ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат 25 вариантов индивидуальных заданий к типовому расчету по теме «Дифференциальные уравнения», в которые включены:

● дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли и в полных дифференциалах;

● дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка;

● линейные дифференциальные уравнения второго порядка, решаемые методом вариации произвольных постоянных;

● линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью;

● системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Вариант индивидуального задания состоит из 10 дифференциальных уравнений, для каждого из которых требуется найти общее или частное решение (общий или частный интегралы); системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка и задачи на составление и решение дифференциального уравнения.

В методических указаниях приведено решение варианта типового расчета, при реализации которого сообщаются необходимые элементы теоретического материала.

Прежде чем приступить к выполнению типового расчета, студенту необходимо изучить конспекты лекций и рекомендуемую учебную литературу.

ВАРИАНТ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2 e^x}{x-1}$	**2.** $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$
3. $x + 2y + yy' = 0$	**4.** $y^{(4)} = \sin x$
5. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{2}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$	

II. Найти частные решения или частные интегралы дифференциальных уравнений и системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям (решить задачи Коши):

6. $\left(1 + x^2\right)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0,\ \ y(1) = 1$	**7.** $y' + 2xy - xe^{-x^2} = 0,\ \ y(0) = 2$
8. $xy'' + x\left(y'\right)^2 - y' = 0,$ $y(2) = 2,\ \ y'(2) = 1$	**9.** $2yy'' - (y')^2 = 1,$ $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$

10. $y'' - 10y' = x^2 - 2;$ $y(0) = \dfrac{99}{50};\quad y'(0) = -\dfrac{1}{500}.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3. \end{cases}$

III. Решить задачи

12. Резервуар, вместимость которого 300 л, дно которого покрыто солью, заполняют чистой водой. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг соли на 3 л воды), и что данное количество чистой воды растворяет 1/3 кг соли через 1 минуту, найти, сколько соли будет содержать раствор через один час.

13. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;\,5)$, у которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания.

РЕШЕНИЕ

1. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2 e^x}{x-1}.$

Предложенное уравнение является дифференциальным уравнением Бернулли, так как имеет вид $y' + P(x)y = Q(x)y^n$. Здесь $n = 2 > 0$. Поэтому уравнение Бернулли имеет нулевое решение $y = 0$. Ненулевые решения найдем методом Бернулли. Обозначим $y = u \cdot \upsilon$ $(u \neq 0,\ \upsilon \neq 0)$, $y' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'$. Подставив полученные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получим $u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon' - \dfrac{u \cdot \upsilon}{x-1} = \dfrac{(u \cdot \upsilon)^2 e^x}{x-1}$, или $u' \cdot \upsilon + u \cdot \left(\upsilon' - \dfrac{\upsilon}{x-1}\right) = \dfrac{u^2 \cdot \upsilon^2 \cdot e^x}{x-1}$.

Находим функцию $\upsilon(x)$, приравнивая скобку к нулю: $\upsilon' - \dfrac{\upsilon}{x-1} = 0$, $\dfrac{d\upsilon}{dx} = \dfrac{\upsilon}{x-1}$, $\dfrac{d\upsilon}{\upsilon} = \dfrac{dx}{x-1}$, $\displaystyle\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int \frac{dx}{x-1}$, $\ln|\upsilon| = \ln|x-1| + \ln|C_1|$. Примем $C_1 = 1$ и возьмем $\upsilon = x - 1$.

Находим функцию $u(x)$: $u' \cdot (x-1) = \dfrac{u^2 \cdot (x-1)^2 e^x}{x-1}$, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^2 \cdot (x-1)^2 e^x}{(x-1)^2}$, $\dfrac{du}{u^2} = e^x dx$, $\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = \int e^x dx$, $-\dfrac{1}{u} = e^x + C$, $u = -\dfrac{1}{e^x + C}$.

Общее решение исходного дифференциального уравнения Бернулли получается перемножением найденных функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$

$y = u \cdot \upsilon = -\dfrac{1}{e^x + C}(x-1).$

2. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$.

Уравнение имеет вид $y'' + py' + qy = f(x)$. Значит, это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общим решением является функция $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Сначала найдем общее решение $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Переписав его в виде, получим

$$(k-2)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$k_1 = k_2 = 2.$$

Корни характеристического уравнения получились равными действительными числами. Следовательно, используя формулу $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + xC_2)$, запишем общее решение $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения в виде

$$y_{оо} = e^{2x}(C_1 + C_2 x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Теперь приступим к нахождению частного решения $y_{чн}$ неоднородного уравнения. Для этого используем метод вариации произвольных постоянных. Заменим в общем решении $y_{оо} = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$ постоянные C_1 и C_2 неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Получим

$$y_{чн} = e^{2x}\left(C_1(x) + C_2(x)\cdot x\right) \quad \text{или} \quad y_{чн} = e^{2x} C_1(x) + x e^{2x} C_2(x),$$

где $y_1 = e^{2x}$, а $y_2 = x e^{2x}$.

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляем систему уравнений вида

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{2x} + C_2'(x) \cdot x e^{2x} = 0, \\ C_1'(x) 2e^{2x} + C_2'(x) \cdot \left(e^{2x} + 2x e^{2x}\right) = \dfrac{e^{2x}}{x}. \end{cases}$$

Так как $e^{2x} \neq 0$, то разделим обе части уравнений на e^{2x}:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot x = 0, \\ 2C_1'(x) + C_2'(x) \cdot (1 + 2x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Неизвестными в полученной системе являются $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Решаем систему, например, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{vmatrix} = 1\cdot(1+2x) - 2\cdot x = 1 \neq 0 .$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 1+2x \end{vmatrix} = 0\cdot(1+2x) - x\cdot\frac{1}{x} = -1 .$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 1\cdot\frac{1}{x} - 0\cdot 2 = \frac{1}{x} .$$

По формулам Крамера имеем:

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{и} \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} .$$

Далее интегрируем эти равенства:

$$C_1(x) = \int(-1)\mathrm{d}x = -x + \tilde{C}_1 , \quad C_2(x) = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + \tilde{C}_2 .$$

Полагая $\tilde{C}_1 = 0$ и $\tilde{C}_2 = 0$, получим $C_1(x) = -x$ и $C_2(x) = \ln|x|$. Подставляя найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу $y_{чн} = e^{2x}\left(C_1(x) + C_2(x)\cdot x\right)$, запишем частное решение $y_{чн}$ неоднородного уравнения:

$$y_{чн} = e^{2x}\left(-x + x\ln|x|\right).$$

Складывая выражения для $y_{оо}$ и $y_{чн}$, имеем общее решение $y_{он}$ неоднородного уравнения:

$$y_{он} = e^{2x}\left(C_1 + C_2x\right) + e^{2x}\left(-x + x\ln|x|\right) \quad \text{или} \quad y_{он} = e^{2x}\left(C_1 + C_2x\right) + xe^{2x}\left(\ln|x| - 1\right).$$

3. $x + 2y + yy' = 0$.

