

ГОУВПО «Воронежский государственный  
технический университет »

*СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА*

*(Кафедра «высшей математики и  
физико-математического моделирования»)*

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика»  
для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 1

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов,  
А.В. Купцов

<u>Мет. 1.rar</u>	<u>200 К байт</u>	<u>14.10.2008</u>	<u>уч.-изд. 2,1 л.</u>
(название файла)	(объем файла)	(дата)	
	(объем издания)		

ГОУВПО «Воронежский государственный

технический университет »

*Кафедра «высшей математики и  
физико-математического моделирования»*

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 1

$R^n$

Воронеж 2008

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов  
УДК 517

Методические указания для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения. Ч. 1/ ГОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2008. 35 с.

Методические указания для выполнения типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса первого семестра.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Мет. 1.rar»

Библиогр.: 11 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.П. Дубровская  
Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук,  
проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2008

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме: “Интегралы”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

### 1. Интегралы

#### 1.1. Неопределенный интеграл.

Пусть  $F(x)$  – первообразная для функции  $f(x)$  на промежутке

$X$ , то есть  $F'(x)=f(x)$  (или  $dF(x) = f(x)dx$ ) для  $\forall x \in X$ .

**Определение.** Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где  $C$ - произвольная постоянная.

#### 1. Основные правила интегрирования

$$1) \left( \int f(x)dx \right)' = f(x), \quad d\left( \int f(x)dx \right) = f(x)dx,$$

$$2) \int dF(x) = F(x) + C,$$

$$3) \int af(x)dx = a \int f(x)dx, \text{ где } a \text{ – постоянная,}$$

$$4) \int [f(x) \pm f(x')]dx = \int f(x)dx \pm \int f(x')dx,$$

5) если  $\int f(x)dx = F(x) + C$  и  $u = \varphi(x)$ , то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

## 2. Таблица простейших неопределенных интегралов

$$1) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1),$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C_1 (a \neq 0),$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C (a \neq 0),$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C (a \neq 0),$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, (a > 0),$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0), \int e^x dx = e^x + C,$$

$$8) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$9) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$11) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$12) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$13) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$14) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$15) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

**Замечание.** Правило 5 значительно расширяет таблицу простейших интегралов. В силу этого правила таблица интегралов оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией.

### ***3. Метод подстановки. Замена переменной в неопределенном интеграле***

Интегрирование путем введения новой переменной  $t$  основано на формуле

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt, \text{ где } x = \varphi(t) -$$

Монотонная непрерывно-дифференцируемая функция переменной  $t$ .

Функцию  $\varphi$  выбирают таким образом, чтобы правая часть формулы приобрела более удобный вид.

Иногда применяется подстановка вида  $u = \psi(x)$ ,

где  $u$  – новая переменная. Допустим, что подынтегральное выражение удалось преобразовать к виду

$\int f(x)dx = g(u)du$ , где  $u = \psi(x)$ , тогда, если изве-

стен  $\int g(u) = F(u) + C$ , то

$$\int f(x)dx = F[\psi(x)] + C.$$

*Тригонометрические подстановки*

а) Если интеграл содержит радикал вида  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,

то полагают  $x = a \cdot \sin t$  (или  $x = a \cdot \cos t$ ), откуда получается

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t \text{ (или } \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \sin t \text{)}.$$

б) Если интеграл содержит радикал вида  $\sqrt{x^2 - a^2}$ ,

то полагают  $x = \frac{a}{\cos t}$  (или  $x = \frac{a}{\sin t}$ ),

откуда  $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \operatorname{tg} t$  (или  $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \operatorname{ctg} t$ ).

в) Если интеграл содержит радикал  $\sqrt{x^2 + a^2}$ , то

полагают  $x = a \cdot \operatorname{tg} t$  (или  $x = a \cdot \operatorname{ctg} t$ ), откуда

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t} \quad (\text{ИЛИ } x = \frac{a}{\sin t}).$$

**Замечание.** Иногда вместо тригонометрических подстановок удобнее пользоваться гиперболическими

подстановками:  $x = a \cdot \text{th } t$ ,  $x = a \cdot \text{ch } t$ ,  $x = a \cdot \text{sh } t$ .

#### 4. Метод интегрирования по частям

Если  $u = \psi(x)$  и  $v = \psi(x)$  – непрерывно дифференцируемые функции от  $x$ , то

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

**Замечание.** Иногда, чтобы свести исходный интеграл к табличному, приходится применять формулу интегрирования по частям несколько раз.

В некоторых случаях получают уравнение, из которого определяется начальный интеграл.

#### 5. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложений на простейшие

Рассмотрим рациональную функцию (или рациональную дробь)

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x) \text{ или } Q_m(x) -$$

многочлены степеней  $n$  и  $m$  соответственно относительно переменной  $x$ .

Если  $n \geq m$ , то есть дробь неправильная, то ее можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)}, \text{ (где } k < m \text{),}$$



то есть выделить из нее целую часть  $P_{n-m}(x)$ . Пусть

знаменатель  $Q_m(x) = (x - a)^r \dots (x^2 + px + q)^s \dots$  разлагается на линейные квадратичные множители. Тогда

правильная рациональная дробь  $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$  разлагаются на

суммы простейших дробей с вещественными коэффициентами следующего вида:

1)  $\frac{A}{x-a}$ ; 2)  $\frac{A}{(x-a)^r}$ , где  $r \geq 1$  — целое число;

3)  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ , где  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , то есть квадратный трехчлен,

$x^2 + px + q$  не имеет действительных корней;

4)  $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$ , где  $s \geq 1$  — целое число,  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ .

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочленов

$P_{n-m}(x)$  степени  $(n-m)$  и от простейших дробей, каждая из которых интегрируется в элементарных функциях:

1)  $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C;$

2)  $\int \frac{A dx}{(x-a)^r} = -\frac{A}{(r-1)(x-a)^{r-1}} + C;$

$$3) \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C;$$

$$4) \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^s} dx =$$

$$= \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^s} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^s}$$

Первый интеграл в правой части легко находится с помощью

подстановки  $x^2 + px + q = z$ , а второй преобразуем так

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^s} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^s}, \text{ где } x + \frac{p}{2} = t; q - \frac{p^2}{4} = a^2.$$

Для интеграла

$$I_s = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^s} \quad (S - \text{целое положительное число})$$

Имеет место следующая рекуррентная формула

$$I_s = \frac{1}{2a^2(S-1)} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^{S-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2S-3}{2S-2} \cdot I_{S-1}.$$

Эта формула после  $(S-1)$ -кратного применения

позволяет свести данный интеграл  $I_s$  к табличному

$$\text{интегралу } I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2}.$$

**6. Интегрирование некоторых иррациональных функций**

1. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$  путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам 5 и 6

2. Интегралы вида  $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$  путем выделения в числителе производной квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня разлагается на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} dx + (B - \frac{Ab}{2a}) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}$$

Первый из полученных интегралов путем замены

$ax^2+bx+c = t$  сводится к табличному виду 1 ( см. п. 2), а второй рассмотрен в п. 1.

3. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$  с помощью

подстановки  $\frac{1}{mx+n} = t$

приводятся к виду, рассмотренному в п. 2.

4. Интегралы вида  $\int R \left( x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx,$

где R- рациональная функция;  $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$  –

целые числа. С помощью подстановки  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$ ,

где  $S$  – наименьшее общее кратное чисел  $n_1, \dots, n_k$ .

### 5. Интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где  $m, n, p$  – рациональные числа выражаются через конечную комбинацию элементарных функций лишь в следующих трех случаях:

1) если  $p$  – целое число, подстановкой  $x = t^s$ ,  
 $S$  – знаменатель дроби  $p$ ;

2) если  $\frac{m+1}{n}$  – целое, подстановкой  $\frac{a+bx^n}{n} = t^s$ ,  
где  $S$  – знаменатель дроби  $p$ .

