ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ №5-7

по дисциплине «Теория измерений» для студентов направления 200100.62 «Приборостроение» (профиль «Приборостроение») очной и заочной форм обучения

Воронеж 2013

Составитель канд. техн. наук А.С. Самодуров

УДК 621.317.08

Методические указания к лабораторным работам №5-7: по дисциплине «Теория измерений» для студентов направления 200100.62 «Приборостроение» (профиль «Приборостроение») очной и заочной форм обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.С. Самодуров, Воронеж, 2014. 29 с.

Методические указания предусматривают закрепление теоретических знаний и приобретение практических навыков по статистической обработке результатов измерений, содержащих случайные ошибки (при отсутствии или наличии ошибок систематических), в том числе навыков использования статистических таблиц и критериев.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MSWord 2003 и содержатся в файле МУЛабТИ567.doc

Табл. 12. Библиогр.: 9 назв.

Рецензент канд. техн. наук, доц. В.С. Скоробогатов

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р. техн. наук, проф. А.В. Муратов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой «Теория измерений». Учитывая разнообразие инженерных задач, встающих перед выпускниками направления 200100.62 «Приборостроение», признано целесообразным не усложнять практикум измерениями с помощью специальных технических средств (в соответствии с определением термина «измерение» в метрологии), заменив их моделированием процесса измерения «измерениями на глаз», а также математическим экспериментом с помощью таблиц равномерно и нормально распределенных чисел. Опыт показывает, что таким моделированием достигается необходимая наглядность и оперативность, суть же и порядок статистической обработки при этом сохраняются.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Прежде чем приступить к выполнению предлагаемых работ, студенту необходимо ознакомиться с основными теоретическими положениями.

Студент допускается к выполнению работ после предварительного опроса по их содержанию и порядку выполнения.

Требования к отчету изложены в каждой работе. В работах, кроме общего, предусмотрено выполнение индивидуальных заданий по указанию преподавателя.

РАБОТА 5

ОБЪЕДИНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- Изучить основные особенности объединения результатов разных серий измерений в общий массив.
- Приобрести практические навыки обработки экспериментальных данных, полученных в нескольких сериях измерений при отсутствии систематических ошибок и нормальном законе распределения случайных ошибок измерений.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Измерительную информацию о физической величине постоянного (одного и того же) размера часто получают в разное время, в разных условиях, разными методами, разные операторы. Если объединить все результаты измерений в общий массив, то можно получить более точный и надежный результат за счет увеличения объема выборки. Однако объединение возможно только при условии однородности серий.

В математической статистике однородными называются выборки (серии), взятые из одной генеральной совокупности, то есть имеющие одинаковый вид закона распределения, одинаковые математические ожидания и одинаковые дисперсии. В метрологии серии называются однородными, если подчиняются закону распределения одного вида с одинаковыми математическими ожиданиями (дисперсии могут быть различными).

Если дисперсии в сериях одинаковы (не выборочные их оценки, а сами дисперсии), то в простейшем случае для двух серий измерений критерий однородности (t - критерий) имеет вид

$$t = \frac{|\overline{X_1} - \overline{X_2}|}{\sqrt{S^2_{X,\text{об}}(1/n_1 + 1/n_2)}} \le t_{\alpha/2,\nu_{\text{об}}}, \tag{1}$$

где $\overline{X_1}$ и $\overline{X_2}$ — средние арифметические в сериях; n_1и n_2 — объемы серий; $t_{\alpha/2,\nu_{\text{об}}}$ — табличное значение t-статистики (табл. 3 прил.);

$S^2_{X,\text{об}}$— объединенная оценка дисперсии σ^2:

$$S^2_{X,\text{об}} = \frac{(n_1-1)^2 S^2_{X,1} + (n_2-1)^2 S^2_{X,2}}{\nu_{\text{об}}} \tag{2}$$

где $S^2_{X,1}$ и $S^2_{X,2}$ — выборочные оценки дисперсии в сериях; $\nu_{\text{об}} = n_1 + n_2 - 2$ — число степеней свободы оценки $S^2_{X,\text{об}}$ и табличного значения $t_{\alpha/2,\nu_{\text{об}}}$.

