

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический  
университет»

Кафедра «Ракетные двигатели»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

для выполнения курсовой работы по дисциплине  
«Методы математического моделирования»  
для студентов специальности 160700.65, 24.05.02  
«Проектирование авиационных и  
ракетных двигателей» очной формы обучения

Воронеж 2015

Составители: д-р техн. наук Ю.В. Демьяненко  
канд. техн. наук А.А. Гуртовой  
д-р техн. наук А.В. Кретинин  
канд. физ.-мат. наук А.М. Сушков

УДК 629.13

Методические указания для выполнения курсовой работы по дисциплине «Методы математического моделирования» для студентов специальности 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» очной формы обучения / ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный технический университет"; Сост.: Ю.В. Демьяненко, А.А. Гуртовой, А.В. Кретинин, А.М. Сушков. Воронеж, 2015. 44 с.

В методических указаниях для выполнения курсовой работы содержатся теоретические сведения для создания компьютерной программы, реализующей одномерную математическую модель горения в камере ЖРД.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей», дисциплине «Методы математического моделирования».

Рецензент д-р техн. наук, проф. Г.И. Скоморохов

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. В.С. Рачук.

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета.

© ФГБОУ ВПО «Воронежский  
государственный технический  
университет», 2015

## ВВЕДЕНИЕ

В представленных методических указаниях теоретические основы для моделирования одномерного процесса горения в камере сгорания, базирующиеся на проведении термодинамического расчета процесса горения и истечения в камере сгорания ЖРД.

Для определения удельных параметров и геометрических размеров ракетного двигателя необходимо знать температуру, давление, состав и скорости продуктов сгорания в камере сгорания в различных сечениях сопла. Эти данные необходимы также и для расчета охлаждения стенок камеры.

Высокие температуры горения в камере ЖРД вызывают сильную диссоциацию продуктов сгорания, которая, в свою очередь, влияет на их температуру и состав. Поэтому при определении температуры и состава продуктов сгорания в ЖРД учет диссоциации является обязательным. Кроме того, следует принимать во внимание и зависимость теплоемкости продуктов сгорания от температуры.

Исходными данными для термодинамического расчета горения и истечения продуктов сгорания являются:

- химический состав горючего и окислителя;
- соотношение между количеством горючего и окислителя в камере сгорания;
- давление в камере сгорания;
- давление на срезе сопла.

Расчет температуры и состава продуктов сгорания на выходе из камеры сгорания (перед реактивным соплом) производится при следующих допущениях:

- смешение компонентов топлива является полным;
- физическая неполнота сгорания отсутствует;
- отдачи тепла в стенки камеры нет;
- процесс сгорания протекает при постоянном давлении;

- состояние продуктов сгорания на выходе из камеры сгорания является полностью химически и энергетически равновесным.

При расчете процесса расширения в реактивном сопле ЖРД принимаются следующие допущения;

- процесс расширения предельно химически и энергетически равновесен;
- догорание топлива в сопле отсутствует;
- отдачи тепла в стенки сопла нет;
- трения и газодинамических потерь в сопле нет.

В качестве иллюстрации излагаемого материала приводится пример проведения термодинамического расчета для кислородно-водородного жидкостного ракетного двигателя. Подробно изложенные этапы расчета имеют цель создания алгоритма программы численного решения.

## 1. Термодинамический расчет процессов горения и истечения. Теоретические основы

Задача термодинамического расчета – определение температуры и состава продуктов сгорания в различных сечениях (в частности, входном, выходном и критическом).

Особенностью процессов в тепловых двигателях при высоких температурах (более 2000 К) является значительное усиление термической диссоциации рабочего тела. Время пребывания продуктов сгорания (ПС) в таких двигателях очень мало: газообразные продукты в камерах сгорания находятся тысячные доли, а при течении по соплу – десятитысячные доли секунды. Наличие в камерах обратимых процессов диссоциации означает, что ПС представляет собой химически реагирующую многокомпонентную смесь газов. Эти процессы приводят к уменьшению преобразования химической энергии в тепловую, что должно учитываться при расчете двигателей. При течении по соплу температура и давление газа уменьшаются. Установлено, что в диапазоне изменения этих параметров в соплах влияние температуры на диссоциацию сказывается сильнее, поэтому по мере движения газа по соплу диссоциация ослабевает. Состав ПС по длине сопла меняется: на выходе имеется больше продуктов полного окисления.

Для химически активного газа, в котором протекают химические реакции рекомбинации с выделением тепла, кроме внутренней энергии  $U$  и энергии давления  $P/\rho$  необходимо также учитывать химическую энергию  $U_{хим}$ . При температурах газа менее 2000 К степень диссоциации невелика, поэтому при рассмотрении процесса расширения в соплах изменение химического состава и  $U_{хим}$  можно не учитывать. При больших температурах в соплах происходит значительное изменение состава, а следовательно, и запаса

$U_{хим}$ . В этом случае уравнение энергии для движущегося газа записывают в виде:

$$U + \frac{P}{\rho} + U_{хим} + \frac{w^2}{2} = I + \frac{w^2}{2} = const, \quad (1)$$

где  $I$  – энтальпия ПС.

Нередко  $I$  называют полной энтальпией:

$$I = U + \frac{P}{\rho} + U_{хим}. \quad (2)$$

Уравнение (1) обычно используют для определения скорости истечения из сопла диссоциированных ПС:

$$w_a = \sqrt{2 \cdot (I_k - I_a)}.$$

Если не учитывать изменения химической энергии рабочего тела вследствие реакций рекомбинации, то при расчете скорости истечения ошибка может достигать нескольких процентов.

Поскольку по соплу состав ПС меняется, то и отношение теплоемкостей  $c_p/c_v$  для каждого сечения сопла будет иметь разное значение. Процесс расширения в соплах с подводом тепла вследствие реакций рекомбинации можно рассчитывать, используя уравнение адиабаты с некоторым средним значением показателя  $n$ :

$$\frac{P_k}{\rho_k^n} = \frac{P_a}{\rho_a^n} \Rightarrow n = \frac{\lg P_k / P_a}{\lg \rho_k / \rho_a}$$

С учетом уравнения состояния

$$n = \frac{\lg P_k / P_a}{\lg \frac{P_k R_a T_a}{P_a R_k T_k}}, \quad (3)$$

$$\text{где } R = \frac{R_0 P}{\sum \mu_i P_i},$$

$R_a, T_a, P_a$  – соответственно газовая постоянная, температура и давление ПС в выходном сечении сопла;

$R_k, T_k, P_k$  – то же на входе в сопло.

Для нахождения этих параметров необходимо выполнять термодинамический расчет в указанных сечениях сопла.

## 2. Равновесность процесса

Равновесным называется такой процесс расширения газовой смеси, при котором энергия колебательного движения частиц в каждом сечении сопла соответствует температуре (энергетическое равновесие), а состав ПС успевает отслеживать изменение определяющих параметров – температуры и давления (химическое равновесие). Обычно термодинамические расчеты двигателей выполняются в предположении полностью равновесного расширения. Такие процессы являются термодинамически обратимыми и идут при постоянной энтропии:  $S_i = S_k = S_a = const$ . Изоэнтروпные процессы, по сравнению с адиабатными, являются более идеализированными. При их протекании не должно быть трения и теплообмена газа со стенкой, а также должно выдерживаться энергетическое и химическое равновесие. Для изоэнтропных процессов средний показатель процесса расширения называют показателем изоэнтропы.

## 3. Задачи термодинамического расчета

Как уже отмечалось, в задачу термодинамического расчета входит определение температуры и состава газа в различных сечениях сопла. На основании этих расчетов в дальнейшем вычисляют расходный комплекс  $\beta$ , скорость истечения  $w_a$ , показатель изоэнтропы  $n$ , удельный импульс  $I_y$  и некоторые другие параметры.

Состав ПС можно характеризовать парциальными давлениями газов  $P_i$ , числом молей  $n_i$ , мольными (объемными) долями  $r_i$ . Индекс «i» означает некоторое произвольно выбираемое вещество, содержащееся в ПС. Все эти величины взаимосвязаны, например:

$$r_i = \frac{P_i}{P} = \frac{n_i}{n}, \quad (4)$$

где  $P$  – общее давление смеси;  $n$  – общее число молей всех газов, образующихся при сгорании одного моля топлива.

Для выполнения термодинамических расчетов обычно задают состав и энтальпию топлива, давление торможения на входе в сопло  $P_{0к}$  и давление на выходе из сопла  $P_a$ . Продукты сгорания считаются идеальными газами, поэтому к ним можно применить уравнение состояния идеальных газов. Внутренняя энергия, энтальпия, константы равновесия, теплоемкость от давления не зависят.

В состав ПС входит большое количество индивидуальных веществ. Так, даже для топлива, состоящего из четырех элементов (C, H, O, N), в составе ПС приходится при расчетах учитывать содержание одиннадцати газов:  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $CO$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2$ ,  $NO$ ,  $OH$ ,  $H$ ,  $O$ ,  $N$ . Помимо 11 парциальных давлений  $P_i$  (или числа молей  $n_i$ ) неизвестной величиной является температура смеси  $T_{0к}$ . Для отыскания 12 неизвестных составляют систему из 12 уравнений. Одним из них является уравнение Дальтона:

$$P_k = \sum P_i. \quad (5)$$

Для составления других уравнений предварительно необходимо провести термохимические расчеты.

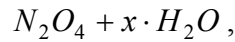
#### 4. Основы расчета термохимических свойств топлива

Задачи расчета – составление условных (эквивалентных) формул топлива, расчет стехиометрического соотношения

компонентов  $k_{m0}$  и коэффициента избытка окислителя  $\alpha$ , а также энтальпии топлива  $I$ , его компонентов и ПС.

