МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по дифференциальным уравнениям, числовым и функциональным рядам для студентов специальности 38.05.021 «Экономическая безопасность» специализация №1 «Экономика – правовое обеспечение экономической безопасности».

II семестр

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов

Met- rab difur+rjdi .docx 1,6 М байт 14.09 .2022 уч.-изд. л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
.
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по дифференциальным уравнениям, числовым и функциональным рядам для студентов специальности 38.05.021 «Экономическая безопасность» специализация №1 «Экономика – правовое обеспечение экономической безопасности».

II семестр

Воронеж 2022

УДК 517

Составители: *канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова,*
канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов

Математика: **м**етодические указания к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по дифференциальным уравнениям, числовым и функциональным рядам для студентов специальности 38.05.021 «Экономическая безопасность» специализация №1 «Экономика – правовое обеспечение экономической безопасности». II семестр / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов. Воронеж, Изд-во ВГТУ, 2022. 46 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле «Met- rab dif ur + rjdi .docx»

Ил. 8. Библиогр.: 15 назв.

УДК 517

Рецензент Ю.В. Пахомова доц. кафедры экономической безопасности ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Высшая математика для будущих инженеров данного профиля является не только основой фундаментальной подготовки, но и обязательной базой для изучения остальных общетехнических специальных дисциплин и успешности всей последующей практической деятельности. И главное при этом, чтобы с самого начала и на всем протяжении курса изучение высшей математики проходило студентами целенаправленно во взаимосвязи с другими дисциплинами и ориентацией на конкретное практическое приложение изученного материала. Это возможно только при условии эффективного сочетания обязательных учебных занятий и продуктивной самостоятельной работы студентов.

При организации изучения курса высшей математики ряд тем выделяется студентам на самостоятельное изучение

ЗАНЯТИЕ № 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНЫМ

Литература: [1], с. 25-30; [3], с. 113-114.

Основные понятия

Дифференциальные уравнения вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (1.1)$$

называются *однородными*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются *однородными функциями одного и того же измерения* m, т.е. при любом λ выполняются тождества

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m P(x,y) \quad \text{и} \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m Q(x,y).$$

В этом случае уравнение (1.1) можно привести к виду $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ и с помощью подстановки $y = tx$ однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой переменной t.

Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, для которого $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, приводится к однородному подстановкой $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, где x_0 и y_0 находятся из решения системы $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$. При $\Delta = 0$ делается подстановка $a_1x + b_2y = t$, которая позволяет разделить переменные.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения первого порядка называются однородными?
2. Как решаются такие уравнения?
3. Укажите вид уравнений, приводящихся к однородным.
4. Какие два случая различают при решении таких уравнений? Каков алгоритм решения в каждом из этих случаев?

Примеры решения задач

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(y+2)dx - (2x+y+6)dy = 0.$$

Решение. Приведем уравнение к виду $y' = \dfrac{y+2}{2x+y+6}$. Это уравнение можно привести к однородному. Сделаем подстановку $x = u + x_0$, $y = v + y_0$. Подберем x_0 и y_0

так, чтобы $\begin{cases} y_0+2=0 \\ 2x_0+y_0+6=0 \end{cases}$. Решая систему, находим $x_0=-2$, $y_0=-2$. Тогда исходное уравнение принимает вид $\frac{dv}{du}=\frac{v}{2u+v}$, т.е. является однородным. Совершая подстановку $v=ut(u)$, получим $t+u\frac{dt}{du}=\frac{ut}{2u+ut}$. Далее, разделив переменные, получим уравнение $\frac{t+2}{t(t+1)}dt=-\frac{du}{u}$, проинтегрировав которое будем иметь $\frac{t^2}{t+1}=\frac{C}{u}$. Учитывая, что $t=\frac{v}{u}=\frac{y+2}{x+2}$ записываем общий интеграл исходного дифференциального уравнения $\frac{(y+2)^2}{x+y+4}=C$.

Разберите также решения примеров № 552, 553 [3].

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) $\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{y+1}{x+y-2}\right)^2$; 2) $(x+y-2)dx-(3x-y-2)dy=0$;

3) $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$; 4) $y'=\frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$.

5) Определить кривые, у которых отрезок касательной от точки касания M до пересечения с осью Ox равен отрезку, отсекаемому касательной от оси Ox.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Литература: [1], с. 30-35.

Основные понятия

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \qquad (2.1)$$

где $n \neq 0$ и $n \neq 1$. Это уравнение с помощью замены $z = y^{-n+1}$ приводится к *линейному* относительно функции $z(x)$

$$z' + (-n+1)P(x)\,z = (-n+1)Q(x).$$

Получившееся линейное уравнение можно решить *методом Бернулли*, полагая $z(x) = u(x)v(x)$, или *методом Лагранжа*, решая сначала соответствующее однородное уравнение, а затем производя вариацию произвольной постоянной.

Уравнение Бернулли можно, не сводя к линейному, проинтегрировать с помощью подстановки $y(x) = u(x)v(x)$ (т.е. методом Бернулли) или применив метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения первого порядка называются линейными?

2. Какими методами решаются линейные дифференциальные уравнения?

3. В чем состоит метод Бернулли?

4. В чем состоит метод Лагранжа?

3. Какой вид имеет уравнение Бернулли?

4. Как уравнения Бернулли приводятся к линейным уравнениям?

5. Можно ли решать уравнение Бернулли, не приводя его к линейному виду?

Примеры решения задач

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}\ .$$

Решение. Это уравнение Бернулли с $n = 1/2$. Полагаем $y(x) = u(x)v(x)$. Получаем уравнение $u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$ или $u'v + u\left(v' - \frac{4}{x}v\right) = x\sqrt{uv}$. Подберем такую функцию $v(x)$, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим дифференциальное уравнение $v' - \frac{4}{x}v = 0$. Находим $v = x^4$. Решаем затем уравнение $u'x^4 = x\sqrt{ux^4}$ и получаем его общее решение $u = \frac{1}{4}\ln^2\left|Cx\right|$. Следовательно, общее решение исходного уравнения $y = uv = \frac{1}{4}x^4\ln^2\left|Cx\right|$. Нетрудно заметить, что $y = 0$ является особым решение исходного уравнения.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи №№ 4038, 4039, 4041, 4043, 4044 [2].

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 3

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ (КЛЕРО, ЛАГРАНЖА)

Литература: [1], с. 47-50.

Основные понятия

Некоторые дифференциальные уравнения первого порядка приходится решать методом введения вспомогательного параметра. К числу таких уравнений относятся *уравнение Лагранжа*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \qquad (3.1)$$

и *уравнение Клеро*

$$y = xy' + \psi(y'), \qquad (3.2)$$

где φ и ψ – известные функции от y'.

