

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПОМОЩЬЮ
СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению курсовой работы
по дисциплине «Спецглавы математики»
для студентов направлений 22.03.02 «Металлургия»
очной формы обучения

Воронеж 2021

Составители: канд. физ.-мат. наук Г.Е. Шунин,
канд. техн. наук В.В. Пешков,
канд. техн. наук С.А. Кострюков

Решение краевых задач математической физики с помощью систем компьютерной математики: Методические указания выполнению курсовой работы по дисциплине «Спецглавы математики» для студентов направления 22.03.02 «Металлургия» очной формы обучения / Воронеж. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Г.Е. Шунин, С.А. Кострюков, В.В. Пешков. Воронеж, 2021. 77 с. Электронный ресурс кафедры высшей математики и физико-математического моделирования.

Настоящие методические указания предназначены в качестве руководства при выполнении курсовой работы для студентов очной формы обучения. Рассмотрена структура курсовой работы и сформулированы задачи решаемые при её выполнении. Приведены варианты индивидуальных заданий, основные теоретические сведения и большое количество расчётных задач. Методические указания подготовлены в электронной форме и содержатся в файле РКЗМФ.pdf.

Ил. 14. Библиогр.: 17 назв.

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук,
проф. И.Л. Батаронов

Публикуется по решению методического семинара кафедры высшей математики и физико-математического моделирования

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

В соответствии с учебным планом освоение дисциплины предусматривает выполнение курсовой работы в 4 семестре для очной формы обучения.

Примерная тематика курсовой работы: «Решение краевых задач математической физики с помощью систем компьютерной математики»

Курсовая работа включает в себя теоретическую и расчётную части. В теоретической части рассматриваются сущность метода конечных элементов и возможности конечно-элементных комплексов программ. В расчётной части рассматривается физико-математическая модель (определяется индивидуальным заданием), формулируется соответствующая краевая задача и находится её решение в заданной области с помощью выбранного подходящего конечно-элементного комплекса программ

Примерные варианты индивидуальных заданий:

1. Двухмерные краевые задачи электростатики.
2. Трёхмерные краевые задачи электростатики.
3. Двухмерные краевые задачи стационарной теплопередачи.
4. Двухмерные краевые задачи нестационарной теплопередачи.
5. Трёхмерные краевые задачи стационарной теплопередачи

Задачи, решаемые при выполнении курсовой работы:

- а) Осуществить поиск необходимой информации по теме работы;
- б) Систематизировать найденную информацию;
- в) Осуществить обзор литературных источников по заданной теме;
- г) Выработать умения решать прикладные задачи

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.1. Сущность метода конечных элементов

При поиске количественного описания физических процессов обычно вводят в рассмотрение некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных, реже интегральных, справедливую в определенной области, и налагают на эту систему подходящие краевые и начальные условия. Здесь, однако, возникают определенные трудности, так как точному решению существующими аналитическими методами поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ. Для решения конкретных проблем, возникающих в науке и технике, невозможно обойтись без использования численных методов.

Специфика работы компьютера требует замены операций дифференцирования и интегрирования операциями над числами и перехода от бесконечной совокупности чисел к конечной. Поэтому необходим переход от исходных непрерывных дифференциальных уравнений к системе алгебраических, которая уже может быть решена на ЭВМ. Способ такого перехода определяется методом дискретизации, т. е. получения дискретного аналога соответствующего дифференциального (интегрального) уравнения, при этом бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию, заменяется конечным числом неизвестных параметров.

Существует довольно много методов дискретизации. Вариационные методы, такие, как метод множителей Лагранжа, метод Рунге, метод наименьших квадратов, основаны на существовании для большинства задач некоего функционала, экстремальное значение которого при некоторых ограничениях совпадает с решением дифференциального уравнения. При этом дискретизация проводится на основе поиска минимума

(максимума) этого функционала, представленного в дискретной форме. Другой класс методов (методы проекций) используют понятие функциональных пространств со скалярным произведением и ограниченной нормой, в которых функция равна нулю только тогда, когда она ортогональна всем базисным функциям данного пространства. К проекционным методам относятся методы Бубнова-Галеркина, взвешенных невязок, коллокаций, и др.

Метод численного решения краевых задач включает в себя как метод дискретизации уравнений, так и способ построения сетки, т. е. конфигурации дискретных областей и определяемой ими системы узлов и ячеек. Кроме того, он должен определять способ учета граничных условий. Из таких методов наибольшее распространение получили методы конечных разностей и конечных элементов. Первый основан на непосредственной замене дифференциального оператора разностным и замене непрерывной функции ее значениями в точках (узлах) регулярной (чаще прямоугольной) сетки. Решая линейную систему уравнений, находят приближенные значения в узлах сетки. Основные трудности в этом методе связаны с учетом граничных условий, если граница области имеет сложную геометрическую форму.

Метод конечных элементов (МКЭ) предполагает разбиение области задачи на непересекающиеся подобласти и, аппроксимацию решения базисными функциями, причем в качестве последних используются функции с малым носителем, т.е. функции, отличные от нуля только в небольшой окрестности некоторого узла. Одна из особенностей МКЭ состоит в том, что он базируется скорее на интегральной формулировке анализируемого явления, нежели на дифференциальной форме, которую представляют дифференциальные уравнения и граничные условия. Эта интегральная формулировка может быть вариационного или проекционного типа. Основной общий принцип двух интегральных представлений заключается в определении

коэффициентов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$, обеспечивающих наилучшее приближение функции φ на базе функций $N_1, N_2, \dots, N_M$.

Идея МКЭ состоит в разбиении области задачи Ω на ряд неперекрывающихся подобластей, или элементов Ω_e и построении затем аппроксимации неизвестной функции кусочным образом, т.е. отдельно на каждой подобласти. Если подобласти имеют сравнительно простую форму и базисные функции на этих подобластях определяются однотипно, то весьма просто построить аппроксимацию на всей области суммированием вклада по каждому элементу. На основе некоторого условия, определяемого используемой формулировкой (например, в вариационном представлении требуется обеспечить стационарное значение функционала), требования непрерывности функции и, возможно, других условий, получают систему алгебраических уравнений относительно параметров дискретизации.

Таким образом, типичная реализация МКЭ включает в себя следующие этапы:

1) дискретизацию (разбиение) области на конечные элементы Ω_e с границами Γ_e , такие, что $\bigcup_e \Omega_e = \Omega$, $\bigcup_e \Gamma_e - \bigcap_e \Gamma_e = \Gamma$. В качестве конечных элементов наиболее часто используются треугольники, четырехугольники в двумерном случае, тетраэдры, гексаэдры – в трехмерном;

2) определение атрибутов задачи – задание граничных условий, характеристик среды, типа уравнений и других условий;

3) формирование и решение системы алгебраических уравнений;

4) восстановление решения во всех точках области на основе полученных дискретных значений.

Метод конечных элементов впервые был применен в 50-х гг. для решения задач сопротивления материалов. С тех пор этот метод стал эффективным средством решения краевых задач математической физики. Большим достоинством МКЭ является универсальность форм описания различных задач, не-

чувствительность к наличию подобластей с сильно различающимися свойствами и размерами и сложных граничных поверхностей. МКЭ часто сходится быстрее, чем метод конечных разностей, а иногда вообще обладает оптимальной скоростью сходимости. Сравнительно прост при программировании, допускает модульный принцип создания и расширения программного обеспечения. Основным недостатком МКЭ сводится к необходимости иметь быстродействующий компьютер с большим объемом оперативной памяти. Основные положения МКЭ и его приложения к решению основных задач математической физики, а также вопросы программирования изложены в работах [1-3].

1.2. Вариационные методы дискретизации

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения величин особого рода, называемых функционалами [4]. Функционалы представляют собой переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций.

Для того чтобы функционал $F[\psi]$ достигал экстремума, необходимо чтобы его первая вариация δF , определяемая как главная линейная часть приращения F по всем вариациям $\delta\psi$ функции ψ , равнялась нулю. Однако из того, что для какой-то функции ψ вариация $\delta F = 0$, вообще говоря, не следует существования экстремума; в этом случае говорят только о *стационарном* значении функционала. Условие $\delta F = 0$ приводит к т. н. уравнению Эйлера: только на решении этого дифференциального уравнения функционал $F[\psi]$ может достигать максимального или минимального значения.

При исследовании многих физических систем требуется найти функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения, которое описывает поведение рассматриваемой системы. В ряде случаев для исследуемой задачи можно устано-

вить естественную вариационную формулировку. Тогда для получения решения может быть принят альтернативный подход, состоящий в отыскании функции, доставляющей стационарное значение соответствующему данной задаче функционалу.

Пусть функционал задан в виде интеграла

$$F(\psi) = \int_{\Omega} L\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \dots\right) d\Omega + \int_{\Gamma} G\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \dots\right) d\Gamma, \quad (1.1)$$

где L и G – функции от $\psi(x, \dots)$ и ее производных; Γ – поверхность, ограничивающая замкнутую область Ω ; $d\Omega$ – элемент объема области; $d\Gamma$ – элемент площади поверхности. Тогда вариационная задача состоит в том, чтобы придать $F(\psi)$ стационарное значение относительно вариаций по ψ на множестве допустимых функций, удовлетворяющих общим краевым условиям:

$$B_1(\psi, \partial\psi/\partial x, \dots) = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad (1.2a)$$

$$B_2(\psi, \partial\psi/\partial x, \dots) = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad (1.2b)$$

где $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$. Для малых допустимых вариаций по ψ , выражающихся в переходе от ψ к $\psi + \delta\psi$, определим соответствующую первую вариацию $F(\psi)$:

$$\begin{aligned} \delta F(\psi) = & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial\psi/\partial x)} \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \dots \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial G}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial G}{\partial(\partial\psi/\partial x)} \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \dots \right] d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда условие стационарности F по ψ требует, чтобы $\delta F = 0$. Если после соответствующих преобразований равенство (1.3) можно переписать в виде

$$\delta F = \int_{\Omega} A(\psi, \partial\psi/\partial x, \dots) \delta\psi d\Omega, \quad (1.4)$$

где A – некоторое дифференциальное выражение, то в силу произвольности $\delta\psi$ из условия стационарности следует, что

$$A(\psi, \partial\psi/\partial x, \dots) = 0 \text{ на } \Omega. \quad (1.5)$$

Таким образом, имеется естественный вариационный принцип для нахождения решения ψ дифференциального уравнения (1.5), подчиненного краевым условиям (1.2). Искомая функция доставляет функционалу $F(\psi)$ стационарное значение относительно вариаций по ψ на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям. Дифференциальное уравнение (1.5) есть уравнение Эйлера.

В некоторых случаях возможны такие преобразования правой части равенства (1.3), что первая вариация функционала будет определяться соотношением вида

$$\delta F = \int_{\Omega} A(\psi, \partial\psi/\partial x, \dots) \delta\psi d\Omega + \int_{\Gamma_2} B(\psi, \partial\psi/\partial x, \dots) \delta\psi d\Gamma, \quad (1.6)$$

и тогда согласно условию стационарности F на ψ будем иметь

$$A(\psi, \partial\psi/\partial x, \dots) = 0 \text{ на } \Omega, \quad (1.7a)$$

$$B_2(\psi, \partial\psi/\partial x, \dots) = 0 \text{ на } \Gamma_2. \quad (1.7b)$$

Краевое условие (1.7b) на Γ_2 теперь является естественным краевым условием, так как оно автоматически выполняется для функции ψ , доставляющей функционалу F стационарное значение. Множество допустимых функций теперь расширилось, так как требуется только, чтобы любая функция из этого множества удовлетворяла главному краевому условию на Γ_1 .

