

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ по курсам
«Математика» и «Специальные главы математики»
для студентов направлений 150100
«Материаловедение и технология материалов»,
222900 «Нанотехнологии и микросистемная техника» и
223200 «Техническая физика» очной формы обучения

Воронеж 2012

Составители: канд. техн. наук С.А. Кострюков,
канд. техн. наук В.В. Пешков,
канд. физ.-мат. наук Г.Е. Шунин

УДК 519.6+681.3.06

Основные математические операции: методические указания к выполнению лабораторных работ по курсам «Математика» и «Специальные главы математики» для студентов направлений 150100 «Материаловедение и технология материалов», 222900 «Нанотехнологии и микросистемная техника» и 223200 «Техническая физика» очной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. С.А. Кострюков, В.В. Пешков, Г.Е. Шунин. Воронеж, 2012. 34 с.

В методических указаниях рассмотрены способы выполнения основных математических операций – дифференцирования, интегрирования, разложения в ряды, вычисления сумм, пределов и др. – с помощью популярного пакета символьной математики Maple. Имеется много задач и примеров.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям 150100.62 «Материаловедение и технология материалов», 222900.62 «Нанотехнологии и микросистемная техника» и 223200.62 «Техническая физика», профилям «Физическое материаловедение», «Конструирование и производство изделий из композиционных материалов», «Физическая электроника» и «Компоненты микро- и наносистемной техники» по дисциплинам «Математика» и «Специальные главы математики».

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе Microsoft Word 2003 и содержатся в файле BasOper.doc.

Ил. 3. Библиогр.: 8 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2012

Лабораторная работа №3

ВАЖНЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Любая система компьютерной математики должна уметь выполнять базовые действия математического анализа, такие как дифференцирование, интегрирование, вычисление пределов, разложение функций в ряды и т.д. Конечно, такая мощная система, как Maple, здесь не является исключением и располагает многообразными и развитыми средствами по решению подобных задач. В большинстве случаев соответствующие Maple-функции находятся в ядре системы и не требуют подключения пакетов расширения.

1. Д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е

Вычисление производной функции $f(x)$ может быть оформлено через Maple-функцию **diff**, первый аргумент которой есть заданная функция, а второй – переменная дифференцирования. Например, для нахождения производной функции $f(x) = x^2 \arctg(x-2)$ используется команда:

> **diff(x^2*arctan(x-2), x);**

$$2x \arctan(x-2) + \frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

Отметим, что для этой функции **diff**, как и для многих других функций Maple, существует так называемая инертная форма. Последняя отличается от основной формы только первой буквой – в инертной форме она заглавная, т.е. вызов осуществляется с помощью **Diff**. При этом непосредственного вычисления производной она не производит, но исходные данные выводит в математической нотации:

> **Diff(x^2*arctan(x-2), x);**

$$\frac{d}{dx} (x^2 \arctan(x-2))$$

Если справа от знака равенства записать функцию **diff**, а слева ту же самую функцию, но с большой буквы (т.е. в инертной форме), то получим вывод результата в весьма наглядном виде:

```
> Diff(x^2*arctan(x-2), x) = diff(x^2*arctan(x-2), x) ;
```

$$\frac{d}{dx} (x^2 \arctan(x-2)) = 2x \arctan(x-2) + \frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

Действительно, в строке вывода видим: производная заданной функции равна такой-то функции. Этот прием, улучшающий читабельность математических документов, довольно часто используется при вычислениях в Maple.

Следует сказать, что в пакете Maple существует особая функция **value**, с помощью которой в любой момент инертную функцию можно превратить в вычисляемую. Применительно к функции **Diff** такое действие приведет к вычислению производной:

```
> r:=Diff(x^2*arctan(x-2), x) : # r – вспомогательная  
переменная для хранения Diff
```

```
> value(r) ;
```

$$2x \arctan(x-2) + \frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

Приведенный чуть выше способ вывода, когда слева стоит условие, а справа результат, можно получить, записав:

```
> r=value(r) ;
```

$$\frac{d}{dx} (x^2 \arctan(x-2)) = 2x \arctan(x-2) + \frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

Производную можно брать от вектор-функции. К примеру, вычисление производной от вектора, компонентами которого являются функции $\sin^2 x$, x^n , e^{ax} , можно оформить так:

```
> Diff([sin(x)^2, x^n, exp(a*x)], x) = diff([sin(x)^2,  
x^n, exp(a*x)], x) ;
```

$$\frac{d}{dx} [\sin(x)^2, x^n, e^{(a x)}] = \left[2 \sin(x) \cos(x), \frac{x^n n}{x}, a e^{(a x)} \right]$$

Производная порядка выше первого задается добавлением к имени переменной комбинации **\$m**, где **m** – число, равное

порядку. Найдем производную восьмого порядка функции $x^2 \ln(x-2)$:

> **Diff**($x^2 \ln(x-2)$, $x\$8$)=**diff**($x^2 \ln(x-2)$, $x\$8$) ;

$$\frac{d^8}{dx^8}(x^2 \ln(x-2)) = -\frac{6720}{(x-2)^6} + \frac{11520x}{(x-2)^7} - \frac{5040x^2}{(x-2)^8}$$

Можно попытаться упростить этот результат:

> **simplify**(") ;

$$\frac{d^8}{dx^8}(x^2 \ln(x-2)) = -\frac{240(x^2 - 16x + 112)}{(x-2)^8}$$

Функция **diff** также пригодна для вычисления частных производных. Частная производная по x функции двух переменных $f(x,y)=\cos(x/y+1)x^2y$:

> **diff**(**cos**($x/y+1$)* x^2*y , x) ;

$$-\sin\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2 + 2\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)xy$$

Частная производная по y той же функции (с использованием инертной формы):

> **Diff**(**cos**($x/y+1$)* x^2*y , y)=**diff**(**cos**($x/y+1$)* x^2*y , y) ;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2y\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{y}+1\right)x^3}{y} + \cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2$$

Частная производная по y 2-го порядка:

> **Diff**(**cos**($x/y+1$)* x^2*y , $y\$2$)=**diff**(**cos**($x/y+1$)* x^2*y , $y\$2$) ;

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2y\right) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^4}{y^3}$$

Смешанная частная производная:

> **Diff**(**cos**($x/y+1$)* x^2*y , x, y)=**diff**(**cos**($x/y+1$)* x^2*y , x, y) ;

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2y\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^3}{y^2} + \frac{2\sin\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2}{y} + 2\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x$$