Уравнение (5.1) интегрируется следующим образом: обозначая $p(x) = y'$, запишем уравнение в виде $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Дифференцируя полученное уравнение по x, имеем

$$p = \varphi(p) + \left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx},$$

откуда получим $\left(p - \varphi(p)\right)\dfrac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p)$ – линейное уравнение относительно x и $\dfrac{dx}{dp}$. Если его решение будет $x = f(p, C)$, то общее решение уравнения (5.1) записывается в виде

$$\begin{cases} x = f(p,C) \\ y = x\varphi(p)+\psi(p) = f(p,C)\varphi(p)+\psi(p) \end{cases}.$$

Уравнение (5.1) может иметь особое решение, вида $y = x\varphi(p_0)+\psi(p_0)$, где p_0 – корень уравнения $p=\varphi(p)$.

Уравнение Клеро (5.2) является частным случаем уравнения Лагранжа при $\varphi(y') = y'$. Его общее решение имеет вид $y = Cx+\psi(C)$, особое решение получается путем исключения параметра p из уравнений $y = px+\psi(p)$ и $x = -\psi'(p)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения называются уравнениями Клеро?
2. Какая вспомогательная замена вводится при решении уравнений Клеро?
3. Что такое особое решение уравнения Клеро и каким свойством оно обладает?
4. Каков общий вид уравнений Лагранжа?
5. Какой вид уравнений более общий Клеро или Лагранжа?
6. Какой заменой решается уравнение Лагранжа?
7. Что такое особое решение уравнения Лагранжа?
8. Как ищется общее решение уравнения Лагранжа?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить уравнение $y = xy' - (y')^2$.

Решение. Уравнение имеет вид (5.2), т.е. это уравнение Клеро. Положим $y' = p$. Тогда заданное уравнение принимает вид $y = px - p^2$. Продифференцировав его по x, имеем $y' = p'x + p - 2pp'$, или $p'(x - 2p) = 0$ с учетом $y' = p$. Если $p' = 0$, то $p = C$ и общее решение данного уравнения есть $y = Cx - C^2$. Если $x - 2p = 0$, то получаем $y = p\cdot 2p - p^2$. Особое решение данного уравнения $\begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 \end{cases}$. Исключая параметр p, находим особое решение в явном виде $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Пример 2. Решить уравнение $y = x(1 + y') + (y')^2$.

Решение. Уравнение имеет вид (5.1), т.е. это уравнение Лагранжа. Положим $y' = p$. Тогда заданное уравнение принимает вид $y = x(1 + p) + p^2$. Продифференцировав его по x, имеем $y' = (1 + p) + xp' + 2pp'$, откуда $(x + 2p)\dfrac{dp}{dx} + 1 = 0$. Из этого уравнения получаем $\dfrac{dx}{dp} + x = -2p$ – линейное относительное x и $\dfrac{dx}{dp}$ уравнение. Решим его методом Бернулли. Полагая $x(p) = u(p)v(p)$, получаем $u'v + uv' + uv = -2p$ или $u'v + u(v' + v) = -2p$. Находим v, приравнивая скобку к нулю, разделяя переменные и интегрируя: $v' + v = 0$, $\dfrac{dv}{v} = -dp$, $\ln|v| = -p$, $v = e^{-p}$. Тогда уравнение примет вид $u'e^{-p} = -2p$. Отсюда $u = -2\int pe^p dp = -2e^p(p - 1) + C$. Учитывая, что $y = x(1 + p) + p^2$, получим $y = \left(2 - 2p + Ce^{-p}\right)(1 + p) + p^2$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид (в параметрической форме)

$$\begin{cases} x = 2 - 2p + Ce^{-p} \\ y = \left(2 - 2p + Ce^{-p}\right)(1+p) + p^2 \end{cases}.$$

Особого решения данное уравнение не имеет.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) $y = xy' + y' - (y')^2$; 2) $y = xy' - 3(y')^3$;

3) $y = x(y')^2 + (y')^2$; 4) $y = x(1+y') + (y')^2$.

Форма отчетности: устный опрос, самостоятельная работа.

ЗАНЯТИЕ № 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА.

Литература: [1], с. 56-66.

Указание. Перед изучением этой темы повторите все виды уравнений первого порядка и способы их решения.

Основные понятия

В некоторых частных случаях удается понизить порядок дифференциального уравнения второго порядка. Зачастую оно в итоге приводится к дифференциальному уравнению первого порядка одного из изученных ранее типов. Рассмотрим наиболее типичные случаи.

I. *Уравнения вида* $y'' = f(x)$

Интегрированием обеих частей уравнения $y'' = f(x)$ оно приводится к уравнению первого порядка $y' = \int f(x)\,dx = = F(x) + C_1$. Повторно интегрируя полученное уравнение, находим общее решение исходного уравнения

$$y = \int \left(F(x) + C_1\right) dx + C_2.$$

Заметим, что аналогично решаются уравнения $y^{(n)} = f(x)$.

II. Уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$, *явно не содержащие искомой функции* y

Такие уравнения допускают понижение порядка подстановкой $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Другими словами, данное уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = p \\ F(x, p, p') = 0 \end{cases}.$$

Аналогично решаются уравнения вида $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$.

III. Уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$, *явно не содержащие независимой переменной* x

Уравнения такого вида допускают понижение порядка подстановкой $y' = p(y)$, $y'' = (y')' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$. Таким образом, данное уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = p \\ F(y, p, pp') = 0 \end{cases}.$$

Дифференциальные уравнения $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ допускают понижение порядка такой же подстановкой:

$$y' = p(y), \quad y'' = p'p, \quad y''' = \left(p''p + (p')^2\right)p \quad \text{и т.д.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения второго порядка приводятся к уравнениям первого порядка?

2. Как решаются уравнения вида $y'' = f(x)$?

3. Как решаются уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$?

4. Как решаются уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$?

5. Как решаются уравнения вида $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$?

6. Как решаются уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$?

7. Можно ли понизить порядок дифференциального уравнения вида $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = xe^{2x}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Интегрируя левую и правую части, находим $y' = \int xe^{2x}dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C_1$. Повторное интегрирование приводит к общему решению $y = \frac{1}{4}e^{2x}(x-1) + C_1x + C_2$. Учитывая начальные условия, записываем систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{4}\cdot(-1) + C_2 = 1 \\ y'(0) = \frac{1}{4}\cdot(-1) + C_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{5}{4} \\ C_1 = \frac{9}{4} \end{cases}.$$

Подставляя найденные значения постоянных в общее решение уравнения, получаем искомое частное решение

$$y_ч = \frac{1}{4} e^{2x}(x-1) + \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - y' \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$.