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \nabla(\varepsilon \nabla \psi) = -\rho & \text{в области } \Omega, \end{cases} \quad (1.8a)$$

$$\begin{cases} \psi = \bar{\psi} & \text{на границе } \Gamma_1, \end{cases} \quad (1.8b)$$

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial n} = -q & \text{на границе } \Gamma_2. \end{cases} \quad (1.8c)$$

где $\varepsilon, \rho, \bar{\psi}, q$ – заданные функции координат, $\psi(x, y, z)$ – неизвестная функция, (1.8a) – уравнение Пуассона. Условие типа

(1.8b) называется краевым условием Дирихле, а (1.8c) – краевым условием Неймана.

Покажем, что функционал

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon (\nabla \psi)^2 - 2\rho\psi) d\Omega + \int_{\Gamma_2} q\psi d\Gamma, \quad (1.9)$$

где интегрирование производится по области определения задачи Ω и части ее границы Γ_2 , принимает стационарное значение для функции $\psi(x, y, z)$, являющейся решением краевой задачи (1.8) при условии, что допустимые функции удовлетворяют краевому условию (1.8b) на Γ_1 (главное краевое условие). Условие на Γ_2 является естественным.

Для первой вариации имеем

$$\delta F = \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \psi \nabla \delta \psi - \rho \delta \psi) d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \delta \psi d\Gamma. \quad (1.10)$$

Применив формулу Грина для первого интеграла, получим

$$\delta F = - \int_{\Omega} (\nabla(\varepsilon \nabla \psi) + \rho) \delta \psi d\Omega + \int_{\Gamma_2} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial n} + q \right) \delta \psi d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta \psi d\Gamma. \quad (1.11)$$

Последний интеграл равен нулю, так как ψ и $\psi + \delta \psi$ удовлетворяют главному краевому условию на Γ_1 . Поскольку вариация $\delta \psi$ произвольна, для $\delta F = 0$ необходимо, чтобы

$$\nabla(\varepsilon \nabla \psi) = -\rho \quad \text{в области } \Omega,$$

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial n} = -q \quad \text{на границе } \Gamma_2.$$

Для получения приближенного решения вариационной задачи обычно используется метод Релея-Ритца, согласно которому неизвестная функция заменяется суммой

$$\psi \approx \hat{\psi} = \sum_{m=1}^M \psi_m N_m, \quad (1.12)$$

где $\{N_m\}$ – система независимых базисных (пробных) функций; $\{\psi_m\}$ – параметры, как правило, значения функции $\hat{\psi}$ и ее производных в определенных точках – узлах.

Подставляя (1.12) в (1.9), заметим, что функционал F теперь является функцией только величин $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$.

$$\begin{aligned} F(\psi_1, \dots, \psi_M) = & \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \psi_i \psi_j \int_{\Omega} \varepsilon \nabla N_i \nabla N_j d\Omega - \\ & - \sum_i \psi_i \int_{\Omega} \rho N_i d\Omega + \sum_i \psi_i \int_{\Gamma_2} q N_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Необходимое условие стационарности F

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_j} = 0, \quad j = 1, \dots, M, \quad (1.14)$$

приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно $\{\psi_j\}$

$$\sum_{i=1}^M S_{ij} \psi_i = F_j, \quad j = 1, \dots, M, \quad (1.15)$$

где

$$S_{ij} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla N_i \nabla N_j d\Omega, \quad (1.16)$$

$$F_j = \int_{\Omega} \rho N_j d\Omega - \int_{\Gamma_2} q N_j d\Gamma, \quad (1.17)$$

Решив систему, искомую функцию $\hat{\psi}$ найдем с помощью (1.12). Матрица (1.16) – симметричная и положительно определенная.

Формально совершая предельный переход при $M \rightarrow \infty$, получим функцию $\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m N_m$, являющуюся точным реше-

нием рассматриваемой вариационной задачи. Если ограничиться лишь M первыми членами, то получим приближенное решение вариационной задачи.

Если таким методом определяется абсолютный минимум функционала, то приближенное значение минимума функционала находится с избытком. При нахождении тем же методом максимального значения функционала получим приближенное значение максимума функционала с недостатком.

Выбор последовательности функций $N_1, N_2, \dots, N_m$ сильно влияет на степень сложности дальнейших вычислений, и поэтому от удачного выбора базисной системы функций в значительной мере зависит успех применения этого метода.

Для того, чтобы функции $\hat{\psi} = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m N_m$ были допустимыми, прежде всего, необходимо удовлетворить граничным условиям (конечно, не следует забывать и о других ограничениях, которые могут быть наложены на допустимые функции, например, требованиях, касающихся их непрерывности или гладкости, а также полноты).

1.3. Проекционные методы дискретизации

Основной принцип методов проекций базируется на теореме, присущей гильбертовым пространствам и определяющей пространство, в котором только нулевой вектор ортогонален всем векторам пространства. В пространстве L_2 , в котором можно расположить большинство физических задач, ортогональность двух функций f и g определяется в виде скалярного произведения:

$$(f, g) \equiv \int_{\Omega} f \cdot g d\Omega = 0.$$

Рассмотрим для определенности краевую задачу (1.8). Метод взвешенных невязок состоит в проекции функций, называемых невязками в области Ω и на границе Γ_2 соответственно –

$$R_{\Omega} = \nabla(\varepsilon \nabla \psi) + \rho, \quad (1.18)$$

$$R_{\Gamma_2} = \varepsilon \cdot \partial \psi / \partial n + q \quad (1.19)$$

– на семейства независимых функций $\{W_m\}$ и $\{\bar{W}_m\}$ с помощью скалярных произведений

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_m d\Omega, \quad \int_{\Gamma_2} R_{\Gamma_2} \bar{W}_m d\Gamma.$$

Можно также потребовать равенство нулю *невязки* на Γ_1 , однако это выгоды не дает, поскольку условие Дирихле (1.8b) точно учитывается путем соответствующей модификации системы уравнений (см. разд. 1.4).

Множество функций $\{W_m\}$ образует пространство, в котором, для того чтобы $R_{\Omega} = 0$, невязка в Ω должна быть ортогональна всем базисным векторам. Аналогичное утверждение справедливо в отношении функций $\bar{W}_m$. Тем самым необходимо потребовать

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_m d\Omega = 0, \quad \int_{\Gamma_2} R_{\Gamma_2} \bar{W}_m d\Gamma = 0; \quad m = 1, \dots, M.$$

Полученная система имеет большой недостаток, что имеет $2m$ уравнений, и для ее разрешимости необходимо иметь столько же неизвестных – параметров аппроксимации. Однако, если сложить почленно уравнения, придем к системе с вдвое меньшим числом уравнений и неизвестных:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_m d\Omega + \int_{\Gamma_2} R_{\Gamma_2} \bar{W}_m d\Gamma = 0; \quad m = 1, \dots, M.$$

Показано, что такой переход не нарушает основного требования ортогональности невязок соответствующим системам функций $\{W_m\}$ и $\{\bar{W}_m\}$. Итак, имеем

$$\int_{\Omega} (\nabla(\varepsilon \nabla \psi) + \rho) W_m d\Omega + \int_{\Gamma_2} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial n} + q \right) \bar{W}_m d\Gamma = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (1.20)$$

Если $\{W_m\}$ образует пространство бесконечных размеров, т.е. $M = \infty$, то можно достичь эквивалентности между задачей в частных производных и ее интегральным представлением при условии, что ψ удовлетворяет главному краевому условию (1.8с). Однако при практическом применении функции W_m образуют конечномерное пространство, так как при использовании аппроксимации (1.12) имеем конечное число параметров $\psi_1, \dots, \psi_M$ (степеней свободы), которые определяют число функций W_m в соответствии с числом уравнений.

Подставив выражение для ψ (1.12) в (1.20), получим систему уравнений для определения параметров $\{\psi_i\}$. Однако в этом случае потребуется вычисление интегралов вида

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \right] W_j dx dy dz ,$$

для исключения особенностей в которых необходимо, чтобы базисные функции $\{N_i\}$ принадлежали классу гладкости C^1 , т.е. были непрерывны вместе со своими первыми производными. Такое ограничение наряду с несимметричностью матрицы системы уравнений крайне нежелательно при использовании вычислительных процедур, в частности МКЭ. Поэтому преобразуем первый интеграл в (1.20) по формуле Грина:

$$-\int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \psi + \rho) \nabla W_m d\Omega + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\partial \psi}{\partial n} W_m d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial n} + q \right) \bar{W}_m d\Gamma = 0. \quad (1.21)$$

Теперь базисные функции $\{N_m\}$ и $\{W_m\}$ должны принадлежать классу гладкости C^0 (быть только непрерывными). Подобное преобразование, обеспечивающее понижение степени гладкости допустимых функций, является ключевым для конечно-элементной формулировки задачи. Ограничив выбор базисных функций требованием

$$W_m = 0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

$$W_m = -\overline{W_m} \quad \text{на } \Gamma_2.$$

и применяя аппроксимацию для ψ (1.12), получаем

$$\sum_i S_{ij} \psi_i = F_j, \quad j = 1, \dots, M, \quad (1.22)$$

где

$$S_{ij} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla N_i \nabla W_j d\Omega, \quad (1.23)$$

$$F_j = \int_{\Omega} \rho W_j d\Omega - \int_{\Gamma_2} q W_j d\Gamma. \quad (1.24)$$

Если положить $W_j = N_j$, что соответствует методу Галеркина, получим те же итоговые выражения (1.15)-(1.17), что и при использовании вариационного метода Релея-Ритца. Преимущество проекционных методов заключается в том, что не требуется знания естественного вариационного принципа, соответствующего рассматриваемой краевой задаче. Однако, если известно вариационное представление задачи, то его использовать предпочтительнее, так как, во-первых, это гарантирует симметричную форму уравнений, обеспечивает нужный класс гладкости базисных функций, во-вторых, функционал часто представляет конкретную физическую величину, например, энергию поля. Если минимизация такого функционала ведет к точному решению, то приближенное значение функционала дает оценку сверху для минимального его значения.

Среди других формулировок для МКЭ можно использовать смешанные вариационные формулировки с множителями Лагранжа, сопряженные вариационные принципы, метод штрафных функций и метод наименьших квадратов [3].

1.4. Конечные элементы и аппроксимация

Конечным элементом внутри рассматриваемой области Ω называют некоторую подобласть Ω_e , геометрические размеры которой очень малы по сравнению с размерами области Ω ,

но при этом остаются конечными. Элемент характеризуется числом геометрических узлов, типом аппроксимирующих функций и степенью аппроксимации неизвестной функции. Границы элементов могут быть как прямолинейными, так и криволинейными.

Решение трехмерной краевой задачи внутри элемента Ω_e можно представить в виде суммы

$$\psi^{(e)} \approx \hat{\psi}^{(e)} = \sum_{m=1}^M \psi_m N_m^{(e)}(x, y, z). \quad (1.25)$$

Базисные функции $N_m^{(e)}$, относящиеся к элементу e , называются функциями формы этого элемента. Вне пределов Ω_e они тождественно равны нулю. Семейство $\{N_m^{(e)}\}$ должно обладать свойством полноты, т.е. при $M \rightarrow \infty$ $|\psi^{(e)} - \hat{\psi}^{(e)}| \rightarrow 0$. Каждая функция формы обычно связывается с узлом m , причем $N_m^{(e)}(x_n, y_n, z_n) = \delta_{mn}$, т.е. она равна нулю во всех узлах, за исключением m -го, в котором равна единице.