Для операций дифференцирования также может использоваться оператор **D**. Отметим, что здесь под термином «оператор» понимается специфический объект Maple, лишь в неко-

тором смысле напоминающий классический математический оператор. В форме $\mathbf{D}(\mathbf{f})(\mathbf{x})$ результат действия этого объекта аналогичен вызову $\mathbf{diff}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$. В записи $\mathbf{D}(\mathbf{f})$ он выдает производную функции $\mathbf{f}$ в символической форме или как отображение аргумент $\rightarrow$ значение функции. В частности,

$> \mathbf{D}(\cos^2 + \tan);$

$$-2 \sin \cos + 1 + \tan^2$$

$> \mathbf{D}(\sin @ \cos);$ # оператор $\mathbf{D}$ действует на композицию двух функций, т.е. на $\sin(\cos)$

$$-\cos^{(2)} \sin$$

(Здесь $\cos^{(2)}$ означает функцию $\cos(\cos \dots)$ – «косинус от косинуса»).

$> \mathbf{D}(\sin * \cos);$

$$\cos^2 - \sin^2$$

$> \mathbf{D}(\ln);$ # пример вывода в форме отображения

$$a \rightarrow \frac{1}{a}$$

Рассмотрим одно важное применение оператора $\mathbf{D}$. Зададим функцию $\sin x^2$:

$> \mathbf{f} := \mathbf{x} \rightarrow \sin(\mathbf{x}^2);$

Поставим целью определить функцию $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, в каждой точке равную производной функции $\mathbf{f}$. Речь идет о Maple-функции, к которой потом можно было обращаться как к обычной математической функции, т.е. вычислять значение при заданном аргументе, строить графики, дифференцировать и т.д.? Такой, казалось бы, очевидный способ не приводит к успеху:

$> \mathbf{u} := \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{diff}(\mathbf{fun}(\mathbf{x}), \mathbf{x});$ # задание переменной $\mathbf{u}$ как функции $x \rightarrow f'(x)$

$$\mathbf{u} := x \rightarrow \mathbf{diff}(\mathbf{fun}(x), x)$$

$> \mathbf{u}(2.);$ # попытка вычисления значения функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в точке $x=2$

Error, (in u) wrong number (or type) of parameters in function diff

Сообщение об ошибке. Это свидетельствует о том, что Maple не воспринимает **u** как функцию аргумента **x**. Введение вспомогательной переменной **t** тоже не обеспечивает нужного результата:

```
> t:=diff(fun(x),x); u:=x->t;
      t := 2 cos(x^2) x
      u := x -> t
> u(2.);
      2 cos(x^2) x
```

В последнем выводе не происходит вычисления функции, значит, по-прежнему Maple не рассматривает $u(2)$ как значение функции $2\cos(x^2)x$ в точке $x=2$.

Проблема полностью решается с помощью оператора **D**:

```
> D(f); # производная функции f в виде отображения x -> f'(x)
      x -> 2 cos(x^2) x
> u:=D(f); # переменная u для хранения этого отображения
      u := x -> 2 cos(x^2) x
> u(2.); # значение функции f'(x) в точке x=2
      -2.614574484
```

```
> plot({f(x),u(x)},x=0..5); # построение графиков
функций f(x) и f'(x) при 0 ≤ x ≤ 5.
```

Теперь видно, что **u(x)** как объект Maple, созданный для хранения производной, обладает всеми требуемыми свойствами, и может использоваться в дальнейших вычислениях наряду с другими объектами Maple.

Еще примеры на использование оператора **D**:

```
> fun:=x->x+2*x*exp(-x^2); # задание функции одной переменной
> D(D(fun)); # производная от производной
      x -> -12 x e(-x^2) + 8 x^3 e(-x^2)
```

> **D@@5 (fun) ; #** пятая производная

$$x \rightarrow 120 e^{(-x^2)} - 720 x^2 e^{(-x^2)} + 480 x^4 e^{(-x^2)} - 64 x^6 e^{(-x^2)}$$

> **D(fun) (2) ; #** производная в точке $x=2$

$$1 - 14 e^{(-4)}$$

> **evalf (") ; #** то же в форме числа с плавающей точкой

$$0.7435810555$$

> **D(fun) (2.) ; #** то же самое, что одновременно две последние команды

$$0.7435810558$$

> **g:=(x,y,z)->x*exp(y)+y*sqrt(z^1+1) ; #** задание функции трех переменных

$$g := (x, y, z) \rightarrow x e^y + y \sqrt{z + 1}$$

> **D[2] (g) ; #** частная производная по второй переменной, т.е. по y

$$(x, y, z) \rightarrow x e^y + \sqrt{z + 1}$$

Для вычисления производных неявно заданных функций используется функция **implicitdiff**. Следующие примеры поясняют ее применение.

> **f := y^x + ln(y)=1 ; #** вводится неявная функция и присваивается переменной **f**

$$f := y^x + \ln(y) = 1$$

> **implicitdiff(f,y,x) ; #** производная функции $y(x)$ по x

$$-\frac{y^x y \ln(y)}{y^x x + 1}$$

> **implicitdiff(f,x,y) ; #** производная функции $x(y)$ по y

$$-\frac{y^x x + 1}{y^x \ln(y) y}$$

> **implicitdiff(f,y,x,x) ; #** вторая производная функции $y(x)$ по x

$$\frac{y^x y \ln(y) (-\ln(y) + 2 (y^x)^2 x + 2 y^x + (y^x)^2 x \ln(y) + y^x \ln(y))}{(y^x)^3 x^3 + 3 x^2 (y^x)^2 + 3 y^x x + 1}$$

Многие операции векторного анализа, такие, как градиент, ротор, дивергенция, лапласиан, сводятся к вычислению частных производных. В более старших версиях Maple (начиная с Maple 7) имеется специализированный пакет расширения **Vector Calculus**, функции которого реализуют как упомянутые векторные операции, так и множество других. В Maple V данные операции могут быть запрограммированы.