3)  $\frac{m+1}{n} + p$  – целое, подстановкой

$$\frac{a+bx^n}{n} = t^s, \text{ где } S \text{ – знаменатель } p.$$

## 7. Интегрирование тригонометрических функций

### 7.1. Интегралы вида

$$\int \sin(ax) \times \cos(bx) dx, \quad \int \sin(ax) \times \sin(bx) dx,$$

$\int \cos(ax) \times \cos(bx) dx$  находятся с использованием тригонометрических формул

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

## 7.2. Интегралы вида

$$I_{m,n} = \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx,$$

где  $n$  и  $m$  – четные числа, находятся с помощью формул

$$\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2; \quad \cos^2 x = (1 + \cos(2x))/2,$$

$$\sin(x) \cos(x) = 0,5 \sin(2x).$$

Если хотя бы одно из чисел  $m$  или  $n$  – четное, то интеграл находится, отделяя от нечетной степени один множитель и вводя новую переменную.

В частности, если  $m = 2k + 1$ , то

$$I_{n,m} = \int \sin^n(x) \times \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^n(x) \times \cos^{2k} x \times \cos x dx =$$

$$= \int \sin^n(x) \times (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x)$$

Полагая  $t = \sin x$ , получим интеграл вида

$$\int t^k (1 - t^2)^k dt.$$

**7.3. Интегралы вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$**  приводятся к интегралу от рациональной функции новой переменной с помощью, так называемой универсальной

тригонометрической подстановки  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , при этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если  $R(\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , то целесообразно применить подстановку

$\operatorname{tg} x = t$ , при этом

$$\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

## 2. Определенный интеграл и его приложения

### 1. Определенный как предел интегральной суммы

Определенным интегралом от функции  $f(x)$  в

промежутке  $(a, b)$  называется предел ее

интегральной суммы, когда число  $n$

элементарных отрезков неограниченно возрастает,

а длина наибольшего из них ( $\max \Delta x_i$ ) стремится к 0,

то есть

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) D(x_i),$$

где  $D(x_i) = x_{i+1} - x_i$ ,  $x_i \leq x_i \leq x_{i+1}$ .

Если  $f(x)$  непрерывна, то она интегрируема на

$(a, b)$ , то есть предел этот и не зависит от

способа разбиения промежутка  $(a, b)$  на частичные

отрезки и выбора точек  $\xi_i$  на этих промежутках.

## 2.2. Вычисление определенного интеграла.

### . Формула Ньютона – Лейбница

Если  $F'(x) = f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

### 2. Замена переменной в определенном интеграле

Если 1) функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ; 2) функция  $\varphi(x)$  непрерывна вместе со своей

производной  $\varphi'(t)$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$ , где  $a = \varphi(\alpha)$ ,

$b = \varphi(\beta)$ ; 3) сложная функция  $f(\varphi(t))$  определена и непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

### 3. Формула интегрирования по частям

Если  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют непрерывные производные на  $[a, b]$ , то

$$\int u(x) dv(x) = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

### 3. Свойства определенного интеграла

1)

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0, \quad 2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

3) если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  интегрируем на  $[a, b]$ ,  $C_1$  и  $C_2$  - любые вещественные числа, то функция  $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$  также интегрируема на  $[a, b]$ , причем

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) dx = C_1 \int_a^b f_1(x) dx + C_2 \int_a^b f_2(x) dx.$$

4) Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, c]$  и  $[c, d]$ , то она интегрируема также и на  $[a, b]$ , причём

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

При этом точка  $c$  может быть произвольно расположена относительно  $a$  и  $b$ .

5) Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то функция

$|f(x)|$  также интегрируема на  $[a, b]$ , причём

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b).$$

6) Если  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b)$

7) Если  $f(x) \geq g(x)$  для каждого

$x \in (a, b)$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad (a < b)$ .

8) Если  $M$  – наибольшее значение функции  $f(x)$  на

отрезке  $(a, b)$ , а  $m$  – наименьшее и  $a \leq b$ , то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

9) Теорема о среднем значении функции

Если  $f(x)$  – непрерывна на  $[a, b]$ , то

существует  $\xi \in [a, b]$  такое, что



$$\oint_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Число  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  называется средним значением функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

### 3. Несобственные интегралы

#### 3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (первого рода)

Пусть  $f(x)$  непрерывна при  $a \leq x < +\infty$ . Тогда по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл называется расходящимся. Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

В последнем равенстве стоящий слева несобственный

интеграл сходится тогда, когда сходится каждый из несобственных интегралов в правой части.

Признак сходимости несобственных интегралов первого рода

Теорема. Пусть для всех  $x \in (a, +\infty)$  выполнено неравенство  $0 \leq f(x) \leq j(x)$ , тогда:

$$\int_a^{+\infty} j(x) dx$$

1) если  $\int_a^{+\infty} j(x) dx$  сходится, то

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

также сходится, причём

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} j(x) dx$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

$$\int_a^{+\infty} j(x) dx$$

- расходится, то расходится и  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x) * x^m\} = A \neq 0, A > 0$$

Следствие. Если  $f(x) \geq 0$  и,

$$f(x) \sim \frac{A}{x^m}$$

то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

при  $x \rightarrow +\infty$ , то 1) при  $m > 1$   $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится;

2) при  $m \in \mathbb{N}$  - расходится

## 2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода)

Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна при  $a \leq x < b$ , а при  $x=b$  либо неопределенна, либо терпит разрыв. Тогда по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

Если предел, стоящий в правой части, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы; если функция имеет разрыв при  $x=a$ , либо при  $x=c$ , где  $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx; \int_a^b f(x) dx =$$

$$\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx$$

Признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода

Теорема. Пусть при  $x \in [a, b)$  выполнены неравенства  $0 \leq f(x) \leq j(x)$  и функции  $f(x)$  и  $j(x)$  либо не

определены, либо имеют разрыв при  $x=b$ . Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx$$

1) если  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, то сходится и

$$\int_a^b f'(x) dx$$

; 2) если  $\int_a^b f'(x) dx$  расходится,

$$\int_a^b f(x) dx$$

то расходится и  $\int_a^b f'(x) dx$ .

Следствие. Если  $f(x) \geq 0$  и

$$\lim_{x \rightarrow b} \{f(x) \cdot |x - b|^m\} = A \neq 0, A > 0, \text{ то есть}$$

$$f(x) \sim \frac{A}{|b - x|^m} \text{ при } x \rightarrow b; \text{ то 1) при } m < 1$$

интеграл (1) сходится; 2) при  $m \geq 1$  - расходится.