Решение. Данное уравнение имеет вид $F(x, y', y'') = 0$. Положим $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $p' - p \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ – линейное относительно неизвестной функции $p(x)$. Его общее решение $p = \left(x^2 + C_1\right)\sin x$, т.е. $y' = \left(x^2 + C_1\right)\sin x$. Интегрируя это равенство, найдем общее решение исходного уравнения $y = -\left(x^2 + C_1\right)\cos x + 2x\sin + 2\cos x + C_2$.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + yy')\,y'' = \left(1 + (y')^2\right)y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение имеет вид $F(y, y', y'') = 0$. Подстановка $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy}p$ приводит его к виду $(1 + py)\,p\frac{dp}{dy} = \left(1 + p^2\right)p$, откуда $p = 0$, т.е. $y = C$ (это решение не удовлетворяет начальным условиям), или $\frac{dp}{dy} = \frac{1 + p^2}{1 + py}$. Полученное дифференциальное уравнение первого порядка не относится к уравнениям известного нам типа. Перепишем его в виде $\frac{dy}{dp} = \frac{1 + py}{1 + p^2} = \frac{p}{1 + p^2}y + \frac{1}{1 + p^2}$. Это линейное уравнение относительно функции $y(p)$. Его общее решение имеет вид $y = p + C_1\sqrt{1+p^2}$. Теперь необходимо решить дифференциальное уравнение $y = \dfrac{dy}{dx} + C_1\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$. Но в общем виде решить его достаточно сложно. Так как нам нужно найти частное решение исходного уравнения, то воспользуемся начальными условиями для определения постоянной C_1, полагая в последнем равенстве $y = 1$ и $y' = 1$. Приходим к равенству $1 = 1 + C_1\sqrt{2}$, из которого $C_1 = 0$. Таким образом, нам достаточно решить уравнение $y = \dfrac{dy}{dx}$, откуда $y = C_2 e^x$. Учитывая начальное условие $y(0) = 1$, находим $C_2 = 1$ и записываем искомое частное решение $y_ч = e^x$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4155, 4156, 4160, 4161, 4165, 4166, 6470, 4178 [2].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 5

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Литература: [1], с.79-80, 92-94; [3], с.135.

Указание. Перед изучением этой темы повторить тему "Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка".

Основные понятия

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x).$$

Общее решение таких уравнений представляется в виде суммы $y=y_{oo}+y_{чн}$, где y_{oo} – *общее решение соответствующего однородного уравнения,* $y_{чн}$ – *частное решение неоднородного уравнения.*

Для решения однородного уравнения составляется *характеристическое уравнение*

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$$

и находятся его корни k_1, k_2, $\ldots$, k_n. По характеру корней записываются частные линейно независимые решения, руководствуясь тем, что

а) каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx};

б) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней $k_{1,2}=a\pm ib$ соответствуют два частных решения $e^{ax}\cos bx$ и $e^{ax}\sin bx$;

в) каждому действительному корню k кратности r соответствует r линейно независимых частных решений e^{kx}, xe^{kx}, $\ldots$, $x^{r-1}e^{kx}$;

г) каждой паре комплексно сопряженных корней кратности p соответствует $2p$ частных решений

$$e^{ax}\cos bx,\quad xe^{ax}\cos bx,\quad \ldots,\quad x^{p-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx,\quad xe^{ax}\sin bx,\quad \ldots,\quad x^{p-1}e^{ax}\sin bx.$$

Найдя все n линейно независимых частных решений y_1, y_2, $\ldots$, y_n, строим общее решение однородного уравнения

$$y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n,$$

где C_1, C_2, $\ldots$, C_n – произвольные постоянные.

В тех случаях, когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, частное решение $y_{чн}$ неоднородного уравнения находится *методом неопределенных коэффициентов*. Этот метод сводится к следующим двум случаям.

Случай 1. Правая часть $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

а) Если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде $y_{чн}=e^{\alpha x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неизвестными коэффициентами.

б) Если α является корнем характеристического уравнения кратности r, то частное решение ищется в виде $y_{чн}=x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неизвестными коэффициентами.

В частности, если $f(x)=P_n(x)$, т.е. $\alpha=0$, то $y_{чн}$ ищется в виде $y_{чн}=Q_n(x)$ (если $\alpha=0$ не является корнем характеристического уравнения) или в виде $y_{чн}=x^r Q_n(x)$ (если $\alpha=0$ является корнем характеристического уравнения кратности r).

Случай 2. $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$.

а) Если $\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то $y_{чн}=e^{\alpha x}\left[P_N(x)\cos\beta x+Q_N(x)\sin\beta x\right]$, где $N=\max(n,m)$.

б) Если $\alpha\pm i\beta$ – корни характеристического уравнения кратности r, то $y_{чн}=x^r e^{\alpha x}\left[P_N(x)\cos\beta x+Q_N(x)\sin\beta x\right]$.

В частности, если $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, т.е. $\alpha = m = \quad = n = 0$, то частное решение ищется в виде $y_{чн} = A\cos\beta x + \quad + B\sin\beta x$ (если $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения) или в виде $y_{чн} = x^r\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$ (если числа $\alpha \pm i\beta$ – корни характеристического уравнения кратности r).

Контрольные вопросы и задания

1. Какова структура общего решения неоднородного уравнения?
2. Что такое характеристическое уравнение и как оно составляется для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
3. Как строится общее решение однородного уравнения в зависимости от характера корней характеристического уравнения?
4. Какой вид правой части неоднородного уравнения называют специальным?
5. Как по виду правой части записывается частное решение неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами?
6. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения неоднородного уравнения?

Примеры решения задач

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' = f(x)$, где а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, б) $f(x) = 2xe^x$, в) $f(x) = 3\sin 2x + 5x\cos 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 0$ и $k_3 = 1$. Поэтому общее решение однородного уравнения $y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Найдем частные решения неоднородного уравнения для случаев а) – в).

а) Контрольное число $\alpha + i\beta = 0$ – корень характеристического уравнения кратности 2 и в правой части стоит многочлен второй степени. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C вычисляем $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 3x^2 - 2x + 5$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x^2 & -12A = 3 \\ x^1 & 24A - 6B = -2 \\ x^0 & 6B - 2C = 5 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1/4 \\ B = -2/3. \\ C = -9/2 \end{cases}$$

Следовательно $y_{чн} = x^2\left(-\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{9}{2}\right)$.

б) Контрольное число $\alpha + i\beta = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 1 и в правой части стоит произведение экспоненты на многочлен первой степени. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = x(Ax + B)e^x$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B вычисляем $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $\left[Ax^2 + (6A + B)x + 6A + 3B\right]e^x -$ $- \left[Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right]e^x = 2xe^x$ или $2Ax + (4A + B) =$ $= 2x$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 2A=2 \\ x^0 & 4A+B=0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-4 \end{cases}.$$

Следовательно $y_{чн} = x(x-4)e^x$.