На всей области определения Ω решение можно представить в виде

$$\hat{\psi} = \sum_{(e)} \hat{\psi}^{(e)} = \sum_{(e)} \sum_m \psi_m N_m^{(e)}. \quad (1.26)$$

Последняя запись символическая; значение функции ψ в точке (x, y, z) всецело определяется параметрами ψ_m , связанными с элементом e , которому принадлежит эта точка. Если обратиться к вариационной формулировке задачи, легко показать, что полный функционал задачи, относящийся ко всей области определения, равен сумме функционалов, вычисленных на каждом элементе:

$$F(\hat{\psi}) = \sum_{(e)} F^{(e)}$$

(свойство аддитивности функционала). В силу этого можно получить необходимое условие экстремума $\{ \partial F / \partial \psi_m = 0 \}$ не

находя полный функционал F , а формально применяя его для каждого элементного функционала F_e и получая систему типа (1.15); причем интегрирование в (1.16)-(1.17) производится только по области конечного элемента Ω_e и его границе Γ_e , если последняя является частью Γ . Сформированные таким образом локальные системы уравнений добавляются в одну общую (глобальную) систему по определенным правилам, рассмотренным ниже. Именно такой обычно подход используется в практических реализациях МКЭ, поскольку элементы обрабатываются в цикле и для каждого из них естественным образом определяется вклад в итоговую систему.

Поскольку при реализации МКЭ требуется вычислять интегралы от функций формы и их производных по области конечного элемента Ω_e , целесообразно ограничиться рассмотрением стандартного элемента Ω_e^* , имеющего правильную форму. Поэтому, чтобы сделать процесс вычислений единообразным для всех элементов, делается замена

$$\int_{\Omega_e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_e^*} f(x(u, v, w), \dots) |\det J| du dv dw.$$

Здесь $\det J$ – якобиан преобразования. Теперь функции формы $\{N_m^{(e)}(u, v, w)\}$ определяются раз и навсегда для стандартного элемента Ω_e^* .

Рассмотрим МКЭ-процедуру формирования матрицы системы уравнений и вектора правых частей для задачи (1.8) на примере треугольника Лагранжа (двумерный случай). Такой конечный элемент обеспечивает на границах элементов непрерывность только функции, но не ее производных.

Пусть имеется треугольный элемент с вершинами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. Введем произвольную точку P с координатами (x, y) . Определим ее положение с помощью симплексных координат по правилу

$$\xi_i = A_i/A, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.27)$$

где A – площадь треугольника, A_i – площадь треугольника, образованного точкой P и двумя вершинами исходного треугольника. Очевидно, что

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad \text{внутри треугольника}$$

Поскольку

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \dots$$

то

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.28)$$

Формулы (1.28) преобразуют треугольный элемент произвольной формы, размера и ориентации в стандартный элемент $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$ (рис. 1.1). Положим для простоты в (8) $\varepsilon = \text{const} = 1$, $q = 0$, а для ρ возьмем аппроксимацию:

$$\rho = \sum_m \rho_m N_m \quad (2.29)$$

В случае линейной аппроксимации

$$N_i^{(e)} = \xi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.30)$$

$$\psi^{(e)} = \sum_m \psi_m \xi_m = \sum_m \frac{\psi_m}{2A} (a_m + b_m x + c_m y). \quad (1.31)$$

В результате локальная система уравнений запишется в виде:

$$\begin{aligned} S_{11}\psi_1 + S_{12}\psi_2 + S_{13}\psi_3 &= T_{11}\rho_1 + T_{12}\rho_2 + T_{13}\rho_3, \\ S_{21}\psi_1 + S_{22}\psi_2 + S_{23}\psi_3 &= T_{21}\rho_1 + T_{22}\rho_2 + T_{23}\rho_3, \\ S_{31}\psi_1 + S_{32}\psi_2 + S_{33}\psi_3 &= T_{31}\rho_1 + T_{32}\rho_2 + T_{33}\rho_3, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где

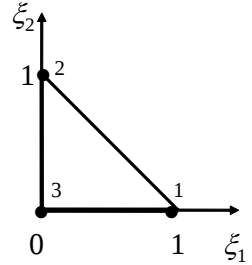


Рис. 1.1

$$S_{ij} = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4|A|}, \quad T_{ij} = \frac{1}{12} \times \begin{cases} A, & i \neq j, \\ 2A, & i = j. \end{cases}$$

Подобным образом формируется система для каждого конечного элемента. Рассмотрим процесс объединения таких локальных систем в одну глобальную.

Пусть имеется два элемента с общей стороной 2–3 (рис. 1.2). Проводя дискретизацию на каждом конечном элементе, получим две системы вида (1.32). Переходя к глобальной нумерации узлов сетки и учитывая, что для обеспечения непрерывности функции ее значения ψ_i в совпадающих узлах должны быть равны, т.е.

$$\psi_2^{(1)} = \psi_2^{(2)} \equiv \psi_2 \quad \text{и} \quad \psi_3^{(1)} = \psi_3^{(2)} \equiv \psi_3,$$

левые части уравнений для первого элемента примут вид:

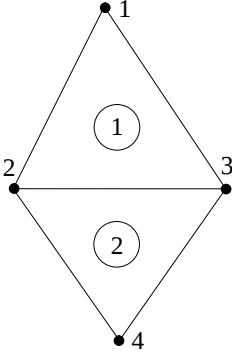


Рис. 1.2

$$S_{11}^{(1)}\psi_1 + S_{12}^{(1)}\psi_2 + S_{13}^{(1)}\psi_3, \quad (1.33a)$$

$$S_{21}^{(1)}\psi_1 + S_{22}^{(1)}\psi_2 + S_{23}^{(1)}\psi_3, \quad (1.33b)$$

$$S_{31}^{(1)}\psi_1 + S_{32}^{(1)}\psi_2 + S_{33}^{(1)}\psi_3, \quad (1.33c)$$

Для второго элемента

$$S_{22}^{(2)}\psi_2 + S_{23}^{(2)}\psi_3 + S_{24}^{(2)}\psi_4, \quad (1.34a)$$

$$S_{32}^{(2)}\psi_2 + S_{33}^{(2)}\psi_3 + S_{34}^{(2)}\psi_4, \quad (1.34b)$$

$$S_{42}^{(2)}\psi_2 + S_{43}^{(2)}\psi_3 + S_{44}^{(2)}\psi_4. \quad (1.34c)$$

Правые части уравнений получаются из левых заменой $S_{ij} \rightarrow T_{ij}$, $\psi_i \rightarrow \rho_i$. Складывая попарно уравнения для общих узлов ((1.33b) и (1.34a), (1.33c) и (1.34b)), получаем систему уравнений МКЭ для ансамбля из двух элементов:

$$S_{11}^{(1)}\psi_1 + S_{12}^{(1)}\psi_2 + S_{13}^{(1)}\psi_3 = T_{11}^{(1)}\rho_1 + T_{12}^{(1)}\rho_2 + T_{13}^{(1)}\rho_3,$$

$$\begin{aligned}
& S_{21}^{(1)}\psi_1 + (S_{22}^{(1)} + S_{22}^{(2)})\psi_2 + (S_{23}^{(1)} + S_{23}^{(2)})\psi_3 + S_{24}^{(2)}\psi_4 = \\
& = T_{21}^{(1)}\rho_1 + (T_{22}^{(1)} + T_{22}^{(2)})\rho_2 + (T_{23}^{(1)} + T_{23}^{(2)})\rho_3 + T_{24}^{(2)}\rho_4, \quad (1.35) \\
& S_{31}^{(1)}\psi_1 + (S_{32}^{(1)} + S_{32}^{(2)})\psi_2 + (S_{33}^{(1)} + S_{33}^{(2)})\psi_3 + S_{34}^{(2)}\psi_4 = \\
& = T_{31}^{(1)}\rho_1 + (T_{32}^{(1)} + T_{32}^{(2)})\rho_2 + (T_{33}^{(1)} + T_{33}^{(2)})\rho_3 + T_{34}^{(2)}\rho_4, \\
& S_{42}^{(2)}\psi_2 + S_{43}^{(2)}\psi_3 + S_{44}^{(2)}\psi_4 = T_{42}^{(2)}\rho_2 + T_{43}^{(2)}\rho_3 + T_{44}^{(2)}\rho_4.
\end{aligned}$$

Приведенный способ объединения элементов обобщается на случай любого числа элементов. Нетрудно заметить, что полученная матрица будет симметричной, положительно определенной и сильно разреженной (т.е. содержащей много нулей вне главной диагонали). При определенной нумерации можно добиться ленточного вида матрицы, при котором все ненулевые элементы группируются возле главной диагонали. Такой способ нумерации может иметь важное значение для компактного хранения матрицы. Симметричность и положительная определенность выгодны в вычислительном плане.

Можно показать, что сформированная в виде (1.32) и (1.35) система уравнений не будет иметь решения, поскольку ее определитель равен нулю. Необходимо модифицировать систему, чтобы учесть главное краевое условие (условие Дирихле) на Γ_1 . Пусть в узлах 1 и 2 функция ψ принимает фиксированные значения $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ соответственно. Тогда первое и второе уравнения в (1.35), соответствующие этим узлам, заменяются уравнениями

$$1 \cdot \psi_1 = \bar{\psi}_1,$$

$$1 \cdot \psi_2 = \bar{\psi}_2,$$

а в других уравнениях члены, содержащие ψ_1 и ψ_2 , переносятся в правую часть с обратным знаком. Например, для 4-го уравнения в (1.35) имеем

$$S_{43}^{(2)}\psi_3 + S_{44}^{(2)}\psi_4 = T_{42}^{(2)}\rho_2 + T_{43}^{(2)}\rho_3 + T_{44}^{(2)}\rho_4 - S_{42}^{(2)}\bar{\psi}_2.$$

1.5. Решение дифференциальных уравнений с частными производными

Поведение многих физических процессов описывается функциями от нескольких переменных, и для их определения требуется решать дифференциальные уравнения с частными производными (ДУЧП). Полная математическая постановка задачи наряду с ДУЧП содержит также некоторые дополнительные условия. Если решение ищется в ограниченной области, то задаются условия на границе, называемые граничными (краевыми) условиями. Такие задачи называются краевыми задачами для ДУЧП. Если одной из независимых переменных в задаче является время t , то задаются некоторые условия (например, значение искомой функции) в начальный момент t_0 , которые называются начальными условиями. Такая задача называется задачей Коши для ДУЧП. При этом задача решается в неограниченном пространстве и граничные условия не задаются. Задачи, при формулировке которых ставятся и граничные, и начальные условия, называются нестационарными (или смешанными) краевыми задачами

Задача называется корректно поставленной (по Адамару), если ее решение существует, единственно, и непрерывно зависит от начальных и граничных условий, от коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

Рассмотрим узкий класс корректных задач для уравнений 2-го порядка, линейных относительно производных. В случае четырех независимых переменных $v_1 \equiv x$, $v_2 \equiv y$, $v_3 \equiv z$, $v_4 \equiv t$ эти уравнения можно записать в виде

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v_i \partial v_j} + \sum_{i=1}^4 b_i \frac{\partial \psi}{\partial v_i} + c\psi = f. \quad (1.37)$$

Здесь $\psi = \psi(x, y, z, t)$ – искомая функция. Коэффициенты $\{a_{ij}\}$, $\{b_i\}$ и правая часть f , вообще говоря, могут зависеть от $\{v_i\}$ и ψ . В связи с этим уравнение может быть а) с постоянными коэффициентами, б) линейным, если f линейно зависит

от ψ , а коэффициенты – только от $\{v_i\}$. Если $f=0$, то уравнение называется однородным.