## 4. Приложения определённого интеграла

### 4.1. Площади плоских фигур

#### а) Площадь в прямоугольных координатах

Если площадь  $S$  ограничена двумя непрерывными

кривыми  $y = f_1(x)$  и

$y = f_2(x)$  и двумя

вертикалями  $x = a$  и  $x = b$ , где  $f_1(x) \leq f_2(x)$  при  $a \leq x \leq b$ ,

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

то

**б) Площадь, ограниченная кривой, заданной в параметрическом виде**

Если кривая в параметрическом виде  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ , то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями, соответствующими  $x=a$ ,  $x=b$  и отрезком оси  $Ox$ , выражается интегралом

$$S = \int_a^b y(t) \cdot x'(t) dt, \text{ где } t_1, t_2$$

определяются из уравнений

$$a = x(t_1), b = x(t_2) \quad (y(t) \geq 0 \text{ на } [t_1, t_2]).$$

**в) Площадь в полярных координатах**

Площадь, ограниченная непрерывной кривой  $r = r(j)$  и двумя полярными радиусами  $j = a, j = b$  равна

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(j) dj$$

**4.2. Длина дуги кривой**

**а) Длина дуги в прямоугольных координатах**

Длина дуги гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой  $y=f(x)$ , содержащейся между точками с абсциссой  $x=a$  и  $x=b$ , равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**б) Длина дуги кривой, заданной параметрически**

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  непрерывно дифференцируемые функции, то длина дуги равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

где  $t_1, t_2$  - значения параметра, соответствующие концам дуги;

#### **в) Длина дуги в полярных координатах**

Если  $r = r(j)$  ( $a \leq j \leq b$ ), то

$$l = \int_a^b \sqrt{[r'(j)]^2 + [r(j)]^2} dj$$

### **4.3. Объёмы тела**

#### **а) Объём тела вращения**

Объёмы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y=f(x)$ , осью  $OX$  и двумя вертикалями  $x=a$  и  $x=b$ , вокруг осей  $OX$  и  $OY$ , выражаются соответственно формулами

$$V_x = \rho \int_a^b y^2(x) dx; V_y = 2\rho \int_a^b x y dx$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси  $OY$  фигуры, ограниченной  $x=g(y)$ , осью  $OY$  и двумя параллелями  $y=c$  и  $y=d$  определяется по формуле

$$V_y = \rho \int_c^d x^2 dy$$

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то в приведённых формулах нужно сделать замену переменной интегрирования.

Объём тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой кривой  $r = r(j)$  и полярными радиусами  $j = a, j = b$  вокруг полярной оси  $r$

$$V_r = \frac{2}{3} \int_a^b r^3 \sin j \, dj$$

равен

**б) Вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям**

Если  $S(x)$  – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси  $OX$  в точке абсциссой  $x$ , то объём этого тела равен

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x) \, dx,$$

где  $x_1, x_2$  – абсциссы крайних точек сечения тела.

**5. Теоретические упражнения**

1. Следует ли из интегрируемости суммы двух функций интегрируемость слагаемых? Ответ обоснуйте примерами.
2. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций?
3. Показать, что сумма, произведение и частное двух неинтегрируемых функций могут быть интегрируемы.
4. Известно, что  $|f(x)|$  - интегрируемая функция. Что можно сказать об интегрируемости  $f(x)$ ?
5. Приведите примеры.
6. Пусть  $f(x)$  – непрерывная периодическая функция с периодом  $T$ . Доказать, что
 
$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx$$
 для всех  $a$ .
7. Доказать, что для непрерывной на  $[-1,1]$  функции  $f(x)$  справедливо равенство

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx$$

А)  $\int_{-l}^l f(x) dx = 0$ , если  $f(x)$ - чётная функция;

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0$$

Б)  $\int_{-l}^l f(x) dx = 0$ , если  $f(x)$  – нечётная функция.

Дайте геометрическую иллюстрацию этих фактов.

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

17. Известно, что  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Следует ли отсюда,

18. что  $f(x) \geq 0$  для  $x \in [a, b]$ . Приведите примеры.

19. В чём состоит геометрический смысл теоремы о

20. среднем значении?

21. Объясните, почему формальное применение

22. формулы Ньютона-Лейбница (т.е. использование

23. этой формулы без учёта условий её применимости)

24. приводит к неверным результатам на примере

25. вычисления

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Можно ли в интеграле  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$  сделать формальную

26. замену переменной  $x = 1/t$ .

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2} dx$$

27. Можно ли вычислить интеграл от  $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2} dx$

28. с помощью замены переменной  $x = \sin t$ .

29. Не проводя вычислений, ответить на вопрос:

30. чему равен интеграл

$$\int_{-4}^4 \frac{x^5}{x^4 - 6x^2 + 3} dx?$$

31. Может ли при вращении бесконечной кривой



32. вокруг какой-либо из осей координат получить-  
ся
33. тело конечного объёма? Приведите пример.
34. Можно ли сходящийся несобственный интеграл  
 $\int_a^b f(x) dx$
35. от неограниченной функции  $f(x)$
36. рассматривать как предел соответствующей
37. интегральной суммы?

## 6. Примеры решения задач

1. Найти  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+|^{2x}}}$ .

Решение. Так как  $\frac{dx}{\sqrt{1+|^{2x}}} = \frac{dx}{|^x \sqrt{|^{-2x} + 1}} = \frac{|^{-x} dx}{\sqrt{1+(|^{-x})^2}}$

$-\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C =$

$= -\ln(|^{-x} + \sqrt{1+|^{-2x}}) + C$ .

Здесь замена переменной

$t = |^{-x}$  приводит к табличному интегралу.

2. Найти  $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$ .

Решение. Подынтегральная функция является функцией от  $\sin x$  и  $\cos x$ . Применим подстановку

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . При этом  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ .

Тогда

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C$$

Преобразование, произведённое в знаменателе, называется выделением полного квадрата:

$$t^2 + t + 2 = t^2 + 2 * \frac{1}{2} * t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$$

3. Найти  $\int x^2 \arccos x dx$

Решение. Применим метод интегрирования по частям

$$\int U dV = UV - \int V dU, \text{ где}$$

$$U = \arccos x, dV = x^2 dx. \text{ Находим}$$

$$V = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}, dU = - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Получим}$$

$$\int x^2 \arccos x dx = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3} \int x^2 d(\sqrt{1-x^2}) =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{x^2}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \int \sqrt{1-x^2} dx^2 =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{x^3}{3} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{x^2}{3} \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + C, |x| \leq 1.$$

4. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Решение. Перепишем интеграл в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx,$$

откуда следует, что это интеграл от дифференциального бинома при  $m=0$ ,

$n=4$ ,  $p=-1/4$ . Так как  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ , то имеем третий случай интегрируемости.

$$\frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$$

Подстановка  $x^n = t^s$ , где  $s$  - знаменатель  $p$  в данном случае примет вид  $x^{-4} + 1 = t^4$ , откуда

$$x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, dx = -t^3(t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt, \sqrt[4]{1+x^4} = t(t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = - \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = - \int \frac{t^2 dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}.$$

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложим её на простейшие дроби

$$- \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}, \text{ откуда}$$

$$A(t-1)(t^2+1) + B(t+1)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2-1) = -t^2.$$

Полагая последовательно  $t=1$  и  $t=-1$ , получим

$$B(1+1)(1+1)=-1, 4B=-1, B=-1/4;$$

$$A(-1-1)((-1)(-1)+1)=-(-1)(-1), -4A=-1, A=1/4.$$

Неопределённые коэффициенты  $C$  и  $D$  можно

найти, приравнявая коэффициенты при  $t^1, t^0$  в

тождестве слева и справа, получим

$$A+B-C=0, C=0, -A+B-D=0, D=-1/2.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\
& = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \\
& = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.
\end{aligned}$$

5. Найти  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ .

Решение. Применим гиперболическую подстановку  $x=asht$ ,  $dx=achtdt$ , получим

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + sh^2 t)} = achdt$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= a^2 \int ch^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (ch 2t + 1) dt = \\
&= \frac{a^2 \operatorname{sh} 2t}{4} + \frac{a^2 t}{2} + C.
\end{aligned}$$

Из равенства  $\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$  и соотношения  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$  получим

$$\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

Из равенства  $\operatorname{sh} t = \frac{|^t - |^{-t}}{2} = \frac{x}{a}$  находим,

$$|^t = \frac{x \pm \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

что  $\frac{x \pm \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$ . Поскольку

$|^t > 0 \Rightarrow t = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| - \ln a$ . Поэтому

окончательно получаем

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C_1,$$

$$C1 = C - \frac{a}{2} \ln^2 a$$

где  $C$  - новая произвольная постоянная.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной
7. эллипсом

$$x = a \cos t, y = b \sin t.$$

Решение. Эллипс задан в параметрическом виде.