Прежде чем воспользоваться критерием (1), необходимо убедиться, что $S^2_{X,1}$ и $S^2_{X,2}$ есть оценки одной и той же дисперсии σ^2. Только в этом случае может быть использована объединенная оценка дисперсии $S^2_{X,\text{об}}$ в виде (2). Проверка гипотезы о равенстве дисперсий всериях осуществляется с помощью F - критерия (критерия дисперсионного отношения).

$$F = \frac{S^2_{X,max}}{S^2_{X,min}} \le F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\ , \tag{3}$$

где $S^2_{X,max}$ - максимальная из двух оценок $S^2_{X,1}$ и $S^2_{X,2}$. ν_1 - число степеней свободы числителя (ν = n- 1); $S^2_{X,min}$ - минимальная из двух оценок, ν_2 - число степеней свободы знаменателя. Значение F_{α,ν_1,ν_2} берется из таблиц F - распределения (табл. 8 прил.) при одностороннем уровне значимости α и числах степеней свободы числителя ν_1 и знаменателя ν_2.

Если условие (3) выполняется, гипотеза о равенстве дисперсий принимается на уровне значимости α. В противном случае она отвергается.

Если условия (3) и (1) выполняются, делается вывод об равноточности и однородности серий. В этом случае все экспериментальные данные объединяются и обрабатываются как единый массив:

$$\left.\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{n_1+n_2}\bar{X}_j \\ S_X &= \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_1+n_2}\left(\bar{X}_j-\bar{X}\right)^2}{n_1+n_2-1}} \\ S_{\bar{X}} &= \frac{S_X}{\sqrt{n_1+n_2}} \end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Поскольку для серий оценки $\bar{X}_j$ и $S_{X,j}$обычно бывают уже вычислены, то удобнее пользоваться другими формулами. Для двух серий они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{2}(n_j\bar{X}_j)}{N} \\ S_{\bar{X}} &= \frac{\sum_{j=1}^{2}(n_j-1)S_{Xj}^2+\sum_{j=1}^{2}n_j\left(\bar{X}_j-\bar{X}\right)^2}{N(N-1)} \end{aligned}\right\}, \quad (5)$$

где $N = \sum_{j=1}^{2} n_j$ - общее число данных объединенного массива.

Критериями (1) и (3) можно пользоваться и тогда, когда число серий больше двух, но n_j в сериях приблизительно одинаковы. Если серии с максимально различающимися $\bar{X}_j$ и $S_{X,j}$ не будут отвергнуты критериями, тогда и остальные серии принимаются к объединению.

Если будет обнаружена неравноточность серий (условие (3) не выполнено), то гипотезу о равенстве математических ожиданий можно проверить по приближенному критерию:

$$t = \frac{|\overline{X_1}-\overline{X_2}|}{\sqrt{S_{X,1}^2/n_1+S_{X,2}^2/n_2}} \le t_{\alpha/2,\nu^*}, \quad (6)$$

где

$$\nu^* = \frac{\left(S_{X,1}^2/n_1+S_{X,2}^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(S_{X,1}^2/n_1\right)^2}{n_1+1}+\frac{\left(S_{X,2}^2/n_2\right)^2}{n_2+1}} - 2. \quad (7)$$

Статистика t в (6) подчиняется распределению Беренса-Фишера, пользование которым весьма затруднительно из-за отсутствия нужных таблиц и сложности процедуры пользования имеющимися. Приближенное выражение (7) позволяет пользоваться таблицами t - распределения (табл. 3

прил.).

Если обнаружена неравноточность измерений в сериях, но серии однородны по условию (6), при совместной их обработке неравноточность учитывается при расчете среднего арифметического введением весов P_j, а вычисления выполняются по формулам (8).

При построении t - интервала для истинного значения в случае объединения равноточных серий берут число степеней свободы $\nu = \mathrm{N} - 1$.

При объединении неравноточных серий для построения доверительного интервала в метрологии обычно пользуются неравенством Чебышева.

$$\left.\begin{aligned} \bar{X} &= \sum_{j=1}^{L}\left(P_j \bar{X}_j\right) \\ P_j &= \frac{n_j / S_{X,j}^2}{\sum_{j=1}^{L}\left(n_j / S_{X,j}^2\right)} \\ S_{\bar{X}} &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{L}\left(n_j / S_{X,j}^2\right)}} \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

где L — число серий.

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Визуальное «измерение» роста (1-е занятие)

3.1.1. Получить у преподавателя массивы данных, полученные студентами других групп.

3.1.2. Проверить равноточность измерений в сериях по F - критерию (3) при уровне значимости α=0,05 или α=0,10 — по выбору преподавателя. При равноточности вычислить $S_{X,\text{об}}^2$ (2) и проверить однородность серий по t - критерию (1). При неравноточности проверить однородность по t - критерию (6).