Для определения типа дифференциального уравнения приведем его к виду, разрешенному относительно производной:

$$yy' = -(x + 2y), \quad y' = -\frac{x+2y}{y} .$$

Очевидно, уравнение не является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Видно, что оно однородное, так как для функции $f(x,y) = -\dfrac{x+2y}{y}$ выполнено тождество $f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)$. Действительно,

$$f(\lambda x, \lambda y) = -\frac{\lambda x + 2\lambda y}{\lambda y} = -\frac{\lambda(x+2y)}{\lambda y} = -\frac{x+2y}{y} = f(x,y) .$$

Таким образом, данное дифференциальное уравнение есть однородное уравнение первого порядка и для его решения делаем замену

$$y = ux, \; y' = xu' + u.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение $xu' + u = -\dfrac{x + 2ux}{ux}$, из которого будем искать *u*. Сначала приведем уравнение к виду, разрешенному относительно производной $xu' + u = -\dfrac{x(1+2u)}{xu}$, $xu' + u = -\dfrac{1+2u}{u}$, $u' = \dfrac{\left(-\dfrac{1+2u}{u} - u\right)}{x}$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-1-2u-u^2}{ux}$ и, наконец, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-(1+u)^2}{ux}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Если $u \neq -1$, т.е. $\dfrac{-(1+u)^2}{u} \neq 0$, то, разделяя переменные, имеем $\dfrac{u\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ (если же $u = -1$, то решением исходного дифференциального уравнения будет $y = -x$). После интегрирования $\displaystyle\int \frac{(u+1) - 1\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - \int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ получим $\ln|1+u| + \dfrac{1}{1+u} = -\ln|x| + C$ или $\ln|(1+u)x| + \dfrac{1}{1+u} = C$. Теперь заменим u на $\dfrac{y}{x}$ $\ln\left|\left(1+\dfrac{y}{x}\right)x\right| + \dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}} = C$ и найдем общий интеграл $\ln|x+y| + \dfrac{x}{x+y} = C$.

4. $y^{(4)} = \sin x$.

Данное уравнение имеет вид $y^{(n)} = f(x)$. Следовательно, для отыскания общего решения его необходимо четырежды проинтегрировать по переменной x:

$$y''' = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C_1,$$

$$y'' = \int (-\cos x + C_1)\mathrm{d}x = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \int (-\sin x + C_1 x + C_2)\mathrm{d}x = \cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int \left(\cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3\right)\mathrm{d}x = \sin x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения *четвертого* порядка $y=\sin x+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$ зависит от *четырех* произвольных постоянных.

5. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$.

Решение. Это дифференциальное уравнение первого порядка вида $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$, причем

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)'_y=-\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)'_x=-\frac{1}{y^2},$$

т.е. выполняется соотношение $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Это означает, что выражение, стоящее в левой части уравнения, является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, а именно $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$. Такие уравнения называют уравнениями в полных дифференциалах, и их общие решения ищут из уравнения $du(x,y)=0$, т.е. $u(x,y)=C$. Функцию $u(x,y)$ находят, зная ее частные производные.

В нашем случае $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Интегрируя это выражение по переменной x, имеем

$$u(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}\int dx=\ln|x|+\frac{x}{y}+C(y)$$

(так как переменная y фиксирована, то она может входить в произвольную постоянную).

Функцию $C(y)$ ищем, используя равенство $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$. В нашем случае $u(x,y)=\ln|x|+\frac{x}{y}+C(y)$, а $Q(x,y)=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}$. Значит

$$\left(\ln|x|+\frac{x}{y}+C(y)\right)'_y=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\quad\Rightarrow\quad-\frac{x}{y^2}+C'(y)=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\quad\Rightarrow\quad C'(y)=\frac{2}{y}.$$

Следовательно, $C(y)=\int\frac{2}{y}dy=2\ln|y|+C_1$.

Итак, получили $u(x,y)=\ln|x|+\frac{x}{y}+2\ln|y|+C_1$, т.е. общее решение исходного уравнения записывается в виде $\ln|x| + \dfrac{x}{y} + 2\ln|y| + C_1 = C_2$, или $\ln|x| + \dfrac{x}{y} + 2\ln|y| = C$, где $C = C_2 - C_1$.

6. $\left(1+x^2\right)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0,\ y(1) = 1$.

Решение. **При решении задачи Коши сначала ищут общее решение (общий интеграл), а затем подбирают *C* так, чтобы выполнялось начальное условие.**

Уравнение записано в дифференциальной форме и имеет вид $P_1(x)Q_1(y)\mathrm{d}x + P_2(x)Q_2(y)\mathrm{d}y = 0$. Значит, оно является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, почленно поделив дифференциальное уравнение на $\left(1+x^2\right)y$, считая, что $y \neq 0$ ($y = 0$ – это решение данного дифференциального уравнения, но не искомое, так как для $y = 0$ не выполняется начальное условие). В результате имеем $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} + \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 0$.

Далее, интегрируя обе части уравнения, имеем $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{y} + \int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = C$ и получаем общий интеграл $\ln|y| + \mathrm{arctg}x = C$.

Воспользуемся начальным условием $y(1) = 1$ для определения значения произвольной постоянной *C*. Подставим в общий интеграл $x = 1$ и $y = 1$. Получим $\ln 1 + \mathrm{arctg}1 = C$, т.е. $0 + \dfrac{\pi}{4} = C$ или $C = \dfrac{\pi}{4}$. Найденное значение постоянной *C* выделяет из общего интеграла частный: $\ln|y| + \mathrm{arctg}x = \dfrac{\pi}{4}$, удовлетворяющий начальному условию $y(1) = 1$.

7. $y' + 2xy - xe^{-x^2} = 0,\ y(0) = 2$.

Решение. Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения. Перенесем слагаемое, не содержащее *y*, в правую часть дифференциального уравнения и получим уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$, которое является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Следовательно, методом Бернулли ищем $y = u \cdot \upsilon$, $y' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'$. Подставляя выражения y и y' в уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, имеем $u'\upsilon + u\upsilon' + 2xu\upsilon = xe^{-x^2}$ или

$u'\upsilon + u(\upsilon' + 2x\upsilon) = xe^{-x^2}$.

Подберем теперь такую функцию $\upsilon(x) \neq 0$, чтобы $\upsilon' + 2x\upsilon = 0$. То есть $\upsilon(x)$ – какое-нибудь ненулевое решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} = -2x\upsilon$, $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon} = -2x\mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon} = -2\int x\mathrm{d}x$, $\ln|\upsilon| = -2 \cdot \frac{x^2}{2} + \ln|C_1|$. При $C_1 = 1$ получим, например, $\upsilon = e^{-x^2}$.

При таком выборе функции $\upsilon(x)$ исходное дифференциальное уравнение примет вид: $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$ или $u' = x$. Следовательно, $u = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = u\upsilon = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2} .$$

Для решения задачи Коши воспользуемся начальным условием $y(0) = 2$. Тогда $2 = \left(\frac{0^2}{2} + C\right) \cdot e^{-0^2}$, $2 = (0 + C) \cdot 1$ или $C = 2$. Следовательно, решение исходной задачи Коши – это функция $y = \left(\frac{x^2}{2} + 2\right) \cdot e^{-x^2}$.

8. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 1$.