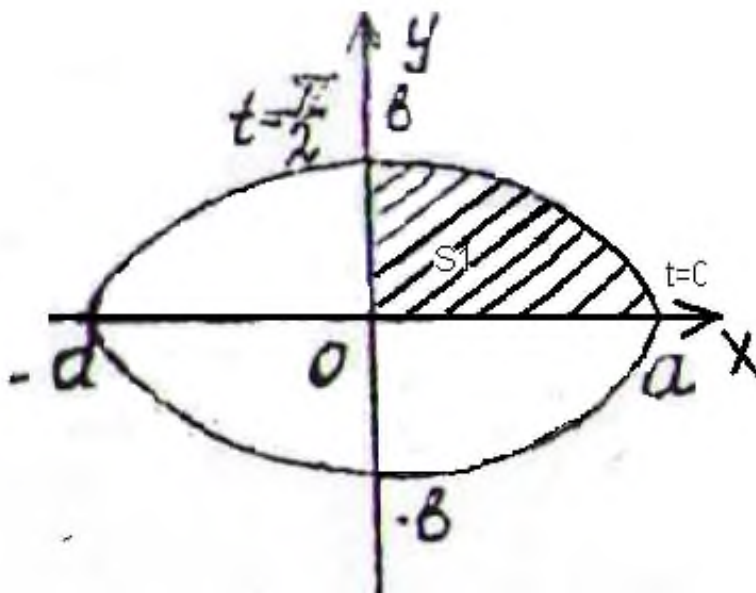
В силу симметрии эллипса достаточно найти площадь

$S1$  одной его четверти  $(x \geq 0, y \geq 0)$ , затем умножить результат на 4. Если  $x$  изменяется в пределах от 0 до  $a$ ,

то параметр  $t$  изменяется в пределах от  $\rho/2$  до 0, которые находятся из уравнений  $a \cos t = 0$ ,  $\cos t = 0, t1 = \rho/2$ ;  $a \cos t = a, \cos t = 1, t2 = 0$ .

По формуле для вычисления площади, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде (см. раздел 3.2, п.3.1б), получим

$$S = 4S1 = 4 \int_{\rho/2}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt = \rho ab$$



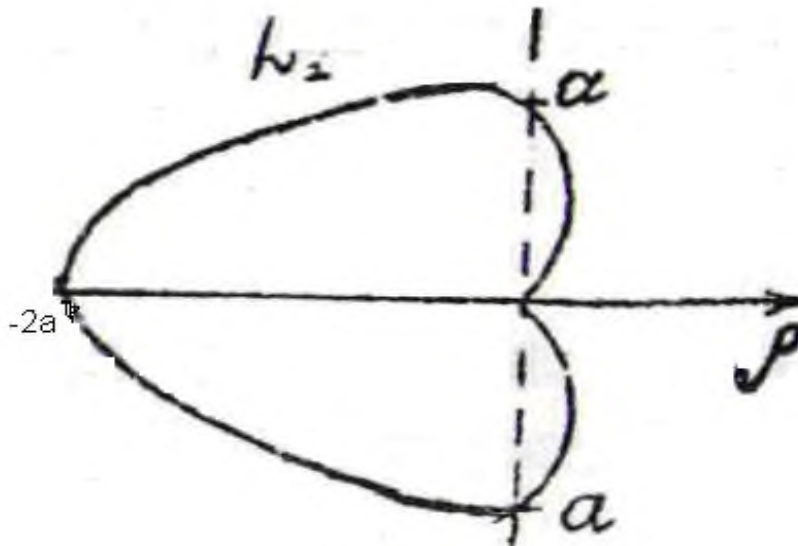


Рис. 2

7. Найти длину дуги кардиоиды  $r=a(1-\cos j)$ .  
 Решение. Кривая задана в полярных координатах. В силу её симметрии относительно полярной оси достаточно вычислить длину  $L$ , её половины, при этом полярный угол  $j$  изменяется от  $\rho$  до 0. По формуле для вычисления дуги кривой в полярных координатах (см. раздел 3.2, п.3.2б) имеем

$$L = 2L_1 = 2 \int_{\rho}^0 \sqrt{a^2 \sin^2 j + a^2 (1 - \cos j)^2} dj = \Big|_{\rho}^0 = 8a.$$

8. Найти объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y = \pm b \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокруг оси  $OY$  (см. рис.3).

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления объёма тела вращения (см. раздел 3.2, п.3.3а).

$$V = \int_{-b}^b \pi x^2 dy = \pi a^2 \int_{-b}^b \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{8}{3} \pi a^2 b.$$

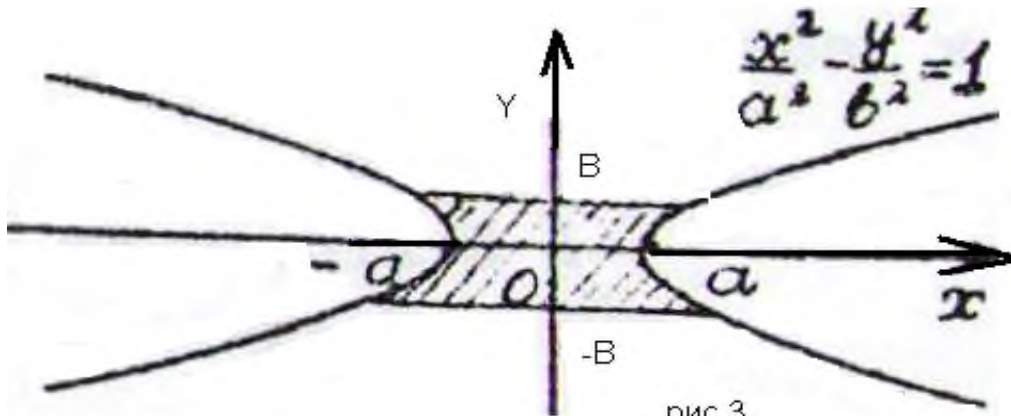


рис.3

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

9. Найти объём эллипсоида (рис.4)

Решение. В общем случае, когда  $a \neq b \neq c$  эллипсоид нельзя считать телом вращения. Поэтому его объём надо вычислять с помощью формулы объёма тела по известным площадям поперечных сечений.

Поперечные сечения эллипсоида плоскостями, параллельными оси OX, являются эллипсами, уравнения которых имеют вид

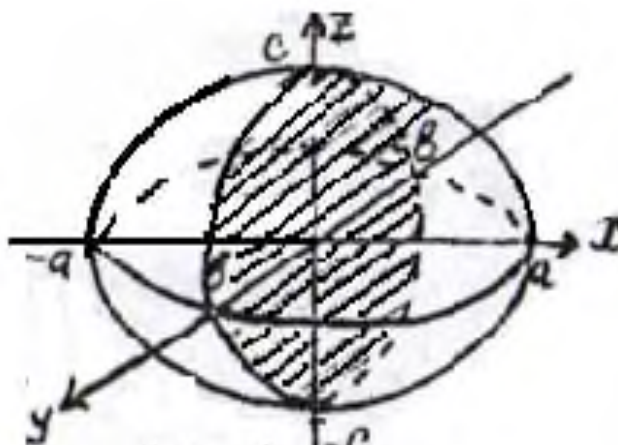


Рис. 4

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{или}$$

$$\frac{y^2}{b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} + \frac{z^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = 1$$

Поэтому полуоси эллипса, находящегося в сечении плоскостью  $x=x$ , равны соответственно

$$b(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, c(x) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \text{ Известно, что}$$

площадь эллипса с полуосями  $b$  и  $c$  вычисляется по формуле  $S = \rho bc$  (см. задачу б). Следовательно, площадь поперечного сечения  $S(x) = \rho b(x)c(x)$ .