3.1.3. Объединить результаты однородных равноточных серий по формулам (4) и (5).

3.1.4. Для однородных неравноточных серий вычислить $\bar{X}$ и $S_{\bar{X}}$ по формулам (8).

3.1.5. Построить доверительный интервал для объединенных серий и сравнить с результатами работы 1.

3.1.6. Сделать выводы.

3.2.Обработка массива случайных чисел (2-е занятие)

3.2.1. Получить у преподавателя дополнительные к имеющимся по работе 1 (п. 3.2.1) или новые массивы данных. Законы распределения ошибок в сериях считать нормальными.

3.2.2. Выполнить обработку в соответствии с пп. 3.1.2. — 3.1.5. данной работы.

3.2.3. Сравнить результаты с работой 1 (п. 3.2). Сделать выводы.

3.2.4. Оформить отчет.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1. Название и цель работы.

4.2. Краткие теоретические сведения.

4.3. Массивы экспериментальных данных (по сериям).

4.4. Расчетные формулы и результаты вычислений.

4.5. Выводы.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Для чего необходимо объединять выборки?
2. Условия объединения выборок?
3. Что такое однородная серия в мат. статистике?
4. Что такое однородная серия в метрологии?
5. Критерий однородности при одинаковых дисперсиях?
6. F-критерий, для чего применяется?
7. Что такое равноточная серия?

8. Как проверить гипотезу о равенстве матожиданий?
9. Как объединить неравноточные серии?
10. Можно ли воспользоваться F-критерием для 3х выборок?

РАБОТА 6

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТРЕБУЕМОЙ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПОСТОЯННОГО РАЗМЕРА

1.ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- Освоить процедуру определения объема выборки, необходимого для обеспечения требуемой точности результата многократных измерений.
- Освоить метод построения доверительного интервала для СКО и научиться определять объем выборки, обеспечивающий требуемую точность оценки СКО.

2.ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Известно, что при любом законе распределения (с конечными математическим ожиданием μ и дисперсиеи σ_X^2) дисперсия среднего арифметического $\sigma\frac{2}{X}$, вычисленного по выборке объемом n, в n раз меньше дисперсии σ_X^2:

$$\sigma\frac{2}{X} = \sigma_X^2/n. \qquad (1)$$

На этом фундаментальном свойстве среднего арифметического основана процедура определения минимального объема выборки для обеспечения требуемой точности результата измерений. Смысл этой процедуры легко понять на гипотетическом примере, когда дисперсия σ_X^2 известна. Для простоты положим так же, что ошибки измерений распределены нормально с нулевым математическим ожиданием, а систематические ошибки отсутствуют.

В этом случае погрешность результата измерений выражается интервалом $\pm U_{\alpha/2}(\sigma_X/\sqrt{n})$ где $U_{\alpha/2}$ - квантиль нормального распределения для двухстороннего уровня значимости α (доверительной вероятности $P_\delta = 1 - \alpha$). Пусть задана некоторая норма точности в виде верхнего предела погрешности Δ^* . Тогда из условия

$$U_{\alpha/2} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq \Delta^* \quad (2)$$

находим

$$n \geq \left(U_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\Delta^*}\right)^2. \quad (3)$$

Доверительный интервал конечной длины (при заданном α и любом фиксированном n) является точным в том смысле, что обеспечивает надежность γ, равную доверительной вероятности P_δ.

При неизвестной дисперсии σ_X^2используется выражение

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{S_X^2}{n} \quad (4)$$

или

$$S_{\bar{X}} = \frac{S_X}{\sqrt{n}}. \quad (4.1)$$

Доверительный интервал в этом случае имеет вид $\pm t_{\alpha/2}(S_X/\sqrt{n})$ (t-интервал Стьюдента). Для обеспечения заданной точности в этом случае используют соотношение

$$t_{\alpha/2}(S_X/\sqrt{n}) \leq \Delta^*, \quad (5)$$

при этом объем выборки не может быть точно определен по предварительно полученному значению S_X, поскольку S_X есть случайная величина.

Из (5) получаем

$$n \geq \left(t_{\alpha/2} \frac{S_X}{\Delta^*}\right). \quad (6)$$

Поскольку S_X - случайная величина, значение которой заранее неизвестно, значение n, удовлетворяющее условию

(6), находят итерационным методом (методом последовательных приближений). Вначале проводят серию измерений числом n_0. Если есть основание предполагать нормальность закона распределения, то n_0 может быть невелико. В противном случае n_0 должно быть достаточным для решения вопроса о законе распределения.