Можно показать, что путем замены $v_i = \alpha_{ij} w_j$, подобрав соответствующим образом α_{ij} , можно (1.37) привести к виду, в котором не будет смешанных производных

$$\sum_{i=1}^4 \sigma_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial w_i^2} + \sum_{i=1}^4 \hat{b}_i \frac{\partial \psi}{\partial w_i} + c\psi = f. \quad (1.38)$$

Если ни один из коэффициентов σ_i не равен нулю и все они одного знака, то уравнение (1.38) называется эллиптическим. Если среди коэффициентов σ_i хотя бы один равен 0 (но не все одновременно), то уравнение является параболическим. Гиперболическое уравнение соответствует случаю, когда все $\sigma_i \neq 0$ и разных знаков.

Эллиптические уравнения описывают стационарные (установившиеся) процессы во многих физических приложениях (распределение тепла, электростатических и магнитостатических полей, безвихревое течение идеальной жидкости и др.). Дискретизация одного из уравнений этого класса – уравнения Пуассона – подробно рассмотрена в разделах II – III.

Типичным примером параболического уравнения является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + Q - \rho c \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

где $k(x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности, $Q(x, y, z, t)$ – количество тепла, генерируемого в ед. объема, ρ – плотность вещества, $\psi(x, y, z, t)$ – распределение температуры. Это уравнение дополняется начальными и краевыми условиями: $\psi = \psi_0$ при $t = t_0$; $\psi = \bar{\psi}$ на Γ_1 и $-k\partial\psi/\partial n = q$ на Γ_2 .

Рассмотрим конечно-элементную формулировку нестационарной задачи теплопроводности для стержня $0 < x < L$ (одномерный случай). Для простоты положим $\rho = c = 1$. Поскольку такая задача не имеет естественного вариационного принципа,

воспользуемся проекционным методом, в частности методом Галеркина.

Потребуем, чтобы проекции невязок на интервале $[0, L]$ и на границе $x=L$ на базисные функции $\{N_i\}$ и $\{W_i\}$ были равны нулю.

$$\int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + Q - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) N_j dx + \left(k \frac{\partial \psi}{\partial n} + q \right) W_j \Big|_{x=L} = 0.$$

После интегрирования первого слагаемого в первом интеграле имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(k \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - N_j Q + N_j \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx + \\ & + \left(k \frac{\partial \psi}{\partial n} W_j + q W_j - k \frac{\partial \psi}{\partial n} N_j \right) \Big|_{x=L} - k \frac{\partial \psi}{\partial n} N_j \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Построим аппроксимацию для ψ : $\psi = \sum \psi_i(t) N_i(x)$. Ограничив выбор $W_j = -N_j$ при $x=L$ и $N_j = 0$ при $x=0$, получим систему

$$\sum_i P_{ij} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + S_{ij} \psi_i = F_j,$$

$$\text{где } P_{ij} = \int_0^L N_i N_j dx; S_{ij} = \int_0^L k \nabla N_i \nabla N_j dx; F_j = \int_0^L N_j Q dx - q N_j \Big|_{x=L}.$$

Если $k = \text{const}$, имеем неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правыми частями, которая может быть решена аналитическими методами. Для численного решения этой системы воспользуемся методом взвешенных невязок.

В качестве весовых функций возьмем δ -функции Дирака

$$Z_n = \delta \left(\frac{t - t_n}{\Delta t_n} - \theta \right),$$

где $\Delta t_n \equiv t_{n+1} - t_n$, θ – некоторое число. Для неизвестной функции ψ на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ воспользуемся аппроксимацией

$$\psi = \psi^n \left(1 - \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \right) + \psi^{n+1} \frac{t - t_n}{\Delta t_n}.$$

Здесь $\psi^n \equiv \psi(t_n)$, $\psi^{n+1} \equiv \psi(t_{n+1})$.

Потребовав, чтобы

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{S} \frac{d\psi}{dt} + \mathbf{P}\psi - \mathbf{F} \right) Z_n dt = 0$$

и положив $\theta = 1/2$, что соответствует наиболее часто используемой схеме Кранка-Николсона, приходим к матричному уравнению относительно ψ^{n+1}

$$\left(\frac{\mathbf{S}}{\Delta t_n} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \right) \psi^{n+1} + \left(-\frac{\mathbf{S}}{\Delta t_n} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \right) \psi^n = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^n + \mathbf{F}^{n+1}). \quad (1.39)$$

В общем случае, когда k зависит еще от ψ , матрица $\mathbf{S}$ зависит от $\psi^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}(\psi^n + \psi^{n+1})$, и имеем систему нелинейных уравнений (1.39) для определения вектора ψ^{n+1} . Решение таких систем осуществляется методом Ньютона-Рафсона, который сводится к итерационному процессу, на каждом шаге которого решается система линейных алгебраических уравнений.

В заключение приведем пример гиперболического уравнения. Рассмотрим случай гибкой струны, на которую действует постоянное натяжение τ . Концы струны закреплены, и она совершает малые колебания около положения устойчивого равновесия – интервала $0 \leq x \leq 1$ оси x . Если $\psi(x, t)$ – перемещение точки струны перпендикулярно x , то для кинетической и потенциальной энергий можно соответственно записать

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx, \quad V = \frac{1}{2} \rho \int_0^1 c^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx,$$

где ρ – плотность струны и $c^2 = \tau/\rho$. Согласно принципу Гамильтона, интеграл

$$F(\psi) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$$

имеет стационарное значение для реальной траектории по сравнению с близкими возможными значениями. Соответствующее уравнение Эйлера

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

является волновым уравнением. Процедура дискретизации для этого уравнения может быть проведена и по методу Рунге-Кутты, и проекционным методом. В последнем случае процедура во многом аналогична для параболических уравнений, основное отличие лишь в том, что базисные функции для аппроксимации $\psi_i(t)$ во временной области должны быть порядка не ниже 2, чтобы обеспечить отличную от нуля вторую производную.

2. СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

2.1. Универсальные системы компьютерной математики

Maple – система компьютерной математики, выпускаемая канадской компанией Waterloo Maple Inc., позволяющая производить сложные математические операции [5]. Содержит более 5000 функций, что позволяет решить практически любую математическую задачу (символьные и числовые математические операции, решение уравнений, в том числе и дифференциальных, дифференциальное исчисление, линейная алгебра, теория групп и т.д.), а также визуализировать полученные результаты путём построения 2D и 3D графиков и создания анимаций. Кроме того, Maple обладает инструментами для решения таких прикладных задач, как финансовое моделирование, статистика и управление процессами, физика, разработка систем управления и обработка сигналов.

Mathematica – система компьютерной математики, которая была создана Питером Вольфрамом, а ныне распространяется компанией Wolfram Research [6]. Вместе с Maple является ведущей системой в своём роде. В качестве языка программирования используется высокоуровневый язык Wolfram Language, имеющий ряд преимуществ по сравнению с аналогичными языками других систем. Также важной особенностью является наличие продукта Mathematica Online, который позволяет запускать систему через веб-браузер или при помощи приложений.

MATLAB (MATrix LABoratory) – это высокоуровневый язык и интерактивная среда для численных расчётов, визуализации и программирования [7]. Выпускается американской компанией The MathWorks. Посредством MATLAB пользователь может анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели и приложения. Язык, средства и встроенные математические функции дают пользователю возможность быстрее решать задачи по сравнению с традиционными языками программирования, такими, как C/C++ или Java. MATLAB позволяет решать широкий спектр задач в различных областях науки и техники.

MATLAB обладает широкими возможностями в области методов числовых расчётов для анализа данных, разработки алгоритмов и создания моделей (интерполяция и регрессия, дифференцирование и интегрирование, линейные системы уравнений, гармонический анализ, собственные и сингулярные значения, обыкновенные дифференциальные уравнения, разреженные матрицы). Функции, содержащиеся в ядре MATLAB, позволяют быстро выполнять матричные и векторные вычисления.

Кроме этого, в MATLAB имеются средства работы с данными (получение, анализ, визуализация), позволяющие тратить на операции с данными намного меньше времени, чем при аналогичных операциях при использовании традиционных языков программирования.

Приложения, написанные на языке MATLAB, можно соединять с приложениями, написанными на других языках. Так, пользуясь MATLAB, можно вызвать код, написанный на С, С++, Java или .NET, или, наоборот, при создании С, С++ или Fortran-приложений можно вызвать код, написанный на MATLAB.

Помимо операций, содержащихся в ядре MATLAB, существуют наборы инструментов, предназначенные для решения специализированных задач и значительно расширяющие возможности MATLAB. По области применения их можно классифицировать следующим образом:

- Параллельные вычисления (Parallel Computing Toolbox, MATLAB Distributed Computing Server);

- Математика, статистика и оптимизация (Symbolic Math Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Statistics and Machine Learning Toolbox, Curve Fitting Toolbox, Optimization Toolbox, Global Optimization Toolbox, Neural Network Toolbox, Model-Based Calibration Toolbox);

- Системы управления (Control System Toolbox, System Identification Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, Robust Control Toolbox, Model Predictive Control Toolbox, Aerospace Toolbox, Robotics System Toolbox);

- Обработка сигналов и связь (Signal Processing Toolbox, DSP System Toolbox, Communication System Toolbox, Wavelet Toolbox, RF Toolbox, Antenna Toolbox, Phased Array System Toolbox, LTE System Toolbox);

- Обработка изображений и машинное зрение (Data Acquisition Toolbox, Instrument Control Toolbox, Image Acquisition Toolbox, OPC Toolbox, Vehicle Network Toolbox);

- Финансовая инженерия (Financial Toolbox, Econometrics Toolbox, Datafeed Toolbox, Database Toolbox, Spreadsheet Link EX (для Microsoft Excel), Financial Instrument Toolbox, Trading Toolbox);

- Вычислительная биология (Bioinformatics Toolbox, SimBiology);
- Средства для генерации и проверки кода (MATLAB Coder, HDL Coder, Vision HDL Toolbox, HDL Verifier, Filter Design HDL Coder, Fixed-Point Designer);
- Средства для разработки приложений (MATLAB Compiler, MATLAB Compiler SDK, Spreadsheet Link EX (для Microsoft Excel), MATLAB Production Server);
- Подключение к базам данных и составление отчётов (Database Toolbox, MATLAB Report Generator).

Отдельно стоит отметить **PDE Toolbox** – набор инструментов, позволяющий решать дифференциальные уравнения методом конечных элементов в 2D и 3D случаях.

Ключевые особенности

- Решатели для связанных систем дифференциальных уравнений в частных производных: стационарные, нестационарные задачи, частотный анализ, решение задач на собственные значения;
- Задание дифференциальных уравнений в частных производных для эллиптических, гиперболических и параболических задач;
- Задание граничных условий: Дирихле, обобщённое условие Неймана, смешанное условие;
- Функции для создания 2D-геометрии и импорта 3D-геометрии из STL-файлов;
- Автоматическое разбиение с использованием треугольников и тетраэдров;
- Одновременное изображение нескольких графиков решения, наложение сетки, анимация.