Пример. Составить условную формулу окислителя. Состоящего из четырехоксида азота  $N_2O_4$  (массовая доля  $g_{N_2O_4} = 0,96$ ) и воды  $H_2O$  (массовая доля  $g_{H_2O} = 0,04$ ).

Условную формулу запишем в виде:



т.е. на один моль  $N_2O_4$  приходится  $x$  молей  $H_2O$ .

Зная массовые доли и молекулярные массы веществ ( $\mu_{N_2O_4} = 92$ ;  $\mu_{H_2O} = 18$ ), можно составить пропорцию для определения  $x$ : на  $\mu_{N_2O_4}$  граммов  $N_2O_4$  приходится  $x \cdot \mu_{H_2O}$  граммов воды  $H_2O$ , с другой стороны, соотношение между массами этих веществ определяется их массовыми долями. Следовательно, из пропорции получим:

$$\frac{\mu_{N_2O_4} - x \cdot \mu_{H_2O}}{g_{N_2O_4} - g_{H_2O}} \Rightarrow x = \frac{\mu_{N_2O_4} \cdot g_{H_2O}}{\mu_{H_2O} \cdot g_{N_2O_4}} = 0,211$$

Таким образом условную формулу можно записать в виде  $N_2O_4 + 0,211 H_2O$  или в виде одночлена, суммируя количество грамм-атомов одинаковых элементов: количество грамм-атомов азота в условной формуле  $b_N = 2$ , кислорода  $b_O = 4 + 0,211 \cdot 1 = 4,211$ , водорода  $b_H = 2 \cdot 0,211 = 0,422$ . В итоге условная формула  $N_{b_N} O_{b_O} H_{b_H}$  имеет вид  $N_2 O_{4,211} H_{0,422}$ .

Иногда удобнее рассматривать сгорание не одного условного моля вещества, а одного килограмма. Тогда составляют, так называемую удельную формулу. Для перехода к такой формуле надо число грамм-атомов в условной формуле умножить на  $1000/\mu_{ок}$ , где  $\mu_{ок}$  – условная молекулярная масса окислителя. Для рассмотренного примера

$$\mu_{ок} = 2 \cdot 14 + 4,211 \cdot 16 + 1 \cdot 0,422 = 95,8.$$

В итоге удельная формула окислителя  $N_{20,9}O_{44}H$ . В данном случае условная молекулярная масса равна 1000 г/моль.

### 5. Теоретическое (стехиометрическое) соотношение компонентов

Под теоретическим соотношением компонентов (стехиометрическим коэффициентом)  $k_{m0}$  понимают минимальное количество килограммов окислителя, которое приходится на один килограмм горючего при полном окислении горючих элементов топлива. При этом считают, что азот в реакциях окисления не участвует.

Полным является такое окисление, когда углерод  $C$  окисляется до  $CO_2$ , водород  $H$  – до  $H_2O$  и т.д., т.е. в реакциях окисления проявляются высшие валентности элементов.

Поскольку в действительности наряду с продуктами полного окисления имеются продукты неполного окисления (например,  $CO$ ,  $OH$  и др.), а также  $NO$  (т.е. азот частично окисляется), то  $k_{m0}$  носит условный характер. Стехиометрический коэффициент  $k_{m0}$  служит ориентиром для того, чтобы назначить действительное соотношение компонентов  $k_m = \dot{m}_{ок} / \dot{m}_z$ . Значение  $k_{m0}$  может быть определено по формуле замещения валентности элементов:

$$k_{m0} = \frac{-\mu_{ок} \left( \sum_{i=1} b_{iz} \nu_i \right)}{\mu_z \left( \sum_{i=1} b_{ioo} \nu_i \right)}, \quad (6)$$

где  $\nu_i$  – валентность (с учетом знака);  $b_{i_{oo}}$ ,  $b_{i_z}$  – число грамм-атомов  $i$ -го элемента в условных формулах окислителя и горючего.

Напомним, что наивысшие валентности равны: у водорода  $\nu_H = -1$ , у углерода  $\nu_C = -4$ , у кислорода  $\nu_O = +2$ . В ряде случаев вводится мольное соотношение компонентов  $k'_{m0} = k_{m0} \frac{\mu_z}{\mu_{ок}}$ , т.е. количество молей окислителя, потребное для полного окисления одного моля горючего. При расчете  $k'_{m0}$  молекулярные массы горючего  $\mu_z$  и окислителя  $\mu_{ок}$  могут быть найдены из химической или условной формул компонентов.

Действительное соотношение между компонентами топлива можно характеризовать коэффициентом избытка окислителя:

$$\alpha = \frac{k_m}{k_{m0}} = \frac{k'_m}{k'_{m0}}. \quad (7)$$

При  $\alpha > 1$  топливо содержит избыток окислителя, а при  $\alpha < 1$  – избыток горючего. Подставляя в (7) выражение для  $k_m$ , можно определить секундный расход каждого из компонентов:  $\dot{m} = \dot{m}_z + \dot{m}_{ок} = \dot{m}_z (1 + k_m)$ , откуда

$$\dot{m}_z = \frac{\dot{m}}{1 + \alpha \cdot k_{m0}}; \quad \dot{m}_{ок} = \frac{\alpha \cdot k_{m0} \cdot \dot{m}}{1 + \alpha \cdot k_{m0}}.$$

На основании (8) можно записать условную формулу двухкомпонентного топлива в следующем виде:

$$Cb_{C_T} Hb_{H_T} Ob_{O_T} Nb_{N_T}, \quad (8)$$

где число грамм-атомов элементов в условном моле топлива определяется соотношениями:

$$b_{C_T} = b_{C_G} + \alpha \cdot k'_{m0} \cdot b_{C_O};$$

$$b_{H_T} = b_{H_G} + \alpha \cdot k'_{m0} \cdot b_{H_O};$$

$$b_{i_T} = b_{i_G} + \alpha \cdot k'_{m0} \cdot b_{i_O}.$$

Здесь  $b_{i_G}$  и  $b_{i_O}$  – соответственно число грамм-атомов  $i$ -го элемента в молях горючего и окислителя. Заметим, что в общем случае в этих расчетах могут использоваться условные формулы компонентов.

Пример: Для топлива, в котором в качестве горючего использован диметилгидразин  $(CH_3)_2N_2H_2$  ( $\mu_z = 60,1$ ), а в качестве окислителя – четырехокись азота  $N_2O_4$ , имеющая влажность 4%, определить значение  $k_{m0}$  и записать условную формулу при  $\alpha = 0,8$ .

Как было показано ранее, условная формула данного окислителя имеет вид  $N_2O_{4,211}H_{0,422}$  ( $\mu_{ок} = 95,8$ ).

Стехиометрическое соотношение:

$$k_{m0} = -\frac{95,8}{60,1} \cdot \frac{-4 \cdot 2 + (-1) \cdot 8}{4,211 \cdot 2 - 0,422 \cdot 1} = \frac{95,8}{60,1} \cdot \frac{16}{8} = 3,2 \quad \frac{\text{кг ок.}}{\text{кг гор.}}$$

Мольное стехиометрическое соотношение

$$k'_{m0} = k_{m0} \frac{\mu_z}{\mu_{ок}} = 2 \quad \frac{\text{моль ок.}}{\text{моль гор.}}$$

Действительное мольное соотношение:

$$k_{m0} = \alpha \cdot k'_{m0} = 1,6 \quad \frac{\text{моль ок.}}{\text{моль гор.}}$$

Следовательно, условную формулу данного топлива на основании (8) можно записать в виде:

$$C b_{C_T} H b_{H_T} O b_{O_T} N b_{N_T},$$

$$\text{где } b_{C_T} = b_{C_G} + \alpha \cdot k'_{m0} \cdot b_{C_O} = 2 + 0 = 2;$$

$$b_{H_T} = 8 + 1,6 \cdot 0,422 = 8,78;$$

$$b_{O_T} = 0 + 1,6 \cdot 4,211 = 6,74;$$

$$b_{N_T} = 2 + 1,6 \cdot 2 = 5,2.$$

## 6. Энтальпия

Уравнением (2) для ПС была введена полная энтальпия, которая учитывает химическую энергию веществ. Она характеризует все запасы энергии вещества, кроме кинетической:

$$I = i + Q_{хим} = \int_{T_0}^T c_p dT + Q_{хим} ,$$

где  $T_0$  – начальная температура отсчета. Поскольку в термодинамических расчетах постоянно имеют дело с разностями или суммами полных энтальпий, то значение  $T_0$  можно выбирать произвольно. При расчете понятие полной энтальпии вводится также для топлива и его компонентов. Это позволяет записать баланс энергии в двигателе через полную энтальпию.

В существующих системах отсчета в качестве  $T_0$  выбирают температуры 298,15 К; 293,15 К; и 0 К. Под химической энергией понимают то количество тепла, которое выделяется или поглощается при образовании данного вещества из некоторых исходных веществ, так называемых стандартных элементов, химическая энергия которых берется за нуль отсчета. В качестве нулей отсчета химической энергии обычно берут газообразные  $O_2, H_2, N_2, C$  (графит  $\beta$ -модификации, электронный газ и т.д. Указанные состояния исходных веществ (они называются стандартными состояниями) являются наиболее устойчивыми и распространенными в природных условиях.