Теперь по формуле (см. раздел 3, п. 3.3б) получим

$$V = \rho \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \rho bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \rho abc.$$

В частности при  $a=b=c=R$  получаем формулу для нахождения объема шара  $V = \frac{4}{3} \rho R^3$ .

10. Вычислить  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ .

Решение. Это несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом. Так как подынтегральная дробь разлагается на простейшие дроби вида



$$\frac{1}{x^2 + x + 2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\int_2^b \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( \ln|x-1| - \ln|x+2| \right) \Big|_2^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \Big|_2^b = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \ln \frac{b-1}{b+2} - \ln \frac{1}{4} \right| = \frac{2}{3} \ln 2.$$

11. Исследовать сходимость интеграла  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ .

Решение. Воспользуемся признаком сходимости для несобственных интегралов 1-го рода в виде неравенства. Очевидно, что  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} > \frac{1}{x}$

при  $x > 2$ . Вычислим

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_2^b = \infty - \text{расходится.}$$

12. исследовать на сходимость несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}$ .

Решение при  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3 \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Так как  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$  сходится, то сходится и исходный интеграл

по следствию из признака сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

13. Вычислить интеграл  $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при  $x=1$ . Это несобственный интеграл от неограниченной функции (2-го рода). По определению

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{d \rightarrow 0} \int_{1+d}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{d \rightarrow 0} \left( \frac{1}{d} - 1 \right) = \infty. \end{aligned}$$

Значит данный интеграл расходится.

14. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$ .

Решение. В данном случае подынтегральная функция имеет разрыв при  $x=1$ . воспользуемся признаком сходимости несобственных интегралов 2-го рода.

Для сравнения возьмем функцию  $\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ .

$$\text{Очевидно, что } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \asymp \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

при  $x \in [0,1)$ . Найдем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{1-x} \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Так как  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$  сходится, то сходится и

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx;$$

## 7. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ.

### Задача 1. Найти неопределенные интегралы

- 1.1  $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$ ;    1.2.  $\int (x^2 - 3x + 2) \sin 3x dx$ ;  
 1.3.  $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$ ;    1.4.  $\int (2x + 1) \operatorname{arctg} x dx$ ;  
 1.5.  $\int (3x + 2) \arcsin x dx$ ;    1.6.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1} dx$ ;  
 1.7.  $\int \ln(x^2 + 25) dx$ ;    1.8.  $\int (x^2 + 3x - 5) 2^{-x} dx$ ;  
 1.9.  $\int (x^2 + 7x + 12) \cos 7x dx$ ;    1.10.  $\int (x^2 + 2x + 1) \sin 2x dx$ ;  
 1.11.  $\int (x^2 - 4x + 1) e^{-2x} dx$ ;    1.12.  $\int (4x + 3) \operatorname{arctg} x dx$ ;  
 1.13.  $\int (2x + 3) \arcsin x dx$ ;    1.14.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1} dx$ ;  
 1.15.  $\int \ln(x^2 + 4) dx$ ;    1.16.  $\int (x^2 - 6x + 4) 3^{-x} dx$ ;  
 1.17.  $\int (x^2 + 16x + 1) \cos 4x dx$ ;    1.18.  $\int (2x^2 + 4x + 3) \sin 3x dx$ ;  
 1.19.  $\int (x^2 + 5x - 3) e^{-3x} dx$ ;    1.20.  $\int (7x + 3) \operatorname{arctg} x dx$ ;  
 1.21.  $\int (5x - 1) \arcsin x dx$ ;    1.22.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x - 1} dx$ ;  
 1.23.  $\int \ln(x^2 + 16) dx$ ;    1.24.  $\int (x^2 - x + 2) 5^{-x} dx$ ;  
 1.25  $\int (x^2 - 2x + 3) e^{-\frac{x}{3}} dx$ ;

### Задача 2. Найти неопределенные интегралы

- 2.1.  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x - 2)(x - 2)^3} dx$ ;    2.2.  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x + 2)(x - 2)^3} dx$ ;

$$2.3. \int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx; \quad 2.4. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx;$$

$$2.5. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 7}{(x-2)(x-1)^3} dx; \quad 2.6.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$2.7. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx; \quad 2.8.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$2.9. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx; \quad 2.10. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx;$$

$$2.11. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx; \quad 2.12. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx;$$

$$2.13. \int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx; \quad 2.14. \int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx;$$

$$2.15. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx; \quad 2.16.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx$$

$$2.17. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx; \quad 2.18.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx;$$

$$2.19. \quad \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx; \quad 2.20.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx;$$

$$2.21. \quad \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx; \quad 2.22.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$2.23. \quad \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx; \quad 2.24.$$

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx;$$

$$2.25. \quad \int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx; \quad 2.26.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx;$$

**Задача 3. Найти неопределенные интегралы**

$$3.1. \quad \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2 + 2x + 2)} dx;$$

$$\int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2 + 9)} dx;$$

$$3.2. \quad \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx;$$

$$\int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2 - x + 1)} dx;$$

$$3.3. \quad \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} dx;$$

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx;$$

$$3.4. \quad \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx; \quad \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx;$$

$$3.5. \quad \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx; \quad \int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^3(x^2+3)} dx$$

;

$$3.6. \quad \int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^3(x^2+2)} dx;$$

$$\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)} dx;$$

$$3.7. \quad \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx;$$

$$\int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)} dx;$$

$$3.8. \quad \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx;$$

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx$$

$$3.9. \quad \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx;$$

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx;$$

$$3.10. \quad \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx;$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx;$$

$$3.11. \quad \int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx;$$

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx;$$

$$3.12. \quad \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx;$$

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx$$

$$3.13. \quad \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx;$$

**3.14. Задача 4. Найти неопределенные интегралы**

$$4.1. \quad \int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^5 \sqrt{x^2}} dx; \quad 4.2. \quad \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x}}}{x^{15} \sqrt{x^4}} dx;$$

$$4.2. \quad \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx; \quad \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx;$$

$$4.3. \quad \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{x^3 \sqrt{x}} dx; \quad \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx;$$

$$4.4. \quad \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \sqrt[3]{x}} dx; \quad \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx;$$

$$4.5. \quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx; \quad \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[20]{x^7}} dx;$$

$$4.6. \quad \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx; \quad \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x \sqrt[5]{x^3}} dx;$$

$$4.7. \quad \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \sqrt[10]{x^9}} dx; \quad \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$4.8. \quad \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx; \quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx;$$

$$4.9. \quad \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x \sqrt[8]{x^7}} dx; \quad \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x \sqrt[12]{x^7}} dx;$$

$$4.10. \quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx; \quad \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x \sqrt[6]{x^5}} dx;$$

$$4.11. \quad \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[9]{x}} dx; \quad \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x \sqrt[9]{x^5}} dx;$$

$$4.12. \quad \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt[9]{x^4}} dx; \quad \int \frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x}} dx;$$

$$4.13. \quad \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x \sqrt[3]{x^2}} dx$$