Пусть, например, требуется вычислить градиент поля $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$ в точке $P(1, 2, -3)$. Определяем скалярное поле через переменную u :

```
> u:=2*x^2-4*x*y+y^2-2*y*z+6*z;
```

$$u := 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$$

Вычисляем градиент как вектор, компоненты которого есть частные производные:

```
> grad:=[diff(u,x),diff(u,y),diff(u,z)];
```

$$\text{grad} := [4x - 4y, -4x + 2y - 2z, -2y + 6]$$

Подстановкой находим числовое значение вектора в нужной точке.

```
> t:=subs(x=1,y=2,z=-3,grad);
```

$$t := [-4, 6, 2]$$

Найдем еще модуль вектора градиента:

```
> g:=sqrt(t[1]^2+t[2]^2+t[3]^2): g=evalf(g);
```

$$2\sqrt{14} = 7.483314774$$

Вычисление ротора векторного поля $\vec{a}$

```
> a:=[x/sqrt(x^2+y^2),y/sqrt(x^2+y^2),
(z*z+y*y+x^2)^(1/2)];
```

$$a := \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

```
> rot:=[diff(a[3],y)-diff(a[2],z),diff(a[1],z)-
diff(a[3],x),diff(a[2],x)-diff(a[1],y)];
```

$$\text{rot} := \left[\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, 0 \right]$$

2. Интегрирование

а) Неопределенные интегралы

Для вычисления неопределенных интегралов Maple предоставляет функцию **int**. При этом если аналитического значения интеграла не существует, возвращается исходная запись.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int ax^n dx$. Имеем

```
> int(a*x^n, x);
```

$$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$$

Существует инертная форма функции **int**:

```
> Int(ln(x)^3, x);
```

$$\int \ln(x)^3 dx$$

В таком представлении интеграл записывается, но не вычисляется, а если его все же требуется вычислить, то используется функция **value**:

```
> value(");
```

$$\ln(x)^3 x - 3 x \ln(x)^2 + 6 x \ln(x) - 6 x$$

Напомним, что символ " («кавычки») означает подстановку последнего вычисленного результата. Вместо него может стоять переменная, которой предварительно была присвоена инертная функция **Int**:

```
> t:=Int(ln(x)^3, x): value(t);
```

$$\ln(x)^3 x - 3 x \ln(x)^2 + 6 x \ln(x) - 6 x$$

Как и с функцией **diff**, весьма наглядный способ представления результата обеспечивается, когда в одной строке используется функция **int** вместе со своим аналогом в инертной форме **Int**. Этот способ вполне очевиден из примеров:

```
> Int(x^2*sin(x), x)=int(x^2*sin(x), x);
```

$$\int x^2 \sin(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2 \cos(x) + 2 x \sin(x)$$

```
> Int(sin(x)/x, x)=int(sin(x)/x, x); # эта функция называется интегральный синус
```

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx = \text{Si}(x)$$

Следует помнить, что хотя в аналитических выражениях интегралов отсутствует аддитивная произвольная постоянная C , она должна там подразумеваться.

В некоторых случаях Maple не может взять интеграл, тогда с помощью функций **taylor** и **convert** можно попытаться представить результат в виде полинома умеренной степени, что демонстрирует следующий пример

> **w:=int(exp(-sin(x)),x); # интеграл присваивается переменной w**

$$w := \int e^{(-\sin(x))} dx$$

> **convert(taylor(w,x=0,8),polynom); # о параметрах функции taylor см. ниже**

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{1680}x^7 - \frac{1}{720}x^8$$

Разумеется, что в этом случае решение является приближенным, но оно все же есть и с ним можно работать, например, строить график функции, представляющей данный интеграл.

б) Определенные интегралы

Для вычисления определенных интегралов используются те же функции **int** и **Int**, в которых надо указать пределы интегрирования, например **x=a..b**, если интегрируется функция переменной **x**.

> **Int(sin(x)/x,x=a..b)=int(sin(x)/x,x=a..b);**

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \text{Si}(b) - \text{Si}(a)$$

> **int(sin(x)/x,x=0..1);**
Si(1)

Maple предпочитает выводить результат в таком как бы незавершенном виде, так как считает его более точным значением,

чем в виде числа с плавающей точкой. Однако если требуется именно численное значение интеграла, причем с любой заданной точностью, можно применить функцию **evalf**. Существует и другая возможность сразу получить численный результат, что показано в следующем примере:

> **int(sin(x)/x, x=0..1);** # вместо целого числа 1 записано действительное 1.

0.9460830704

(т.е. один или два предела интегрирования записываются в виде числа с плавающей точкой).

Еще примеры – несобственные интегралы:

> **Int(x*ln(x), x=0..1)=int(x*ln(x), x=0..1);**

$$\int_0^1 x \ln(x) dx = -\frac{1}{4}$$

> **Int(x*exp(-x), x=0..infinity)=int(x*exp(-x), x=0..infinity);**

$$\int_0^{\infty} x e^{(-x)} dx = 1$$

> **Int(1/(x^2+6*x+12), x=-infinity..infinity)=int(1/(x^2+6*x+12), x=-infinity..infinity);**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

Последние два примера показывают, что пределами интегралов может выступать бесконечность, обозначаемая как **infinity**.

Возможна ситуация, когда определенный интеграл аналитически не вычисляется и не выражается даже в виде специальных функций, которые в очень большом количестве имеются в базе данных системы. Например,

> **int(exp(-sin(x)), x=0..1);**

$$\int_0^1 e^{(-\sin(x))} dx$$

В этом случае использование функции **evalf** позволяет посчитать интеграл численно (при этом задействуются именно численные методы интегрирования):

```
> evalf(");
```

0.6513249125

Другой пример:

```
> Int(exp(-x)/sqrt(x^2+1), x=0..exp(1)) =
evalf(int(exp(-x)/sqrt(x^2+1), x=0..exp(1)));
```

$$\int_0^e \frac{e^{(-x)}}{\sqrt{x^2+1}} dx = 0.7366659769$$

Следует отметить, что если **evalf** применить к инертной функции **Int**, то это так же, как и в случае комбинации с **int**, вызовет численное вычисление интеграла, однако при этом есть возможность указать точность (разрядность сетки) и метод интегрирования. Например,

```
> evalf(Int((1-exp(-x^2))/x, x=0..100, 15, _NCrue));
```

4.89377801843886

в) Интегралы с переменными пределами интегрирования

Определим функцию $f(x) = \int_0^x e^{-t} \sin 2\pi t dt$, зависящую от

верхнего предела интеграла:

```
> f:=x->int(exp(-t)*sin(2*Pi*t), t=0..x);
```

$$f := x \rightarrow \int_0^x e^{(-t)} \sin(2 \pi t) dt$$

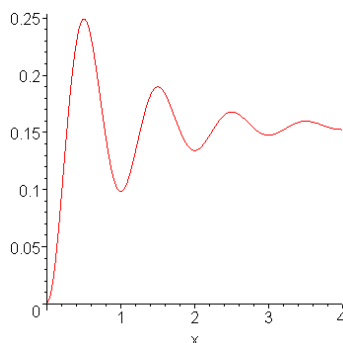
Теперь можно выполнять любые допустимые действия с этой функцией, например, вычислить её значение в конкретной точке:

```
> f(2.);
```