По результатам измерений вычисляют S_X и $\bar{X}$, осуществляют проверку на промахи и при их отсутствии (или после их исключения) вычисляют по (6) первое приближенное значение необходимого объема выборки n_1. Если $n_1 > n_2$ проводят новые измерения до получения выборки объема n_1, вновь повторяют обработку результатов измерений и вычисляют новое значение n_2. Итерационный процесс прекращается, когда $n_{i+1} \leq n_i$ или n_{i+1} незначительно больше n_i.

При наличии неисключённой систематической ошибки θ, о которой известно лишь то, что $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, где θ_0 - граница систематической ошибки (то есть интервал $\pm\theta_0$ представляет собой неисключённую систематическую погрешность), суммарная погрешность может быть вычислена по приближенной формуле для P_∂ = 0,90...0,95:

$$\Delta_\Sigma = \sqrt{t^2_{\alpha/2}\frac{S_X^2}{n} + \theta_0^2}. \tag{7}$$

Более точные, но также приближенные выражения для Δ_Σ можно найти в специальной литературе.

Учитывая требование $\Delta_\Sigma < \Delta^*$, получаем

$$n \geq t^2_{\alpha/2,\nu}\frac{S_X^2}{(\Delta^*)^2 - \theta_0^2}\,. \tag{8}$$

Итерационная процедура определения *n* выполняется по вышеописанной схеме.

Из (8) видно, что неисключенная систематическая погрешность θ_0 должна быть меньше допустимой нормы Δ^*. Если это не выполняется, следует применить более точные средства измерений или использовать другой метод измерений.

Из (7) видно, что если систематическая погрешность превалирует над случайной, то увеличение n слабо уменьшает суммарную погрешность. Поэтому необходимо руководствоваться правилами, принятыми в метрологии:

- если $\theta_0/S_{\bar{X}} \geq 8$, дальнейшее увеличение числа измерений не приведет к заметному уменьшению погрешности Δ_{Σ};
- если $\theta_0/S_{\bar{X}} \geq 0{,}8$, суммарная погрешность определяется случайной составляющей погрешности (систематическая погрешность пренебрежимо мала).
- если S_X и θ_0 известны заранее, причем $\theta_0/S_X \geq 5{,}2$, многократные измерения (n>4) вообще нецелесообразны, а суммарная погрешность определяется систематической составляющей (случайная пренебрежимо мала). Последнее условие обычно записывается в виде $S_X \leq \frac{1}{3}U_\theta$, где $U_\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{3}}$ есть СКО для равномерно распределенной на интервале $\pm\theta_0$ систематической ошибки.

По рекомендации Между народного Бюро Мер и Весов величину U_θ называют аналогом СКО, чтобы подчеркнуть ее неслучайное происхождение (U_θ — параметр математической модели, определяющий равновероятное значение систематической ошибки в интервале $\pm\theta_0$).

Так как S_X случайна, то доверительный интервал (5) будет интервалом случайной длины. Если по выборке получено значение $S_X < \sigma_X$ то надежность интервала (5) меньше выбранной доверительной вероятности P_∂, а если $S_X > \sigma_X$, то больше.

Для лучшего понимания построим доверительный интервал для параметра σ_X по его выборочной оценке S_X .

Случайная величина $(n-1)\frac{S_X^2}{\sigma_X^2}$ имеет χ^2 -распределение. Исходя из требования

$$P_\partial\left\{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu} \leq \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \leq \chi^2_{\alpha/2,\nu}\right\} = 1-\alpha$$

получаем доверительный интервал для σ_X , с надежностью $\gamma = P_\partial$:

$$S_X Z_1 \le \sigma_X \le S_X Z_2, \qquad (9)$$

где

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\nu}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}};\ Z_2 = \sqrt{\frac{\nu}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}}.$$

Пользуясь таблицами χ^2 -распределения (табл. 7 прил.), такой интервал в единицах S_X можно будет построить до опыта. Интервал (9) симметричен по уровню значимости: вероятности выхода за его нижний $S_X Z_1$) и верхний ($S_X Z_2$) пределы одинаковы и равны $\alpha/2$.

Для построения интервала (9) можно воспользоваться готовыми таблицами (табл. 9 прил.). Задаваясь доверительной вероятностью P_∂ :

$$P_\partial\{S_X Z_1 \le \sigma_X \le S_X Z_2\} = 1 - \alpha$$

и требуемой шириной доверительного интервала (Z_1, Z_2), можно найти необходимый объем выборки $n = \nu + 1$.