**Задача 5. Вычислить определенные интегралы**



$$5.1. \int_0^{\frac{\rho}{4}} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}; \int_0^{\frac{\rho}{2}} \frac{\sin x dx}{5+3\sin x};$$

$$5.2. \int_0^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}; \int_0^{\frac{\rho}{2}} \frac{\sin x dx}{2+\sin x};$$

$$5.3. \int_0^{\frac{\rho}{2}} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}; \int_0^{\frac{\rho}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2};$$

$$5.4. \int_0^{\frac{2\rho}{3}} \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}; \int_{-\frac{\rho}{2}}^0 \frac{\sin x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2};$$

$$5.5. \int_{-\frac{2\rho}{3}}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}; \int_0^{\frac{\rho}{2}} \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2};$$

$$5.6. \int_0^{\frac{\rho}{2}} \frac{\sin x dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}; \int_{\frac{\rho}{2}}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)};$$

$$5.7. \int_0^{\frac{\rho}{2}} \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}; \int_{-\frac{\rho}{2}}^0 \frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2};$$

$$5.8. \int_0^{2\operatorname{arctg} \frac{\rho}{3}} \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)};$$

$$\int_0^{2\operatorname{arctg} \frac{\rho}{2}} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2} dx;$$

$$5.9. \int_{\frac{\rho}{3}}^{\frac{\rho}{4}} \frac{\cos x dx}{1 - \cos x + \sin x}; \int_0^{\frac{2\rho}{3}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx;$$

$$5.10. \int_{2 \operatorname{arctg} \frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}; \int_0^{\frac{\rho}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx;$$

$$5.11. \int_{2 \operatorname{arctg} \frac{\rho}{3}}^{\frac{\rho}{2}} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)};$$

$$\int_{2 \operatorname{arctg} 2}^{2 \operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)};$$

$$5.12. \int_{\frac{\rho}{2}}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}; \int_{2 \operatorname{arctg} \frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^2}$$

$$5.13. \int_{\frac{\rho}{2}}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)};$$

### Задача 6. Вычислить определенные интегралы

$$6.1. \int_0^{2\rho} \sin^4 3x \cos^4 3x dx; \int_{-\frac{\rho}{2}}^0 2^8 \cos^8 x dx;$$

$$6.2. \int_0^{\rho} 2^4 \sin^2 \frac{\rho}{2} \cos^6 \frac{\rho}{2} dx; \int_0^{2\rho} \sin^6 x \cos^2 x dx;$$

$$6.3. \int_0^{2\rho} \sin^4 \frac{\rho}{4} \cos^4 \frac{\rho}{4} dx; \int_{\frac{\rho}{2}}^{\rho} 2^8 \cos^8 x dx;$$

$$6.4. \int_0^p \sin^8 x dx; \int_{-\frac{p}{2}}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx;$$

$$6.5. \int_0^p 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx;$$

$$\int_0^{2p} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx;$$

$$6.6. \int_0^{2p} \sin^8 x dx;$$

$$6.7. \int_0^{2p} \sin^8 x dx; \int_{-\frac{p}{2}}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx;$$

$$6.8. \int_0^p 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx;$$

$$\int_0^{2p} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx;$$

$$6.9. \int_0^{2p} \sin^8 \frac{x}{4} dx; \int_{\frac{p}{2}}^p 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx;$$

$$6.10. \int_{-p}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx; \int_0^p 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$6.11. \int_0^{2p} \cos^8 \frac{x}{4} dx; \int_0^{2p} \sin^2 x \cos^6 x dx;$$

$$6.12. \int_{\frac{p}{2}}^p 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx; \int_0^p 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx;$$

$$6.13. \int_0^p 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx; \int_0^{2p} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx;$$

### Задача 7. Вычислить определенные интегралы

$$7.1. \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx; \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$7.2. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}; \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$7.3. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}; \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx;$$

$$7.4. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx; \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx;$$

$$7.5. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}; \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx;$$

$$7.6. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}; \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$$

$$7.7. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}; \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx$$

$$7.8. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx; \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}};$$

$$7.9. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx; \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx;$$

$$7.10. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx; \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx$$

$$7.11. \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx; \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$7.12. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}; \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}};$$

$$7.13. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1} dx}{x^4};$$

**7.14. Задача 8. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость)**

$$\int_2^{\infty} \frac{xdx}{x\sqrt{x^2-1}}; \int_0^{\infty} e^{-2x} \sin x dx;$$

$$8.1. \int_0^{\infty} e^{3x} \cos x dx; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9};$$

$$8.2. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1}; \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2};$$

$$8.3. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}; \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$8.4. \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}; \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx;$$

$$8.5. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx; \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}};$$

$$8.6. \int_1^6 \frac{dx}{x \ln x}; \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3};$$

$$8.7. \int_0^1 x \ln^2 x dx; \int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2};$$

$$8.8. \int_0^{\frac{\rho}{2}} \operatorname{ctg} x dx; \int_0^1 \frac{e^x}{x^3} dx;$$

$$8.9. \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx; \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$$

$$8.10. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};$$

$$8.11. \int_0^{\frac{\rho}{2}} \ln \sin x dx; \int_0^{\frac{\rho}{2}} \ln \cos x dx;$$

**Задача 9. Исследовать сходимость интеграла**

$$9.1. \int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}};$$

$$9.2. \int_{\rho/2}^{\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x};$$

$$9.3. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4+1}};$$

$$9.4. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1-\cos \frac{2}{x}}};$$

$$9.5. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}};$$

$$9.6. \int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$9.7. \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x};$$

$$9.8. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1};$$

$$9.9. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x^{3/2}};$$

$$9.10. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 (\ln \ln x^{1/2})};$$

$$9.11. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{3/2}};$$

$$9.12. \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx;$$

$$9.13. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}};$$

$$9.14. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3};$$

$$9.15. \int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2};$$

$$9.18. \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x};$$

$$9.19. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}};$$

$$9.21. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1};$$

$$9.22. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x};$$

$$9.16. \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\ln x} - 1} dx;$$

$$9.17. \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx;$$

$$9.20. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1};$$

$$9.23. \int_1^2 \frac{dx}{\ln x};$$

$$9.24. \int_0^{\rho/2} \frac{\ln(\sin x) dx}{\sqrt{x}};$$

$$9.25. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

**Задача 10. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций**

$$10.1. y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x;$$

$$10.2. y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 3);$$

$$10.3. y = \sin x \cos^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2});$$

$$10.4. y = x^2 \sqrt{4 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 2);$$

$$10.5. y = \cos x \sin^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2});$$

$$10.6. y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2;$$

$$10.7. y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, y = 0, x = 1, x = e^3;$$

$$10.8. y = \arccos x, y = 0, x = 0;$$

$$10.9. y = (x+1)^2, y^2 = x+1;$$

$$10.10. y = (x-1)^2, y^2 = x-1;$$

$$10.11. x = \arccos y, x = 0, y = 0;$$

$$10.12. y = x \arctan x, y = 0, x = \sqrt{3};$$

$$10.13. x = \sqrt{e^y - 1}, x = 0, y = \ln 2;$$

$$10.14. x = \sqrt{e^y - 1}, x = 0, y = \ln 2;$$

$$10.15. y = \frac{1}{1+\cos x}, y = 0, x = \frac{\rho}{2}, x = -\frac{\rho}{2};$$

$$10.16. y = \cos^5 x \sin 2x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\rho}{2};$$

$$10.17. x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y;$$

$$10.18. y = \frac{e^x}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2;$$

$$10.19. x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, x = 0, y = 1;$$

$$10.20. x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0, y = 0, y = 1;$$

$$10.21. y = x^2 \cos x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\rho}{2};$$

$$10.22. x = 4 - (y-1)^2, x = y^2 - 4y + 3;$$

$$10.23. y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 4);$$

$$10.24. y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1;$$



$$10.25. y = x^2 \sqrt{8 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 2\sqrt{2});$$