Решение. **Особенностью решения задачи Коши для дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка, является то, что произвольные постоянные C_1 и C_2 можно находить по очереди: сначала C_1, а потом C_2.**

Определяем тип исходного ДУ: оно второго порядка и не содержит явно искомую функцию $y(x)$, т.е. допускает понижение порядка. Сделаем замену $y' = P(x)$, $y'' = P'(x)$. Уравнение примет вид $xP' + xP^2 - P = 0$. Определим тип полученного дифференциального уравнения первого порядка. Для этого разделим все уравнение на x (получим $P' + P^2 - \frac{P}{x} = 0$) и перенесем P^2 в правую часть. В результате дифференциальное уравнение примет вид $P' - \frac{P}{x} = -P^2$. Это уравнение Бернулли. Одно из его решений $P = 0$, нам не подходит, так как по условию $y'(2) = P(2) = 1$. Найдем ненулевые решения методом Бернулли. Сделаем замену $P = u\upsilon$, $P' = u'\upsilon + u\upsilon'$ и, подставив ее в последнее дифференциальное уравнение, получим $u'\upsilon + u\upsilon' - \dfrac{u\upsilon}{x} = -(u\upsilon)^2$ или $u'\upsilon + u\left(\upsilon' - \dfrac{\upsilon}{x}\right) = -(u\upsilon)^2$.

Далее найдем функцию $\upsilon(x)$ из уравнения $\upsilon' - \dfrac{\upsilon}{x} = 0$. Заменяем υ' на $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$ (имеем $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\upsilon}{x}$), разделяем переменные, интегрируем $\int \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon} = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ и находим общий интеграл $\ln|\upsilon| = \ln|x| + \ln|\tilde{C}|$. Полагая $\tilde{C} = 1$, имеем $\upsilon = \pm x$. Возьмем, например, $\upsilon = x$, так как нас устроит любое ненулевое решение уравнения $\upsilon' - \dfrac{\upsilon}{x} = 0$.

Далее подставляем функцию $\upsilon = x$ в уравнение $u'\upsilon = -(u\upsilon)^2$ и получаем дифференциальное уравнение $u'x = -(ux)^2$, из которого найдем функцию $u(x)$. После сокращений имеем $u' = -xu^2$. Заменяем u' на $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ($\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -xu^2$), разделяем переменные $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = -x\mathrm{d}x$, интегрируем $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int x\mathrm{d}x$ и получаем общий интеграл $-\dfrac{1}{u} = -\dfrac{x^2}{2} - C_1$ или $\dfrac{1}{u} = \dfrac{x^2}{2} + C_1$. Выразим функцию $u(x)$: $u = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{2} + C_1} = \dfrac{2}{x^2 + 2C_1}$ и, вспомнив, что $P = u\upsilon$, окончательно имеем $P = \dfrac{2x}{x^2 + 2C_1}$. Но $P(x) = y'$. Значит $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 2C_1}$.

Теперь из условия $y'(2) = 1$ найдем произвольную постоянную C_1. $1 = \dfrac{2 \cdot 2}{2^2 + 2C_1}$ или $4 + 2C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 0$. Следовательно, $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 2 \cdot 0} = \dfrac{2}{x}$ или $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2}{x}$. В этом уравнении переменные разделяются: $\mathrm{d}y = 2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Интегрируем $\int \mathrm{d}y = 2\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ и получаем общее решение $y = 2\ln|x| + C_2$.

Константу C_2 определим из условия $y(2) = 2$. Итак, $2 = 2\ln|2| + C_2$ и $C_2 = 2 - 2\ln|2| = 2 - \ln 4$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y = 2\ln|x| + 2 - \ln 4$ или $y = \ln\left|\dfrac{x^2}{4}\right| + 2$.

9. $2yy'' - (y')^2 = 1,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$.

Решение. Это уравнение второго порядка и не содержит явно независимую переменную x. Произведя замену $y' = P(y),\ y'' = P'(y)\cdot P$, получим уравнение $2yP'P - P^2 = 1$. Определим тип полученного дифференциального уравнения первого порядка. Для этого выразим из него P' (очевидно, $P = 0$ и $y = 0$ не являются решениями):

$$P' = \frac{1+P^2}{P}\cdot\frac{1}{2y}.$$

Видим, что полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{1+P^2}{P}\cdot\frac{1}{2y},\ \frac{P\mathrm{d}P}{1+P^2} = \frac{\mathrm{d}y}{2y},\ \int\frac{P\mathrm{d}P}{1+P^2} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$\frac{1}{2}\ln\left|P^2+1\right| = \frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|C_1| \text{ или } \ln\left|P^2+1\right| = \ln|y| + \ln|C_1|.$$

Выразим $P(y)$:

$$\ln\left|P^2+1\right| = \ln|yC_1|,\ P^2+1 = yC_1,\ P = \pm\sqrt{yC_1-1}.$$

Так как $P(y) = y'(x)$, то

$$y' = \pm\sqrt{yC_1-1}.$$

Найдем константу C_1. Из начальных условий $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$ видно, что $y' = 0$, когда $y = 1$. Подставив эти значения в $y' = \pm\sqrt{yC_1-1}$, получим

$$0 = \pm\sqrt{1\cdot C_1 - 1},\ \ 0 = 1\cdot C_1 - 1 \quad\Rightarrow\quad C_1 = 1.$$

Следовательно, $y' = \pm\sqrt{y-1}$. В этом уравнении переменные разделяются: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{y-1}$ и $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y-1}} = \pm\mathrm{d}x$. Интегрируя $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y-1}} = \pm\int\mathrm{d}x$, получаем общий интеграл $2\sqrt{y-1} = \pm x + C_2$.

Теперь определим константу C_2 из условия $y(0) = 1$: $2\sqrt{1-1} = \pm 0 + C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2 = 0$. Из общего интеграла при $C_2 = 0$ имеем $2\sqrt{y-1} = \pm x$, или выражая y, получим частное решение –

$$y - 1 = \frac{x^2}{4} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{x^2+4}{4}.$$

10. $y'' - 10y' = x^2 - 2;\ y(0) = \dfrac{99}{50};\quad y'(0) = -\dfrac{1}{500}.$

Решение. Уравнение $y'' - 10y' = x^2 - 2$ есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, так как оно имеет вид $y'' + py' + qy = f(x)$. Его общее решение будем искать в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Найдем общее решение $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 10y' = 0.$$

Записываем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 10k = 0.$$

Решаем его:

$$k(k-10) = 0,\ k_1 = 0, \text{ а } k_2 = 10.$$

Корни характеристического уравнения – различные действительные числа. Значит, используем формулу

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Таким образом,

$$y_{оо} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{10x} \quad \text{или} \quad y_{оо} = C_1 + C_2 e^{10x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Далее находим частное решение $y_{чн}$ неоднородного уравнения. Так как правая часть представляет собой частный случай функции «специального вида» – многочлен $x^2 - 2$, то мы можем применить метод неопределенных коэффициентов.

Сравнивая $f(x) = x^2 - 2$ с общим видом правой части «специального вида»

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

определяем:

$$\alpha = 0,\ \ \beta = 0,\ \ P_n(x) = x^2 - 2,\ \ Q_m(x) = 0,\ \ n = 2,\ \ m = 0.$$

Общий вид частного решения

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(P_s(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right),$$

запишется в форме

$$y_{чн} = x^r e^{0 \cdot x}\left(P_s(x)\cos 0 \cdot x + Q_s(x)\sin 0 \cdot x\right) \quad \text{или} \quad y_{чн} = x^r P_s(x)$$

Найдем количество совпадений r корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом $d = \alpha + i\beta$, а также запишем вид многочлена $P_s(x)$. Итак, $d = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0$, а $k_1 = 0$ и $k_2 = 10 \Rightarrow r = 1$ (совпал один корень).