Scilab – это свободно распространяемый пакет прикладных программ для математических расчётов, представляющий мощную вычислительную среду для инженерных и научных применений [8]. Scilab содержит множество математических функций для решения широкого спектра задач, а также имеет

свой язык программирования высокого уровня. Для выполнения задач можно воспользоваться как командным окном Scilab, так и редактором, позволяющим создавать и редактировать скрипт-файлы.

Среди функциональных возможностей Scilab выделяются следующие:

- Математические операции и моделирование: элементарные математические функции, функции линейной алгебры, действия с разреженными матрицами, действия над многочленами и рациональными функциями и моделирование – явные и неявные решатели систем дифференциальных уравнений.

- Функции для 2D и 3D визуализации результатов: линейные графики, круговые диаграммы, гистограммы, поверхности, анимация, а также функции для экспорта графических данных в различных форматах.

- Оптимизация – функции для решения непрерывных и дискретных задач с ограничениями и без них: нелинейная оптимизация, квадратичная оптимизация, нелинейная оптимизация методом наименьших квадратов, полуопределённое программирование, генетические алгоритмы, имитация отжига, линейные матричные неравенства.

- Статистика – описательная статистика, распределения вероятности, линейное и нелинейное моделирование.

- Разработка и анализ систем управления: передаточные функции, классическое и робастное управления, анализ устойчивости.

- Обработка сигналов: генерирование сигнала, обработка данных методом окон, оценка спектральной плотности, разработка цифровых БИХ и КИХ фильтров, разработка аналоговых фильтров, трансформация сигналов, включая быстрое преобразование Фурье.

- Разработка приложений: расширенные структуры данных и пользовательские типы данных, пользовательский интерфейс, программный интерфейс приложения, совместимый с

C, C++, Java. Также существует возможность управления обменом данных с внешними источниками: чтение и запись бинарных MATLAB-файлов, преобразование MATLAB M-файлов в Scilab-файлы, связь с Excel.

Xcos – графический редактор для моделирования гибридных динамических систем. Состоит из трёх основных частей. Первая часть – браузер палитры блоков, в котором представлены блоки, которые формируют конечную модель. Блоки сгруппированы по категориям: блоки обработки сигналов, блоки математических операций, блоки непрерывных и дискретных систем, пользовательские блоки и т.д. Вторая часть – редактор, в котором блоки соединяются в единую динамическую систему, которая подлежит решению. Третья часть – компилятор/моделирующее устройство, позволяющее моделировать сложные системы: дискретные, непрерывные, определяемые символьными уравнениями и т.д., а также гибридные системы. Также, можно в реальном времени следить за данными, полученными в результате моделирования, при помощи их графического представления.

Последней на сегодняшний день (июль 2017 г.) версией Scilab является версия Scilab 6.0.0 (выпущена 17.02.2017).

Maxima – система компьютерной алгебры, являющаяся преемницей системы Macsyma, которая разрабатывалась с 1968-го по 1982-й годы в Массачусетском технологическом институте [9]. Впоследствии Macsyma оказала влияние на многие другие системы, такие, как Mathematica и Maple. Позволяет выполнять широкий класс операций над числовыми и символьными выражениями: дифференцирование, вычисление пределов, аналитическое нахождение интегралов, операции со степенными рядами и рядами Фурье, преобразования Лапласа, решение систем линейных уравнений, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, работа с многочленами, множествами, списками, векторами, и матрицами и тензорами, работа с элементарными (в том числе логарифмическими, экспо-

ненциальными, тригонометрическими) и специальными функциями, решение интегральных уравнений, а также позволяет решать задачи из области теории чисел и теории групп. **Math** выполняет высокоточные численные расчёты, используя точные дроби, целые числа произвольной точности и числа с плавающей точкой переменной точности. **Math** позволяет строить графики функций и визуализировать данные, используя двумерные и трёхмерные графики. Среди достоинств также стоит отметить возможность свободного использования, сравнительно небольшой размер программы (около 80 МБ со всеми расширениями), возможность работы как с консольной версией, так и с помощью графических интерфейсов (например, **wxMath**, предоставляющий графический вывод формул, ввод наиболее распространённых функций через диалоговые окна, а также разделение окна ввода формул и окна вывода результатов).

2.2. Мультифизические системы конечно-элементного анализа

В настоящее время наиболее мощной мультифизической системой конечно-элементного анализа является **COMSOL Multiphysics** [10,11]. Ядро системы образуют программы, реализующие алгоритмы конечно-элементной дискретизации и численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) в многомерных (1D, 2D и 3D) и многосвязных областях сложной формы. Эти уравнения могут быть заданы в коэффициентной, обобщенной и слабой (проекционной) формах, а также в виде их комбинаций.

При решении линейных или почти линейных уравнений в ограниченной области Ω используется коэффициентная форма их записи

$$e_{lk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + d_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-c_{lkji} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \alpha_{lkj} u_k + \gamma_{lj} \right) +$$

$$+\beta_{lki} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + a_{lk} u_k = f_l$$

с граничными условиями Дирихле и Неймана (обобщёнными)

$$h_{ml} u_l = r_m,$$

$$-n_j \left(-c_{lkji} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \alpha_{lkj} u_k + \gamma_{lj} \right) + q_{lk} u_k = g_l - h_{ml} \mu_m,$$

и начальными условиями

$$u_k(t_0) = u_{k0}, \quad \frac{\partial u_k(t_0)}{\partial t} = \dot{u}_{k0}.$$

В этих уравнениях многоиндексные коэффициенты $e, d, c, \alpha, \beta, \gamma, a, f, h, q, r, g$ являются комплекснозначными функциями пространственных координат, времени, искомым скалярных полей u и их пространственных производных (за исключением h, q, r, g), n_j – внешняя нормаль к границе. Незвестная вектор-функция μ , называемая множителем Лагранжа, вводится для согласования условий Дирихле и Неймана при их одновременном задании на одном и том же участке границы области. Заданные начальные значения скалярных полей могут зависеть только от пространственных координат. Индексы $l, k = 1, \dots, N$; $i, j = 1, \dots, n$ ($n = 1, 2, 3$); $m = 1, \dots, M \leq N$. По одинаковым индексам в произведениях осуществляется суммирование в указанных пределах.

В случае нелинейных задач применяется обобщенная форма

$$e_{lk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + d_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_{lj}}{\partial x_j} = F_l,$$

$$-n_j \Gamma_{lj} = G_l + \frac{\partial R_m}{\partial u_l} \mu_m,$$

$$R_m = 0,$$

где

$$\Gamma_{lj} = -c_{lkji} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \alpha_{lkj} u_k + \gamma_{lj},$$

$$F_l = f_l - \beta_{lki} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - a_{lk} u_k,$$

$$G_l = g_l - q_{lk} u_k,$$

$$R_m = r_m - h_{ml} u_l.$$

Правую часть дифференциальных уравнений в частных производных в коэффициентной и общей форме (f и F соответственно) можно задавать не только в областях, но и дополнительно на границах (Boundary Source), на рёбрах в 3D геометриях (Edge Source), и точках (Point Source).

Члены, содержащие множители Лагранжа, $-\mathbf{h}^T \boldsymbol{\mu}$ в коэффициентной форме и $\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\right)^T \boldsymbol{\mu}$ в общей форме имеют свой физический смысл. В задачах, связанных с механикой конструкций они обозначают силу реакции связей.

Перед тем, как перейти к решению системы дифференциальных уравнений, записанных в общей или коэффициентной форме, COMSOL автоматически переводит эти уравнения в слабую форму, которая в общем виде для трёхмерной задачи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega} (W^{(3)} - W^{(3t)}) dA + \int_B (W^{(2)} - W^{(2t)}) ds + \\ & + \int_E (W^{(1)} - W^{(1t)}) dl + \sum_P (W^{(0)} - W^{(0t)}) - \\ & - \int_{\Omega} v_l \frac{\partial R_m^{(3)}}{\partial u_l} \mu_m^{(3)} dA - \int_B v_l \frac{\partial R_m^{(2)}}{\partial u_l} \mu_m^{(2)} ds - \end{aligned}$$

$$-\int_E v_l \frac{\partial R_m^{(1)}}{\partial u_l} \mu_m^{(1)} dl - \sum_P v_l \frac{\partial R_m^{(0)}}{\partial u_l} \mu_m^{(0)},$$

$$0 = R_m^{(3)} \text{ в областях } \Omega,$$

$$0 = R_m^{(2)} \text{ на поверхностях } B,$$

$$0 = R_m^{(1)} \text{ на рёбрах } E,$$

$$0 = R_m^{(0)} \text{ в точках } P,$$

где v_l – набор тестовых функций, число которых совпадает с размерностью решения, подынтегральные скалярные функции $W^{(n)}, W^{(nt)}$ включают в себя решение $u_1, \dots, u_N$, соответствующие тестовые функции $v_1, \dots, v_N$ и их производные. Переход от коэффициентов уравнений в общей форме к этим функциям осуществляется по формулам:

$$W^{(n)} = \Gamma_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + F_l v_l + \sum_l W_l^{0(n)},$$

$$W^{(nt)} = d_{alk} \frac{\partial u_k}{\partial t} v_l + \sum_l W_l^{0(nt)},$$

$$W^{(n-1)} = G_l v_l + \sum_l W_l^{0(n-1)},$$

$$R_m^{(n)} = R_m,$$

где $n = 0, 1, 2, 3$ – обозначение геометрического уровня, на котором задаются соответствующие условия: 0 – в точках, 1 – на рёбрах, 2 – на поверхностях, 3 – в областях. Слагаемые W_l^0 – это члены, записанные в слабой форме при помощи условия Weak Contribution (см. ниже) на соответствующем геометрическом уровне. Если вместо обычных уравнений связи используются уравнения связи, записанные в слабой форме (см. ниже

Weak Constraint), то уравнения $0 = R_m^{(n)}$ поменяются на $0 = \int_L w_m R_m^{(n)} dr$, где w_m – набор тестовых функций для множителей Лагранжа, L – геометрический уровень, по которому осуществляется интегрирование – область, поверхность, ребро. В случае точек интеграл меняется на сумму.

Существует также набор интерфейсов, содержащих шаблоны для наиболее широко распространённых дифференциальных уравнений в частных производных, таких, как уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, волновое уравнение, уравнение Гельмгольца, уравнение теплопроводности и уравнение конвективной диффузии.

Помимо решений ДУЧП в областях, определяемых пользователем, имеется возможность решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка как в 1D, 2D, 3D геометриях, так и в 0D-геометрии. Общий вид системы выглядит следующим образом:

$$f(u, \dot{u}, \ddot{u}, t) = 0,$$

где $\dot{u}$ – производная функции-решения по времени. Если функция f зависит только от u , то уравнение (1.14) сводится к алгебраическому.

Вид функции f , а также начальные условия $u(t_0)$, $\dot{u}(t_0)$ задаются пользователем. Количество уравнений в системе строго не ограничено. Систему уравнений данного вида можно определить при помощи интерфейса Global ODEs and DAEs или выбора свойства Global Equations в любом из PDE-интерфейсов. Термин Global означает, что данные уравнения и переменные, входящие в уравнения, действительны во всём COMSOL-файле, т.е. во всех моделях, входящих в файл. Помимо глобальных уравнений можно глобально задавать уравнения связей (Global Constraint) и уравнения, записанные в слабой форме (Weak Contribution).