**Задача 11. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями**

$$11.1. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t \\ y = 5\sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

$$y = 5(y^3 - 5);$$

$$11.2. \begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$y = 6(0 < x < 8\rho, y^3 - 6);$$

$$11.3. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}$$

$$x = 12\sqrt{3}(x^3 - 12\sqrt{3});$$

$$11.4. \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}$$

$$x = 4\sqrt{3}(y^3 - 4\sqrt{3});$$

$$11.5. \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$y = 2(0 < x < 4\rho, y^3 - 2);$$

$$11.6. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t \\ y = 4\sqrt{2} \sin^3 t \end{cases}$$

$$x = 2(x > 2);$$

$$11.7. \begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

$$y = 2(y^3 - 2);$$

$$11.8. \begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$x = 12(0 < x < 16\rho, y^3 - 12);$$

$$11.9. \begin{cases} x = 24 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$

$$x = 9\sqrt{3}(x^3 - 9\sqrt{3});$$

$$11.10. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 4\sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

$$y = 4(y^3 - 4);$$

$$11.11. \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$y = 1(0 < x < 2\rho, y^3 - 1);$$

$$11.12. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}$$

$$x = 1(x > 1);$$

$$11.13. \begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

$$y = 2\sqrt{3}(y^3 - 2\sqrt{3});$$

$$11.14. \begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$y = 15(0 < x < 20\rho, y^3 - 15)$$

$$11.15. \begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{2} \cos^3 t \\ \dot{y} = \sqrt{2} \sin^3 t \end{cases}$$

$$x = 1(x^3 - 1);$$

$$11.16. \begin{cases} \dot{x} = 3 \cos t \\ \dot{y} = 8 \sin t \end{cases}$$

$$y = 4(y > 4);$$

$$11.17. \begin{cases} \dot{x} = 6(t - \sin t) \\ \dot{y} = 6(t - \cos t) \end{cases}$$

$$y = 6(0 < t < 12\rho, y^3 \geq 6);$$

$$11.18. \begin{cases} \dot{x} = 8 \cos^3 t \\ \dot{y} = 4 \sin^3 t \end{cases}$$

$$x = 3\sqrt{3}(x^3 - 3\sqrt{3});$$

$$11.19. \begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{2} \cos t \\ \dot{y} = 3\sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

$$y = 3(y^3 - 3);$$

$$11.20. \begin{cases} \dot{x} = 6(t - \sin t) \\ \dot{y} = 6(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$y = 9(0 < x < 12\rho, y \leq 9);$$

$$11.21. \begin{cases} \dot{x} = 32 \cos^3 t \\ \dot{y} = \sin^3 t \end{cases}$$

$$x = 4(x^3 - 4);$$

$$11.22. \begin{cases} \dot{x} = 6 \cos t \\ \dot{y} = 2 \sin t \end{cases}$$

$$y = \sqrt{3}(y^3 - \sqrt{3});$$

$$11.23. \begin{cases} \dot{x} = 3(t - \sin t) \\ \dot{y} = 3(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$y = 3(0 < x < 6\rho, y^3 \geq 3);$$

$$11.24. \begin{cases} \dot{x} = 8\sqrt{2} \cos^3 t \\ \dot{y} = \sqrt{2} \sin^3 t \end{cases}$$

$$x = 4(x^3 - 40);$$

$$11.25. \begin{cases} \dot{x} = 2 \cos t \\ \dot{y} = 6 \sin t \end{cases}$$

$$y = 3(y^3 - 3);$$

**Задача 12. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах**

$$12.1. r = 4 \cos 3\varphi, r = 2(r^3 - 2);$$

- 12.2.  $r = \sqrt{3} \cos j, r = \sin j, \rho = \frac{3}{2} \cos j$ ;
- 12.3.  $r = 2 \cos j, r = 2\sqrt{3} \sin j, \rho = \frac{3}{2} \cos j$ ;
- 12.4.  $r = 6 \sin 3j, r = 3(r^3 - 3)$ ;
- 12.5.  $r = \cos j, r = \sqrt{2} \cos j, \rho = \frac{3}{4} \cos j - \frac{3}{4} \cos^3 j$ ;
- 12.6.  $r = 6 \cos 3j, r = 3(r^3 - 3)$ ;
- 12.7.  $r = \cos j, r = \sin j, \rho = \frac{3}{2} \cos j$ ;
- 12.8.  $r = \cos j, r = 2 \cos j$ ;
- 12.9.  $r = 1 + \frac{1}{2} \cos j$ ;
- 12.10.  $r = 1 + \sqrt{2} \sin j$ ;
- 12.11.  $r = \sin 6j$ ;
- 12.12.  $r = \cos j + \sin j$ ;
- 12.13.  $r = 2 \cos 6j$ ;
- 12.14.  $r = 3 \sin j, r = 5 \sin j$ ;
- 12.15.  $r = \cos 2j$ ;
- 12.16.  $r = 4 \sin 3j, r = 2(r^3 - 2)$ ;
- 12.17.  $r = 3 \sin j$ ;
- 12.18.  $r = \cos 3j$ ;
- 12.19.  $r = \frac{1}{2} + \sin j$ ;
- 12.20.  $r = \sin j, r = 2 \sin j$ ;
- 12.21.  $r = \frac{1}{2} + \cos j$ ;
- 12.22.  $r = 2 \cos j, r = 3 \cos j$ ;
- 12.23.  $r = \cos j - \sin j$ ;

$$12.24. r = 2 \sin j, r = 4 \sin j ;$$

$$12.25. r = 2 \sin j, r = 4 \sin j .$$

**Задача 13. Вычислить длины дуг кривых, системе координат, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат**

$$13.1. y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15};$$

$$13.2. y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2;$$

$$13.3. y = (1 - e^x - e^{-x}), 0 \leq x \leq 3;$$

$$13.4. y = \arccos \sqrt{x - \sqrt{x - x^2}} + 4, 0 \leq x \leq \frac{1}{2};$$

$$13.5. y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15};$$

$$13.6. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, 0 \leq x \leq \frac{\rho}{6};$$

$$13.7. y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \frac{\rho}{6};$$

$$13.8. y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{3}{4};$$

$$13.9. y = \ln \sin x, \frac{\rho}{3} \leq x \leq \frac{\rho}{2};$$

$$13.10. y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8};$$

$$13.11. y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, 0 \leq x \leq \frac{9}{16};$$

$$13.12. y = 1 - \ln \sin x, \frac{\rho}{3} \leq x \leq \frac{\rho}{2};$$

$$13.13. y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \frac{1}{9} \leq x \leq 1;$$

$$13.14. y = 12 \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4;$$

$$13.15. y = 1 - \ln \sin x, \frac{\rho}{3} \leq x \leq \frac{\rho}{2};$$

$$13.16. y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16};$$

$$13.17. y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{14};$$

$$13.18. y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24};$$

$$13.19. y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1;$$

$$13.20. y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\rho}{6};$$

$$13.21. y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9};$$

$$13.22. y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3;$$

$$13.23. y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\rho}{6};$$

$$13.24. y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8};$$

$$13.25. y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \frac{1}{4} \leq x \leq 1;$$

**Задача 14. вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями**

$$14.1. \begin{cases} \dot{x} = 2 \cos^3 t \\ \dot{y} = 2 \sin^3 t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \frac{\rho}{4};$$

$$14.2. \begin{cases} \dot{x} = 2(\cos t + t \sin t) \\ \dot{y} = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \frac{\rho}{2};$$