Для всех веществ при температуре  $T = T_0$  :

$$i = \int_{T_0}^T c_p dT = 0 \text{ и } I = Q_{хим} .$$

Химическая энергия  $Q_{хим}$  равна разности энергетических уровней исходных и конечных продуктов реакции и

определяется строением молекул и атомов исходных и конечных веществ и не зависит ни от давления, ни от температуры. Для определения  $Q_{хим}$  экспериментальным путем находят теплоту образования вещества  $\Delta H_{T_0}^0$ , т.е. количество тепла, которое выделяется ( $\Delta H_{T_0}^0 < 0$ ) или поглощается ( $\Delta H_{T_0}^0 > 0$ ) при образовании данного вещества из указанных исходных веществ, взятых в стандартном состоянии:

$$\Delta H_{T_0}^0 = Q_{хим} - \Delta Q_{T_0},$$

где  $\Delta Q_{T_0}$  обусловлена отличием теплоемкости исходных и конечных веществ, участвующих в реакции.

При определении  $\Delta H_{T_0}^0$  для стандартных условий (температура  $T_0 = 20^\circ C$  или  $25^\circ C$  и давление  $P = 1,01325 \cdot 10^5 Pa$  (1 физ. атм.))  $\Delta Q_{T_0} \approx 0$  и  $Q_{хим} \approx \Delta H_{T_0}^0$ .

Для индивидуальных веществ при температуре  $T$

$$I = \Delta H_{T_0}^0 + \int_{T_0}^T c_p dT + \sum \Delta H^{(i)},$$

где  $\sum \Delta H^{(i)}$  – сумма теплот фазовых и полиморфных превращений при изменении температуры от  $T_0$  до  $T$ .

Полная энтальпия 1 кг двухкомпонентного топлива:

$$I_T = \frac{I_z + \alpha \cdot k_{m0} \cdot I_{ок}}{1 + \alpha \cdot k_{m0}}.$$

Значения энтальпии горючего  $I_z$  и окислителя  $I_{ок}$  берут из таблиц при температуре подачи компонентов в камеру двигателя ( $20$  или  $25^\circ C$ ) для высококипящих компонентов, или температуре кипения при давлении  $P = 1,01325 \cdot 10^5 Pa$  для криогенных компонентов.

Энтальпию одного условного моля двухкомпонентного топлива находят из соотношения

$$I_{T\mu} = I_{Г\mu} + \alpha \cdot k'_{m0} \cdot I_{OK\mu},$$

где  $I_{Г\mu}, I_{OK\mu}$  – энтальпия горючего и окислителя, отнесенные к одному молю.

Энтальпия продуктов сгорания

$$I_{ПС} = \sum n_i I_i,$$

где  $n_i$  – число молей  $i$ -го вещества в ПС, образующееся из одного условного моля топлива.

С учетом (4)

$$I_{ПС} = \frac{N}{P} \sum P_i I_i.$$

Общее число молей в 1 кг ПС  $N = 1/\mu_{\Sigma}$ , где условная молекулярная масса ПС  $\mu_{\Sigma} = \sum r_i/\mu_i = \sum P_i \mu_i/P$ .

На основании последнего соотношения

$$N = P / \sum P_i \mu_i$$

и энтальпия 1 кг ПС

$$I_{ПС} = \frac{\sum P_i I_i}{\sum P_i \mu_i}. \quad (9)$$

Здесь суммирование проводится с учетом всех веществ, содержащихся в ПС.

### **7. Система уравнений для выполнения термодинамического расчета**

Термодинамический расчета горения выполняется в предположении отсутствия ионизации ПС. Система для расчета включает следующие уравнения:

- диссоциации;
- сохранения вещества;
- закона Дальтона;

сохранения полной энтальпии.

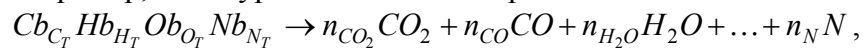
Уравнения диссоциации описывают обратимые реакции диссоциации. Из химической термодинамики известно, что если в газовой смеси протекает обратимая реакция типа  $aA + bB \leftrightarrow cC + dD$ , то для условий химического равновесия константа равновесия этой реакции запишется следующим образом:

$$K = \frac{P_C^c P_D^d}{P_A^a P_B^b} = f(T),$$

где  $A, B, C, D$  – вещества, участвующие в данной реакции;  $a, b, c, d$  – число молей этих веществ;  $P_A, P_B, P_C, P_D$  – парциальные давления.

Для идеальных газов константа  $K$  от давления не зависит, а определяется только типом реакции и температурой газа. Известно, что число независимых уравнений констант равновесия равно числу учитываемых веществ в ПС за вычетом числа элементов в топливе.

Уравнения сохранения вещества выражают равенство числа грамм-атомов каждого химического элемента в топливе и продуктах сгорания. Эти уравнения можно записать, рассмотрев условную реакцию сгорания топлива. Запишем, например, такое уравнение для четырехэлементного топлива:



где  $n_{CO_2}, n_{CO}, n_{H_2O}, \dots, n_N$  – числа молей  $CO_2, CO, H_2O, \dots, N$ , которые образуются при сгорании одного условного моля топлива. Очевидно, что число атомов произвольно выбранного элемента в левой и правой частях этого уравнения должно быть одинаково. Так, например, баланс элементов водорода

$$b_{H_T} = 2n_{H_2O} + n_{OH} + 2n_{H_2} + n_H.$$

Количество уравнений сохранения вещества равно числу элементов в топливе. Уравнение закона Дальтона записывается в виде:

$$P_{\Sigma} = \sum_i P_i .$$

Вместо него можно записать уравнение для общего числа молей

$$N = \sum_i n_i ,$$

если в качестве неизвестных выбраны не парциальные давления, а числа молей  $n_i$ .

При выполнении термодинамического расчета часто рассматривают сгорание такого количества молей топлива  $M_T$ , которое обеспечивает равенство  $P_{\Sigma} = N$ , а следовательно, и равенство  $P_i = n_i$ .

Если ввести  $M_T$ , то, например, уравнение сохранения для водорода будет иметь вид:

$$M_T b_{H_T} = 2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H .$$

Аналогично записывают балансовые уравнения и для других элементов. В них правая часть представляет количество грамм-атомов элемента в продуктах сгорания  $M_T$  молей топлива, а левая часть – количество грамм-атомов элемента в  $M_T$  молях топлива.

Уравнение сохранения полной энтальпии для 1 кг топлива записывается на основании закона сохранения энергии  $I_T = I_{ПС}^{T_K}$ , где  $I_{ПС}^{T_K}$  – полная энтальпия ПС при температуре сгорания  $T_K$ .

Если рассматривается сгорание  $M_T$  молей топлива, то уравнение сохранения полной энтальпии имеет вид

$$M_T I_{T\mu} = \sum_i P_i I_i ,$$

где  $I_{T\mu}$  – полная энтальпия одного моля топлива при температуре подачи;

$I_i$  – полная энтальпия  $i$ -го вещества в ПС при температуре сгорания  $T_K$  (справочное данное).

В рассмотренной системе уравнений количество неизвестных (парциальные давления или числа молей веществ в ПС, температура  $T_K$ , число молей топлива  $M_T$ ) и количество уравнений одинаково. Эта система нелинейных алгебраических уравнений является замкнутой. В прикладной математике разработан ряд способов приближенного решения подобных систем, позволяющих получить ответы с заданной точностью. Наибольшее распространение получил метод Ньютона. На его основе созданы компьютерные программы и выполнены термодинамические расчеты на ЭВМ для самых разнообразных топлив.

Первой частью термодинамического расчета является определение состава и температуры продуктов сгорания  $T_K$  в конце камеры сгорания. Обычно заданными считаются состав топлива, его энтальпия и давление в камере сгорания  $P_{0K}$ .

При расчете процесса течения его считают идеальным, т.е. происходящим при постоянном значении энтропии  $S$ .

В качестве граничного условия для расчета задается давление в рассматриваемом сечении сопла (обычно это давление в выходном сечении сопла, так как по результатам таких расчетов непосредственно определяется теоретическая скорость истечения и другие параметры).

Для вычисления неизвестных, характеризующих состав ПС в сопле, используют ту же систему уравнений, что и при расчете процесса горения, а для расчета температуры вместо уравнения сохранения энтальпии применяют уравнение, выражающее постоянство по энтропии. В интегральной форме это равенство записывается следующим образом:

$$S_{\kappa} = S_a,$$

где  $S_{\kappa}$  – энтропия ПС перед входом в сопло, определяемое по результатам расчета состава ПС в камере;  $S_a$  – энтропия ПС в рассматриваемом сечении сопла, в котором при расчете обычно давление считается заданным. Энтропию ПС

определяют из табличных значений стандартной энтропии  $S_i^0$  веществ.

Под стандартным значением энтропии условно принимают энтропию для заданной температуры при давлении  $P = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$  (1 физ. атм.). Для пересчета значения энтропии веществ при других давлениях, но при той же температуре, используется известное в термодинамике соотношение

$$S_i = S_i^0 - R_0 \ln P_i,$$

где  $R_0$  – универсальная газовая постоянная;

$[P_i]$  – физ. атм.

Энтропия ПС определяется суммированием энтропий всех составляющих веществ:

$$S_{\Sigma} = \sum_i S_i n_i.$$

Уравнение энергии  $I_{ПС}^{T_K} = I_{ПС}^{T_a} + \frac{w_a^2}{2}$  используется в этих расчетах для определения скорости газового потока. В частности, скорость истечения из сопла

$$w_a = \sqrt{2(I_T - I_{ПС}^{T_a})} \text{ или } w_a = \sqrt{2(I_{ПС}^{T_K} - I_{ПС}^{T_a})}.$$

Как уже было сказано ранее, показатель изоэнтропы находят по зависимости (3).