Так как $P_n(x) = x^2 - 2 \Rightarrow n = 2$, а $Q_m(x)$ умножается на ноль, то $Q_m(x)$ можно считать любым, например, равным нулю. Это значит $s = \max\{n, m\} = \max\{2, 0\} = 2$. Следовательно,

$$P_s\left(x\right)=Ax^2+Bx+C.$$

Подставляя значения r и $P_s\left(x\right)$ в формулу $y_{чн}=x^r P_s\left(x\right)$, имеем искомый вид частного решения

$$y_{чн}=x^1\left(Ax^2+Bx+C\right) \text{ или } y_{чн}=Ax^3+Bx^2+Cx.$$

Чтобы найти коэффициенты $y_{чн}$, подставим $y_{чн}$ в исходное уравнение и тождественно приравняем левую и правую части полученного равенства. Для этого найдем сначала первую и вторую производную от $y_{чн}$:

$$y'_{чн}=\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)'=3Ax^2+2Bx+C,$$

$$y''_{чн}=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)'=6Ax+2B,$$

и подставим выражения $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в исходное уравнение $y''-10y'=x^2-2$:

$$6Ax+2B-10\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\equiv x^2-2.$$

Приведем подобные члены в левой части:

$$x^2\left(-30A\right)+x^1\left(6A-20B\right)+x^0\left(2B-10C\right)\equiv x^2-2.$$

Так как в левой и правой частях этого тождества стоят многочлены одного порядка (второго), то это означает, что мы правильно выбрали вид частного решения. Для достижения тождественного равенства многочленов достаточно приравнять коэффициенты, стоящие перед одинаковыми степенями переменной *x* в левой и правой частях данного тождества. Получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left.\begin{array}{r} -30A=1 \\ 6A-20B=0 \\ 2B-10C=-2 \end{array}\right\}.$$

Из системы находим: $A=-\dfrac{1}{30}$, $B=\dfrac{6}{20}A=\dfrac{3}{10}\left(-\dfrac{1}{30}\right)=-\dfrac{1}{100}$ и $C=\dfrac{1}{10}\cdot 2\left(B+1\right)=\dfrac{1}{10}\cdot 2\left(-\dfrac{1}{100}+1\right)=\dfrac{99}{500}$. Далее, подставляя *A*, *B* и *C* в выражение $y_{чн}=Ax^3+Bx^2+Cx$, имеем

$$y_{чн}=-\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{100}x^2+\frac{99}{500}x.$$

Складывая функции $y_{оо}$ и $y_{чн}$, получим общее решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{он}=C_1+C_2e^{10x}-\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{100}x^2+\frac{99}{500}x.$$

Выделим из общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=\frac{99}{50},\ y'(0)=-\frac{1}{500}.$$

Для этого продифференцируем общее решение

$$y'_{он}=\left(C_1+C_2e^{10x}-\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{100}x^2+\frac{99}{500}x\right)'=10C_2e^{10x}-\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{50}x+\frac{99}{500},$$

и получим

$$\begin{cases} y_{он}(x)=C_1+C_2e^{10x}-\dfrac{1}{30}x^3-\dfrac{1}{100}x^2+\dfrac{99}{500}x, \\ y'_{он}(x)=10C_2e^{10x}-\dfrac{1}{10}x^2-\dfrac{1}{50}x+\dfrac{99}{500}. \end{cases}$$

Подставляя в полученную систему $x=0$, $y(0)=\frac{99}{50}$ и $y'(0)=-\frac{1}{500}$, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{99}{50}=C_1+C_2, \\ -\dfrac{1}{500}=10C_2+\dfrac{99}{500}. \end{cases}$$

Из данной системы найдем значения произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$10C_2=-\frac{1}{500}-\frac{99}{500}=-\frac{100}{500}=-\frac{1}{5}\ \Rightarrow\ C_2=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}=-\frac{1}{50}.$$

$$\frac{99}{50}=C_1-\frac{1}{50}\ \Rightarrow\ C_1=\frac{99}{50}+\frac{1}{50}=2.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение, составим частное решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y=2-\frac{1}{50}e^{10x}-\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{100}x^2+\frac{99}{500}x.$$

11. $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y+z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y+2z, \quad y(0)=1, \quad z(0)=3. \end{cases}$$

Решение. Систему дифференциальных уравнений первого порядка можно решить методом исключения неизвестных, который заключается в том, что систему, состоящую из n дифференциальных уравнений, приводят к одному уравнению n – го порядка, содержащему одну неизвестную функцию.

Выразим функцию z из первого дифференциального уравнения:

$$z=y'-2y,$$

и подставим ее во второе уравнение $z' = y + 2z$:

$(y' - 2y)' = y + 2(y' - 2y)$ или $y'' - 2y' = y + 2y' - 4y$, и окончательно получим

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Полученное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 3 = 0.$$

Находим его корни: $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$.

Корни характеристического уравнения различные действительные числа. Значит, по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ определяем функцию y:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

Теперь продифференцируем по x это равенство:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x,$$

и подставим выражения для y и y' в уравнение $z = y' - 2y$:

$$z = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x - 2\left(C_1 e^{3x} + C_2 e^x\right).$$

Таким образом,

$$z = C_1 e^{3x} - C_2 e^x.$$

Следовательно, общее решение исходной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x, \\ z = C_1 e^{3x} - C_2 e^x. \end{cases}$$

Теперь выделим из общего решения системы частное, которое удовлетворяет заданным начальными условиями $y(0) = 1$, $z(0) = 3$. Сначала составим систему уравнений для нахождения произвольных постоянных C_1 и C_2, подставив $x = 0$, $y = 1$ и $z = 3$ в общее решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \\ 3 = C_1 e^0 - C_2 e^0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 - C_2. \end{cases}$$

Определим значения C_1 и C_2:

$$C_2 = 1 - C_1 \Rightarrow 3 = C_1 - (1 - C_1) = 2C_1 - 1 \Rightarrow C_1 = 2,\ C_2 = 1 - 2 = -1.$$

Подставляя $C_1 = 2$ и $C_2 = -1$ в общее решение, мы получим искомое частное решение исходной системы

$$\begin{cases} y = 2e^{3x} - e^x, \\ z = 2e^{3x} + e^x. \end{cases}$$

12. Резервуар, вместимость которого 300 л, дно которого покрыто солью, заполняют чистой водой. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг соли на 3 л воды), и что данное количество чистой воды растворяет 1/3 кг соли через 1 минуту, найти, сколько соли будет содержать раствор через один час.

Решение. Обозначим через $m(t)$ (кг) количество соли в растворе в момент t (мин). Тогда $m(1)=\frac{1}{3}$ (кг), $m(0)=0$ (кг). Скорость растворения соли – это скорость изменения $m(t)$, т.е. $m'(t)$. Концентрация соли в момент t равна $\frac{m(t)}{300}$ (кг/л), концентрация насыщенного раствора $\frac{1}{3}$ (кг/л).