- 14.3.  $\begin{cases} \dot{x} = e^t (\cos t + \sin t) \\ \dot{y} = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}$   
 $\frac{\rho}{6} \leq t \leq \frac{\rho}{4};$
- 14.4.  $\begin{cases} \dot{x} = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ \dot{y} = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq \rho;$
- 14.5.  $\begin{cases} \dot{x} = e^t (\cos t + \sin t) \\ \dot{y} = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}$   
 $\frac{\rho}{6} \leq t \leq \frac{\rho}{4};$
- 14.6.  $\begin{cases} \dot{x} = 2(t - \sin t) \\ \dot{y} = 2(2 - \cos t) \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq \frac{\rho}{2};$
- 14.7.  $\begin{cases} \dot{x} = 4 \cos^3 t \\ \dot{y} = 4 \sin^3 t \end{cases}$   
 $\frac{\rho}{6} \leq t \leq \frac{\rho}{4};$
- 14.8.  $\begin{cases} \dot{x} = 8(\cos t + t \sin t) \\ \dot{y} = 8(\sin t - t \cos t) \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq \frac{\rho}{4};$
- 14.9.  $\begin{cases} \dot{x} = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ \dot{y} = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq 2\rho;$
- 14.10.  $\begin{cases} \dot{x} = 2(2 \cos t - \cos 2t) \\ \dot{y} = 2(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq \frac{\rho}{3};$
- 14.11.  $\begin{cases} \dot{x} = 4(t - \sin t) \\ \dot{y} = 4(1 - \cos t) \end{cases}$   
 $\frac{\rho}{2} \leq t \leq \frac{2\rho}{3};$
- 14.12.  $\begin{cases} \dot{x} = 8 \cos^3 t \\ \dot{y} = 8 \sin^3 t \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq \frac{\rho}{6};$
- 14.13.  $\begin{cases} \dot{x} = e^t (\cos t + \sin t) \\ \dot{y} = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq 2\rho;$
- 14.14.  $\begin{cases} \dot{x} = 6(\cos t + t \sin t) \\ \dot{y} = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq \rho;$

$$\begin{aligned}
 14.15. \begin{cases} \dot{x} = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ \dot{y} = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} & \quad 14.16. \begin{cases} \dot{x} = 2,5(t - \sin t) \\ \dot{y} = 2,5(1 - \cos t) \end{cases} \\
 0 \leq t \leq \frac{\rho}{2}; & \quad \frac{\rho}{2} \leq t \leq \rho;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14.17. \begin{cases} \dot{x} = 6 \cos^3 t \\ \dot{y} = 6 \sin^3 t \end{cases} & \quad 14.18. \begin{cases} \dot{x} = e^t (\cos t + \sin t) \\ \dot{y} = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} \\
 0 \leq t \leq \frac{\rho}{3}; & \quad \frac{\rho}{2} \leq t \leq \rho;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14.19. \begin{cases} \dot{x} = 3(\cos t + t \sin t) \\ \dot{y} = 3(\sin t - t \cos t) \end{cases} & \quad 14.20. \begin{cases} \dot{x} = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ \dot{y} = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \\
 0 \leq t \leq \frac{\rho}{3}; & \quad 0 \leq t \leq \frac{\rho}{3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14.21. \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t \\ \dot{y} = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t \end{cases} & \quad 14.22. \begin{cases} \dot{x} = 10 \cos^3 t \\ \dot{y} = 10 \sin^3 t \end{cases} \\
 \frac{\rho}{2} \leq t \leq \frac{2\rho}{3}; & \quad 0 \leq t \leq \frac{\rho}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14.23. \begin{cases} \dot{x} = 9(t - \sin t) \\ \dot{y} = 3(1 - \cos t) \end{cases} & \quad 14.24. \begin{cases} \dot{x} = 4(\cos t + t \sin t) \\ \dot{y} = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases} \\
 \rho \leq t \leq 2\rho; & \quad 0 \leq t \leq 2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14.25. \begin{cases} \dot{x} = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ \dot{y} = 2(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \\
 0 \leq t \leq 2\rho;
 \end{aligned}$$

**Задача 15. Вычислить длины дуг кривых,  
заданных уравнениями в полярных координатах**

- 15.1.  $r = \sin j, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{4}$ ;      15.2.  $r = 8 \cos j, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{4}$ ;
- 15.3.  $r = 5j, 0 \leq j \leq \frac{12}{5}$ ;      15.4.  $r = 8(1 - \cos j), -\frac{2}{3} \leq j \leq 0$ ;
- 15.5.  $r = 7(1 - \sin j), -\frac{\rho}{6} \leq j \leq \frac{\rho}{6}$ ;      15.6.  $r = 12e^{\frac{12j}{15}}, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{3}$ ;
- 15.7.  $r = 2 \sin j, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{6}$ ;      15.8.  $r = 6 \cos j, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{3}$ ;
- 15.9.  $r = 2j, 0 \leq j \leq \frac{12}{5}$ ;
- 15.10.  $r = 2(1 - \cos j), -\rho \leq j \leq -\frac{\rho}{2}$ ;
- 15.11.  $r = 2(1 - \cos j), -\rho \leq j \leq \frac{\rho}{2}$ ;      15.12.  $r = 6e^{\frac{12j}{5}}, -\frac{\rho}{2} \leq j \leq \frac{\rho}{2}$ ;
- 15.13.  $r = \sqrt{2}e^j, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{3}$ ;      15.14.  $r = 2 \cos j, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{6}$ ;
- 15.15.  $r = 8 \sin j, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{4}$ ;      15.16.  $r = 4j, 0 \leq j \leq \frac{3}{4}$ ;
- 15.17.  $r = 6(1 + \sin j), -\frac{\rho}{2} \leq j \leq 0$ ;      15.18.  $r = 3e^{\frac{3j}{4}}, -\frac{\rho}{2} \leq j \leq \frac{\rho}{2}$ ;
- 15.19.  $r = 3e^{\frac{3j}{4}}, 0 \leq j \leq \frac{\rho}{3}$ ;      15.20.  $r = 3j, 0 \leq j \leq \frac{4}{3}$ ;
- 15.21.  $r = 3(1 + \sin j), \frac{\rho}{6} \leq j \leq 0$ ;      15.22.  $r = 5e^{\frac{5j}{12}}, -\frac{\rho}{2} \leq j \leq \frac{\rho}{2}$ ;
- 15.23.  $r = 1 - \sin j, -\frac{\rho}{2} \leq j \leq -\frac{\rho}{6}$ ;      15.24.  $r = \sqrt{2}e^j, -\frac{\rho}{2} \leq j \leq \frac{\rho}{2}$ ;
- 15.25.  $r = 3e^{\frac{3j}{4}}, -\frac{\rho}{2} \leq j \leq \frac{\rho}{2}$ ;      15.25.  $r = 5(1 - \cos j), -\frac{\rho}{3} \leq j \leq 0$ ;



**Задача 16. Вычислить объемы тел,  
ограниченных поверхностями**

$$16.1. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 6, z = 0;$$

$$16.2. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16;$$

$$16.3. z = 2x^2 + 18y^2, z = 6;$$

$$16.4. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = 0, z = 2;$$

$$16.5. \frac{x^2}{27} + y^2 = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0 (y^3 = 0);$$

$$16.6. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 5, z = 0;$$

$$16.7. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20;$$

$$16.8. x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3;$$

$$16.9. z = 4x^2 + 9y^2, z = 6;$$

$$16.10. \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0, (y^3 = 0);$$

$$16.11. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 4, z = 0;$$

$$16.12. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3;$$

$$16.13. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20;$$

$$16.14. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4;$$

$$16.15. z = x^2 + 5y^2, z = 5;$$

$$16.16. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, z = y\sqrt{3}, z = 0 (y \neq 0);$$

$$16.17. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0;$$

$$16.18. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0$$

$$16.19. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 0, z = 2;$$

$$16.20. z = 2x^2 + 8y^2, z = 4;$$

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	1
1. Линейные пространства. Разложение векторов по базису...	1
2. Решение линейных систем уравнений.....	5
3. Подпространства, образованные решениями линейной однородной системы (ЛОС) уравнений. Нахождение общего решения ЛОС.....	10
4. Линейные преобразования и действия над ними.....	14
5. Собственные значения и собственные векторы матрицы...	21
6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду..	30
Заключе- ние.....	33
Библиографический список .....	33

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электри-

фикация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы  
обучения

Часть 1

Составители: Федотенко Галина Федоровна,  
Катрахова Алла Анатольевна,  
Купцов Валерий Семенович,  
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.10. 2008.  
Уч.-изд. л. 2,1 «С»

ГОУВПО «Воронежский государственный технический  
университет»  
394026 Воронеж, Московский просп., 14