## **8. Модель расчета равновесного состава и температуры рабочего тела в камере сгорания и в выходном сечении сопла**

Как уже отмечалось, при сгорании четырехэлементного топлива, содержащего  $C$ ,  $H$ ,  $N$  и  $O$  (условная формула имеет вид  $C_{N_C} H_{N_H} N_{N_N} O_{N_O}$ ) образуется 11 газов, составляющих в сумме более 99% массы продуктов сгорания:  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $CO$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2$ ,  $NO$ ,  $OH$ ,  $H$ ,  $O$ ,  $N$ . Роль других возможных

соединений, например,  $N_x H_y$ , ионов, электронов и др., пренебрежимо мала в диапазоне температур и давлений, свойственных жидкостным ракетным двигателям. Поскольку эти одиннадцать соединений образованы из четырех простых веществ, можно записать семь независимых реакций диссоциации и рекомбинации в форме семи констант равновесия, например, в следующем виде:

$$K_1 = \frac{P_{CO_2}}{P_{CO} P_{O_2}^{1/2}}; K_2 = \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2} P_{O_2}^{1/2}}; K_3 = \frac{P_{H_2O}}{P_{OH} P_{H_2}^{1/2}};$$

$$K_4 = \frac{P_{NO}}{P_{N_2}^{1/2} P_{O_2}^{1/2}}; K_5 = \frac{P_{H_2}}{P_H^2}; K_6 = \frac{P_{O_2}}{P_O^2}; K_7 = \frac{P_{N_2}}{P_N^2}.$$

Каждая из констант равновесия зависит только от температуры. С целью упрощения расчета считают, что мольная концентрация  $i$ -го компонента  $N_i$  связана с его парциальным давлением соотношением  $N_i/P_i = 1$ .

К вышеуказанным уравнениям необходимо добавить уравнения баланса элементов (с учетом  $N_i = P_i$ ):

для углерода

$$N_C N_X = P_{CO_2} + P_{CO};$$

для водорода

$$N_H N_X = 2P_{H_2O} + 2P_{H_2} + P_{OH} + P_H;$$

для азота

$$N_N N_X = 2P_{N_2} + P_N + P_{NO};$$

для кислорода

$$N_O N_X = 2P_{O_2} + P_{H_2O} + P_{OH} + P_O + P_{NO} + P_{CO} + 2P_{CO_2},$$

где  $N_X$  – количество молей исходного топлива, являющееся наряду с парциальными давлениями неизвестной величиной.

Замыкающим является уравнение суммарного числа молей для смеси компонентов

$$N_{\Sigma} = \sum_i N_i ,$$

или уравнение закона Дальтона

$$P_{\Sigma} = \sum_i P_i .$$

Полученная система из двенадцати уравнений, содержащая двенадцать неизвестных, может быть решена различными способами, например, методом, описанным ниже и заключающимся в последовательном логарифмировании, линеаризации и решении системы уравнений.

Сущность указанного метода состоит в следующем. Рассмотрим, например, уравнение диссоциации углекислого газа

$$K_1 = \frac{P_{CO_2}}{P_{CO} P_{O_2}^{1/2}} .$$

В логарифмической форме оно имеет вид

$$\ln P_{CO_2} - \ln P_{CO} - \frac{1}{2} \ln P_{O_2} - \ln K_1 = 0 .$$

Линеаризуя это уравнение в окрестности какого-либо начального приближения парциальных давлений  $P_{CO_2}^0, P_{CO}^0, P_{O_2}^0$ , можно в итоге записать:

$$\Delta \ln P_{CO_2} - \Delta \ln P_{CO} - \frac{1}{2} \Delta \ln P_{O_2} = -\delta_{CO_2} ,$$

где  $\Delta \ln P_i = \ln P_i - \ln P_i^0$ ;

$$\delta_{CO_2} = \ln P_{CO_2}^0 - \ln P_{CO}^0 - \frac{1}{2} \ln P_{O_2}^0 - \ln K_1 .$$

Уравнение баланса углерода после логарифмирования имеет вид

$$\ln(P_{CO_2} + P_{CO}) - \ln(N_C N_X) = 0 .$$

После линеаризации в окрестностях начального приближения получим

$$P_{CO_2}^0 \Delta \ln P_{CO_2} + P_{CO}^0 \Delta \ln P_{CO} - (P_{CO_2}^0 + P_{CO}^0) \Delta \ln N_X = -(P_{CO_2}^0 + P_{CO}^0) \delta_C ,$$

где  $\Delta \ln N_X = \ln N_X - \ln N_X^0$ ;

$$\delta_C = \lg(P_{CO_2}^0 + P_{CO}^0) - \ln(N_C N_X^0).$$

Аналогичные преобразования уравнения закона Дальтона (линеаризация в окрестностях парциальных давлений  $P_i^0$ ) приводят к уравнению

$$\sum (P_i^0 \Delta \ln P_i) = -\delta_P \sum_i P_i^0,$$

где  $\delta_P = \ln \sum_i P_i^0 - \ln P_K$ .

Здесь  $P_K$  – давление в камере сгорания.

Таким образом, проводя линеаризацию всех исходных уравнений, получим линейную систему алгебраических уравнений, в которой в качестве неизвестных фигурируют параметры  $\Delta \ln V$  ( $V$  – парциальные давления и число молей исходного топлива).

Расчет проводят при заданных температуре и давлении методом последовательных приближений. В качестве начальных значений искомым неизвестных можно принять одинаковые значения парциальных давлений, а начальное значение  $N_X^0$  выбрать из условия равенства масс продуктов сгорания и исходного топлива, т.е.

$$N_X^0 = \frac{\sum P_i \mu_i}{\mu_T},$$

где  $\mu_i, \mu_T$  – молекулярные массы соответственно  $i$ -го компонента и исходного топлива.

Затем, решая систему линейных уравнений, находят поправки к неизвестным и далее уточненные значения искомым неизвестных (их логарифмов):

$$\ln P_i^1 = \ln P_i^0 + \Delta \ln P_i;$$

$$\ln N_X^1 = \ln N_X^0 + \Delta \ln N_X,$$

которые являются начальными значениями для следующего приближения. Указанная процедура повторяется до достижения заданной точности определения неизвестных.

Расчеты по описанному алгоритму проводятся для трех-четырёх ориентировочных значений температур в камере сгорания (например, 3200, 3400, 3600, 3800 К). Для каждой температуры определяют молекулярную массу  $\mu_\Sigma$ , полную энтальпию  $I_{ПС}$  и энтропию продуктов сгорания по следующим формулам:

$$\mu_\Sigma = \frac{\sum \mu_i P_i}{P_k}; I_{ПС} = \frac{\sum I_i P_i}{\sum \mu_i P_i}; S = \frac{\sum (S_i^0 P_i - 8314 P_i \ln P_i)}{\sum \mu_i P_i},$$

где  $I_i, S_i^0$  – справочные значения соответственно полной энтальпии и стандартной энтропии  $i$ -го компонента смеси, причем в формуле для энтропии значения давлений  $P_i$  надо подставлять в физических атмосферах, а размерность  $[S_i^0] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot ^\circ\text{C}}$ .

Искомую температуру  $T_k$  определяют по формуле линейной интерполяции на основании уравнения сохранения энергии в форме баланса энтальпий:

$$I_T^{T_0} = I_{ПС}^{T_k}.$$

Так же по формуле линейной интерполяции находят молекулярную массу  $\mu_k$  и энтропию  $S_k$  при полученной температуре.

Для расчета состава и температуры продуктов сгорания в выходном сечении сопла может быть применен упрощенный метод расчета, основанный на допущении пренебрежимо малого содержания в продуктах сгорания атомарных газов и окиси азота (при  $\alpha < 1$ ). В этом случае нужно учитывать содержание только  $H_2O, CO_2, CO, N_2, H_2$ .

Исходные уравнения для расчета состава продуктов сгорания:

констант равновесия

$$K = \frac{P_{CO} P_{H_2O}}{P_{CO_2} P_{H_2}};$$

баланса элементов в относительной форме

$$\frac{N_C}{N_N} = \frac{P_{CO_2} + P_{CO}}{2P_{N_2}}; \frac{N_O}{N_N} = \frac{2P_{CO_2} + P_{CO} + P_{H_2O}}{2P_{N_2}};$$

$$\frac{N_H}{N_N} = \frac{P_{H_2O} + P_{H_2}}{P_{N_2}};$$

закона Дальтона

$$P_a = \sum P_i.$$

Данная система решается аналитически при трех-четырёх значениях температур, лежащих в зависимости от топлива в пределах от 1200 до 2200 К. Температуру продуктов сгорания  $T_a$  определяют по формуле линейной интерполяции из уравнения сохранения энтропии  $S_k = S_a$  в предположении об изоэнтропном расширении газа в сопле. Также находится полная энтальпия ПС на срезе сопла  $I_{ПС}^a$  и молекулярная масса  $\mu_a$ .

## 9. Расчет критического сечения

При расчете критического сечения сопла давление заранее неизвестно, в отличие от КС и среза сопла. Поэтому здесь расчет необходимо вести для трех-четырёх предполагаемых давлений в критическом сечении, которые лежат в окрестностях ориентировочного значения:

$$P_{кр} = P_{\kappa} \left( 1 - \frac{n-1}{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Для каждого пробного  $P_{кр}$  находятся последовательно  $T_{кри}$ ,  $I_{кри}$ ,  $\mu_{кри}$ ,  $R_{кри} = \frac{R_0}{\mu_{кри}}$ ,  $\rho_{кри} = \frac{P_{кри}}{R_{кри} T_{кри}}$ ,  $w_{кри} = \sqrt{2(I_{к} - I_{кри})}$ ,  $F_{кр.уд.i} = \frac{1}{\rho_{кри} w_{кри}}$ . Истинное критическое сечение, соответствующее ему давление  $P_{кр}$  и другие параметры будут те, при которых удельная площадь получится минимальной.