Также задание обыкновенных дифференциальных уравнений или алгебраических уравнений может осуществляться

непосредственно в модели на разных геометрических уровнях: в областях (Domain ODEs and DAEs), на границах области (Boundary ODEs and DAEs), на рёбрах в 3D (Edge ODEs and DAEs) и в точках (Point ODEs and DAEs). Каждый из этих интерфейсов содержит функции для задания системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида (Distributed ODEs):

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}$$

и системы алгебраических уравнений (Algebraic Equation):

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Каждый из вышеуказанных интерфейсов позволяет также задать условия Weak Contribution, Pointwise Constraint, Weak Constraint на всех геометрических уровнях не выше того, на котором определён данный интерфейс.

В результате конечно-элементной дискретизации система ДУЧП заменяется системой алгебраических уравнений большой размерности, которая численно решается прямыми или итерационными методами.

При решении задач физического характера в рамках базового модуля можно использовать два подхода: математический и физико-математический.

В первом случае необходимо самостоятельно выбрать форму записи и тип решаемой задачи из списка:

- стационарная;
- нестационарная;
- на собственные значения.

Затем задать коэффициенты в уравнениях, граничные, начальные и другие дополнительные условия.

При физико-математическом подходе предлагаются проблемно-ориентированные интерфейсы для решения краевых задач из следующих разделов физики:

- акустика (2D, 3D);

- электростатика (2D, 3D) и магнитостатика (2D);
- электрическое поле постоянного тока в проводящей среде (2D, 3D);
- квазистационарное электромагнитное поле (2D);
- конвекция и диффузия (1D, 2D, 3D);
- распространение тепла (1D, 2D, 3D);
- динамика несжимаемой жидкости (2D, 3D);
- механика деформируемых тел (2D, 3D).

Большим достоинством COMSOL Multiphysics является возможность произвольно сочетать любое количество нелинейных физических процессов. При этом задачи из различных областей решаются одновременно в одной модели, а не последовательно, что ведет к ускорению процесса моделирования и, что более важно, улучшает сходимость. Однако это приводит к существенному увеличению числа степеней свободы (несколько миллионов и более) дискретной конечно-элементной модели исследуемого явления и к необходимости использования компьютерных кластеров (поддерживается в последних версиях COMSOL Multiphysics).

В состав базового модуля входит достаточно мощный геометрический моделлер, позволяющий создавать области самых разных форм..

Важным достоинством COMSOL Multiphysics, начиная с версии 4.2, является возможность создания физического пользовательского интерфейса. Эта процедура осуществляется при помощи конструктора, который представляет собой интерактивную программную среду для создания физических интерфейсов, не прибегая к написанию программного кода.

Обычно работа в COMSOL Multiphysics осуществляется в интегрированной среде COMSOL Desktop, содержащей все описанные выше функции. Существуют, однако, альтернативные варианты получения доступа к функционалу COMSOL Multiphysics.

– COMSOL Multiphysics клиент/сервер позволяет работать в режиме клиент-сервер на разных компьютерах (для этого необходима FNL – плавающая сетевая лицензия), причём запуск клиента и сервера может осуществляться на разных информационных системах (например, клиент COMSOL Desktop может быть запущен на Windows, а сервер – на Linux или Mac);

– Режим параллельных вычислений. COMSOL поддерживает 2 режима параллельных вычислений – режим параллельных вычислений с общей памятью, предназначенный для многоядерных процессоров, и режим параллельных вычислений с распределённой памятью (в том числе и кластерные вычисления для Windows-кластеров или Linux-кластеров). Для последнего необходимо наличие FNL;

– Пакетный режим (COMSOL Batch) позволяет запускать COMSOL без использования графического пользовательского интерфейса;

– Прикладной программный интерфейс (COMSOL API) на основе Java используется для разработки приложений на основе функционала COMSOL. Java-файл-модель запускается посредством среды COMSOL Desktop или в пакетном режиме. Для разработки приложений с помощью COMSOL API нужно создать текстовый или графический пользовательский интерфейс и скомпилировать его в COMSOL при помощи соответствующих команд.

Помимо базового модуля COMSOL Multiphysics, существует множество специализированных модулей, направленных на решение задач в конкретных областях физики и техники. С каждой версией таких модулей становится всё больше. Так, в последней на данный момент версии COMSOL 5.3 (май 2017 г.) модули позволяют решать задачи в следующих областях науки:

- Электротехника (электромагнитный модуль, радиочастотный модуль, волновая оптика, лучевая оптика, MEMS модуль, плазма, полупроводники);

- Механика (теплоперенос, механика конструкций, нелинейная механика конструкций, геомеханика, усталость материалов, динамика многотельных систем, акустика, роторная динамика (впервые появился в версии COMSOL 5.2a, октябрь 2016 г.));

- Гидродинамика (вычислительная гидродинамика, миксер, микрогидродинамика, течение в пористых средах, течение в трубах, молекулярное течение);

- Химия (проектирование химических реакций, аккумуляторы и топливные элементы, гальваностегия, коррозия, электрохимия).

Кроме того, в COMSOL 5.3 существуют многоцелевые модули трассировки частиц и оптимизации, а также библиотека материалов, содержащая более 2500 материалов с указанием их основных свойств. Помимо этого в COMSOL 5.3 имеются модули интеграции с MATLAB и Excel, модули интеграции с CAD-системами (SOLIDWORKS, Inventor, AutoCAD, Revit, PTC Creo Parametric, PTC Pro/ENGINEER и Solid Edge), модули импорта данных из CAD и ECAD и CATIA V5, а также модуль проектирования для создания параметрической геометрии и управления ей.

Основное отличие версий COMSOL Multiphysics, начиная с версии 5.0, от предыдущих – это появление среды разработки приложений, позволяющей создавать приложения на основе существующих моделей, созданных в строителе моделей. Для создания приложений в COMSOL Multiphysics предусмотрены два инструмента: Редактор форм и Редактор методов. Первый позволяет создавать приложение, имеющее специализированный пользовательский интерфейс с такими элементами, как поля ввода и числового вывода, элементы графики и кнопки. Готовое приложение позволит, меняя входные параметры, быстро получить результат, не обращаясь к исходной модели. С помощью Редактора методов можно создавать приложения, используя программный код, что позволяет осу-

ществлять более сложные операции, чем те, которые доступны при использовании Редактора форм. Таким образом, Редактор методов представляет собой среду программирования, позволяющую работать с моделью на базе объектно-ориентированного представления данных.

Ещё одной новинкой является программный продукт, COMSOL Server, который предназначен для запуска созданных приложений через веб-браузеры в различных операционных системах, либо, при установке клиента COMSOL Client for Windows, напрямую при подключении к COMSOL Server. Приложения, запускаемые через веб-браузер, поддерживают 1D, 2D и 3D интерактивную графику.

FlexPDE – программный комплекс, выпускаемый компанией PDE Solutions Inc [12], является скриптовой мультифизической конечно-элементной средой, позволяющий решать задачи в таких областях исследований, как теплоперенос, анализ напряжений, механика жидкостей, электромагнетизм, химические реакции, диффузия и т.д. Данные решаемой задачи в FlexPDE записываются в скрипт-файл.

Версии FlexPDE постоянно обновляются. Версии серии FlexPDE 7 позволяют анализировать сложные конечно-элементные модели. Основными свойствами являются:

- Решение систем дифференциальных уравнений первого и второго порядков в 1D, 2D, 3D декартовой геометрии, 1D сферической или цилиндрической геометрии или осесимметричной 2D геометрии;
- Решение стационарной, или нестационарной системы уравнений, либо решение задачи на собственные значения. Стационарные и нестационарные уравнения могут быть объединены в единую задачу;
- Одновременное решение любого количества уравнений, число которых ограничивается лишь возможностями компьютера;

- Решение линейных и нелинейных уравнений. Для решения нелинейных уравнений FlexPDE автоматически использует модифицированный итерационный метод Ньютона-Рафсона;

- Может быть определено любое число подобластей с различными материальными свойствами;

- Переменные полагаются непрерывными вдоль границы раздела двух сред. Условия скачка производных следуют из системы дифференциальных уравнений.

- Неограниченная сложность уравнений;

- Произвольная лагранжева/эйлерова движущаяся сетка;

- Возможность экспорта 3D-графиков;

- Разбиение уравнений на множества, которые решаются поочерёдно;

- Использование комплексных, векторных переменных и переменных-массивов, а также соответствующих уравнений;

- Возможность объявлять переменные неактивными в выбранных областях;

- Возможность многопоточного режима для многоядерных процессоров;

- Возможность импорта сетки на поверхностях;

- Оптимизатор параметра

Последние 2 свойства появляются в FlexPDE 7 впервые.

FlexPDE – это полностью интегрированный решатель дифференциальных уравнений в частных производных, содержащий несколько внутренних модулей для полного решения системы:

- Модуль редактирования скрипт-файлов, обладающий свойством выделения цветом текста, полным набором инструментов для редактирования текста, а также возможность предварительного просмотра области в графическом виде;

- Символьный анализатор уравнений расширяет заданные параметры и уравнения, производит дифференцирование по пространственным переменным, символьное интегрирование по частям для упрощения членов второго порядка для то-

го, чтобы записать символьные уравнения Галёркина. Также производится символьное дифференцирование этих уравнений для формирования якобиана системы;

- Модуль генерации сетки осуществляет треугольное или тетраэдральное разбиение двумерной или трёхмерной исследуемой области. В 2D случае в области создаётся неструктурированная треугольная сетка. В 3D случае 2D-область вытягивается в направлении третьей оси и полученная область обрезаётся поверхностями раздела. Результирующая область заполняется неструктурированной тетраэдральной сеткой;

- Модуль конечно-элементного анализа выбирает подходящую схему решения для стационарных, нестационарных задач или задач на собственные значения с отдельными процедурами для линейных и нелинейных уравнений. Базовые функции могут быть линейными, квадратичными или кубическими;

- Процедура адаптивного измельчения сетки проверяет адекватность разбиения и измельчает сетку, когда ошибка велика. Система повторяет эту процедуру итерационным способом, пока заданная пользователем точность не будет достигнута;

- Процедура динамического контроля временного шага позволяет измерять кривизну функции решения от времени и подбирает временной шаг интегрирования, чтобы поддерживать заданную точность;

- Модуль графического вывода позволяет задавать произвольные алгебраические функции, зависящие от решения, а также строить контуры, поверхности, матрицы стрелок или график рельефа поверхности;

- Модуль экспорта данных позволяет формировать отчёты, включающие в себя простые таблицы, полные конечно-элементные сеточные данные, CDF, VTK или TecPlot совместимые файлы.