По условию задачи $m'(t)=k\left(\frac{m(t)}{300}-\frac{1}{3}\right)$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (t – независимая переменная, $m(t)$ – неизвестная функция). Найдем общее решение этого уравнения:

$$\frac{dm}{dt}=k\left(\frac{m}{300}-\frac{1}{3}\right),\ \frac{dm}{m-100}=\frac{kdt}{300}\quad (m\neq 100),$$

$$\int\frac{dm}{m-100}=\frac{k}{300}\int dt,\ \ln|m-100|=\frac{kt}{300}+\ln|C|.$$

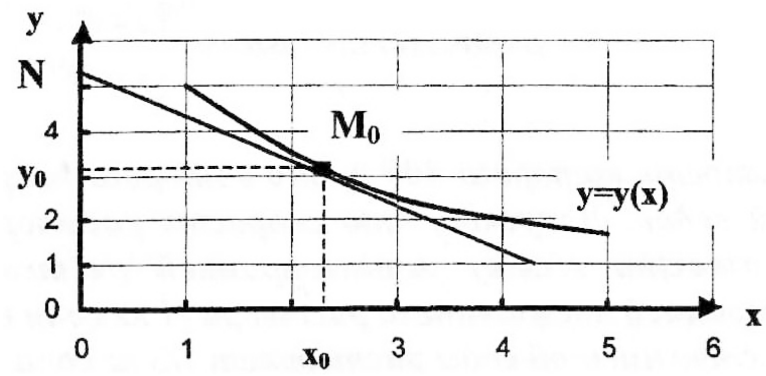
Отсюда $m=100+Ce^{\frac{kt}{300}}$. Используя начальное условие $m(0)=0$, получаем $0=100+C$, $C=-100$, $m=100\left(1-e^{\frac{kt}{300}}\right)$. Используя условие $m(1)=\frac{1}{3}$, имеем $\frac{1}{3}=100\left(1-e^{\frac{k}{300}}\right)$, $e^{\frac{k}{300}}=\frac{299}{300}$. Отсюда $m=100\left(1-\left(\frac{299}{300}\right)^t\right)$.

Если $t=1\text{ч}=60\text{мин}$, $m=100\left(1-\left(\frac{299}{300}\right)^{60}\right)=100(1-0{,}82)=18$ (кг).

Итак, через час в растворе будет 18 кг соли.

13. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;\,5)$, у которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть искомая кривая – график функции $y=y(x)$.



Возьмем на кривой произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = y(x_0)$. Проведем через нее касательную, уравнение которой, как известно, $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Найдем ординату точки N – точки пересечения касательной с осью ординат, для чего положим в уравнении касательной $x = 0$.

Получим $y_N = y_0 - x_0 y'(x_0)$. По условию $|y_N| = 3x_0$, т.е. $|y_0 - x_0 y'(x_0)| = 3x_0$ $(x_0 \geq 0)$ или $y(x_0) - x_0 y'(x_0) = \pm 3x_0$. Отсюда $y'(x_0) = \dfrac{y(x_0) \pm 3x_0}{x_0}$.

Это дифференциальное уравнение, в котором x_0 – независимая переменная, а $y(x_0)$ – искомая функция. Переобозначим для удобства x_0 через x ($x \geq 0$). Получим $y' = \dfrac{y \pm 3x}{x}$. Это однородное уравнение первого порядка. Сделаем замену $y = ux$, $y' = u'x + u$. Получим $u'x + u = u \pm 3$. Отсюда $\dfrac{du}{dx}x = \pm 3$, $du = \pm 3\dfrac{dx}{x}$, $\int du = \pm 3\int \dfrac{dx}{x}$, $u = \pm 3\ln|x| + C$. Заменяя $u = \dfrac{y}{x}$, имеем $y = \pm 3x\ln|x| + Cx$.

По условию кривая проходит через точку (1;5), т.е. при $y = 5$ и $x = 1$. Получаем $5 = \pm 3\ln|1| + C$ или $C = 5$. Итак, $y = x(5 \pm 3\ln|x|)$ и, так как $x \geq 0$, то $y = x(5 \pm 3\ln x)$. Графики этих двух функций – искомые кривые.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ВАРИАНТ 1

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $xy^3y' = x^4 + y^4$	**2.** $6y'' - y' - y = 3e^{2x} + 1$
3. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cdot \cos x}}$	**4.** $y'' = -\dfrac{x}{y'}$
5. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$	

II. Решить задачи Коши:

6. $ydx - (4+x^2)\ln y dy = 0$; $y(2) = 1$	**7.** $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$; $y(1) = \dfrac{1}{2e}$
8. $y'\cos x - y\sin x = y^3 \sin 2x$; $y(0) = 1$.	**9.** $y'' = xe^{-2x}$; $y(0) = \dfrac{1}{4}$, $y'(0) = -\dfrac{1}{4}$.
10. $4(y'')^2 = 1 + (y')^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y, \end{cases}$ $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}$.

III. Задача

Тело охладилось за 10 минут от 100^0 до 60^0. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20^0. Когда тело остынет до 25^0? (Считать, что скорость остывания пропорциональна разности температур тела и окружающей среды).

ВАРИАНТ 2

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y' - \dfrac{y}{x} = 3x.$	**2.** $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$
3. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1).$	**4.** $y'' + 4y' = e^x(24\cos 2x + 2\sin 2x).$
5. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $y - xy' = x \cdot \sec\dfrac{y}{x}; \quad y(1) = \pi.$	**7.** $y'\sin x - y\cos x = y^2; \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 1.$
8. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$	**9.** $y'' = \dfrac{1}{1+(y')^2}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
10. $y'' - 10y' + 25y = \sqrt{x}e^{5x};$ $y(1) = 0, \quad y'(1) = e^5.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$

III. Задача

Определить путь, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна пройденному пути, и если тело проходит 100 м за 10 с, а 200м – за 15 с.

ВАРИАНТ 3

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $(y^2 - 2xy)dx - x^2dy = 0$	**2.** $y'' = y' + x$
3. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}(x-2).$	**4.** $y' - 3x^2y - x^2e^{x^3} = 0.$
5. $(1 + \dfrac{2x}{y^3})dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $(x^2 + x)y' = 2y + 1; \quad y(1) = 0.$	**7.** $y' - y = e^x\sqrt{y}; \quad y(0) = 1.$
8. $y''' = e^{2x}; \quad y(0) = \dfrac{9}{8}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{4},$ $y''(0) = -\dfrac{1}{2}.$	**9.** $y'' + y(y')^3 = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$
10. $y'' + 9y = \dfrac{4}{\cos 3x};$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

III. Задача

Найти кривые, у которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, величина постоянная, равная a^2.

ВАРИАНТ 4

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $xy' + y\left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right) = 0.$	**2.** $xdx + ydy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0.$
3. $y''(e^x + 1) = -y'.$	**4.** $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}.$
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $x^2 y' = -y; \quad y(1) = 1.$	**7.** $(1 - x)(y + y') = e^{-x}; \quad y(0) = 0.$
8. $(x^2 - 1)y' - xy = (x^3 - x)y^3;$ $y(\sqrt{2}) = 1.$	**9.** $y''' = \sqrt{x+1} - \sin 2x; \quad y(0) = -\dfrac{1}{8},$ $y'(0) = \dfrac{1}{8}, \quad y''(0) = \dfrac{1}{2}.$
10. $y''(1 + y) = 5(y')^2; \quad y(0) = 0,$ $y'(0) = 1.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

III. Задача

Скорость распада радия пропорциональна наличному его количеству. В течении года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

ВАРИАНТ 5

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y' = \dfrac{9x^2 + y^2 + xy}{x^2}.$	**2.** $y' + 3y = 14e^{4x} \cdot y^3.$
3. $xy'' - y' = 0.$	**4.** $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}.$
5. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $yy' = \dfrac{3}{2}(x^2 - 1); \quad y(0) = 3.$	**7.** $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x; \quad y(0) = 0.$

8. $y'' = 2\sin x \cdot \cos^2 x;$ $y(0) = -\frac{5}{9}, \quad y'(0) = -\frac{2}{3}.$	**9.** $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$
10. $y'' + 9y = \frac{2}{\sin 3x};$ $y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1.$	**11.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 7y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

III. Задача

В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается вода со скоростью 5л/мин, и смесь вытекает с такой же скоростью. Сколько соли останется в баке через час? (Концентрация принимается равномерной).