в) Контрольное число $\alpha + i\beta = 2i$ не является корнем характеристического уравнения и в правой части стоят произведения синуса и косинуса на многочлены, старшая степень которых равна 1. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = (Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C, D вычисляем $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $(-8Cx-8D-12A)\cos 2x + (8Ax+8B-12C)\sin 2x - (-4Ax-4B+4C)\cos 2x - (-4Cx-4D-4A)\sin 2x = 3\sin 2x + 5x\cos 2x$ или $(4A-8C)x\cos 2x + (8A+4C)x\sin 2x + (-12A+4B-4C-8D)\cos 2x + (4A+8B-12C+4D)\sin 2x = 3\sin 2x + 5x\cos 2x$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x\cos 2x & 4A-8C=5 \\ x\sin 2x & 8A+4C=0 \\ \cos 2x & -12A+4B-4C-8D=0 \\ \sin 2x & 4A+8B-12C+4D=3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=1/4 \\ B=-3/4 \\ C=-1/2 \\ D=-1/2 \end{cases}.$$

Следовательно $y_{чн} = \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\sin 2x$.

Таким образом, общие решения неоднородного уравнения для случаев а) – в) имеют вид:

а) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^2\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{9}{2}\right)$;

б) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + \left(x^2 - 4x\right)e^x$;

в) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)\cos 2x - \frac{1}{2}(x+1)\sin 2x$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4314–4321 [2].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 6

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ)

Литература: [1], с. 103-107.

Основные понятия

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, т.е. система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}, \qquad (6.1)$$

где x – независимая переменная, а $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ – неизвестные функции от x, называется *нормальной системой*. Нормальную систему можно привести к одному уравнению порядка n (или меньше) относительно одной неизвестной функции, например y_1, при помощи следующего алгоритма, называемого *метод исключения*.

Дифференцируем первое уравнение системы (6.1) по переменной x: $y_1'' = (f_1)'_x + (f_1)'_{y_1} \cdot y_1' + (f_1)'_{y_2} \cdot y_2' + \ldots + (f_1)'_{y_n} \cdot y_n'$. Производные y_1', y_2', $\ldots$, y_n' в правой части этого равенства заменим их выражениями из системы (6.1). Получим уравнение $y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Это равенство дифференцируем по x: $y_1''' = (F_2)'_x + (F_2)'_{y_1} \cdot y_1' + (F_2)'_{y_2} \cdot y_2' + \ldots + (F_2)'_{y_n} \cdot y_n'$. Производные y_1', y_2', $\ldots$, y_n' в правой части этого равенства заменим их выражениями из системы (6.1). Получим еще одно уравнение $y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Это уравнение также дифференцируем по x и так далее до тех пор, пока не придем к уравнению $y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Полученные таким образом дифференциальные уравнения объединим в одну систему, к которой присоединим первое уравнение системы (6.1):

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} . \qquad (6.2)$$

Первые $n-1$ уравнений системы (6.2) разрешим относительно переменных y_2, y_3, $\ldots$, y_n, выражая их через переменные x и y_1, а также производные y_1', y_1'', $\ldots$, $y_1^{(n-1)}$. Полученные выражения подставим в последнее уравнение системы (6.2). В итоге придем к дифференциальному уравнению порядка n относительно одной неизвестной функции y_1. Из общего решения этого уравнения можно получить общее решение системы (6.1). Заметим, что порядок последнего уравнения может быть меньше, чем n, если при его получении были использованы не все уравнения системы (6.1).

Контрольные вопросы и задания

1. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?

2. В чем состоит метод исключения неизвестных в нормальной системе?

3. Каков алгоритм метода исключения?

4. Какой метод решения систем более общий: метод характеристического уравнения или метод исключения неизвестных?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases}$.

Решение. В данной системе $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – неизвестные функции. Дифференцируем первое уравнение системы по t: $x'' = -2x' - 2y' - 4z'$. Вместо y' и z' подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы. Тогда $x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z$. Полученное уравнение дифференцируем по t, а вместо y' и z' подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы: $x''' = -2x'' - 16x' - 10y' - 24z' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z$. Составим новую систему:

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z \\ x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z \end{cases}. \qquad (6.3)$$

Из этой системы исключим неизвестные y и z. Для этого используем первые два уравнения системы (6.3), из которых, после преобразований, находим

$$\begin{cases} 2y = x'' - 4x' + 4x \\ 4z = -x'' + 3x' - 6x \end{cases} \tag{6.4}$$

и эти выражения подставим в третье уравнение системы (6.3) и получим однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $x(t)$: $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$. Решаем соответствующее характеристическое уравнение $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$ и находим $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Следовательно, общее решение $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$. Далее находим производные $x' = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}$, $x'' = C_1e^t + 4C_2e^{2t} + 9C_3e^{3t}$ и подставляем $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ в систему (6.4). Получаем $2y = C_1e^t + C_3e^{3t}$, $4z = -4C_1e^t - 4C_2e^{2t} - 6C_3e^{3t}$. В итоге, общее решение исходной системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} \\ y(t) = \dfrac{1}{2}C_1e^t + \dfrac{1}{2}C_3e^{3t} \\ z(t) = -C_1e^t - C_2e^{2t} - \dfrac{3}{2}C_3e^{3t} \end{cases}.$$

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} x' + y' - y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$ при данных начальных условиях: $t_0 = 0$, $x_0 = -\dfrac{3}{17}$, $y_0 = \dfrac{4}{17}$.

Решение. Сначала приводим систему к нормальному виду

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t \end{cases}.$$

Первое уравнение дифференцируем по t, после чего вместо y' подставим выражение из второго уравнения системы: $x'' = -3y' - \sin t - e^t = -12y + 3\cos t - \sin t - 7e^t$. Из этого уравнения и первого уравнения исходной системы составим новую систему

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t \\ x'' = -12y + 3\cos t - \sin t - 7e^t \end{cases}, \qquad (6.5)$$

из первого уравнения которой выражаем $3y = -x' + \cos t - e^t$ и, подставляя во второе, получаем $x'' - 4x' = -3e^t - \cos t - \sin t$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 4$ $\Rightarrow$ $x_{oo} = C_1 + C_2 e^{4t}$. Частное решение ищем в виде $x_{чн} = Ae^t + B\cos t + C\sin t$. После определения коэффициентов получаем $x_{чн} = e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t$. Следовательно $x = x_{oo} + x_{чн} = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t$. Найдя производную $x' = 4C_2 e^{4t} + e^t + \frac{3}{17}\sin t + \frac{5}{17}\cos t$, получаем $3y = -\left(4C_2 e^{4t} + e^t + \frac{3}{17}\sin t + \frac{5}{17}\cos t\right) + \cos t - e^t$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \dfrac{3}{17}\cos t + \dfrac{5}{17}\sin t \\ y = -\dfrac{4}{3}C_2 e^{4t} - \dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{4}{17}\cos t - \dfrac{1}{17}\sin t \end{cases}.$$

Подставляя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{17} = C_1 + C_2 + 1 - \dfrac{3}{17} \\ \dfrac{4}{17} = -\dfrac{4}{3}C_2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{2} \\ C_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Итак, частное решение исходной системы, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{4t} + e^t - \dfrac{3}{17}\cos t + \dfrac{5}{17}\sin t \\ y = \dfrac{2}{3}e^{4t} - \dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{4}{17}\cos t - \dfrac{1}{17}\sin t \end{cases}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4324.1–4324.4 [2], а также задачи:

1) $\begin{cases} 4x' - y' = \sin t - 3x \\ x' = \cos t - y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' + 5x + y = t \\ y' - x - 3y = e^{2t} \end{cases}$.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 7

ПОНЯТИЕ О ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

Литература: [1], с. 113-127.