0.1342159345

или построить график

```
> plot(f(x), x=0..4);
```



г) Повторные интегралы

Повторные интегралы имеют вид

$$\int_a^b dx_n \int_{\varphi_1(x_n)}^{\varphi_2(x_n)} dx_{n-1} \dots \int_{\psi_1(x_2, \dots, x_n)}^{\psi_2(x_2, \dots, x_n)} dx_1.$$

Вычисление этих интегралов сводится к рекурсивному вызову функции **int** (либо **Int**). Например, если интегрируется функция двух переменных, можно использовать команды

> **Int(Int(arctan(y/x) / (x*y), x=2.0..4.4), y=-2..3.0) ;**

$$\int_{-2}^{3.0} \int_{2.0}^{4.4} \frac{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{x y} dx dy$$

> **evalf(") ;**

1.257050378

Обратите внимание в приведенном примере на форму записи интеграла, которую легко принять за двойной интеграл. Тем не менее, это интеграл повторный, причем сначала интегрирование производится по x , а затем по y .

Повторный интеграл от функции трех переменных:

> **int(int(int((x^2+y^2)*z, z=0..a), y=0..a), x=0..a) ;**

$$\frac{a^6}{3}$$

Пример повторного интеграла, у которого внутренний интеграл имеет переменные пределы:

> **p:=Int(Int(2-x-y, x=sqrt(y)..y^2), y=0..1): p=value(p) ;**

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{y^2} 2-x-y dx dy = \frac{-11}{30}$$

Как известно, вычисление кратных интегралов сводится к повторным интегралам.

3. Вычисление пределов функций

Для вычисления предела функции в точке $x=a$ в пакете Maple используются функции

```

limit(f,x=a);          limit(f,x=a,dir);
Limit(f,x=a);          Limit(f,x=a,dir);

```

Здесь **f** – алгебраическое выражение, **x** – имя переменной, **dir** – параметр, указывающий направление поиска предела (**right** – справа, **left** – слева, **real** – в области вещественных значений, **complex** – в области комплексных значений). Значением **a** может быть бесконечность.

Внимательно разберите примеры.

```
> Limit(sin(x)/x,x=0)=limit(sin(x)/x,x=0); # первый  
замечательный предел
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

```
> Limit((x-2)/x)^x,x=infinity)=limit((x-2)/x)^x,  
x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^x = e^{(-2)}$$

```
> Limit(2^(1/x), x=0, left)=limit(2^(1/x), x=0, left);  
# левосторонний предел
```

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

```
> Limit(2^(1/x), x=0, right)=limit(2^(1/x), x=0, right);  
# правосторонний предел
```

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \infty$$

```
> Limit(((x-2)/(1+x))^x,x=-infinity)=  
limit(((x-2)/(1+x))^x,x=-infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \left(\frac{-2+x}{x+1} \right)^x = \mathbf{e^{(-3)}}$$

```
> Limit((2^x-1)/x,x=0)=limit((2^x-1)/x,x=0);
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln(2)$$

4. Разложение функций в ряды

Для разложения функции или выражения в ряд служат Maple-функции

series(expr,eqn) ; **taylor(expr,eqn) ;**
series(expr,eqn,n) ; **taylor(expr,eqn,n) ;**

Функции **series** осуществляют разложение в степенной ряд, функции **taylor** – в ряд Тейлора. Здесь **expr** – разлагаемое в ряд выражение, **eqn** – имя переменной (например, **x**) или равенство в виде **x=a**, **n** – целое положительное число, определяющее порядок разложения (при отсутствии **n** полагается равным 6). При задании **eqn** в виде **x=a** разложение ищется относительно точки $x=a$. Если вместо **x=a** указано просто **x**, разложение осуществляется в окрестности точки $x=0$.

Разложение получается в форме степенного многочлена, порядок которого определяется параметром **n** (на единицу меньше). Остаточная погрешность задается членом вида $O(x-a)^n$. При точном разложении этот член отсутствует. В общем случае для его удаления можно использовать функцию **convert**.

> **series(sinh(x),x=0) ;** # разложение в ряд по степеням x гиперболического синуса

$$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

> **series(sinh(x),x=1,3) ;** # первые три члена разложения $\sinh x$ по степеням $x-1$

$$\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\frac{1}{e}\right) + \left(\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}\frac{1}{e}\right)(x-1) + \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}\frac{1}{e}\right)(x-1)^2 + O((x-1)^3)$$

> **series(sinh(x),x=1.,3) ;** # то же самое, но коэффициенты в виде десятичных дробей

$$1.175201193 + 1.543080635(x-1.) + 0.5876005967(x-1.)^2 + O((x-1.)^3)$$

> **series(sin(x)/x,x,10);** # члены разложения в ряд функции $\sin x/x$ по степеням 0, 1, ..., 9

$$1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^8 + O(x^9)$$

> **convert(",polynom);** # отбрасывается остаточный член

$$1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^8$$

> **2/sqrt(Pi)*Int(exp(-t^2),t=0..x)=**

2/sqrt(Pi)*int(exp(-t^2),t=0..x); # это так называемая функция ошибок

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \operatorname{erf}(x)$$

> **s:=taylor(erf(x),x,9);** # разложение этой функции в ряд Маклорена

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}x - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}x^3 + \frac{1}{5\sqrt{\pi}}x^5 - \frac{1}{21\sqrt{\pi}}x^7 + O(x^9)$$

> **evalf(convert(s,polynom),5);** # то же разложение в числовом формате

$$1.1283x - 0.37612x^3 + 0.11283x^5 - 0.026865x^7$$

Есть в пакете Maple и другие встроенные функции, позволяющие получить разложения в ряд математической функции. Например,

asympt – асимптотическое разложение,

laurent – разложение в ряд Лорана (доступна при подключении пакета **numapprox**).