ВАРИАНТ 6

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $xy' \ln x = 5x - y.$	**2.** $x^2 y' - 2xy - y^3 = 0.$
3. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$	**4.** $x(y'' + 1) + y' = 0.$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $\ln x \cdot \sin^3 y dx + x \cos y dy = 0;$ $y(1) = \frac{\pi}{4}.$	**7.** $y'' = -\frac{1}{2y^3}; \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$
8. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1;$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$	**9.** $y'' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
10. $x^2 y' = y(x + y); \quad y(1) = 2.$	**11.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 6y, \end{cases} \quad x(\pi) = e^{-2\pi}, \ y(\pi) = \frac{1}{5}e^{-2\pi}$

III. Задача

Найти линию, у которой площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной ее точки и касательной в этой точке, равна половине квадрата абсциссы.

ВАРИАНТ 7

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $\dfrac{y'}{y} = 5x^3y^2.$	**2.** $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}.$
3. $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx.$	**4.** $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x - 3y^2)dy = 0.$
5. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2;\quad y(0) = 0.$	**7.** $x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0;\quad y(1) = 4.$
8. $y'' = x + \sin x;$ $y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$	**9.** $2(y')^2 = (y-1)y'';\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 2.$
10. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12;$ $y(0) = 0,\quad y'(0) = 2.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y, \end{cases}\quad x(0) = 1,\quad y(0) = 1.$

III. Задача

Пользуясь прямоугольной системой координат, найти форму зеркала, отражающего параллельно данному направлению все лучи, выходящие из одной точки.

ВАРИАНТ 8

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $(xy + y^2)dx - 2(x^2 + xy)dy = 0.$	**2.** $y'\cos x - y\sin x = \cos^2 x.$
3. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - x^2\right)dx - \dfrac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$	**4.** $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+1)y^4}{x}.$
5. $xy'' - y' = x^2e^x.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0;\quad y(2) = 1.$	**7.** $yy'' - (y')^2 = y^2;\quad y(0) = y'(0) = 1.$
8. $y'' = \operatorname{arctg} x;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$	**9.** $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12;$ $y(0) = 0,\quad y'(0) = 2.$

10. $y'' + y = \operatorname{ctg} x;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,$ $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\quad y(0) = 1.$

III. Задача

За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. За сколько времени останется 1% от его первоначального количества, если известно, что скорость распада пропорциональна массе радиоактивного вещества.

ВАРИАНТ 9

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $e^{x-y}dx - \dfrac{1}{x}dy = 0.$	**2.** $y'(x^2+4) - xy = \sqrt{x^2+4}.$
3. $x^3y'' + x^2y' = 1.$	**4.** $y'' - 4y' + 5y = (24\sin x + 8\cos x)e^{-2x}.$
5. $\big(\sin y + (1-y)\cos x\big)dx + \big((1+x)\cos y - \sin x\big)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $y' = 4 + \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2;\quad y(1) = 2.$	**7.** $y' - y = e^x y^2;\quad y(0) = 0.$
8. $y'' = \sin^2 3x;\ \ y(0) = -\dfrac{1}{16},$ $y'(0) = 0.$	**9.** $y'' = 2 - y;\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 2.$
10. $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{e^{5x}}{1+e^x};\quad y(0) = 0,$ $y'(0) = 2.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = 4,\quad y(0) = 1.$

III. Задача

Найти кривую на плоскости xOy, у которой отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам

ВАРИАНТ 10

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $\sin^2 x \cdot \dfrac{dy}{dx} - 2y^2 = 0.$	**2.** $y' - \dfrac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}y^2.$

3. $(y+\sqrt{xy})dx = xdy.$	**4.** $y''x\ln x = 2y'.$
5. $(y+e^x\sin y)dx + (x+e^x\cos y)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $y''' = \sin x;\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0,$ $y''(0)=0.$	**7.** $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec^2 x;\quad y(0)=0.$
8. $y'' + \dfrac{2}{1-y}\left(y'\right)^2 = 0;\ \ y(0)=0,$ $y'(0)=1.$	**9.** $y''+3y' = (40x+58)e^{2x};\ \ y(0)=0,$ $y'(0)=2.$
10. $y''+8y'+16y = \dfrac{x^2e^{-4x}}{x-3};$ $y(0)=1,\quad y'(0)=2.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x, \end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=0.$

III. Задача

Пуля входит в доску толщиной 10 см со скоростью 200 м/с, а вылетает из доски со скоростью 80 м/с. Считая, что сила сопротивления движению пули в доске пропорциональна квадрату скорости, найти время движения пули через доску.

ВАРИАНТ 11

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x}}{x}.$	**2.** $y' - 7y = 8e^{3x}y^2.$
3. $(x^2+\sin y)dx + (1+x\cos y)dy = 0.$	**4.** $y''x\ln x = y'.$
5. $y''+2y'+37y = 37x^2 - 33x + 74.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $xy' = y(3+\ln y - \ln x);\quad y(1) = \dfrac{1}{e}.$	**7.** $y' = \dfrac{y}{x}\ln x;\quad y(1)=3.$
8. $y''' = \dfrac{1}{x};\quad y(1) = \dfrac{1}{4},$ $y'(1) = y''(1) = 0.$	**9.** $y'' = \dfrac{1}{y^3};\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$
10. $y'' - y = e^{2x}\cdot\cos e^x;\quad y(0)=1,$ $y'(0)=2.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=0.$

III. Задача

Футбольный мяч весом 0,4 кг брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 при скорости 1 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема.

ВАРИАНТ 12

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y' + 3y = 14e^{4x} \cdot y^4.$	**2.** $(x + 2y)dx + xdy = 0.$
3. $xy'' - y' = 2x^2e^x.$	**4.** $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$
5. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{(x^2+1)e^{-2x}}{x+1}.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0; \quad y(1) = \dfrac{1}{2e}.$	**7.** $\cos x \cdot \cos y dx - \sin x \cdot \sin y dy = 0;$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$
8. $y''' = \cos 4x; \quad y(0) = 2,$ $y'(0) = \dfrac{15}{16}, \quad y''(0) = 0.$	**9.** $y'' tgy = 2(y')^2; \quad y(1) = \dfrac{\pi}{4}, \quad y'(1) = 2.$
10. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{5x};$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y, \end{cases} \quad x(0) = 5, \quad y(0) = 8.$

III. Задача

Найти кривые, для которых треугольник, образованный осью Oy, касательной к кривой и радиусом – вектором точки касания, является равнобедренным.