Основные понятия

Решение $x_i = \varphi_i(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \quad \left(i = \overline{1, n}\right), \tag{7.1}$$

определенное при всех $t \geq t_0$, называется *устойчивым* (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого решения $x_i = x_i(t)$ той же системы уравнений, начальное значение которого удовлетворяет неравенству $\left\|x(t_0) - \varphi(t_0)\right\| < \delta$, при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\left\|x(t) - \varphi(t)\right\| < \varepsilon$.

Решение $x_i = \varphi_i(t)$ системы дифференциальных уравнений (7.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и существует такое $\delta_0 > 0$, что для всякого решения $x_i = x_i(t)$ той же системы уравнений, начальное значение которого удовлетворяет неравенству $\left\|x(t_0) - \varphi(t_0)\right\| < \delta_0$, справедливо предельное равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} \left\|x(t) - \varphi(t)\right\| = 0$.

Если решение $x_i = \varphi_i(t)$ не является устойчивым, то будем называть его *неустойчивым*.

Рассмотрим случай, когда система (7.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \tag{7.2}$$

Эту систему часто называют *динамической системой*, а координатную плоскость xOy – ее *фазовой плоскостью*. Если $ad - cb \neq 0$, то система (7.2) имеет единственное решение (*положение равновесия*): $x = y = 0$. Качественное поведение *фазовых кривых* (*траекторий*) вблизи положения равновесия определяется собственными числами матрицы коэффициентов этой системы, т.е. корнями характеристического уравнения

$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Рассмотрим все возможные случаи корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения.

1) Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ – действительные числа и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то положение равновесия $(0,\ 0)$ – *устойчивый узел.*

2) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ – действительные числа и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то положение равновесия $(0,\ 0)$ – *неустойчивый узел*.

3) Если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ – действительные числа, то соответствующий узел называется *вырожденным*.

4) Если λ_1 и λ_2 – действительные числа разного знака, то положение равновесия $(0,\ 0)$ – *седло* и решение системы (7.2) неустойчиво.

5) Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно сопряженные и $\alpha < 0$, то положение равновесия $(0,\ 0)$ – *устойчивый фокус*.

6) Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно сопряженные и $\alpha > 0$, то положение равновесия $(0,\ 0)$ – *неустойчивый фокус*.

7) Если $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, то положение равновесия $(0,\ 0)$ – *центр*, решение устойчиво.

8) Если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ – действительные числа, то решение устойчиво, фазовыми кривыми являются параллельные лучи, стремящиеся к одной прямой.

9) Если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ – действительные числа, то решение неустойчиво, фазовыми кривыми являются параллельные лучи, расходящиеся от одной прямой.

10) Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то решение неустойчиво, а фазовыми траекториями являются параллельные прямые.

Рассмотрим случай, когда система (7.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{7.3}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывно дифференцируемые в некоторой области функции. Положения равновесия этой системы определяются из условий $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$, т.е. из решения системы уравнений $\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$. Для исследования положения равновесия (x_0, y_0) надо перенести начало координат в точку (x_0, y_0) и разложить функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в окрестности этой точки в ряд Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (7.3) примет вид $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 + by_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = cx_1 + dy_1 \end{cases}$, где $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$, $a = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$, $c = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$, $d = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$. Тип положения равновесия (x_0, y_0) определяется далее так же, как для случая системы (7.2). Исследовав поведение фазовых кривых в окрестности каждого положения равновесия, можно решить *глобальную задачу качественной теории систем дифференциальных уравнений* – установить поведение фазовых кривых на всей фазовой плоскости.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение устойчивости по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений.

2. Дайте определение асимптотической устойчивости решения системы дифференциальных уравнений.

3. Какое решение называется неустойчивым?

4. Какая система называется автономной?

5. Какая система называется динамической?

6. Что такое фазовая плоскость?

7. Что такое фазовые кривые?

8. Что такое положение равновесия?

9. Чем определяется качественное поведение фазовых траекторий вблизи положения равновесия?

10. Какими должны быть корни характеристического уравнения для системы вида (7.2), чтобы решение было устойчивым (неустойчивым)?

11. На примере системы вида (7.2) исследуйте вопрос о том каким условиям должны удовлетворять коэффициенты системы, чтобы решение было устойчивым (неустойчивым).

12. Что значит решение системы (7.2) устойчиво (неустойчиво)? Поясните на примере.

13. В каком случае особая точка называется устойчивым (неустойчивым) узлом?

14. Какая особая точка называется седлом?

15. Когда особая точка называется устойчивым (неустойчивым) фокусом?

16. В каком случае особая точка является центром?

17. В каких случаях фазовыми траекториями являются параллельные прямые?

18. Исследуйте вопрос о соответствии случая $ad - cb \neq 0$ ($ad - cb = 0$) различным видам фазовых траекторий.

19. Каков порядок исследования системы (7.3)?

20. В чем состоит глобальная задача качественной теории систем дифференциальных уравнений?

Примеры решения задач

Пример 1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=\frac{\alpha}{t}x$ с начальным условием $x(1)=0$.

Решение. Разделяем переменные $\frac{dx}{x}=\alpha\frac{dt}{t}$ и получаем общее решение $x=Ct^{\alpha}$. Частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию, есть $x_ч \equiv 0$. Нетрудно установить, что любое другое частное решение, удовлетворяющее начальному условию $x(1)=x_0 \neq 0$, имеет вид $\tilde{x}_ч = x_0 t^{\alpha}$. Разность произвольного частного решения и частного решения при данном начальном условии равна $\tilde{x}_ч - x_ч = x_0 t^{\alpha} - 0 = x_0 t^{\alpha}$. Рассмотрим различные случаи постоянной α:

1) Если $\alpha=0$, то $\left|\tilde{x}_ч - x_ч\right| = \left|x_0 t^{\alpha}\right| = \left|x_0\right| < \varepsilon$, а модуль разности начальных условий $\left|x_0 - 0\right| = \left|x_0\right| < \delta$. Следовательно, при $\delta=\varepsilon$ по определению решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво.