Elmer — свободно распространяемый пакет, предназначенный для решения дифференциальных уравнений в частных

производных [13]. Разрабатывается финской компанией CSC – IT Center for Science. Elmer позволяет решать системы многих различных связанных уравнений, что даёт возможность моделировать мультифизические задачи при помощи этого пакета. С помощью Elmer можно решать задачи из таких областей физики, как теплоперенос, течение жидкости, движение частиц, упругость, акустика, электромагнетизм, микрожидкости, квантовая механика. Для решения системы дифференциальных уравнений используются следующие средства:

- Все базовые формы элементов в 1D, 2D, 3D с линейными и квадратичными лагранжевыми функциями формы;
- Аппроксимация более высокого порядка с использованием p -элементов;
- Схемы временного интегрирования для уравнений первого и второго порядков;
- Методы решения задач на собственные значения;
- Прямые решатели линейных систем (LAPACK, UMFPACK);
- Итеративные решатели для подпространств Крылова для линейных систем;
- Мультисеточные методы (CMG, AMG) для некоторых основных уравнений;
- ILU предобуславливатель линейных систем;
- Распараллеливание итерационных методов;
- Разрывный метод Галёркина;
- Стабилизированные конечно-элементные постановки задач;

Elmer состоит из следующих модулей: ElmerGUI (графический пользовательский интерфейс. Содержит модуль Elmer-Grid в качестве генератора конечно-элементной сетки. Данный модуль не содержит инструментов для создания геометрии, поэтому для этих целей необходимо использовать сторонний геометрический моделлер. Включает в себя также возможность контроля за сходимостью решения в реальном времени),

ElmerSolver (решатель), ElmerPost (постпроцессор), ElmerGrid (отвечает за разбиение, а также может быть использован для манипуляций с сеткой. Например, для разбиения сетки на части в случае распараллеливания вычислений или для импорта сетки, созданной другими генераторами), ElmerFront (старая версия модуля ElmerGUI), Mesh2D (разбивщик, который разбивает 2D область на треугольники методом Делоне. Используется в качестве разбивщика по умолчанию для адаптивных вычислений).

FreeFem++ – решатель для систем дифференциальных уравнений (в том числе и нелинейных) в частных производных для двумерных и трехмерных случаев [14]. Разрабатывается совместно сотрудниками университета Пьера и Мари Кюри и лаборатории Жака-Луи Лиона.

При решении задачи при помощи FreeFem++ исходные данные записываются в скрипт-файл с использованием собственного языка программирования. Основные особенности пакета:

- Описание задачи при помощи вариационной формулировки с возможностью доступа к внутренним векторам и матрицам. Задача может быть как вещественнозначной, так и комплекснозначной;
- Возможность решать 2D и 3D стационарные и нестационарные, линейные или нелинейные связанные системы многих уравнений с многими неизвестными;
- Простое задание геометрии путём аналитического описания границ по частям;
- Автоматический генератор сетки, основанный на алгоритме Делоне-Вороного;
- Адаптивное анизотропное разбиение, основанное на вычислениях метрики;
- Возможность множественного разбиения в одной программе с интерполяцией данных на разных сетках и возможностью сохранения интерполяционных матриц;

- Большой набор типов конечных элементов: линейные, квадратичные лагранжевы элементы, разрывные P1 элементы и элементы Равиара-Томаса, элементы нескалярного типа, мини-элементы. Четырёхугольные элементы не допускаются;
- Имеются средства для постановки конечно-элементной задачи на основе метода Галёркина;
- Большое количество прямых и итерационных решателей (LU, Cholesky, Crout, CG, GMRES, UMFPACK, MUMPS, SuperLU, и т.д.), а также решателей для задач на собственные значения (ARPACK);
- Близкая к оптимальной скорость выполнения вычислений (в сравнении с соответствующей задачей, выполненной на C++);
- Онлайн графика, создание файлов разбиения для последующих манипуляций с входными и выходными данными;
- Возможность параллельных вычислений с помощью MPI (Message Parsing Interface).

2.3. Специализированные конечно-элементные комплексы программ

Elcut – комплекс программ для решения различных плоских и осесимметричных двумерных физических задач при помощи метода конечных элементов [15]. Разрабатывается российской компанией «ООО «Тор». Существуют две модификации Elcut: студенческая (распространяется бесплатно) и профессиональная (распространяется на коммерческой основе). У этих модификаций один и тот же интерфейс и функции, но профессиональная версия более мощная, что позволяет решать более сложные задачи.

Elcut содержит модули для решения многих физических задач:

- Магнитостатика (расчёт соленоидов, магнитных экранов, постоянных магнитов, электрических машин и т.д.);

- Магнитные поля синусоидальных токов (используется для анализа распределения вихревых токов, а также для анализа магнитного поля от переменных, вихревых токов или индуцированных токов; данный модуль позволяет проектировать трансформаторы, установки индукционного нагрева, электрические машины и многие типы индукторов);
- Нестационарное магнитное поле (используется в таких задачах, как анализ переходных процессов в электромагнитных устройствах или анализ работы двигателей от импульсных преобразователей);
- Электростатика (используется для расчёта и проектирования систем, имеющих ёмкость (конденсаторы, линии передачи данных), а также для расчёта изоляции);
- Электрическое поле постоянных токов (используется для расчёта проводящих систем или для расчёта паразитных токов или токов утечки изоляционных конструкций);
- Электрическое поле переменных токов (используется для расчёта сложных систем изоляции и конденсаторов);
- Нестационарное электрическое поле (используется для анализа электрических полей, возникающих ввиду меняющихся токов и напряжений в нелинейных диэлектриках; применяется при расчёте сложных систем изоляции, варисторов и ограничителей перенапряжений);
- Стационарная и нестационарная теплопередача (используется для анализа теплового состояния систем; может анализировать как установившееся температурное распределение, так и процессы охлаждения и нагрева);
- Упругие деформации (используется для расчёта механических напряжений в устройствах, таких, как строительные конструкции, техника высокого давления или отдельные узлы механических систем);
- Связанные задачи (используется для решения мультифизических задач, например, таких, как нагрев провода за счёт потерь от протекающего тока);

- Электрическая цепь (расчёт электрических цепей; к тому же, с помощью этого модуля можно подключать внешнюю электрическую цепь в задачах в модулях «Магнитные поля синусоидальных токов» и «Нестационарное магнитное поле»).

В состав Elcut входят следующие компоненты:

- Редактор геометрии – позволяет описать геометрию. Возможен также импорт частей модели из сторонних систем геометрического моделирования, таких, как AutoCAD. В состав входит также конечно-элементный разбивщик, позволяющий создать треугольную сетку в автоматическом режиме или режиме ручного управления разбиением;

- Редактор данных – позволяет задавать граничные условия, свойства среды и источники поля. Для связи геометрии и данных используются метки;

- Решатель – отвечает за решение системы уравнений. Для решения линейных задач используется метод сопряжённых градиентов с предобуславливателем матрицы по методу декомпозиции области, что позволяет добиться высокой скорости сходимости решения. Для решения нелинейных задач используется метод Ньютона-Рафсона, причём на каждой итерации этого метода полученная линейная задача решается вышеупомянутым способом. Для решения нестационарных задач используется метод Эйлера с постоянным шагом по времени и заданными начальными условиями (нулевыми или экспортированными из другой задачи);

- Постпроцессор позволяет анализировать результаты решения задачи. В его функции входит как визуализация результатов (линии поля, цветные карты, матрицы стрелок, тензоры напряжения в виде пар собственных векторов (для задач теории упругости), графики величин вдоль контуров и т.д.), так и расчёт интегральных величин на линиях или областях. Также, с помощью постпроцессора можно выводить таблицы и графики в файлы для дальнейшей обработки или печати;

- Надстройки – используются для расширения функциональных возможностей Elcut: LabelMover (предназначена для серийных расчётов, статистического анализа и оптимизации), Data Converter (предназначена для связи Elcut и Microsoft Excel), NLConfig (предназначена для настройки сети для профессиональной версии Elcut).

Ещё одним достоинством Elcut является возможность разработки инженерных приложений на основе Elcut-моделей. Приложения могут быть написаны на многих языках программирования, среди которых: Visual Basic, Visual C, VBA, скриптовые языки, а также системы, вычислений высокого уровня, такие, как MATLAB. Взаимодействие Elcut и других программ может быть осуществлено как на низком уровне (через объектную модель ActiveField), так и на высоком уровне при помощи параметрического интерфейса, используя LabelMover.

FEMM – это комплекс программ, предназначенный для решения низкочастотных электромагнитных задач для двумерных плоских и двумерных осесимметричных задач [16]. Программа решает линейные и нелинейные магнетостатические задачи, линейные и нелинейные нестационарные гармонические магнитные задачи, линейные электростатические задачи и стационарные задачи на теплоперенос. В пакете FEMM можно выделить 3 основные части:

- Интерактивная оболочка (femm.exe). Представляет собой препроцессор и постпроцессор. Препроцессор имеет CAD-интерфейс для создания геометрии исследуемой задачи и для задания свойств материалов и граничных условий (возможные варианты граничных условий: условия Дирихле, Неймана, Робина (определяет связь между величиной и её нормальной производной на границе), а также периодическое и антипериодическое условия для магнитных и электростатических задач и условия фиксированной температуры, потока тепла, конвекции, излучения, а также периодическое и антипериодическое условия для задач на теплоперенос). Имеется возможность импорта .dxf-файлов для облегчения анализа геометрии. Пост-

процессор позволяет визуализировать поле, полученное в результате решения задачи при помощи контурных линии и графиков плотности. Кроме того, возможно вычисление компонент поля в произвольных точках, а также расчёт некоторых интегральных характеристик вдоль заданных контурных линий;

- Triangle.exe – разбивщик, осуществляющий разбиение построенной области на треугольники;

- Решатели (fkern.exe для магнитных задач, belasolv для электростатических задач, hsolv для задач на теплоперенос, csolv для задач на электрический ток). Каждый решатель на основании файлов с данными, описывающих задачу, решает соответствующую систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Последняя на сегодняшний день версия – FEMM 4.2.

В Воронежском государственном техническом университете на кафедре высшей математики и физико-математического моделирования разрабатывается система компьютерного моделирования криогенных магнитогравиинерциальных устройств. Её ядром является комплекс программ **FEMPDESolver**, предназначенный для численного решения скалярных ДУЧП второго порядка методом конечных элементов с дополнительными условиями, учитывающими специфику электродинамики сверхпроводников [17]. С его помощью можно решать двух- и трехмерные задачи моделирования электрических и магнитных полей в многосвязных областях сложной формы в присутствии сверхпроводящих токонесущих элементов и рассчитывать электромеханические характеристики реальных конструкций СЭМП. В состав системы также входят: скриптовый пакет программ, реализованный средствами матричной системы компьютерной математики Scilab, предназначенный для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику пробных тел криогенных гравиинерциальных измерителей со сверхпроводящим подвесом пробных тел и программный модуль для численного решения системы интеграль-

ных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода с логарифмической сингулярностью ядра, написанный на внутреннем языке универсальной системы компьютерной математики Maple 14.

FEMPDESolver написан на языке C++ и состоит из трёх независимых программных модулей: препроцессора, постпроцессора и процессора.

Препроцессор предназначен для подготовки данных к решению 2D, 3D и осесимметричных 2D задач методом конечных элементов. На этапе препроцессора производятся следующие операции:

- выбор типа уравнения;
- построение геометрии и её деление на подобласти, учитывая особенности исследуемой задачи;
- задание граничных и прочих дополнительных условий, коэффициентов уравнений, описывающих исследуемую задачу;
- разбиение каждой подобласти на конечные элементы с заданной плотностью узлов, проверка качества сетки;
- сохранение задачи в виде файлов на компьютере.