ВАРИАНТ 13

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2}.$	**2.** $y' - \dfrac{y}{x} = 3x\sqrt{y}.$
3. $y' + \dfrac{6xy}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)^4}.$	**4.** $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}.$

5. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0.$

II. Решить задачи Коши:

6. $\dfrac{y'}{\sin x}=\dfrac{1}{\cos y};\quad y(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{4}.$	**7.** $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x};\quad y(0)=1,\ y'(0)=\dfrac{3}{5}.$
8. $y''=1-(y')^2;\quad y(0)=y'(0)=0.$	**9.** $y''(x^2+1)=2xy';\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$
10. $y''+8y'+16y=16x^3+24x^2-10x+8;$ $y(0)=1,\quad y'(0)=3.$	**11.** $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y-3x,\\ \dfrac{dy}{dt}=y-2x,\end{cases}\quad x(0)=0,\quad y(0)=1.$

III. Задача

Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды пропорционального скорости лодки. Начальная скорость лодки 1.5 м/с ; через 4 с ее скорость 1 м/с. Когда скорость лодки уменьшится до 1 см/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

ВАРИАНТ 14

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y'-\dfrac{y}{\sqrt{x}}-e^{2\sqrt{x}}=0.$	**2.** $(1-x^2)y'+xy=y^5.$
3. $y''-2y'ctgx=\sin^3 x.$	**4.** $y''+6y'+13y=-75\sin 2x.$
5. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $y^2+x^2y'=0;\quad y(-1)=1.$	**7.** $(y')^4+2yy''=0;\ y(0)=y'(0)=1.$
8. $xy'-y=x\cdot\cos^2\dfrac{y}{x};\quad y(3)=0.$	**9.** $y''=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x};\quad y(0)=\dfrac{1}{2},\quad y'(0)=0.$
10. $y''+y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2x+1};\ y(0)=2,$ $y'(0)=0.$	**11.** $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=6x-y,\end{cases}\quad x(0)=3,\quad y(0)=-1.$

III. Задача

Найти кривые, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную $\dfrac{2}{3}$ абсциссы точки касания.

ВАРИАНТ 15

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $(x^2-2xy)y'=xy-y^2.$	**2.** $ye^x dx+(y+e^x)dy=0.$
3. $x^2y''+xy'=1.$	**4.** $y''+2y'+y=\dfrac{xe^{-x}}{x^2-1}.$
5. $x\sqrt{9-y^2}\,dx-y(4+x^2)dy=0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $xy'+y=\sin x;\quad y(\pi/2)=2/\pi.$	**7.** $x^2y'=2xy+3y^3;\quad y(1)=1.$
8. $y'''=6/x^3$; $y(1)=0,\ y'(1)=5,\ y''(1)=1.$	**9.** $y''(1+y)=(y')^2+y';$ $y(0)=y'(0)=2.$
10. $y''+8y'+16y=16x^3+24x^2-10x+8;$ $y(0)=1,\quad y'(0)=3.$	**11.** $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=6x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=5x+2y,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=7.$

III. Задача

Некоторое вещество преобразуется в другое вещество со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Сколько вещества было в начале процесса, и через сколько времени останется лишь 1% первоначального количества вещества, если известно, что по истечении одного часа этого вещества было 31,4 г , а по истечении трех часов 9,7 г .

ВАРИАНТ 16

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $\left(1+x^2\right)dy-xydx=0$	**2.** $y''+2x\left(y'\right)^2=0$
3. $y''+16y=8\cos 4x$	**4.** $ydx+\left(\sqrt{xy}-x\right)dy=0$
5. $y\left(x^2+y^2+a^2\right)dy+x\left(x^2+y^2-a^2\right)dx=0$	

II. Решить задачи Коши:

6. $xy'+y=\ln x+1;\quad y\left(1\right)=0.$	**7.** $xy'''=2;\ y\left(1\right)=0,5;\ y'\left(1\right)=y''\left(1\right)=0.$
8. $y'\sin x-y\cos x=y^2;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}.$	**9.** $2yy''=\left(y'\right)^2;\quad y\left(0\right)=y'\left(0\right)=1.$

10. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 6.$

III. Задача

Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 10 км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен и через 20 с скорость лодки стала равной 6 км/ч. Считая, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки, найти путь, пройденный лодкой через 2 м после остановки мотора и скорость лодки в этот момент.

ВАРИАНТ 17

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$	**2.** $\left(x^2 + 1\right)y' - xy = x^3 + x.$
3. $\mathrm{tg}x \cdot \sin^2 y + y' \cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{ctg}y = 0.$	**4.** $y'' + y'\mathrm{tg}\, x = \sin 2x.$
5. $\left(\dfrac{1}{x-y} + 3x^2y^7\right)dx + \left(7x^3y^6 - \dfrac{1}{x-y}\right)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $xy' + y = \dfrac{\sin x}{y}$; $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}.$	**7.** $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1$; $\quad y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 2$
8. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3.$	**9.** $y'' + y' - 2y = (16x + 22)e^{4x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 5.$
10. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$ $x(\pi) = e^{\pi}$, $y(\pi) = 0.$

III. Задача

Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси *Oy*, равна квадрату абсциссы точки касания.

ВАРИАНТ 18

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $\left(xy+y^2\right)dx = x^2dy.$	**2.** $y' - 2y = e^{2x}\cdot y^4.$
3. $xy'' = y' + x^2.$	**4.** $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{2x+5}.$
5. $\left(3x^2\operatorname{tg} y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $xy' = \dfrac{2\cos^3 y}{\sin y};\quad y(1) = \dfrac{\pi}{4}.$	**7.** $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x;\quad y(0) = 0.$
8. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 2x};\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4},\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$	**9.** $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}};\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
10. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3;$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 14.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 3.$

III. Задача

Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью Ox имеет абсциссу вдвое меньшую абсциссы точки касания.

ВАРИАНТ 19

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $x^3y' = y\left(x^2+y^2\right).$	**2.** $2xy'y'' = \left(y'\right)^2 + 1.$
3. $y' = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x}.$	**4.** $y''(4+y) = 2\left(y'\right)^2.$
5. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $xy' - y = x^2\sin x;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi.$	**7.** $y'\left(x+\sqrt{x}\right) = \sqrt{1-y};\quad y(1) = 0.$

8. $y'' = \sin^3 x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9},\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$	**9.** $\left(x^2 + y^2 + y\right)dx + \left(2xy + x + e^y\right)dy = 0;$ $y(1) = 0$
10. $y'' + 4y' = \sin 2x;$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$	**11.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y, \end{cases}$ $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

III. Задача

Сила трения, замедляющая движение диска, вращающегося в жидкости, пропорциональна его угловой скорости. Диск начал вращаться с угловой скоростью 3 об/с, а через минуту его угловая скорость стала 2 об/с. Какова будет его угловая скорость через три минуты после начала вращения?

ВАРИАНТ 20

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $xy' - y = x \cdot \mathrm{tg}\frac{y}{x}.$	**2.** $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x+1}.$
3. $y'' \cdot \mathrm{tg}\, x = y' + 1.$	**4.** $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x.$
5. $\left(xy + \sin y\right)dx + \left(0{,}5x^2 + x\cos y\right)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $\sec^2 x \cdot \mathrm{tg}\, y dx + \sec^2 y \cdot \mathrm{tg}\, x dy = 0;$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$	**7.** $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x;\quad y(0) = 0.$
8. $xy' - 2y = 2x^4y^3;\quad y(1) = 2.$	**9.** $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 3.$
10. $y'' = e^{2y};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$	**11.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

III. Задача

Материальная точка массой 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ скорость точки равнялась 0,5 м/с, а сила $4 \cdot 10^{-5}$ Н. Какова будет скорость точки через минуту после начала движения?