2) Если $\alpha<0$, то $\left|\tilde{x}_ч - x_ч\right| = \left|x_0 t^{\alpha}\right| = t^{\alpha}\left|x_0\right| \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, решение асимптотически устойчиво.

3) Если $\alpha>0$, то $\left|\tilde{x}_ч - x_ч\right| = \left|x_0 t^{\alpha}\right| = t^{\alpha}\left|x_0\right| \to \infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, решение неустойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$.

Решение. Положения равновесия данной системы определяются из системы уравнений $\begin{cases} -2x+y+x^3=0 \\ -x-2y+3x^5=0 \end{cases}$. Отсюда находим три положения равновесия $O(0,0)$, $A(1,1)$ и $B(-1,-1)$. Исследуем вопрос устойчивости каждого из них, для чего определяем производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x+y+x^3\right)=-2+3x^2$,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-2x+y+x^3\right)=1$, $\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(-x-2y+3x^5\right)=-1+15x^4$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(-x-2y+3x^5\right)=-2$.

1) Для точки $O(0,0)$ получаем $a=-2$, $b=1$, $c=-1$, $d=-2$. Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y \end{cases}$. Ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+5=0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2}=-2\pm i$. Значит, положение равновесия $O(0,0)$ является устойчивым фокусом.

2) Для точки $A(1,1)$ получаем $a=1$, $b=1$, $c=14$, $d=-2$. Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \dfrac{d(x-1)}{dt}=(x-1)+(y-1) \\ \dfrac{d(y-1)}{dt}=14(x-1)-2(y-1) \end{cases}$. Ее характери-

стическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-16=0$. Корни этого уравнения $\lambda_1=\dfrac{-1-\sqrt{65}}{2}<0$ и $\lambda_2=\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}>0$. Значит, положение равновесия $A(1,1)$ неустойчиво и является седлом.

3) Для точки $B(-1,-1)$ получаем $a=1$, $b=1$, $c=14$, $d=-2$. Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \dfrac{d(x+1)}{dt}=(x+1)+(y+1) \\ \dfrac{d(y+1)}{dt}=14(x+1)-2(y+1) \end{cases}$. Ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-16=0$. Корни этого уравнения $\lambda_1=\dfrac{-1-\sqrt{65}}{2}<0$ и $\lambda_2=\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}>0$. Значит, положение равновесия $B(-1,-1)$ неустойчиво и является седлом.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

В задачах №№ 1, 2 исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$ с начальным условием $x(0)=0$.

1) $\dfrac{dx}{dt}=1+t-x$. 2) $\dfrac{dx}{dt}=\sin^2 x$.

В задачах №№ 3–10 исследовать тип положения равновесия систем и построить фазовые траектории.

3) $\dfrac{dx}{dt}=-3x+2y$, $\dfrac{dy}{dt}=x-4y$. 4) $\dfrac{dx}{dt}=x$, $\dfrac{dy}{dt}=x+2y$.

5) $\frac{dx}{dt}=2y, \quad \frac{dy}{dt}=2x+3y.$ 6) $\frac{dx}{dt}=\alpha x+y, \quad \frac{dy}{dt}=-x+\alpha y.$

7) $\frac{dx}{dt}=-4x+2y, \quad \frac{dy}{dt}=2x-y.$ 8) $\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=x+y.$

9) $\frac{dx}{dt}=x+y, \quad \frac{dy}{dt}=-x-y.$ 10) $\frac{dx}{dt}=x, \quad \frac{dy}{dt}=y.$

В задачах №№ 11, 12 исследовать на устойчивость все положения равновесия систем.

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x(x+y-2) \\ \frac{dy}{dt}=y(1-x) \end{cases}$, 12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\sin y \\ \frac{dy}{dt}=-\sin x \end{cases}$.

Форма отчетности: конспект, устный опрос.

ЗАНЯТИЕ № 8. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При изучении этой темы воспользуйтесь методическими указаниями к выполнению лабораторных работ на языках программирования высокого уровня .

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения вида $y'=f(x,y)$? Опишите алгоритм метода?

2. Что такое ломаная Эйлера? Как она соотносится с интегральной кривой?

3. Каков алгоритм метода Адамса приближенного решения дифференциальных уравнений?

4. Как выводится формула Адамса? Как при этом используется формула Тейлора?

5. Какой метод более точный: метод Эйлера или метод Адамса?

6. В чем заключается метод Рунге-Кутта приближенного решения дифференциальных уравнений?

7. Какие Вы еще знаете методы численного решения дифференциальных уравнений?

8. Как ищется приближенное решение систем дифференциальных уравнений первого порядка?

9. Составить программу для приближенного решения уравнений или систем одним из перечисленных методов.

Форма отчета: программа и результаты счета.

ЗАНЯТИЕ № 9

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГЛОВ И ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Литература: [1], с. 290-294.

Основные понятия

Существуют определенные интегралы $I(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, которые как функции верхнего предела не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Такие интегралы иногда бывает удобно вычислять с помощью рядов. Разлагая подынтегральную функцию $f(t)$ в степенной ряд, можно, используя теорему об интегрировании степенных рядов, *представить интеграл в виде степенного ряда* и подсчитать величину этого интеграла с заданной точностью при любом значении x из интервала сходимости полученного ряда.

В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно, прибегают к приближенным методам решения уравнения с помощью степенных рядов. Для целого ряда дифференциальных уравнений, в частности для линейных, показано, что *решение можно искать в виде степенного ряда*: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$. Неопределенные коэффициенты c_n находят подстановкой ряда в исходное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $(x-x_0)$ в обеих частях полученного равенства.

Пусть *решение* дифференциального уравнения $y^{(n)} = \; = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$, *представимо в виде ряда Тейлора*: $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Тогда значение производной $y^{(n)}(x_0)$ находится путем подстановки начальных условий в исходное уравнение, а значения следующих производных находятся последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановки в него x_0 и найденных ранее значений производных.

Контрольные вопросы и задания

1. При каких условиях степенной ряд можно почленно интегрировать и интеграл от суммы равен сумме интегралов?
2. Как используются степенные ряды для приближенных вычислений определенных интегралов?

3. Когда степенной ряд можно почленно дифференцировать и производная суммы равна сумме производных?

4. Как найти приближенное решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда?

5. Если решение представимо в виде ряда Тейлора, как находится приближенное решение?

6. В чем состоит метод решения дифференциального уравнения с помощью степенных рядов?

Примеры решения задач

Пример 1. С помощью разложения в степенной ряд вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$, полагая в нем $x=t^4$, $m=-\frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}=1-\frac{1}{2}t^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}t^8-\ldots$. Этот ряд сходится при $|t|<1$. Интегрируя его, найдем

$$I=\int\limits_0^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}t^4+\frac{3}{8}t^8-\ldots\right)dt=\left.\left(t-\frac{t^5}{10}+\frac{t^9}{24}-\ldots\right)\right|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10\cdot 2^5}+\frac{1}{24\cdot 2^9}-\ldots\approx 0,50000-0,00313+0,00008-\ldots$$

.