Задача о надежности *t* - интервала с фиксированным значением S_X не имеет решения. Следовательно, чтобы быть уверенным, что эта надежность близка к P_∂, оценку СКО необходимо находить по выборке возможно большего объема.

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Визуальное «измерение» роста (1-е занятие)

3.1.1. Используя результаты измерений, полученные в работе 1 (п. 3.1.2) и не упорядоченные в вариационный ряд, определить по формуле (6) первое приближение объема выборки n_1 для выполнениятребования (5) при $\Delta^* = 0{,}5$ см; $\Delta^* = 0{,}2$ см; $\Delta^* = 0{,}1$ см.

3.1.2. Используя те же результаты, определить по формуле (8) первое значение объема выборки n_1 при $\Delta^* = 1{,}5$ см и $\theta_0 = 1$ см.

3.2. Обработка массива случайных чисел (2-е занятие)

3.2.1. Взять в качестве исходного массива данных первый подмассив из работы 1 п. 3.2.1. (первый столбец значений).

3.2.2. Определить $\bar{X}$ и S_x для подмассива.

3.2.3. Провести проверку на промахи.

3.2.4. Найти итерационным методом минимальный объем выборки для обеспечения требуемой точности Δ^* (значение выдается преподавателем) при θ_0=0.

3.2.5. С помощью табл. 9 прил. определить доверительный интервал для СКО по подмассивам $S_{X,k}$ и массиву $S_{X,\Sigma}$ в целом. Построить доверительные интервалы для P_∂ = 0,9. Сравнить результаты,откладывая на числовой оси полученные значения.

3.2.6. Сделать выводы.

4.СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1. Название и цель работы.
4.2. Основные теоретические положения.
4.3. Массивы экспериментальных данных.
4.4. Расчетные формулы и результаты вычислений.
4.5. Доверительные интервалы для СКО.
4.6. Выводы.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое итерационный метод?
2. На каком свойстве основанно определение min объема выборки?
3. В каком смысле доверительный интервал конечной длинны является точным?
4. Погрешность результата при известной дисперсии?
5. Погрешность результата при неизвестной

дисперсии?
6. Суммарная погрешность?
7. Как нужно находить оценку СКО?
8. Аналог СКО?
9. Почему доверительный интервал является случайной величиной?

РАБОТА 7

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПО ОПЫТНЫМ ДАННЫМ

1.ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- Освоить процедуру построения линейной эмпирической зависимости по опытным данным методом наименьших квадратов и методом Асковица.
- Освоить способ оценивания погрешности эмпирической зависимости совместными доверительными F -интервалами.

2.ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

2.1.Метод наименьших квадратов

Одновременные измерения двух или более разнородных физических величин с целью нахождения зависимости между ними называются совместными измерениями. В метрологии совместные измерения выполняются, например, при построении градуировочной характеристики средства измерений.

Обычно выполняются n измерений, при которых в заданных или точно измеренных значениях аргумента x_i (i = 1,2,...,n) определены значения y_i. Задача заключается в том, чтобы по n парам (x_i, y_i) построить зависимость (эмпирическую), которая была бы несмещенной и эффективной оценкой истинной зависимости, общий вид которой считают известным. Например, известно, что истинная зависимость есть прямая линия, которую представим в виде

$$y(x) = a_1 + a_2(x - \bar{x}). \qquad (1)$$

Параметры a_1 и a_2 неизвестны, их следует оценить по опытным данным. Будем считать ошибки измерений $\varepsilon_i = y_i - y(x_i)$ случайными с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией σ^2 при любом x, а также некоррелированными для разных x. При этих условиях найти несмещенные и эффективные оценки $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ параметров a_1 и a_2 (а следовательно, и зависимости (1) в целом) можно с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Будем определять оценку ŷ (x) функции *y (x)* в виде

$$\hat{y}(\mathrm{x}) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2(x - \bar{x}), \qquad (2)$$

а оценки $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ такими, чтобы сумма квадратов отклонений y_i от $\hat{y}(\mathrm{x})$ была минимальной:

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}(\mathrm{x})\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(\hat{a}_1 + \hat{a}_2(x_i - \bar{x})\right)\right)^2 = Q_{min}.$$

Это эквивалентно условию $\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}} = 0$, что приводит к уравнениям вида

