{5}{n^{1/4}};\ б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{n/2};\ в)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(6n+1)\ln(6n+1)^6};$

$г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+n-1};\ д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{n^6+1}.$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(7^{3/n}-1\right)^2$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{(2n+7)\sqrt{3+\ln(2n+7)^5}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{3n^2+2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$.

6. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^4\frac{5}{\sqrt{n}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n2^n}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sqrt[4]{n^{1/3}}}-1\right)^5$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{\ln n}\right)^3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^3+5}\right)^{n^4+3n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^4}{4^n}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(9n^{12}+4)^{1/6}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+1}\right)^{n/2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{6}{n^{1/7}}\right)$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^{n+1}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n+1)^2}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^5\frac{5}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n^2}{3}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(5n+2)(7+\ln(5n+2)^6)^{1/4}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot n!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5n}{12n+1}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+\ln n)^3}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+1}\right)^{n/2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n-1}$.

11. *а)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\sqrt{n}\right)^n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n-1}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^3}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$.

12. *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{7^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\left(\sqrt{n}\right)^n}$; *г)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+2)!}$.

13. *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{8^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$; *в)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln^4 n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\frac{1}{n}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

14. *а)* $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{3n+2}\right)^{2n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n}-1\right)^3$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(7+5\ln n)^2}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1,5)^n}{n!}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$.

15. *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(n+1)!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{3}{\sqrt{n}}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{\sqrt[4]{n^8+4}}$.

16. *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{3^n}$; *б)* $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^{n/2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)\sqrt{3+2\ln(n+1)}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{1/n}-1\right)^4$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{n^2}$.

17. *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^{n-1}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^4\frac{7}{n^{1/3}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{8n-1}$.

18. *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{2n+3}\right)^n$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{3}{n}\right)^3$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

$г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n!}$; $д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n-1}$.

19. $а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^{n+1}}$; $б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n$; $в)\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{3}{n}\right)$; $г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$;

$д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+4}}$.

20. $а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\ln^5 n}$; $б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\left(\sqrt{n}\right)^n}$; $в)\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^2\frac{5}{\sqrt[3]{n}}$; $г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4^n n}$;

$д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{5n+1}$.

2. Найти область сходимости степенных рядов

Номер варианта	**Задания**	Номер варианта	**Задания**
1.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}\,x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2}$	2.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt[n]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 4^{n-1}}$
3.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!x^n}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n(x+1)^n$	4.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+3)^n}{\sqrt{n}}$

Номер варианта	Задания	Номер варианта	Задания
5.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{3^n (n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+2}$	6.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n (3n-1)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{4^n}$
7.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$	8.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot (n+1)}{3^n (n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$
9.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{(n+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{7n}$	10.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^{2n}}{n!}$
11.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+2} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n}$	12.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3(x+4)]^n}{n!}$
13.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (n+2)}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+2)!}$	14.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} (x-2)^n$

Номер варианта	Задания	Номер варианта	Задания
15.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}(x-5)^n$	16.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot x^n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{4^n}$
17.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{3^n n^3}$	18.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n \cdot x^n}{n^3+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}(n+1)}$
19.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n^3+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n^2+n}$	20.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{10n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n}$

3. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции $f(x)$ в степенной ряд.

Номер варианта	**Задания**	Номер варианта	**Задания**
N n/n	*a; b; f(x)*	N n/n	*a; b; f(x)*
1	0; 1; $\sqrt{(1+x^2)^3}$	11	0; 0.25; $\cos\sqrt{x}$
2	0.1; 1; $\frac{e^{-x^2}}{x^2}$	12	0; 0,5; $sh\left(\frac{x}{3}\right)^2$
3	0; 0,5; x^2e^{-x}	13	-0,5; 0; $x\ln(1-x^2)$
4	-0,5; 0; $e^{\frac{x^2}{2}}$	14	0; 1; $ch\left(\frac{x}{2}\right)^3$
5	0,25; 1; $\frac{\sin x^2}{x}$	15	0.1; 0.5; $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$
6	0; 0,5; $x^2\cos x^2$	16	-1; 0; $\sqrt{1-x^3}$
7	0; 0.5; $\sqrt{1+(2x)^3}$	17	0; 1; $x\cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right)^2$
8	0; 0,5; $x\cos x^3$	18	0; 1; $ch\sqrt{x}$
9	0; 0,5; $x\ln(1+x^2)$	19	0; 0.1; $\ln(1.5+x)$
10	0; 1; $e^{-\frac{x^2}{2}}$	20	0,5; 1; $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$