Полученный результат представляет знакочередующийся сходящийся числовой ряд. Взяв сумму первых двух его членов, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью: $I\approx 0,50000-0,00313=0,49687\approx 0,4969$, так как абсолютное значение третьего члена меньше 0,0001. Заметим здесь, что промежуточные вычисления проводятся с одним лишним знаком после запятой.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Полагая, что искомое решение представляет сходящийся степенной ряд

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k ,$$

найдем ряды для y' и y'' его почленным дифференцированием

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (k+1) a_{k+1} x^k + (k+2) a_{k+2} x^{k+1} + \ldots ,$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \ldots + (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \ldots .$$

Используя начальные условия, найдем значения двух первых коэффициентов: $y(0) = a_0 = 1$, $y'(0) = a_1 = 0$. Подставляя ряды для y, y' и y'' в исходное уравнение и сделав приведение подобных слагаемых, получим

$$1 + 4a_2 + 9a_3 x + (a_2 + 16a_4) x^2 + (a_3 + 25a_5) x^3 +$$

$$+ \ldots + \left(a_k + \left(k^2 + 4k + 4\right) a_{k+2}\right) x^k + \ldots = 0 .$$

Приравнивая к нулю все коэффициенты ряда, стоящего в левой части этого равенства, получаем систему уравнений

$$
\begin{array}{c|l}
x^0 & 1+2^2 a_2=0 \\
x^1 & 3^2 a_3=0 \\
x^2 & a_2+4^2 a_4=0 \\
x^3 & a_3+5^2 a_5=0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^k & a_k+(k+2)^2 a_{k+2}=0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

из которой определяем значения остальных коэффициентов:

$$a_3=a_5=a_7=\ldots=a_{2m+1}=\ldots=0, \quad a_2=-\frac{1}{2^2}, \quad a_4=\frac{1}{2^2 4^2},$$

$$a_6=-\frac{1}{2^2 4^2 6^2}, \quad \ldots, \quad a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^2 4^2 6^2 \ldots (2m)^2}=\frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2}, \ldots .$$

Таким образом, искомое частное решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=1-\frac{x^2}{4(1!)^2}+\frac{x^4}{4^2(2!)^2}-\ldots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2}+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2}.$$

Пример 3. Найти первые шесть членов разложения в ряд решения уравнения $y''=x\sin y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y(1)=0$, $y'(1)=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Будем искать решение уравнения в виде ряда Тейлора: $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$. Подставляя в исходное уравнение $x_0=1$ и $y'(1)=\frac{\pi}{2}$, находим $y''(1)=1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1$. Далее, последовательно дифференцируя уравнение, имеем

$$y'''=\sin y'+xy''\cos y',\qquad y'''(1)=1,$$

$$y^{IV}=y''\cos y'+y''\cos y'+xy'''\cos y'-xy''y''\sin y'=$$

$$=2y''\cos y'+xy'''\cos y'-x\left(y''\right)^2\sin y',\qquad y^{IV}(1)=-1,$$

$$y^{V}=2y'''\cos y'-2\left(y''\right)^2\sin y'+y'''\cos y'+xy^{IV}\cos y'-$$

$$-xy'''y''\sin y'-\left(y''\right)^2\sin y'-2xy''y'''\sin y'-x\left(y''\right)^3\cos y'=$$

$$=3y'''\cos y'-3\left(y''\right)^2\sin y'-3xy''y'''\sin y'+xy^{IV}\cos y'-$$

$$-x\left(y''\right)^3\cos y',\qquad y^{V}(1)=-3-3=-6.$$

Так как первое слагаемое ряда $y(1)=0$, то вычислим еще

$$y^{VI}=3y^{IV}\cos y'-3y'''y''\sin y'-6y''y'''\sin y'-3\left(y''\right)^3\cos y'-$$

$$-3y''y'''\sin y'-3x\left(y'''\right)^2\sin y'-3xy''y^{IV}\sin y'-3x\left(y''\right)^2y'''\cos y'+$$

$$+y^{IV}\cos y'+xy^{V}\cos y'-xy^{IV}y''\sin y'-\left(y''\right)^3\cos y'-$$

$$-3x\left(y''\right)^2y'''\cos y'+x\left(y''\right)^4\sin y',$$

$$y^{VI}(1)=-3-6-3-3+3+1+1=-10.$$

Таким образом, первые шесть членов разложения в ряд частного решения уравнения имеют вид

$$y(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4-$$

$$-\frac{1}{20}(x-1)^5-\frac{1}{72}(x-1)^6+\ldots .$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

№№ 2930, 2931, 2935, 2936 [3]; 12.325, 12.326, 12.327, 12.329, 12.332 [6].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 10

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ИНТЕРВАЛЕ (0, *l*)

Литература: [1], 331-333.

Основные понятия

Пусть $f(x)$ – периодическая с периодом $T=l$ функция, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле на интервале $(0,\ l)$. Тогда ее разложение в *тригонометрический ряд Фурье* имеет следующий вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{2k\pi x}{l}\right).$$

Здесь подразумевается, что в точках разрыва x_i значения функции $f(x_i)=\frac{1}{2}\left(f(x_i+0)+f(x_i-0)\right)$. *Коэффициенты ряда Фурье* вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2k\pi x}{l}\,dx.$$

Функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0, l)$, можно произвольно продолжить на соседний интервал $(-l, 0]$, а затем продолжить периодически на всю числовую ось, поэтому ее можно представить различными рядами Фурье. Пользуясь этим, такую функцию обычно представляют неполным рядом Фурье, содержащим только косинусы или только синусы. Ряд по косинусам получается при *четном продолжении функции* на соседний слева интервал. Он выглядит так

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l},$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Ряд по синусам получается при *нечетном продолжении функции* на соседний слева интервал. Он выглядит так

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

В первом случае график данной функции продолжается на соседний слева интервал *симметрично относительно оси* *ординат*, а во втором – *симметрично относительно начала координат*.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой ряд называется тригонометрическим?

2. Сформулируйте достаточный признак разложимости функций в ряд Фурье.

3. Как разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π?

4. Выведите формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье, если функция имеет период $2l$.

5. Как разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(0,\ l)$?

6. Что означает: "продолжить функцию четным образом", "нечетным образом"?

7. Как будет выглядеть график функции, продолженной четным или нечетным образом?

8. Как при таких продолжениях определяются коэффициенты разложения в ряд Фурье?

Примеры решения задач

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(0,\ 2)$: $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\le 1 \\ x, & 1<x<2 \end{cases}$.

Решение. Продолжаем периодически данную функцию на всю числовую ось (рис. 1).