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{a}_1 + \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_2\,(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{a}_1(x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_2\,(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\,(x_i - \bar{x}).$$

Учитывая, что $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ некоторые числа, а $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})=0$, получаем

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y},$$

$$\hat{a}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}. \qquad (5)$$

Отметим, что если бы мы записали (1) в обычном виде $y = (\alpha + \beta x)$, мы вынуждены были бы решать систему уравнений, выражая параметры один через другой и проводя более сложные вычисления. Использование линейной зависимости в виде (1) позволило упростить вычисления (что очень важно для более сложных зависимостей) и, что самое главное, получить статистически независимые оценки $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$. Учитывая это свойство, можем записать

$$D\big(\hat{y}(x)\big) = D(\hat{a}_1) + (x_i - \bar{x})^2 D(\hat{a}_1) =$$

$$= D(\bar{y}) + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\, D(y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^2}(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2};$$

$$\sigma\big(\hat{y}(x)\big) = \sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}.$$

Переходя к оценкам, получаем

$$S\big(\hat{y}(x)\big) = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}. \qquad (6)$$

При любом законе распределения (если удовлетворяются указанные выше условия) несмещенной оценкой σ^2 (а при нормальном законе и эффективной) является остаточная дисперсия

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{Q_{min}}{n-p} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - \hat{y}(x_i)\big)^2}{n-2}, \qquad (7)$$

где p - число коэффициентов регрессии (для прямой линии p=2). Окончательно получаем

$$S\big(\hat{y}(x)\big) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - \hat{y}(x_i)\big)^2}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)}, \qquad (8)$$

т.е. оценка СКО $\hat{y}(x)$ является функцией от x. Значение $S\big(\hat{y}(x)\big)$ минимально при $x = \bar{x}$ и увеличивается к началу и к концу интервала значений аргумента.

Погрешность эмпирической зависимости выражается совместными доверительными интервалами – t - интервалами Бонферрони или F - интервалами Шеффе. Последние имеют вид

$$\hat{y}(x) - S\big(\hat{y}(x)\big)\sqrt{pF_{\alpha,p,n-p}} \le \hat{y}(x) + S\big(\hat{y}(x)\big)\sqrt{pF_{\alpha,p,n-p}}, \quad (9)$$

где $F_{\alpha,p,n-p}$ - критическое значение статистики F.

Таким образом, задача построения эмпирической зависимости и оценивания ее погрешности при известном виде истинной зависимости решена.

Следует отметить, что при измерении физической величины постоянного размера $\hat{y}(x)$ = const, тогда при p = 1 интервалы (9) превращаются в обычные t - интервалы, так как , $\sqrt{F_{\alpha,1,n-1}} = t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$.

2.2. Метод Асковица построения МНК-прямой

Метод наименьших квадратов требует значительных объемов вычислений, выполняемых с помощью ЭВМ. Если требуется провести МНК-прямую, причем узлы x_i отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии $\delta = x_{i-1} - x_i$, измерения равноточны и при каждом значении x_i имеется одно значение y_i. то можно воспользоваться методом Асковица графического построения МНК-прямой без каких-либо вычислений, либо, воспользовавшись идеей Асковица, получить ее аналитическое выражение расчетом.

Графический метод Асковица (при равноотстоящих узлах) состоит в следующем. Начиная с x_{min}, соединяют первую и вторую точкипрямой, проходят вдоль оси x расстояние в 2δ/3 и отмечают на этой прямой первую промежуточную точку. Соединяют ее с третьей опытной точкой, вновь проходят вдоль оси x расстояние 2δ/3 и получают вторую промежуточную точку. Продолжая таким образом, соединяют предпоследнюю промежуточную точку с последней опытной, вновь проходят вдоль оси x расстояние 2δ/3 и получают последнюю промежуточную точку A. Эта точка принадлежит МНК-прямой. Повторяя процедуру справа налево, начиная с x_{max}, до x_{min}, получают вторую точку B МНК-прямой. Соединяя A и B, получают МНК-прямую.

Чтобы проверить правильность графических построений, запишем прямую Асковица в аналитическом виде. Аналитически координаты точек A и B можно найти по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= \frac{(x_1+2x_n)}{3} \\ y_A &= \frac{2\sum_{i=1}^{n}(iy_i)}{n(n+1)} \\ x_B &= \frac{(x_n+2x_1)}{3} \\ y_B &= \frac{2\sum_{i=1}^{n}((n+1-1)y_i)}{n(n+1)} \end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

где n - число узлов.