## 10. Теоретические параметры истечения

После нахождения термодинамических параметров в характерных сечениях вычисляют важнейшие теоретические параметры истечения ПС:

- удельный импульс на расчетном режиме  $I_p = w_a = \sqrt{2(I_{к} - I_a)}$ ;
- удельный импульс в пустоте  $I_{II} = w_a + F_{a.уд} P_a$ ;
- характеристическая скорость  $c_* = F_{кр.уд} P_{C0} = F_{кр.уд} P_{к}$ ;
- коэффициент тяги в пустоте  $K_{II} = \frac{I_{II}}{c_*}$ ;
- относительная площадь среза  $\bar{F}_a = \frac{F_{a.уд}}{F_{кр.уд}}$ .
- средний показатель изоэнтропы расширения  $n = \frac{\lg \frac{P_{к}}{P_a}}{\lg \frac{\rho_a}{\rho_{к}}}$ .

## 11. Пример расчета

Исходные данные:  $жO_2 + жH_2$ , давление в КС  $P_k = 210 \text{ Атм}$ , коэффициент избытка окислителя  $\alpha = 0,8$ , давление на срезе сопла  $P_a = 0,2 \text{ Атм}$ , энтальпии компонентов топлива  $i_{O_2} = -398,3 \text{ Кдж/кг}$  и  $i_{H_2} = -4353,9 \text{ Кдж/кг}$ .

Выполнить термодинамический расчет в камере сгорания, на срезе сопла, определить параметры критического сечения, вычислить удельный импульс, характеристическую скорость, коэффициент тяги в пустоте и другие параметры истечения.

Методика расчета.

1. Определяем массовое стехиометрическое соотношение компонентов
- 2.

$$k_{m0} = -\frac{\mu_{ок} \sum b i_{\epsilon} v_i}{\mu_{\epsilon} \sum b i_{ок} v_i} = -\frac{32 \cdot 2 \cdot (-1)}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \frac{\text{кг.ок}}{\text{кг.гор}},$$

мольное стехиометрическое соотношение

$$k'_{m0} = k_{m0} \frac{\mu_{\epsilon}}{\mu_{ок}} = 8 \cdot \frac{1}{16} = 0,5 \frac{\text{моль.ок}}{\text{моль.г}},$$

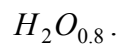
действительное мольное соотношение

$$k'_m = \alpha \cdot k'_{m0} = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4 \frac{\text{моль.ок}}{\text{моль.г}}.$$

Условная формула топлива  $H_{b_H} O_{b_O}$ , где

$$b_H = b_{H_2} + \alpha \cdot k'_{m0} \cdot b_{H_2O} = 2 + 0 = 2;$$

$$b_O = \alpha \cdot k'_{m0} \cdot b_{O_2} = 0,4 \cdot 2 = 0,8, \text{ т. е. условная формула}$$



Энтальпия топлива

$$i_T = \frac{-4353,9 - 6,4 \cdot 398,3}{7,4} = -932,72 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг}}$$

2. Составим систему уравнений для КС: состав ПС –  $H_2O$ ,  $OH$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $H$ ,  $O$ .

Система уравнений будет включать в себя 4 уравнения диссоциации, 2 уравнения сохранения вещества и уравнение Дальтона:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2} P_{O_2}^{1/2}}, \\ K_2 = \frac{P_{H_2O}}{P_{OH} P_{H_2}^{1/2}}, \\ K_3 = \frac{P_{H_2}}{P_H^2}, \\ K_4 = \frac{P_{O_2}}{P_O^2}, \\ 2 \cdot M_T = 2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H, \\ 0.8 \cdot M_T = P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{O_2} + P_O, \\ 210 = P_{H_2O} + P_{OH} + P_{H_2} + P_{O_2} + P_H + P_O. \end{array} \right.$$

Расчёт ведём для 4 температур– 3200, 3400, 3600, 3800 К. При 3200 К справочные значения констант равновесия определяются из таблиц:

$$K_1 = 11,4025, K_2 = 9,9108, K_3 = 12,7616, K_4 = 19,3274.$$

Алгоритм метода Ньютона, как было показано в § 2.8, состоит в последовательном логарифмировании и линеаризации всех уравнений системы.

Логарифмирование и линеаризация 1-го уравнения.

$$\ln P_{H_2O} - \ln P_{H_2} - \frac{1}{2} \ln P_{O_2} - \ln K_1 = 0;$$

$$\Delta \ln P_{H_2O} - \Delta \ln P_{H_2} - \frac{1}{2} \Delta \ln P_{O_2} = -\delta_{H_2O},$$

где на  $i$ -ом итерационном шаге

$$\delta_{H_2O} = \ln P_{H_2O}^i - \ln P_{H_2}^i - \frac{1}{2} \ln P_{O_2}^i - \ln K_1;$$

$$\Delta \ln P_{H_2O} = \ln P_{H_2O}^{i+1} - \ln P_{H_2O}^i; \Delta \ln P_{H_2} = \ln P_{H_2}^{i+1} - \ln P_{H_2}^i;$$

$$\Delta \ln P_{O_2} = \ln P_{O_2}^{i+1} - \ln P_{O_2}^i.$$

Второе уравнение:

$$\ln P_{H_2O} - \ln P_{OH} - \frac{1}{2} \ln P_{H_2} - \ln K_2 = 0;$$

$$\Delta \ln P_{H_2O} - \Delta \ln P_{OH} - \frac{1}{2} \Delta \ln P_{H_2} = -\delta'_{H_2O},$$

$$\text{где } \delta'_{H_2O} = \ln P_{H_2O}^i - \ln P_{OH}^i - \frac{1}{2} \ln P_{H_2}^i - \ln K_2;$$

$$\Delta \ln P_{OH} = \ln P_{OH}^{i+1} - \ln P_{OH}^i.$$

Третье уравнение:

$$\ln P_{H_2} - 2 \ln P_H - \ln K_3 = 0;$$

$$\Delta \ln P_{H_2} - 2 \Delta \ln P_H = -\delta_{H_2}, \text{ где}$$

$$\delta_{H_2} = \ln P_{H_2}^i - 2 \ln P_H^i - \ln K_3.$$

Четвёртое уравнение:

$$\ln P_{O_2} - 2 \ln P_O - \ln K_4 = 0;$$

$$\Delta \ln P_{O_2} - 2 \Delta \ln P_O = -\delta_{O_2}, \text{ где}$$

$$\delta_{O_2} = \ln P_{O_2}^i - 2 \ln P_O^i - \ln K_4.$$

Пятое уравнение:

логарифмирование

$$- \ln(2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H) - \ln(2 \cdot M_T) = 0.$$

Выражения для частных производных от левой части этого уравнения по логарифмам всех независимых переменных:

$$\frac{\partial \ln(2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H)}{\partial \ln P_{H_2O}} = \frac{2P_{H_2O}}{2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H)}{\partial \ln P_{OH}} &= \frac{P_{OH}}{2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln(2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H)}{\partial \ln P_{H_2}} &= \frac{2P_{H_2}}{2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln(2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H)}{\partial \ln P_H} &= \frac{P_H}{2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln(2 \cdot M_T)}{\ln M_T} &= \frac{2 \cdot M_T}{2 \cdot M_T} = 1. \end{aligned}$$

После линеаризации пятое уравнение:

$$2P_{H_2O}^i \Delta \ln P_{H_2O} + P_{OH}^i \Delta \ln P_{OH} + 2P_{H_2}^i \Delta \ln P_{H_2} + P_H^i \Delta \ln P_H - (2P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{H_2}^i + P_H^i) \Delta \ln M_T = -(2P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{H_2}^i + P_H^i) \delta_H,$$

где

$$\delta_H = \ln(2P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{H_2}^i + P_H^i) - \ln(2 \cdot M_T^i).$$

Шестое уравнение:

$$\ln(P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{O_2} + P_O) - \ln(0,8 \cdot M_T) = 0.$$

Линеаризация проводится аналогично пятому уравнению:

$$P_{H_2O}^i \Delta \ln P_{H_2O} + P_{OH}^i \Delta \ln P_{OH} + 2P_{O_2}^i \Delta \ln P_{O_2} + P_O^i \Delta \ln P_O - (P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{O_2}^i + P_O^i) \Delta \ln M_T = -(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{O_2}^i + P_O^i) \delta_O,$$

где

$$\delta_O = \ln(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{O_2}^i + P_O^i) - \ln(0,8 \cdot M_T^i).$$

Седьмое уравнение (Дальтона):

$$\ln(P_{H_2O} + P_{OH} + P_{H_2} + P_{O_2} + P_H + P_O) - \ln(210) = 0.$$

линеаризация:

$$P_{H_2O}^i \Delta \ln P_{H_2O} + P_{OH}^i \Delta \ln P_{OH} + P_{H_2}^i \Delta \ln P_{H_2} + P_{O_2}^i \Delta \ln P_{O_2} + \\ + P_H^i \Delta \ln P_H + P_O^i \Delta \ln P_O = -(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + P_{H_2}^i + P_{O_2}^i + P_H^i + P_O^i) \cdot \delta_P,$$

где

$$\delta_P = \ln(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + P_{H_2}^i + P_{O_2}^i + P_H^i + P_O^i) - \ln(210).$$