> **asympt(x/(1-x-x^2),x);**

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} - \frac{5}{x^5} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

> **with(numapprox):**

> **laurent(1/(x*sin(x)), x=0);**

$$x^{-2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{360}x^2 + O(x^3)$$

5. Вычисление сумм и произведений

Для вычисления сумм и произведений последовательно-стей могут использоваться функции:

```
sum(f,k);                      product(f,k);
sum(f,k=m..n);                product(f,k=m..n);
sum(f,k=alpha);               product(f,k=alpha);
```

Здесь **f** – функция, задающая члены суммируемого ряда, **k** – индекс суммирования, **m** и **n** – целочисленные пределы изменения **k**, **alpha** – выражение формата **RootOf**. Значение **n** может быть равно бесконечности (**infinity**).

```
> sum(k^2, k=0..4);
```

30

```
> Sum(k^2, k=0..4)=sum(k^2, k=0..4);
```

$$\sum_{k=0}^4 k^2 = 30$$

Разработчики Maple рекомендуют при использовании упомянутых функций заключать **k** и **f** в прямые кавычки, например **sum('f', 'k'=m..n)**. Это предотвратит возможную ошибку, связанную с предшествующим присваиванием переменной **k** определенного значения.

```
> sum('k^2', 'k'=0..n);
```

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}$$

```
> sum('a[k]*x^k', 'k'=0..4);
```

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

```
> sum('1/k!', 'k'=0..infinity);
```

e

```
> r:=Sum(Sum(k^2,k=1..m),m=1..N):
```

```
r:=factor(simplify(value(r)));
```

$$\sum_{m=1}^N \left(\sum_{k=1}^m k^2 \right) = \frac{N(N+2)(N+1)^2}{12}$$

Обратите внимание на следующий пример, в котором второй аргумент функции `sum` задан просто как `'k'`:

```
> t:=sum(' -exp(-k) ', 'k');
```

$$t := \frac{e}{(-1 + e)e^k}$$

В справочной системе Maple такой вид суммы именуется как `indefinite sum` («неопределенная сумма»). Если этот результат обозначить как $t(k)$, то выполняются свойства

$$t(k+1) - t(k) = f(k), \quad t(n+1) - t(m) = \sum_{k=m}^n f(k),$$

где $f(k)$ – суммируемая последовательность – первый аргумент функции `sum`. Проверим последнее свойство.

```
> subs(k=n+1, t) - subs(k=1, t);
```

$$\frac{e}{(-1 + e)e^{(n+1)}} - \frac{1}{-1 + e}$$

```
> sum(' -exp(-k) ', 'k'=1..n);
```

$$\frac{e}{(-1 + e)e^{(n+1)}} - \frac{1}{-1 + e}$$

По смыслу `indefinite sum` во многом напоминает частичную сумму S_{n+1} ряда с общим членом $f(k)$ (продумайте этот вопрос). Произведения членов последовательности строятся аналогично:

```
> product(k^2, k=1..4);
```

$$576$$

```
> Product(n+k, k=0..m) = product(n+k, k=0..m);
```

$$\prod_{k=0}^m (n+k) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n)}$$

```
> product(k, k=RootOf(x^3-2));
```

$$2$$

6. Разные математические операции

- **convert/parfrac** – разложение рациональной функции на простые дроби

```
> (x^5+1)/(x^4-x^2)=convert((x^5+1)/(x^4-x^2),  
parfrac,x);
```

$$\frac{x^5+1}{x^4-x^2} = x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2}$$

- **residue** – нахождение вычета функции в заданной точке

```
> readlib(residue); # загрузка данной функции
```

```
> residue(1/(1-exp(-x)), x=0); # вычет функции (1-e-x)-1 в  
точке x=0
```

1

- **laplace, invlaplace** – прямое и обратное преобразования Лапласа

Краткая теоретическая справка. Если функция $f(t)$ удовлетворяет некоторым общим условиям ($f(t)$ – оригинал с показателем роста μ), то для неё определено преобразование Лапласа $\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(p)$, вычисляемое по формуле

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Функция $F(p)$ комплексной переменной p (изображение) является аналитической в области $\operatorname{Re} p > \mu$. Обратное действие, т.е. восстановление оригинала по известному изображению, называется обратным преобразованием Лапласа, символически обозначаемое $\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t)$. Теоретически оригинал через изображение определяется однозначно; связь $f(t)$ и $F(p)$ при этом дается формулой Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (\gamma > \mu),$$

где интегрирование осуществляется на комплексной плоскости p вдоль любой прямой, параллельной мнимой оси и проходящей правее точки $(\mu, 0)$. На практике непосредственно пользоваться этой формулой трудно, поэтому для нахождения $f(t)$ применяют специальные приёмы, например, с помощью вычетов.

Примеры на использование преобразования Лапласа:

> **restart;**

> **with(inttrans):** # подключение пакета расширения

> **laplace(y(t)=t^2+sin(t), t, p);** # прямое преобразование Лапласа от функции $y(t) = t^2 + \sin t$

$$\text{laplace}(y(t), t, p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2 + 1}$$

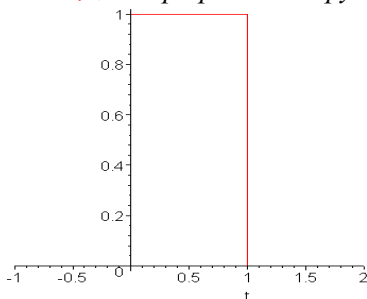
> **laplace(diff(y(t), t\$2) - y(t) = sin(2*t), t, p);** # преобразование Лапласа от обеих частей дифф-го уравнения

$$p(p \text{laplace}(y(t), t, p) - y(0)) - D(y)(0) - \text{laplace}(y(t), t, p) = \frac{2}{p^2 + 4}$$

> **f:=t->Heaviside(t)-Heaviside(t-1);** # задана кусочная функция – единичный импульс

$$f := t \rightarrow \text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - 1)$$

> **plot(f(t), t=-1..2);** # график этой функции



> **laplace(f(t), t, p);**); # преобразование Лапласа от данной кусочной функции

$$\frac{1}{p} - \frac{e^{(-p)}}{p}$$

> **invlaplace** ((p-1) / (p^2+2*p+2), p, t); # обратное преобразование Лапласа

$$e^{(-t)} \cos(t) - 2 e^{(-t)} \sin(t)$$

С помощью преобразования Лапласа можно решать определенный класс линейных дифференциальных и интегральных уравнений. В качестве примера приведем алгоритм решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Пусть требуется решить задачу Коши $y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos \frac{t}{2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Предварительно подключив пакет расширения, зададим уравнение и присвоим его переменной **r1**:

> **with(inttrans)** :
 > **r1:=diff(y(t), t\$2) - 3*diff(y(t), t) + 2*y(t) =**
2*cos(t/2)*exp(t);

$$r1 := \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) - 3 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 2 y(t) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^t$$

Далее найдём преобразование Лапласа от обеих частей этого уравнения:

> **r2:=laplace(r1, t, p);**

$$r2 := p(p \operatorname{laplace}(y(t), t, p) - y(0)) - D(y)(0) - 3 p \operatorname{laplace}(y(t), t, p) + 3 y(0) + 2 \operatorname{laplace}(y(t), t, p) = \frac{8(p-1)}{4(p-1)^2 + 1}$$

Это громоздкое выражение целесообразно более компактно. Вместо объекта $\operatorname{laplace}(y(t), t, p)$, являющегося, по сути, изображением искомой функции $y(t)$, введём обозначение Y , здесь же сделаем подстановку граничных условий:

> **r3:=subs(laplace(y(t), t, p)=Y, y(0)=1, D(y)(0)=0, r2);**

$$r3 := p(p Y - 1) + 3 - 3 p Y + 2 Y = \frac{8(p-1)}{4(p-1)^2 + 1}$$

Это алгебраическое уравнение нужно разрешить относительно Y . Для этого используем функцию **solve**:

> **r4:=solve(r3, Y);**

$$r4 := \frac{4 p^3 - 20 p^2 + 37 p - 23}{(4 p^2 - 8 p + 5) (-3 p + 2 + p^2)}$$

От найденного выражения возьмём обратное преобразование

> **invlaplace(r4,p,t);**

$$\frac{3}{5} e^{(2t)} + 2 e^t - \frac{8}{5} \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^t - \frac{16}{5} e^t \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Это и есть окончательный результат – решение дифференциального уравнения с учетом начальных условий.

Отметим, что такой способ решения применим только при условии, что функция правой части дифференциального уравнения является оригиналом. Если это не так, то решение, базирующееся на операционном методе, ищется с помощью интеграла Дюамеля.

• **fourier, invfourier** – прямое и обратное преобразования Фурье

Краткая теоретическая справка. Преобразование Фурье определено для абсолютно интегрируемых, в общем случае комплексных, функций. Фурье-образ $\mathcal{F}(\omega)$ как функция действительной переменной ω определяется формулой

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

и представляет собой непрерывный частотный спектр сигнала $f(t)$. Обратное преобразование (теорема обращения):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Для четных и нечетных функций $f(t)$ могут быть использованы соответственно косинус- и синус-преобразования Фурье. Пары этих преобразований (прямое и обратное) имеют вид

$$\mathcal{F}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_c(\omega) \cos \omega t d\omega$$

$$f_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(\omega) \sin \omega t d\omega$$

Косинус- и синус-преобразования также удобно применять для действительных функций $f(t)$, заданных на полуоси $[0, +\infty)$. Ввиду формальной схожести формул внутри каждой пары преобразований, в Maple реализовано только по одной функции для косинус- (**fouriercos**) и для синус-преобразования (**fouriersin**).

Примеры на преобразование Фурье:

> **with(inttrans) :**

> **fourier(t*exp(-3*t)*Heaviside(t), t, w) ;** # прямое преобразование

$$\frac{1}{(3 + wI)^2}$$

> **invfourier(3/(1+w^2), w, t) ;** # обратное преобразование

$$\frac{3}{2} e^{(-t)} \text{Heaviside}(t) + \frac{3}{2} e^t \text{Heaviside}(-t)$$

> **simplify(" , trig) ;** # представление результата с использованием гиперболических функций

$$-3 \text{Heaviside}(t) \sinh(t) + \frac{3}{2} \cosh(t) + \frac{3}{2} \sinh(t)$$

Фурье-преобразование, как и преобразование Лапласа, может применяться к решению дифференциальных уравнений. Но есть одно отличие: метод решения, основанный на преобразовании Фурье, определенно позволяет найти только частное решение, целиком зависящее от правой части уравнения. Тем самым начальные условия не учитываются (по крайней мере, полностью), вследствие чего данный метод больше подходит для анализа процессов в установившемся режиме.

Пример: решить уравнение $y'' - y = e^{-x^2}$.

> **with(inttrans) ;**

> **de:=diff(y(t), t\$2) - y(t) = exp(-t^2) ;** # заданное уравнение

> **r2:=fourier(de,t,w); # преобразование Фурье от обеих частей этого уравнения**

$$r2 := -\text{fourier}(y(t), t, w) (w^2 + 1) = \sqrt{\pi} e^{\left(-\frac{w^2}{4}\right)}$$

> **r3:=solve(r2,'fourier'(y(t),t,w)); # явное выражение для Фурье-образа**

$$r3 := -\frac{\sqrt{\pi} e^{\left(-\frac{w^2}{4}\right)}}{w^2 + 1}$$

> **rez:=invfourier(r3,w,t); # получение решения через обратное преобразование**

$$rez := \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left(-e^{(-t+1/4)} \operatorname{erf}\left(t - \frac{1}{2}\right) + e^{(t+1/4)} \operatorname{erf}\left(t + \frac{1}{2}\right) - 2 \cosh(t) e^{(1/4)} \right)$$

> **subs(y(t)=rez,de): simplify("); # проверка решения подстановкой в уравнение**

$$2 e^{(-t^2)} = 2 e^{(-t^2)}$$

Решение еще одного уравнения проведем на основе косинус-преобразования:

> **with(inttrans);**

> **de:= diff(y(t),t\$2)-y(t)=cos(2*t); # решается уравнение $y'' - y = \cos 2t$**

> **r2:= fouriercos(de,t,w); # косинус-преобразование**

$$r2 := -\frac{\sqrt{2} D(y)(0) + w^2 \text{fouriercos}(y(t), t, w) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} - \text{fouriercos}(y(t), t, w) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} (\operatorname{Dirac}(w - 2) + \operatorname{Dirac}(w + 2))$$

> **r3:=solve(r2,'fouriercos'(y(t),t,w)); # Фурье-образ решения уравнения**

$$r3 := \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} (2 D(y)(0) + \pi \operatorname{Dirac}(w - 2) + \pi \operatorname{Dirac}(w + 2))}{\sqrt{\pi} (w^2 + 1)}$$

> **rez:= fouriercos(r3,w,t); # обратное cos-преобразование даёт само решение**

$$rez := -D(y)(0) e^{(-t)} - \frac{1}{5} \cos(2t)$$

Строго говоря, в этом выражении к частному решению данного неоднородного уравнения относится только второе слагаемое, а первое слагаемое с начальным значением $D(y)(0)$, т.е. $y'(0)$, в качестве множителя – это «осколок» от общего решения.