Откуда

$$\hat{y} = y_A - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x_A - \bar{x}) + \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - \bar{x}) =$$
$$= \frac{y_A(\bar{x}-x_B)+y_A(x_A-\bar{x})}{x_A-x_B} + \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x - \bar{x}). \qquad (11)$$

Вычислив значения первого и второго коэффициентов, можно сравнить их с $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ (5). Дальнейшая обработка включает вычисления отклонений $y_i - \hat{y}(x_i)$ и остаточной дисперсии (7), оценки СКО эмпирической зависимости и погрешности (10).

3.Порядок выполнения работы

3.1.Построение прямой по МНК

3.1.1. Получить у преподавателя массивы данных.

3.1.2. Провести вычисление по формулам (5), (7).

3.1.3. Построить график $\hat{y}(\mathrm{x}) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2(x - \bar{x})$, нанести на него значения y_i.

3.1.4.Вычислить значения $S(\hat{y}(x))$ и погрешности $\Delta(x_i) = \pm S(\hat{y}(x))\sqrt{2F_{\alpha,2,n-2}}$ в точках x_i, отложить на графике значения погрешности $\Delta(x_i)$ в обе стороны от кривой $\hat{y}(x)$ и соединить плавными кривыми.

3.1.5. Сделать выводы.

3.2.Построение прямой по методу Асковица

3.2.1. Используя тот же массив, построить прямую по методу, описанному в п. 2.2 данной работы.

3.2.2. Вычислить координаты точек *A* и *B* по формулам (11) и проверить правильность построения прямой.

3.2.3. Сравнить полученную прямую с прямой (12) и сделать выводы.

3.2.3. Оформить отчет.

4.СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1. Название и цель работы.
4.2. Основные теоретические положения.
4.3. Массивы данных.
4.4. Расчетные формулы и результаты вычислений.
4.5. Графики.
4.6. Выводы.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Метод наименьших квадратов?
2. Графический метод Асковица?
3. Аналитический метод Асковица?
4. Способ оценки погрешности F-интервалами?
5. Что такое точки A и B?
6. Как выражается погрешность эмпирической зависимости?
7. Почему для $y=f(x)$ при МНК предлагается более сложная зависимость чем $y=kx$?
8. При каких измерениях применим МНК?
9. Ошибка измерений при МНК?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 3 - Коэффициенты Стьюдента (двухсторонние границы t - распределения)

Число степеней свободы	Доверительная вероятность $P_д$	
$v = n - 1$	0,9	0,95
1	6,31	12,71
2	2,92	4,30
3	2,35	3,18
4	2,13	2,78
5	2,02	2,57
6	1,94	2,45
7	1,90	2,37
8	1,86	2,31
9	1,83	2,26
10	1,81	2,23
12	1,78	2,18
15	1,75	2,13
17	1,74	2,11
18	1,73	2,10
19	1,73	2,09
20	1,72	2,09
25	1,71	2,06
30	1,70	2,04
40	1,68	2,02
∞	1,64485	1,95996

Таблица 7 - Распределение χ^2 (процентные точки). Значения $\chi^2_{\alpha.,\nu}$, удовлетворяющие условию $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,\nu}\} = \alpha$ или эквивалентному условию $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,\nu}\} = 1 - \alpha = P_\partial$

ν \ P_∂	0,025	0,05	0,40	0,50	0,60	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,275	0,455	0,708	3,841	5,024
2	0,051	0,103	1,022	1,386	1,833	5,991	7,378
3	0,216	0,352	1,869	2,366	2,946	7,815	9,348
4	0,484	0,711	2,753	3,357	4,045	9,488	11,143
5	0,831	1,145	3,655	4,351	5,132	11,070	12,832
6	1,237	1,635	4,570	5,348	6,211	12,592	14,449
7	1,690	2,167	5,493	6,346	7,283	14,067	16,013
8	2,180	2,733	6,423	7,344	7,351	15,507	17,535
9	2,700	3,325	7,357	8,343	9,414	16,919	19,023
10	3,247	3,940	8,295	9,342	10,473	18,307	20,483
12	4,404	5,226	10,182	11,340	12,584	21,026	23,336
14	5,629	6,571	12,079	13,339	14,685	23,685	26,119
16	6,908	7,962	13,983	15,338	16,780	26,296	28,845
18	8,231	9,390	15,893	17,338	18,868	28,861	31,526
20	9,591	10,851	17,809	19,337	20,951	31,410	34,170
25	13,120	14,611	22,616	24,337	26,143	37,652	40,646
30	16,791	18,493	27,442	29,336	31,316	43,773	46,979
40	24,433	26,509	37,134	37,335	41,622	55,758	59,345
α	0,975	0,95	0,60	0,50	0,40	0,05	0,025