Таким образом, на  $i$ -ом итерационном шаге для определения поправок надо решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)  $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{B}$ , где матрица коэффициентов СЛАУ  $\mathbf{A}(7,7)$  имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2P_{H_2O}^i & P_{OH}^i & 2P_{H_2}^i & 0 & P_H^i & 0 & -(2P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{H_2}^i + P_H^i) \\ P_{H_2O}^i & P_{OH}^i & 0 & 2P_{O_2}^i & 0 & P_O^i & -(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{O_2}^i + P_O^i) \\ P_{H_2O}^i & P_{OH}^i & P_{H_2}^i & P_{O_2}^i & P_H^i & P_O^i & 0 \end{bmatrix}$$

Вектор неизвестных  $\mathbf{V}(7)$ :

$$\begin{bmatrix} \Delta \ln P_{H_2O} = v(1) \\ \Delta \ln P_{OH} = v(2) \\ \Delta \ln P_{H_2} = v(3) \\ \Delta \ln P_{O_2} = v(4) \\ \Delta \ln P_H = v(5) \\ \Delta \ln P_O = v(6) \\ \Delta \ln M_T = v(7) \end{bmatrix}.$$

Вектор правых частей **B**(7):

$$\begin{bmatrix} -(\ln P_{H_2O}^i - \ln P_{H_2}^i - \frac{1}{2} \ln P_{O_2}^i - \ln K_1) \\ -(\ln P_{H_2O}^i - \ln P_{OH}^i - \frac{1}{2} \ln P_{H_2}^i - \ln K_2) \\ -(\ln P_{H_2}^i - 2 \ln P_H^i - \ln K_3) \\ -(\ln P_{O_2}^i - 2 \ln P_O^i - \ln K_4) \\ -(2P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{H_2}^i + P_H^i) \cdot (\ln(2P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{H_2}^i + P_H^i) - \ln(2 \cdot M_T^i)) \\ -(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{O_2}^i + P_O^i) \cdot (\ln(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + 2P_{O_2}^i + P_O^i) - \ln(0,8 \cdot M_T^i)) \\ -(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + P_{H_2}^i + P_{O_2}^i + P_H^i + P_O^i) \cdot (\ln(P_{H_2O}^i + P_{OH}^i + P_{H_2}^i + P_{O_2}^i + P_H^i + P_O^i) - \ln(210)) \end{bmatrix}$$

Для использования метода Ньютона нужно задать начальные приближения  $P_i^0$  и  $M_T^0$ . Начальные приближения парциальных давлений выберем из условия их равенства, т. е:

$$P_{H_2O}^0 = P_{OH}^0 = P_{H_2}^0 = P_{O_2}^0 = P_H^0 = P_O^0 = \frac{210}{6} = 35 \text{ Атм.}$$

Начальное приближение количества молей топлива  $M_T^0$  находим по формуле:  $M_T^0 = \frac{\sum P_i^0 \mu_i}{\mu_T}$ , где молекулярная масса топлива  $H_2O_{0,8}$   $\mu_T = 2 + 0,8 \cdot 16 = 14,8$ :

$$M_T^0 = \frac{35(18 + 17 + 2 + 36 + 1 + 16)}{14,8} = 212,8378$$

Для начального приближения найдём коэффициенты матрицы **A** и вектор правых частей **B**:

$$A(7,5) = -210, \quad A(7,6) = -175,$$

$$B(1) = 4,2115, \quad B(2) = 4,0713, \quad B(3) = 6,1018, \quad B(4) = 6,5169,$$

$$B(5) = 148,3797, \quad B(6) = -4,7948, \quad B(7) = 0.$$

Т.о., при начальном приближении на первом итерационном шаге требуется решить СЛАУ:

$$\begin{cases} v(1) + 0 - v(3) - \frac{1}{2} \cdot v(4) + 0 + 0 = 4,2115; \\ v(1) - v(2) - \frac{1}{2} \cdot v(3) + 0 + 0 + 0 + 0 = 4,0713; \\ 0 + 0 + v(3) + 0 - 2 \cdot v(5) + 0 + 0 = 6,1018; \\ 0 + 0 + 0 + v(4) + 0 - 2 \cdot v(6) + 0 = 6,5169; \\ 70 \cdot v(1) + 35 \cdot v(2) + 70 \cdot v(3) + 0 + 35 \cdot v(5) + 0 - 210 \cdot v(7) = 148,3797; \\ 35 \cdot v(1) + 35 \cdot v(2) + 0 + 70 \cdot v(4) + 0 + 35 \cdot v(6) - 175 \cdot v(7) = -4,7948; \\ 35 \cdot v(1) + 35 \cdot v(2) + 35 \cdot v(3) + 35 \cdot v(4) + 35 \cdot v(5) + 35 \cdot v(6) + 0 = 0. \end{cases}$$

Итерационный процесс продолжается до достижения заданной точности решения. В результате для четырех значений температур находим состав ПС, который задается парциальными давлениями:

3200 К:

$$P_{H_2O} = 163,261 \quad \text{Атм}, \quad P_{OH} = 2,536 \quad \text{Атм},$$

$$P_{H_2} = 42,19359 \quad \text{Атм}, \quad P_{O_2} = 0,1151521 \quad \text{Атм}, \quad P_H = 1,188321 \quad \text{Атм}, \quad P_O = 0,0771879 \quad \text{Атм}.$$

3400 К:

$$P_{H_2O} = 158,8805 \text{ Атм}, \quad P_{OH} = 4,692934 \text{ Атм}, \\ P_{H_2} = 42,82694 \text{ Атм}, \quad P_{O_2} = 0,328097 \text{ Атм}, \quad P_H = 3,048517 \text{ Атм}, \\ P_O = 0,229119 \text{ Атм}.$$

3600 К:

$$P_{H_2O} = 151,8135 \text{ Атм}, \quad P_{OH} = 7,874271 \text{ Атм}, \\ P_{H_2} = 44,08862 \text{ Атм}, \quad P_{O_2} = 0,7746226 \text{ Атм}, \quad P_H = 4,86757 \text{ Атм}, \\ P_O = 0,5814166 \text{ Атм}.$$

$$3800 \text{ К}: \quad P_{H_2O} = 141,5756 \text{ Атм}, \quad P_{OH} = 12,05246 \text{ Атм}, \\ P_{H_2} = 46,0981 \text{ Атм}, \quad P_{O_2} = 1,521998 \text{ Атм}, \quad P_H = 7,474695 \text{ Атм}, \\ P_O = 1,27793 \text{ Атм}.$$

По рассчитанному составу ПС для четырех температур находим энтальпии ПС по формуле:

$$I_{ПС} = \frac{\sum I_i P_i}{\sum \mu_i P_i},$$

где значения энтальпий  $i$ -го газа в составе ПС берем из таблиц при соответствующих значениях температур.

$$3200 \text{ К}. \quad I_{H_2O} = -25324,1 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль}},$$

$$I_{OH} = 33321,1 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль}},$$

$$I_{H_2} = 23024,4 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль}},$$

$$I_{O_2} = 25399,1 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль}},$$

$$I_H = 66522,8 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль}},$$

$$I_O = 73696,8 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль}}.$$

Энтальпия продуктов сгорания:

$$I_{ПС} = -959,62977 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}.$$

Для того, чтобы перевести *ккал* в *Кдж*, надо полученное значение умножить на коэффициент 4,187. Тогда

$$I_{\text{ПС}} = 4,187 \cdot (-959,62977) = -4017,97 \text{ Кдж/кг}.$$

3400 К. .

$$I_{\text{H}_2\text{O}} = -22711,4 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{ОН}} = 35110,7 \text{ ккал/кмоль},$$

$$I_{\text{H}_2} = 24827,2 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{O}_2} = 27355,5 \text{ ккал/кмоль},$$

$$I_{\text{H}} = 67516,4 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{O}} = 74701,8 \text{ ккал/кмоль}.$$

Вычисления по формуле (9) приводят к результату:

$$I_{\text{ПС}} = -668,819 \text{ ккал/кг} = -2800,3467 \text{ Кдж/кг}.$$

$$3600\text{К. } I_{\text{H}_2\text{O}} = -20082,2 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{ОН}} = 36913,7 \text{ ккал/кмоль},$$

$$I_{\text{H}_2} = 26649,6 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{O}_2} = 29287,8 \text{ ккал/кмоль},$$

$$I_{\text{H}} = 68510 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{O}} = 75710 \text{ ккал/кмоль},$$

$$I_{\text{ПС}} = -395,155 \text{ ккал/кг} = -1654,515 \text{ Кдж/кг}.$$

$$3800 \text{ К. } I_{\text{H}_2\text{O}} = -17438,7 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{ОН}} = 38729,1 \text{ ккал/кмоль},$$

$$I_{\text{H}_2} = 28491 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{O}_2} = 31254,7 \text{ ккал/кмоль},$$

$$I_{\text{H}} = 69503,6 \text{ ккал/кмоль}, I_{\text{O}} = 76722 \text{ ккал/кмоль}.$$

$$I_{\text{ПС}} = -8,076 \text{ ккал/кг} = -33,8152 \text{ Кдж/кг}.$$

Как отмечалось выше, энтальпия ПС должна равняться энтальпии топлива, т.е.  $-932,72 \text{ Кдж/кг}$ . Поэтому температура в камере сгорания лежит в интервале от 3600 К ( $I_{\text{ПС}} = -1654,515 \text{ Кдж/кг}$ ) до 3800 К ( $I_{\text{ПС}} = -33,815 \text{ Кдж/кг}$ ). Действительное значение температуры можно определить графически или, используя формулу линейной интерполяции.