> **subs (y (t)=rez ,de) ;** # подстановка найденного решения в исходное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \left(-D(y)(0) e^{(-t)} - \frac{1}{5} \cos(2 t) \right) \right) + D(y)(0) e^{(-t)} + \frac{1}{5} \cos(2 t) = \cos(2 t)$$

> **simplify(") ;**

$$\cos(2 t) = \cos(2 t)$$

Если внимательно посмотреть на последний пример, может показаться странным, что Maple вычисляет преобразование Фурье от функции правой части, не являющейся оригиналом по Фурье, т.е. абсолютно интегрируемой, для которой в классе *обычных* функций такое преобразование, вообще говоря, существовать не должно. Но в том то и дело, что Maple не ограничивается обычными функциями и преобразует расширенный класс оригиналов за счет аппарата *обобщенных* функций. Изучение последних выходит за рамки изучения курса математики технических специальностей вузов.

- Разложение периодической функции в тригонометрический ряд Фурье

Ранние версии Maple (в том числе Maple V) не содержат готовых встроенных функций по решению подобных задач гармонического анализа. Однако не составит большого труда непосредственно запрограммировать вычисление коэффициентов ряда Фурье. Изучите внимательно следующий пример.

Задача: разложить функцию $f(t)=|t|$ на интервале

$-\pi < t < \pi$.

> **restart;**

> **f:=t->abs (t) ;**

$$f := \text{abs}$$

> **a0:=(1/Pi)*int(f(t),t=-Pi..Pi); #** коэффициент разложения a_0

$$a0 := \pi$$

> **assume(n, integer); #** считать переменную **n** целочисленной

> **an:=(1/Pi)*int(f(t)*cos(n*t),t=-Pi..Pi); #** коэффициенты разложения a_n

$$a_n := \frac{2((-1)^{n\sim} - 1)}{\pi n^{\sim 2}}$$

(Значок $\sim$, используемый сразу после имени переменной, пишется для напоминания об ограниченном множестве ее допустимых значений).

Учитывая, что четная функция содержит только четные гармоники, все коэффициенты b_n равны нулю. Поэтому разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$|t| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \cos nt, \quad -\pi < t < \pi$$

Этот результат можно конкретизировать, рассматривая сумму с четными и нечетными индексами:

> **assume(m, integer);**

> **simplify(an, {n=2*m}): #** коэффициенты a_n с четными номерами

$$\frac{(-1)^{(2k\sim)} - 1}{2\pi k^{\sim 2}}$$

> **simplify("");**

$$0$$

> **assume(k, integer);**

> **simplify(an, {n=2*k+1}): ak:=simplify(""); #** a_n с нечетными номерами

$$ak := -\frac{4}{\pi(4k^{\sim 2} + 4k^{\sim} + 1)}$$

> **factor(ak);**

$$-\frac{4}{\pi(2k^{\sim} + 1)^2}$$

Таким образом,

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t, \quad -\pi < t < \pi.$$

Справа в этом равенстве стоит функциональный ряд, который сходится в каждой точке указанного интервала. По определению, сходимость ряда означает существование конечного предела последовательности его частичных сумм. С помощью Maple несложно вычислить частичные суммы в некоторой точке либо построить их графики и тем самым составить представление о сходимости ряда. Это может выглядеть так:

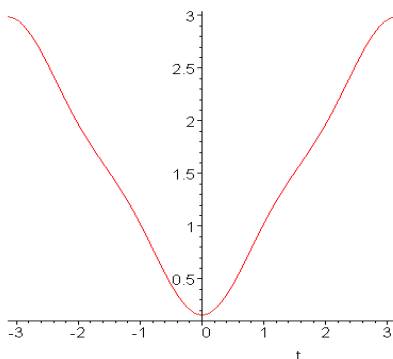
```
> s:=t->Pi/2.+sum(ak*cos((2*k+1)*t),k=0..1); #
```

частичная сумма S_4 ряда Фурье

$$s := t \rightarrow \frac{\pi}{2} + \left(\sum_{k=0}^1 ak \cos((2. k + 1) t) \right)$$

```
> evalf(s(1.5)); # значение частичной суммы в точке x=1,5
1.510552430
```

```
> plot(s(t),t=-Pi..Pi); # график частичной суммы  $S_4$  ряда Фурье
```



Взяв частичные суммы с большими номерами, убедитесь в более точном их соответствии функции $f(t) = |t|$.

Задания

Вариант 1

1. Найти производные:

а) y' , если $y = \ln(\cos(x^2 + 1))$;

б) y^{IV} , если $y = x \ln(1 - 3x)$;

в) y'_x и y''_x для параметрически заданной функции:

$$x(t) = \operatorname{arctg} t, \quad y(t) = \ln(1 + t^2);$$

г) y'_x и y''_x для неявно заданной функции $xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;

2. Вычислить интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} dx$;

б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 10)^2}$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \cos t)^2}$;

г) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^3 dr$;

3. Найти суммы рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)}$;

4. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1)^{\pi / \operatorname{arctg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{ctg} \pi x}$;

5. Выполнить операции векторного анализа:

а) $\operatorname{grad} \frac{xz^3 \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ в точке $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$;

б) $\operatorname{div}(x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j} + z^2 \vec{k})$;

в) $\operatorname{rot} xyz(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$.

6. Построить графики функций:

а) $\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$; б) $\int_0^t \cos \frac{\pi x^2}{2} dx$.

7. Разложить функции в ряд в окрестности точки z_0 :

а) $z \cos\left(\pi \frac{z+3}{z-1}\right); z_0=0,$

б) $z \cos\left(\pi \frac{z+3}{z-1}\right); z_0=\infty;$

в) $\frac{2z}{z^2+4}, z_0=2+3i.$

8. Выполнить интегральные преобразования

а) $L[f(t)],$ где $f(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{при } 0 \leq t \leq \pi/4, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$

б) $L^{-1}\left[\frac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}\right].$

9. Решить операционным методом задачу Коши

а) $y'' + y = 4xe^x, y(0) = -2, y'(0) = 0;$

б) $y'' - 4y = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2, \\ e^{x-2} & \text{при } x \leq 2; \end{cases} y(0) = -2, y'(0) = 0.$

10. Найти вычеты указанных функций относительно точки z_0

а) $f(z) = \frac{1-z}{z(1-e^{4z})}, z_0=0;$

б) $f(z) = \frac{z-\pi}{\ln(\cos 2z)}, z_0=\pi;$

в) $f(z) = z \sin^2 \frac{\pi}{z}, z_0=\infty$

Вариант 2

1. Найти производные

а) $f'(x)$, если $f(x) = x\sqrt{64-x^2} + 64\arcsin\left(\frac{x}{8}\right)$;

б) $f^{(10)}(x)$, если $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$;

в) $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически:

$$x(t) = \sin^2 t, \quad y(t) = \ln \cos t;$$

г) $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной неявно уравнением

$$xy - \sqrt[3]{xy^2} + 6 = 0.$$

2. Вычислить интегралы

а) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x} e^x dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$;

в) $\int_0^1 \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{2+x^4}} dx$; г) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{1-x} (x^2 + y) dy$.