ВАРИАНТ 21

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x.$	**2.** $y' - \frac{y}{x\ln x} = xy^2\ln x.$
3. $\left(1-x^2\right)y'' - xy' = 2.$	**4.** $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$
5. $\left(5x^4y^4 + 28x^6\right)dx + \left(4x^5y^3 - 3y^2\right)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $y'''\sin^4 x = \sin 2x;$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$	**7.** $y'' = y'e^y;\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
8. $y'x^3 = 2y;\quad y(2) = 1.$	**9.** $y' - 3x^2y - x^2e^x = 0;\quad y(0) = 0.$
10. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x;$ $y(0) = 0,\quad y'(0) = 2.$	**11.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 4.$

III. Задача

Найти кривую, для которой радиус – вектор каждой точки равен длине отрезка касательной к кривой в этой точке, заключенного между точкой касания и осью Ox.

ВАРИАНТ 22

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y' - 2y = e^x \cdot y^4.$	**2.** $(1+y) - (1-x)y' = 0.$
3. $y' + 4\frac{y}{x} + x = 0.$	**4.** $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$
5. $\left(3x^2y + y^3 + 1\right)dx + \left(x^3 + 3xy^2\right)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x};$ $y(0) = 1,\quad y'(0) = 0.$	**7.** $y'' = 4\cos 2x;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 3.$
8. $yy'' - \left(y'\right)^2 = 0;$ $y(0) = 1,\quad y'(0) = 2.$	**9.** $xy'' + 4y' = 2x^2;\quad y(1) = \frac{1}{9}\quad y'(1) = \frac{1}{3}.$

10. $y'' - 2y' + y = \dfrac{(x-3)e^x}{x+1}$; $y(0)=1, \quad y'(0)=4.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y, \end{cases}$ $x(0)=0, \quad y(0)=-2.$

III. Задача

Некоторое количество нерастворимого вещества, содержащее в своих порах 10кг соли, подвергается воздействию 90 л воды. Через 1 час половина соли растворилась. Сколько соли растворилось бы в течение этого времени, если бы количество воды было удвоено? Известно, что скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг на 3 л).

ВАРИАНТ 23

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $y' = y^3 x + y.$	**2.** $y'' + 4y' = 2x^2.$
3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}.$	**4.** $\left(y + \dfrac{1}{x}\right)dy - \dfrac{y}{x^2}dx = 0.$
5. $\left(3x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - 3y^2\right)dy = 0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $\sin^2 x \cos^2 y dx - \cos^2 x dy = 0$; $y(0) = \dfrac{\pi}{4}.$	**7.** $y' + e^x y = e^{2x}; \quad y(0) = e^{-1}.$
8. $y''' = \cos^2 x$; $y(0)=1, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{8}, \quad y''(0)=0.$	**9.** $2yy'' = (y')^2 + 1; \quad y(0)=2, \quad y'(0)=1.$
10. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x$; $y(0)=0, \quad y'(0)=6.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0)=0, \ y(0)=16.$

III. Задача

Некоторое количество вещества, содержащее 3 кг влаги, помещено в комнату объемом 100 $м^3$, воздух в которой имеет влажность 25%. Насыщенный воздух такой же температуры содержит 0,12 кг влаги на 1 $м^3$. Если в течение первых суток вещество потеряло половину влаги, то сколько в нем останется влаги по истечении вторых суток? Считается, что скорость испарения влаги пропорциональна ее количеству в веществе и разности между влажностью окружающего воздуха и влажностью насыщенного воздуха.

ВАРИАНТ 24

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $\left(1+x^2\right)y^3dx-\left(y^2-1\right)x^3dy=0.$	**2.** $xy''=2x-y'.$
3. $\dfrac{xy'-y}{x}=tg\dfrac{y}{x}.$	**4.** $y'-\dfrac{2y}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{y}}{x}.$
5. $\left(\cos(x+y)+2\sin(x-y)\right)dx=\left(2\sin(x-y)-\cos(x+y)\right)dy.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x;\quad y(e)=\dfrac{e^2}{2}.$	**7.** $y'''=x\sin x;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$
8. $y''=y'+\left(y'\right)^2;$ $y(0)=0,\quad y'(0)=1.$	**9.** $y''+12y'+36y=72x^3-18;$ $y(0)=1,\quad y'(0)=0.$
10. $y''+y=\operatorname{tg}x;$ $y(0)=1,\quad y'(0)=0.$	**11.** $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-y,\end{cases}\quad x(0)=4,\quad y(0)=6.$

III. Задача

Найти кривую, проходящую через точку (1;1), у которой точка пересечения любой ее касательной с осью ординат имеет ординату в два раза меньшую ординаты точки касания.

ВАРИАНТ 25

I. Найти общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y.$	**2.** $xy''+y'=\ln x.$
3. $2xy^2dy=\left(1+x^2\right)dx.$	**4.** $y''+25y=\operatorname{tg}5x.$
5. $\left(4x^3y^3-6x^2y^5\right)dx+\left(3x^4y^2-10x^3y^4\right)dy=0.$	

II. Решить задачи Коши:

6. $xy'\ln x = y + \ln x; \quad y\left(e^2\right) = 2\ln 2.$	**7.** $\left(x^2+1\right)y' + 4xy = 3x\sqrt{y}; \quad y(0) = 1.$
8. $y'' = \cos x + e^{-x};$ $y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = -e^{-\pi}.$	**9.** $yy'' - 2\left(y'\right)^2 = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$
10. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x;$ $y(0) = 2. \quad y'(0) = 7.$	**11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 7y, \end{cases} x(0) = 0, \quad y(0) = 70.$

III. Задача

Сила трения, замедляющая вращение диска в жидкости, пропорциональна его угловой скорости. Диск начал вращаться с угловой скоростью 5 об/с, а через минуту его угловая скорость стала равна 3 об/с. Через сколько времени после начала вращения диск будет иметь угловую скорость 1 об/с?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пискунов, Н С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / *Н.С. Пискунов*. – М.: ИНТЕГРАЛ–ПРЕСС, 2002. – Т. 2. – 544 с.
2. *Берман, Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / *Г.Н. Берман*. – М.: Наука. – 2003г. – 416 с.
3. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / *П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова*.– М.: Издательский дом «ОНИКС 21 Век»: Мир и Образование, 2003. – Ч.2.– 416 с.
4. *Шипачев, В.С.* Основы высшей математики / *В.С. Шипачев*. – М.: Высшая школа, 2007. – 479 с.
5. *Горяйнов, В.В.* Дифференциальные уравнения. Ряды.: учебное пособие / *В.В. Горяйнов, Т.Г. Святская, Л.В. Акчурина, В.А. Попова.*; Воронеж. гос. арх.–строит. ун–т. – Воронеж, 2007. – 136 с.
6. *Ханкин, Е.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: курс лекций / *Е.И. Ханкин*; Воронеж. гос. арх.–строит. ун–т. – Воронеж, 2009. – 68 с