Примечание: для построения двустороннего доверительного интервала для случайной величины, имеющей χ^2 - распределение, удовлетворяющего условию

$$P\{\chi^2_{1-\alpha^*/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha^*/2}\} = P^*_\partial,$$

следует учесть, что

$$P\{\chi^2_{1-\alpha^*/2}<\chi^2<\chi^2_{\alpha^*/2}\} = P\{\chi^2<\chi^2_{\alpha^*/2}\} - P\{\chi^2<\chi^2_{1-\alpha^*/2}\}=$$
$$=1-\alpha^*/2-[1-(1-\alpha^*/2)] = 1-\alpha^* = P_\partial .$$

Верхнюю границу такого интервала находят по табл. для $\alpha = \alpha^*/2$, а нижнюю - для $\alpha = 1 - \alpha^*/2$.

Таблица 8 - Значения $F_{\nu 1,\nu 2,\alpha}$ для $\alpha = 0,05$ (верхние 5 процентные критические значения, односторонний критерий)

ν_2 \ ν_1	1	5	8	10	15	20	30	40	60	120
5	6,61	5,05	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	4,39	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70
8	5,59	3,69	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97
10	4,96	3,33	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58
15	4,54	2,9	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,20	2,16	2,11
20	4,35	2,71	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90
30	4,17	2,53	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	2,45	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	2,37	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	2,29	2,02	1,91	1,75	1,66	1,55	1,50	1,43	1,35

Таблица 9 - Границы Z_1 и Z_2 для построения доверительного интервала для СКО, соответствующие условиям

$$P\{Z_1S<\sigma<Z_2S\} = P^*_\partial = 1 - \alpha,\ P\{\sigma \le Z_1S\} = P\{\sigma \ge Z_2S\} = \alpha/2$$

v	P_d=0,95		P_d =0,90	
	Z_1	Z_2	Z_1	Z_2
5	0,62	2,45	0,67	2,09
6	0,64	2,20	0,69	1,92
7	0,66	2,04	0,71	1,80
8	0,68	1,92	0,72	1,71
9	0,69	1,83	0,73	1,65
10	0,70	1,75	0,74	1,59
12	0,72	1,65	0,75	1,52
14	0,73	1,58	0,77	1,46
16	0,74	1,52	0,78	1,42
18	0,76	1,48	0,79	1,38
20	0,77	1,44	0,80	1,36
25	0,78	1,38	0,81	1,31
30	0,80	1,34	0,83	1,27
35	0,81	1,30	0,84	1,25
40	0,82	1,28	0,85	4,23
50	0,84	1,24	0,86	1,20
60	0,85	1,22	0,87	1,18
80	0,87	1,18	0,89	1,15
100	0,88	1,16	0,90	1,13

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ 8.011-72. ГСИ. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений.
2. ГОСТ 8.207-76. ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения.
3. ГОСТ 8.401-80. ГСИ. Классы точности средств измерений. Общие требования.
4. ГОСТ 7.32-81. Отчёт о научно-исследовательской работе. Общие требования и правила оформления.
5. ГОСТ 1494-77. Электротехника. Буквенные обозначения основных величин.
6. Тартаковский Д.Ф. Метрология стандартизация и технические средства измерений: учеб. для ВУЗов / Д.Ф. Тартаковский, А.С. Ястребов. – М.: Высш. шк., 2002. – 205 с.
7. Муратов А.В. Метрология, стандартизация и технические измерения: учеб. пособие / А.В. Муратов, М.А. Ромащенко. Воронеж: ВГТУ, 2007. – 255 с.
8. Крохин В.В. Метрология. Карманная энциклопедия студента / В.В. Крохин, В.Г. Сергеев. – М.: Высш. шк., 2001. 376 с.
9. Болтон У. Карманный справочник инженера-метролога / У. Болтон. – М.: Изд-во «Додека -XXI », 2002. – 384 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ №5-7

по дисциплине «Теория измерений» для студентов направления 200100.62 «Приборостроение» (профиль «Приборостроение») очной и заочной форм обучения

Составитель
Самодуров Александр Сергеевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 30.03.2014.
Уч.-изд. л. 1,2. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский проспект, 14