3. Найти суммы рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$

4. Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{2x} + \ln(1-x^2)}{x \cos x - \sin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{d}{dx} \ln(1 + \sqrt[5]{x^7})$.

5. Решить задачи теории поля:

а) найти производную скалярного поля $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ в точке $A(-2, 1, 2)$ по направлению вектора $\vec{l} = \{0, -3, 4\}$;

б) вычислить дивергенцию и ротор векторного поля:

$$\vec{a} = \{x - z^2, yz, x^2 + y^2 + z^2\};$$

в) вычислить лапласиан скалярного поля:

$$u = \frac{2xy(z^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

6. Найти значения функции $F(x)$ при $x=0.2$, $x=0.5$ и $x=1$ и построить её график, если

$$\text{а) } F(x) = -\int_0^x \ln \cos t dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3};$$

$$\text{б) } F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - 0,5 \sin^2 t}} dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\text{в) } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad 0 \leq x \leq 10.$$

7. Разложить функцию $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z^2 - i)}$ в ряд по степеням $z - z_0$, если

$$\text{а) } z_0 = 0, \quad \text{б) } z_0 = (2 + 2i)/\sqrt{2}, \quad \text{в) } z_0 = \infty.$$

8. а) Найти синус- и косинус-преобразования Фурье от функции $f(x) = (x^4 + 1)e^{-x} \sin 2x$, заданной на интервале $[0, \infty)$.

б) Найти функцию, определенную на $[0, \infty)$, косинус-преобразование которой равно $4 \frac{\sin 2\omega}{\omega}$.

9. Найти установившееся решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t$.

10. Разложить функцию $f(t)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} -2t, & \text{если } -\pi < t < 0, \\ 3t^2, & \text{если } 0 < t < \pi; \end{cases} \quad \text{б) } f(t) = \sin(\arcsin(t)).$$

Построить графики заданной функции и частичной суммы $S_5(t)$.

Дополнительные задания

1. Найти дивергенцию градиента функции

$$\text{а) } u = e^{x+y+z}, \text{ б) } u = 1/\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}.$$

2. а) Найти производную скалярного поля $u = 4\ln(3+x^2) - 8xyz$ в точке $M(1, 1, 1)$ по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$.

б) Найти производную скалярного поля $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - xyz$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$; $A(-2, 1, 2)$, $B(-2, -2, 6)$.

3. а) Найти угол между $\text{grad}u(M_1)$ и $\text{grad}u(M_2)$, если $u = \arctg \frac{x}{y+z}$, $M_1(1; 1; 0)$, $M_2(-1; 0; 1)$.

б) Найти угол между $\text{rot} \vec{a}(M_1)$ и $\text{rot} \vec{a}(M_2)$, если $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + z^2)\vec{k}$; $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(1; 1; -1)$.

4. Является ли поле $\vec{a} = \vec{r}/r^3$, $\vec{r} = (x; y; z)$ потенциальным, соленоидальным?

5. Проверить соленоидальность поля:

$$\vec{a} = \frac{x\vec{i} - y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{(x^2 - y^2)z\vec{k}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Формулы для справок

Первая и вторая производные функции $y(x)$, заданной параметрически:

если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \equiv \omega(t); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega'_t}{\varphi'_t} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Градиент скалярного поля $u(x,y,z)$:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Производная скалярного поля u по направлению $\mathbf{s}$:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\text{grad } u, \mathbf{s}) = |\text{grad } u| \cos \varphi,$$

где φ — угол между градиентом и единичным вектором $\mathbf{s}$.

Дивергенция векторного поля $\mathbf{a}(x, y, z)$:

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ротор векторного поля $\mathbf{a}$:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Лапласиан функции $u(x,y,z)$: $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$

Разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(t)$ на интервале $(-l, l)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k t}{l} + b_k \sin \frac{\pi k t}{l},$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi k t}{l} dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi k t}{l} dt.$$

Ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k \exp\left(\frac{\pi k t}{l}\right),$$

где

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp\left(\frac{\pi k t}{l}\right)$$

(функция $f(t)$ – $2l$ -периодическая).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дьяконов В.П. Maple 7: учебный курс. СПб: Питер, 2002. – 672 с.
2. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003. – 176 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Учеб.: В 2-х т. Т.1. СПб: Мифрил. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1996.– 416 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Учеб.: В 2-х т. Т.2. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985.—560 с.
5. Бугров Я.С. , Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. Ростов н/Д: Феникс, 1997. – 512 с.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. Ростов н/Д: Феникс, 1997. – 512 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 2. / Под общ. ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. – 432 с.
8. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3. / Под общ. ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 576 с.

Содержание

Лабораторная работа №3.

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

1. Дифференцирование	1
2. Интегрирование	8
а) Неопределенные интегралы	8
б) Определенные интегралы	9
в) Интегралы с переменными пределами интегрирования	11
г) Повторные интегралы	12
3. Вычисление пределов функций	13
4. Разложение функций в ряды	14
5. Вычисление сумм и произведений	16
6. Разные математические операции	18
Задания	27
Формулы для справок	32
Библиографический список	33

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ по курсам
«Математика» и «Специальные главы
математики» для студентов направлений 150100
«Материаловедение и технология материалов»,
222900 «Нанотехнологии и микросистемная техника»
и 223200 «Техническая физика»
очной формы обучения

Составители:

Кострюков Сергей Александрович
Пешков Вадим Вячеславович
Шунин Геннадий Евгеньевич

В авторской редакции

Компьютерный набор С.А. Кострюкова

Подписано к изданию 20.12.2012.

Уч.-изд. л. 2,1. “С” .

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14