$$T = 3600 + \frac{(3800 - 3600)}{(1654,515 - 33,815)}(1654,515 - 932,72) =$$

$$= 3689,072 \text{ K} \approx 3690 \text{ K}$$

Зная температуру в камере сгорания, можно посчитать действительный состав продуктов сгорания, также используя линейную интерполяцию:

$$P_i = P_{i3600} + \frac{P_{i3800} - P_{i3600}}{3800 - 3600} \cdot (3690 - 3600);$$

$$P_{H_2O} = 151,8135 + \frac{151,5756 - 151,8135}{200} \cdot 90 = 147,2064 \text{ Атм};$$

$$P_{OH} = 7,874271 + \frac{12,05246 - 7,874271}{200} \cdot 90 = 9,7545 \text{ Атм};$$

$$P_{H_2} = 44,08862 + \frac{46,0981 - 44,08862}{200} \cdot 90 = 44,9929 \text{ Атм};$$

$$P_{O_2} = 0,7746226 + \frac{1,521999 - 0,7746226}{200} \cdot 90 = 1,11094 \text{ Атм};$$

$$P_H = 4,86757 + \frac{7,474695 - 4,86757}{200} \cdot 90 = 6,04078 \text{ Атм};$$

$$P_O = 0,5814166 + \frac{1,27793 - 0,5814166}{200} \cdot 90 = 0,89485 \text{ Атм}.$$

Определим суммарное значение давления в камере сгорания, т.к. использование линейной интерполяции при определении состава ПС  $P_i$  могло привести к погрешностям, связанным с нелинейными функциональными связями  $P_i = f(T)$ :

$$P_\Sigma = \sum P_i = 210,00037 \text{ Атм},$$

т.е. расчет состава ПС можно считать удовлетворительным.

Для термодинамического расчета в выходном и критическом сечениях сопла необходимо вычислить значение энтропии на входе в сопло:

$$S = \frac{\sum (S_i^0 P_i - 8,314 P_i \ln P_i)}{\sum \mu_i P_i}.$$

Здесь размерности  $[S_i^0] = \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль}, ^\circ\text{C}}$ ,  $[P_i] = \text{ф.атм.}$

Значения стандартных энтропий  $S_i^0$  являются табличными значениями. Используя формулу линейной интерполяции, определим значения стандартных энтропий продуктов сгорания для температуры 3690 К:

$$S_{iT}^0 = S_{i3600}^0 + \frac{S_{i3700}^0 - S_{i3600}^0}{3700 - 3600} (3690 - 3600).$$

$$S_{H_2O}^0 = 70,6463 + \frac{71,008 - 70,6463}{100} \cdot 90 = 70,9718 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль К}} = 297,159 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль К}}$$

$$S_{OH}^0 = 63,0059 + \frac{63,2542 - 63,0059}{100} \cdot 90 = 63,2294 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль К}} = 264,741 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль К}}$$

$$S_{H_2}^0 = 50,1119 + \frac{50,3635 - 50,1119}{100} \cdot 90 = 50,3383 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль К}} = 210,766 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль К}}$$

$$S_{O_2}^0 = 69,7439 + \frac{70,0128 - 69,7439}{100} \cdot 90 = 69,5859 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль К}} = 293,031 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль К}}$$

$$S_H^0 = 39,7681 + \frac{39,9043 - 39,7681}{100} \cdot 90 = 39,8907 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль К}} = 167,022 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль К}}$$

$$S_O^0 = 51,0111 + \frac{51,1496 - 51,0111}{100} \cdot 90 = 51,1357 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль К}} = 214,105 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль К}}$$

Используя эти значения, находим суммарное значение энтропии ПС:

$$S_{ПС} = 16,72388 \frac{Кдж}{кг \cdot К}$$

Срез сопла.

Составим систему уравнений для среза сопла. Считаем, что на срезе сопла в смеси ПС присутствуют только  $H_2O$  и  $H_2$ , т.е. система будет состоять только из уравнения сохранения вещества и закона Дальтона.

$$M_T \cdot 2 = 2P_{H_2O} + 2P_{H_2} \Rightarrow P_{H_2O} = 4P_{H_2}$$

$$M_T \cdot 0,8 = P_{H_2O}$$

$$\Rightarrow P_{H_2} = 0,04 \text{ Атм.}$$

$$P_{H_2O} = 0,16 \text{ Атм.}$$

Т.е. состав на срезе от  $T_a$  не меняется.

Найдём значение энтропии ПС на срезе в зависимости от  $T_a$ .

$$S = \frac{P_{H_2O} (S_{H_2O}^0 - 8,314 \cdot \ln 0,16) + P_{H_2} (S_{H_2}^0 - 8,314 \cdot \ln 0,04)}{P_{H_2O} \cdot \mu_{H_2O} + P_{H_2} \cdot \mu_{H_2}} =$$

$$= \frac{0,16 \cdot S_{H_2O}^0 + 2,43777 + 0,04 \cdot S_{H_2}^0 + 1,07047}{0,16 \cdot 18 + 0,04 \cdot 2}$$

$$\frac{0,16 \cdot S_{H_2O}^0 + 0,04 \cdot S_{H_2}^0 + 3,508}{2,96} = 0,054054 \cdot S_{H_2O}^0 + 0,0135135 \cdot S_{H_2}^0 +$$

$$+ 1,185135$$

Начнём с  $T=1200 \text{ К}$ :

$$S_{H_2O}^0 = 57,4654 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} = 4,187 \cdot 57,4654 = 240,60763 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$$

;

$$S_{H_2}^0 = 41,0365 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} = 171,81983 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}},$$

$$S_{ПС} = 16,51283 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$$T=1300 \text{ К}$$

$$S_{H_2O}^0 = 58,309 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} = 4,187 \cdot 58,309 = 244,13978 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}};$$

$$S_{H_2}^0 = 41,6334 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} = 174,31905 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}},$$

$$S_{ПС} = 16,73753 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Т.к. значение энтропии ПС на срезе сопла должно равняться энтропии на входе в сопло, то истинное значение температуры  $T_a$  ( $S_{ПС} = 16,72388 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ) лежит между 1200 К

( $S_{ПС} = 16,51283 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ) и 1300 К ( $S_{ПС} = 16,73753 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ).

Используя формулу линейной интерполяции, найдем температуру на срезе  $T_a$ :

$$T_a = 1200 + \frac{1300 - 1200}{(16,73753 - 16,51283)} (16,72388 - 16,51283) = \text{Найде}$$

$$= 1293,925 \approx 1294 \text{ К}.$$

м энтальпию ПС на срезе сопла:

$$I_{H_2O}(1294) = -49477,2 + \frac{-48423,2 + 49477,2}{100} \cdot 94 =$$

$$= -48486,44 \frac{\text{ккал}}{\text{кмоль}} = -203012,72 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль}};$$

$$I_{H_2}(1294) = 6438,5 + \frac{7184,3 - 6438,5}{100} \cdot 94 = 7139,55 \frac{\text{Кдж}}{\text{кмоль}};$$

$$I_{ПС} = \frac{-203012,72 \cdot 0,16 + 7139,55 \cdot 0,04}{18 \cdot 0,16 + 2 \cdot 0,04} = -10877,16 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг}}.$$

Удельный импульс на расчетном режиме:

$$I_p = w_a = \sqrt{2(i_k - i_a)} = \sqrt{2(-932,72 + 10877,16) \cdot 1000} \approx 4460 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Плотность ПС в КС и на срезе:

$$\mu_{КС} = \frac{18 \cdot 147,2064 + 17 \cdot 9,7545 + 2 \cdot 44,9929 + 32 \cdot 1,11094 + 6,04078 + 16 \cdot 0,89485}{210} = 14,1028 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}};$$

$$\mu_a = \frac{18 \cdot 0,16 + 2 \cdot 0,04}{0,2} = 14,8 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}};$$

$$R_{КС} = \frac{8,314}{14,1028} = 0,5895 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$R_a = \frac{8,314}{14,8} = 0,5612 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \quad \rho_{КС} = \frac{P_{КС}}{R_{КС} T_{КС}} = 9,7795 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\rho_a = \frac{P_a}{R_a T_a} = 0,0279 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Средний показатель изоэнтропы расширения.

$$n = \frac{\lg \frac{P_{\kappa}}{P_a}}{\lg \frac{\rho_{\kappa}}{\rho_a}} = 1,187.$$

Удельная площадь среза сопла.

$$F_{a.уд.} = \frac{F_a}{\dot{m}} = \frac{1}{w_a \rho_a} = \frac{1}{4460 \cdot 0,0279} = 0,0080364.$$

Удельный импульс в пустоте.

$$I_{\Pi} = w_a + F_{a.уд.} \cdot P_a = 4622,8 \approx 4623 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Расчет критического сечения сопла.