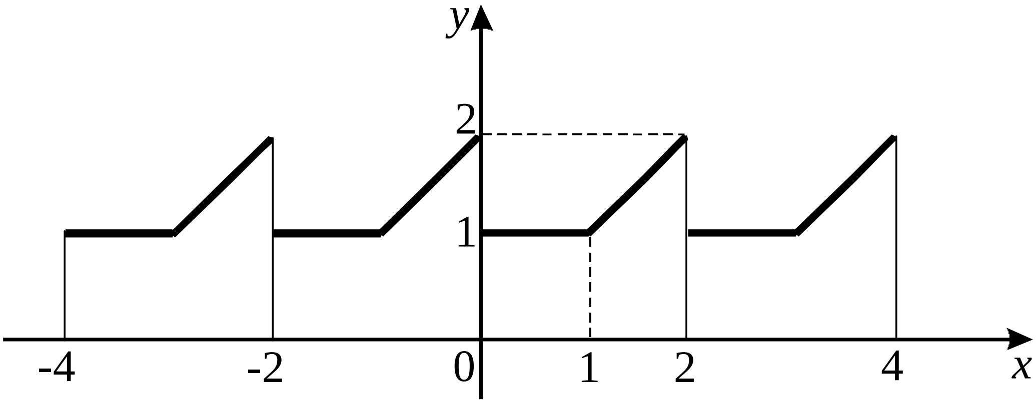

Рис. 1

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам , учитывая, что $T = l = 2$:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 x\,dx = x\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{5}{2},$$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos k\pi x\,dx = \int_0^1 \cos k\pi x\,dx + \int_1^2 x\cos k\pi x\,dx =$$

$$= \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + \left(x\frac{\sin k\pi x}{k\pi} + \frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

$$b_k = \int_0^2 f(x)\sin k\pi x\,dx = \int_0^1 \sin k\pi x\,dx + \int_1^2 x\sin k\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + \left(-x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{k\pi}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд , окончательно получим

$$f(x) = \frac{5}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\cos k\pi x - \sin k\pi x\right).$$

Пример 2. Функцию из примера 1 разложить в ряд Фурье по косинусам.

Решение. Продолжим данную функцию на отрезок $[-2, 0]$ четным образом, а получившуюся функцию, в свою очередь, продолжим периодически (период $T = 2l = 4$) на всю числовую ось (рис. 2).

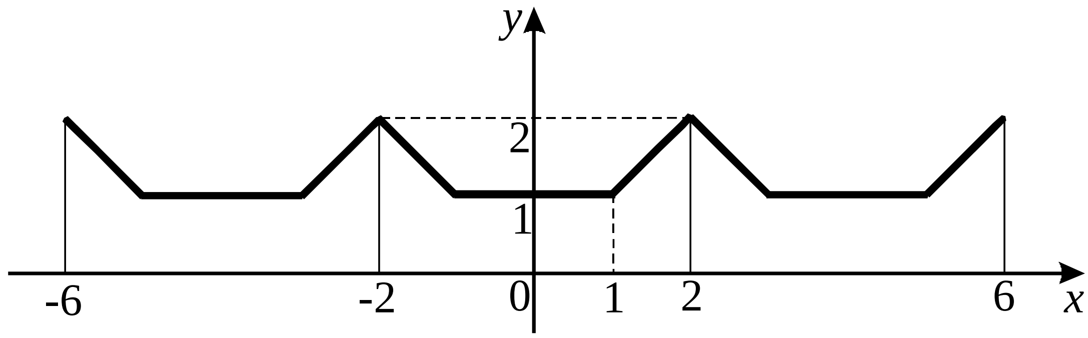

Рис. 2

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 x\,dx = \frac{5}{2},$$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{2x}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2} + \frac{4}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - \cos\frac{k\pi}{2}\right).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд , окончательно получим

$$f(x) = \frac{5}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left((-1)^k - \cos\frac{k\pi}{2}\right)\cos\frac{k\pi x}{2}.$$

Пример 3. Функцию из примера 1 разложить в ряд Фурье по синусам.

Решение. Продолжим данную функцию на отрезок $[-2,0]$ нечетным образом, а получившуюся функцию, в свою очередь, продолжим периодически (период $T=2l=4$) на всю числовую ось (рис. 3).

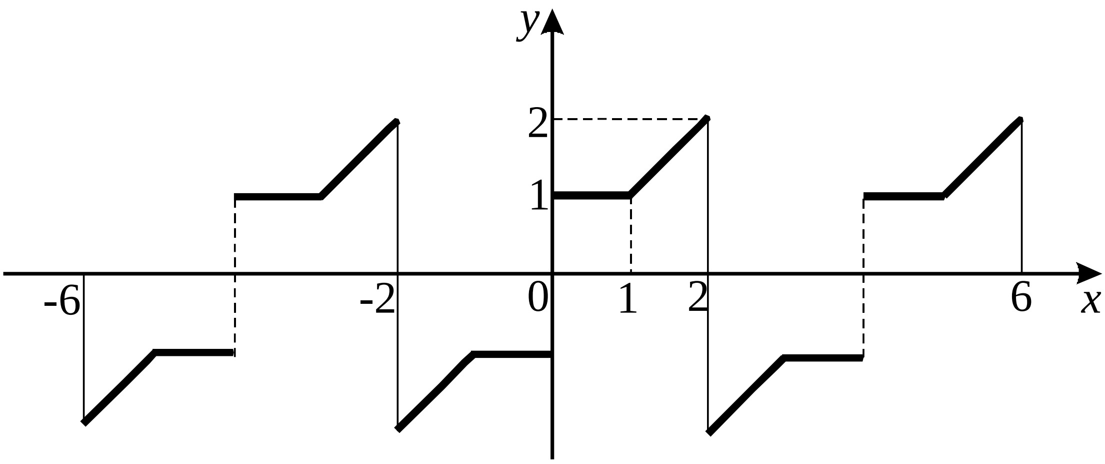

Рис. 3

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам

$$b_k=\int_0^2 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx=\int_0^1\sin\frac{k\pi x}{2}dx+\int_1^2 x\sin\frac{k\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Bigg|_0^1+\left(-\frac{2x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}+\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{2}{k\pi}-\frac{4}{k\pi}(-1)^k-\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (10.5), окончательно получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1-2(-1)^k-\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right)\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

10.4. Задачи и упражнения для самостоятельного решения

№№ 12.495, 12.497, 12.500 [6].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1.,2. - М.:Наука, 1985.
2. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1991.
3. Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. - М.: Наука, 1985.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.,2. - М.: Высш. шк., 1980.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. - М.:Наука, 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по дифференциальным уравнениям, числовым и функциональным рядам для студентов специальности 38.05.021 «Экономическая безопасность» специализация №1 «Экономика – правовое обеспечение экономической безопасности».

II семестр

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.09. 2022.
Уч.-изд. л. 1,6. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14