Проведем термодинамический расчет состава и температуры ПС для четырех предполагаемых значений давления в критическом сечении: 110 Атм, 115 Атм, 120 Атм, 125 Атм. Расчет проводится по системе уравнений для КС, но температура и действительный состав ПС определяется из условия  $S_* = S_{\kappa}$ . Запишем результаты проведенных расчетов.

$$P_* = 110 \text{ Атм};$$

$$T_* = 3447 \text{ K};$$

$$P_{H_2O} = 80,1687 \text{ Атм}; P_{OH} = 3,7523 \text{ Атм}; P_{H_2} = 22,9091 \text{ Атм};$$

$$P_{O_2} = 0,3807 \text{ Атм}; P_H = 2,5061 \text{ Атм}; P_O = 0,2832 \text{ Атм}$$

$$I_{ПС} = -2284,93 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг}}; \mu_{ПС} = 14,29 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}};$$

$$R = \frac{8,314}{14,29} = 0,582 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\rho = 110 \cdot \frac{101300}{(582 \cdot 3447)} = 5,5544 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$W_{KP} = \sqrt{2(-932,72 + 2284,93) \cdot 1000} = 1644,512 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$F_{кр.уд.} = \frac{1}{5,5544 \cdot 1644,512} = 1,095 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{кг}}.$$

$$P_* = 115 \text{ Атм};$$

$$T_* = 3464 \text{ K};$$

$$P_{H_2O} = 83,6045 \text{ Атм}; P_{OH} = 4,018 \text{ Атм}; P_{H_2} = 23,993 \text{ Атм};$$

$$P_{O_2} = 0,4112 \text{ Атм}; P_H = 2,6664 \text{ Атм}; P_O = 0,3069 \text{ Атм}$$

$$I_{ПС} = -2193,366 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг}}; \mu_{ПС} = 14,27747 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}};$$

$$R = \frac{8,314}{14,27747} = 0,58232 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\rho = 115 \cdot \frac{101300}{(582,32 \cdot 3464)} = 5,77525 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$W_{KP} = \sqrt{2(-932,72 + 2193,366) \cdot 1000} = 1587,859 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$F_{кр.уд.} = \frac{1}{5,77525 \cdot 1587,859} = 1,0905 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{кг}}.$$

$$P_* = 120 \text{ Атм};$$

$$\begin{aligned}
T_* &= 3480 \text{ K}; \\
P_{H_2O} &= 87,05113 \text{ Атм}; P_{OH} = 4,2807 \text{ Атм}; P_{H_2} = 25,07477 \text{ Атм}; \\
P_{O_2} &= 0,44053 \text{ Атм}; P_H = 2,82343 \text{ Атм}; P_O = 0,32944 \text{ Атм} \\
I_{PC} &= -2109,62 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг}}; \mu_{PC} = 14,267 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}; \\
R &= \frac{8,314}{14,267} = 0,582746 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \\
\rho &= 120 \cdot \frac{101300}{(582,746 \cdot 3480)} = 5,9942 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \\
W_{KP} &= \sqrt{2(-932,72 + 2109,62) \cdot 1000} = 1534,211 \frac{\text{м}}{\text{с}} \\
F_{кр.уд.} &= \frac{1}{5,9942 \cdot 1534,211} = 1,0874 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{кг}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_* &= 125 \text{ Атм}; \\
T_* &= 3496 \text{ K}; \\
P_{H_2O} &= 90,4858 \text{ Атм}; P_{OH} = 4,5502 \text{ Атм}; P_{H_2} = 26,1584 \text{ Атм}; \\
P_{O_2} &= 0,47028 \text{ Атм}; P_H = 2,98321 \text{ Атм}; P_O = 0,35215 \text{ Атм} \\
I_{PC} &= -2026,364 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг}}; \mu_{PC} = 14,25665 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}; \\
R &= \frac{8,314}{14,25665} = 0,583165 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \\
\rho &= 125 \cdot \frac{101300}{(583,165 \cdot 3496)} = 6,2109 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \\
W_{KP} &= \sqrt{2(-932,72 + 2026,364) \cdot 1000} = 1534,211 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \\
F_{кр.уд.} &= \frac{1}{6,2109 \cdot 1534,211} = 1,0886 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{кг}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в результате расчета при четырех предполагаемых давлениях в критическом сечении получена дискретная, состоящая из четырех значений функция  $F_{кр.уд.} = f(P_*)$ . Как отмечалось выше, истинное критическое сечение будет, если  $F_{кр.уд.} \rightarrow \min$ . То есть необходимо найти давление, при котором выполняется это условие. Эта задача может быть решена следующим образом. Полученная дискретная функция  $F_{кр.уд.} = f(P_*)$  заменяется непрерывным аналогом путем интерполяции кубическими сплайнами. Непрерывная интерполяционная функция исследуется на экстремум, и найденная точка экстремума и будет искомой, в которой определяется истинное давление в критическом сечении. Итак, существует дискретная функция:

$P_*$	110	115	120	125
$F_{кр.уд.} \cdot 10^3$	0,1095	0,10905	0,10874	0,10886

Проведем сплайн-интерполяцию этой функции, т.е. найдем коэффициенты трех кубических многочленов на соответствующих интервалах определения функции:

[110;115]

$$\varphi_1(x) = a_1 + b_1(x - 110) + c_1(x - 110)^2 + d_1(x - 110)^3;$$

[115;120]

$$\varphi_2(x) = a_2 + b_2(x - 115) + c_2(x - 115)^2 + d_2(x - 115)^3;$$

[120;125]

$$\varphi_3(x) = a_3 + b_3(x - 120) + c_3(x - 120)^2 + d_3(x - 120)^3.$$

Здесь  $\varphi(x)$  – это непрерывный аналог дискретной функции  $F_{кр.уд.} = f(P_*)$ .

После решения задачи интерполяции на участке [120,125] кубический сплайн выглядит:

$$\varphi_3(x) = 0,10874 - 1,8046 \cdot 10^{-5}(x - 120) + 1,3 \cdot 10^{-5}(x - 120)^2 - 8,6687 \cdot 10^{-7}(x - 120)^3$$

Экстремум этой функции ищется обычным способом: находится производная и решается уравнение  $d\varphi_3(x)/dx = 0$ . В результате получается экстремальное значение  $x$  (т.е.  $P_*$ ), причем в данном случае это будет точка минимума функции  $F_{кр.уд.} = f(P_*)$ . В нашем случае минимум удельной площади критического сечения обеспечивается при  $P_* = 120,64 \text{ Атм}$ .

Таким образом, давление в критическом сечении найдено. Далее необходимо провести термодинамический расчет для этого давления, в результате которого находим:

$$\underline{120,64 \text{ Атм.}}$$

$$T_* = 3482 \text{ К};$$

$$P_{H_2O} = 87,49 \text{ Атм}; P_{OH} = 4,3163 \text{ Атм}; P_{H_2} = 25,214 \text{ Атм};$$

$$P_{O_2} = 0,4442 \text{ Атм}; P_H = 2,8434 \text{ Атм}; P_O = 0,3323 \text{ Атм}$$

$$I_{ПС} = -2098,94 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг}}; \mu_{ПС} = 14,2656 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}};$$

$$R = \frac{8,314}{14,2656} = 0,5828 \frac{\text{Кдж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \rho = 125 \cdot \frac{101300}{(582,8 \cdot 3482)} = 6,0222 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$W_{КР} = \sqrt{2(-932,72 + 2098,94) \cdot 1000} = 1527,23 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$F_{кр.уд.} = \frac{1}{6,0222 \cdot 1527,23} = 1,0873 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{кг}}$$

После нахождения параметров критического сечения находятся остальные теоретические параметры истечения.

Характеристическая скорость:

$$C_* = F_{кр.уд.} \cdot P_K = 1,0873 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 101300 = 2312,965 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Коэффициент тяги в пустоте:

$$K_{II} = \frac{I_{II}}{C_*} = \frac{4623}{2312,965} = 1,999.$$

Относительная площадь среза

$$\bar{F}_a = \frac{F_{a.уд.}}{F_{кр.уд.}} = 73,91.$$

Найдём средние показатели изоэнтропы течения  $n$  до критики и после:

$$\text{КС - критика: } n = \frac{\lg \frac{P_K}{P_*}}{\lg \frac{\rho_K}{\rho_*}} = 1,143$$

$$\text{Критика - срез: } n = \frac{\lg \frac{P_*}{P_a}}{\lg \frac{\rho_*}{\rho_a}} = 1,191$$

Общий:  $n = 1,187.$

### Библиографический список

1. Алемасов В.Е., Древалин А.Ф., Тишин А.П. Теория ракетных двигателей / Под ред. В.П.Глушко. – М.: Машиностроение, 1989, 464 с.
2. Основы теории и расчета ракетных двигателей. В 2 кн. Кн. 1. Учеб. для авиац. спец. вузов / А.П. Васильев, В.М. Кудрявцев, В.А. Кудрявцев и др.; под ред. В.М. Кудрявцева. М.: Высшая школа, 1993, 383 с.
3. Шевелюк М.И. Теоретические основы проектирования жидкостных ракетных двигателей. – М.: Оборонгиз, 1960, 684 с.
4. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Справочник в 10 т. / Под ред. В.П.Глушко. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1971-1979.
5. Мелькумов Т.М., Мелик-Пашаев Н.И., Чистяков П.Г. и др. Ракетные двигатели. – М.: Машиностроение, 1968, 511 с.

## Содержание

	Введение	3
1.	Термодинамический расчет процессов горения и истечения. Теоретические основы	4
2.	Равновесность процесса	6
3.	Задачи термодинамического расчета	7
4.	Основы расчета термохимических свойств топлива	8
5.	Теоретическое (стехиометрическое) соотношение компонентов	9
6.	Энтальпия	12
7.	Система уравнений для выполнения термодинамического расчета	15
8.	Модель расчета равновесного состава и температуры рабочего тела в камере сгорания и в выходном сечении сопла	19
9.	Расчет критического сечения	24
10.	Теоретические параметры истечения	24
11.	Пример расчета	25
	Библиографический список	44

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения курсовой работы по дисциплине  
«Методы математического моделирования»  
для студентов специальности 160700.65,  
24.05.02 «Проектирование авиационных и  
ракетных двигателей» очной формы обучения

Составители: Гуртовой Андрей Александрович  
Демьяненко Юрий Васильевич  
Кретинин Александр Валентинович  
Сушков Алексей Михайлович

В авторской редакции

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический  
университет»  
394026 Воронеж, Московский пр., 14