Препроцессор состоит из следующих функциональных блоков:

Блок построения геометрии области. Для построения области в программе имеется 3 вида примитивов: точка или вспомогательный узел, линия и зона. Точки задаются при помощи пар чисел (координат). По точкам определяется линия (прямая линия, дуга окружности или кривая второго порядка). Используется 2 вида зон: четырёхугольные зоны и зоны Делоне. Четырёхугольные зоны предпочтительнее, так как лучше поддаются разбиению.

Блок геометрических операций. Функции, содержащиеся в этом блоке, позволяют модифицировать расчётную область. Имеются следующие типы операций: сдвиг, параллельный перенос, поворот-сдвиг, поворот-копирование, гомотетия, зеркальное отображение. Применять вышеупомянутые операции мож-

но к узловым точкам, линиям, поверхностям и подобластям. Также можно задать область сдвига в виде прямоугольника.

Блок задания параметров задачи позволяет задавать коэффициенты в уравнении, описывающем исследуемую задачу. Данное уравнение имеет следующий общий вид:

$$G(\vec{r}) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla (A(u, \nabla u, \vec{r}, t) \nabla u) + F(u, \vec{r}, t),$$

где $u = u(\vec{r}, t)$ – неизвестная функция, вид функций G , A и F определяется пользователем. В частном случае, когда $G = F = 0$, $A = \text{const}$ получим уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 u = 0;$$

если $G = 0$, $F = Af(\vec{r})$, $A = \text{const}$, то уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 u = -f(\vec{r});$$

если $G = 0$, $A = \text{const}$, $F = \lambda^2 Au + Af(\vec{r})$, то уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 u + \lambda^2 u = -f(\vec{r});$$

если $G = 0$, $A = \text{const}$, $F = -(1/\lambda^2)Au$, то уравнение Лондонов (добавлено в версии 2.2):

$$\nabla^2 u - (1/\lambda^2)u = 0;$$

если $A = k(\vec{r})$, $F = f(\vec{r}, t)$, то уравнение теплопроводности:

$$G \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla (k \nabla u) + f;$$

если $A = k(\vec{r})$, $F = -a^2 u + f(\vec{r}, t)$, то уравнение диффузии:

$$G \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla (k \nabla u) - a^2 u + f.$$

Также, в этом блоке задаются граничные и прочие условия. Имеются следующие варианты условий на границе Γ :

- граничное условие 1-го рода

$$u(\vec{r}, t)|_{\Gamma} = q(\vec{r}, t);$$

- граничное условие 2-го рода

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = q(\vec{r}, t);$$

- граничное условие 3-го рода

$$\left(A \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + B(\vec{r}, t) \cdot u(\vec{r}, t) \right) \Big|_{\Gamma} = q(\vec{r}, t);$$

- условие периодичности

$$u(\vec{r}_i + m\vec{T}) = u(\vec{r}_i),$$

где m – целое число, $\vec{T}$ – период, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i -го узла;

- условие сдвига

$$u(\vec{r}_i + \vec{\delta}) = u(\vec{r}_i),$$

где $\vec{\delta}$ – вектор сдвига;

- условия симметричности и антисимметричности

$$u(\vec{r}_i) = u(\vec{r}_j), \quad u(\vec{r}_i) = -u(\vec{r}_j),$$

где i и j – номера двух несовпадающих узлов.

Если рассматривается нестационарная задача, необходимо также задать значение искомой функции в начальный момент времени:

$$u|_{t=0} = U(\vec{r}).$$

Важным свойством FEMPDESolver является возможность задания скачка неизвестной функции

$$u_+ - u_- = I,$$

и потока её градиента

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \Phi$$

на некоторой линии (поверхности) разреза Γ_k , соединяющей одну из внутренних границ с внешней границей области, где u_+ и u_- — значения неизвестной функции по обе стороны разреза, I и Φ — заданные постоянные.

Блок визуализации позволяет отображать область решения задачи в удобном для пользователя виде. Допустимые операции:

- сдвиг изображения и изменение его масштаба;
- разрешение/запрещение отображения номеров объектов;
- отображение краевых и других дополнительных условий;
- отображение конечно-элементной сетки, номеров ее узлов и элементов;
- отображение прямоугольной координатной сетки.

Блок дискретизации подобластей представляет разбиение подобластей исходной области на конечные элементы. Разбиение производится блочным методом (только для четырехугольных подобластей или шестигранных областей в 3D-случае) или методом Делоне.

Доступны для использования следующие типы конечных элементов:

- а) плоские и осесимметричные задачи
 - лагранжев треугольный элемент 1-го порядка (3 узла);
 - изопараметрический треугольный элемент 2-го порядка (6 узлов);
 - серендипов четырехугольный элемент 1-го порядка (4 узла);

- изопараметрический четырехугольный элемент 2-го порядка (8 узлов);

- треугольный эрмитов элемент (4 узла, 10 степеней свободы);

- бесконечный элемент 1-го порядка (4 узла).

б) трехмерные задачи

- лагранжев тетраэдральный элемент 1-го порядка (4 узла);

- изопараметрический тетраэдральный элемент 2-го порядка (10 узлов);

- серендипов гексаэдральный элемент 1-го порядка (8 узлов);

- изопараметрический гексаэдральный элемент 2-го порядка (20 узлов).

Блок проверки качества сетки. Имеются средства для оценки качества построенной сетки. Для треугольных элементов выводится цветовая карта, где каждый цвет обозначает величину отношения вписанной и описанной окружностей элемента, с помощью которой можно выявить плохие элементы, влияющие на точность решения задачи, и перестроить их.

В постпроцессоре осуществляется анализ и визуализация результатов задачи, вычисление интегральных и локальных характеристик. Могут быть построены линии равного потенциала, цветовые карты, матрицы стрелок, что позволяет качественно анализировать картину поля. Также, имеется возможность построения графиков и таблиц для функции u , ее производных и градиента между любыми двумя точками области и вдоль граничных линий, а также графиков изменения нормальной производной вдоль линий. В случае нестационарной задачи можно построить график зависимости неизвестной функции или её производных от времени в конкретной точке. В состав постпроцессора входят следующие блоки:

Блок визуализации аналогичен соответствующему блоку препроцессора.

Блок локальных характеристик – вычисляются значения неизвестной функции, её пространственных производных и градиента. Возможен вывод результатов для выбранного узла или элемента.

Блок интегральных характеристик позволяет вычислять интегральные характеристики системы, такие, как запасенная энергия системы, сила и момент сил, действующие на поверхность со стороны поля, поток градиента функции через заданную поверхность и др. Интегрирование может производиться как по границе области (так, например, можно получить силу, действующую на исследуемый объект, со стороны поля в случае, когда объект находится в мейсснеровском состоянии), так и по самой области (так получается энергия или сила Лоренца).

Блок построения графиков позволяет строить графики распределения функции u , ее производных и градиента на любом отрезке либо вдоль линии. Для двумерных областей имеется возможность построения графика изменения нормальной производной $\partial u / \partial n$ вдоль границы, а также трехмерного графика, который представляет собой изображение поверхности $u = f(x, y)$ или $|\nabla u|$ с возможностью поворота относительно всех трех осей координат.

Блок визуализации поля позволяет строить эквипотенциали, матрицы стрелок и цветовые карты.

Блок вывода результатов позволяет сохранять изображений на экране в виде BMP-файла. Таблицы значений сохраняются в виде текстового файла.

Процессор содержит набор программ для осуществления всех конечно-элементных вычислений (формирование системы алгебраических уравнений и ее решение). Разреженная матрица системы уравнений хранится в виде графа смежности, так, что нулевые элементы не хранятся. Основная часть работы процессора заключается в решении системы линейных алгебраических уравнений. Основным методом, использующим-

ся в программе, является метод сопряжённых градиентов. Из набора программ, содержащихся в процессорном модуле, составляются специализированные решатели. Так, в версии 2.2 был составлен и оптимизирован решатель для 2D и 3D задач, описываемых уравнениями Лапласа-Пуассона и 2D задач, описываемых уравнением Лондонов с граничными условиями 1-го, 2-го и 3-го рода и дополнительными условиями, заключающимися в скачке потенциала на разрезе, постоянном значении потенциала и фиксированном значении потока градиента потенциала на внутренних границах многосвязной области. Для этого решателя для случая 2D краевых задач была создана пре-постпроцессорная оболочка, содержащая графическую оболочку и сторонний конечно-элементный разбивщик, разбивающий 2D-область на треугольные элементы 1-го и 2-го порядков.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КУРСОВЫХ РАБОТ И ТИПОВЫХ РАСЧЁТОВ

3.1. Краевые задачи для уравнения Лапласа

Требуется найти распределение функции u в двумерной области, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0$$

с граничными условиями 1-го, 2-го и 3-го рода. Очень многие физические процессы допускают подобную формулировку. Далее под u будем прежде всего понимать скалярный потенциал (задачи электро- и магнитостатики) и температуру (задачи стационарной теплопроводности).

Пример 2. Найти распределение электростатического потенциала в области, показанной на рис. 4.1.

Пример 3. Найти стационарное распределение температуры в L-образной пластине с различными условиями температурного режима на границах (см. рис. 4.2).

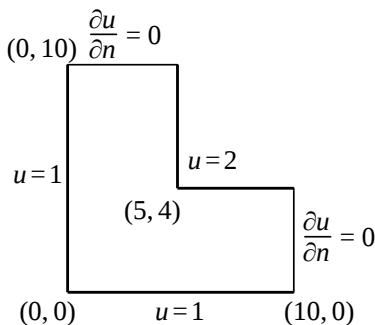


Рис. 4.1

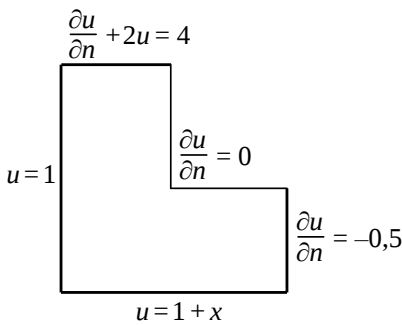


Рис. 4.2

Задания

5. Найти распределение электростатического поля между обкладками цилиндрического конденсатора. Потенциал u удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ с граничными условиями Дирихле: $u = 1$ при $r = 1$ и $u = 0$ при $r = 2$, где $r^2 = x^2 + y^2$ (см. рис. 4.3). Ввиду симметрии рассмотреть четверть области $(x, y \geq 0)$, задав на границах $1 \leq x \leq 2$, $y = 0$ и $1 \leq y \leq 2$, $x = 0$ однородное условие Неймана $\partial u / \partial n = 0$. Сравнить полученное численное решение с аналитическим.

Решить ту же задачу для сферического конденсатора, принимая за оси x, y соответственно оси z, r цилиндрической системы координат и рассматривая задачу как осесимметричную.

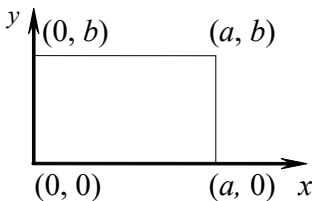
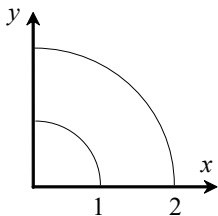


Рис. 4.3

Рис. 4.4

6. Найти стационарное распределение температуры в прямоугольной пластине размеров $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ в отсутствие источников тепла (рис. 4.4).

№ варианта	a	b	Граничные условия			
			$x = 0$	$x = a$	$y = 0$	$y = b$
1	1	1	$u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 1$	$u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} = -1$
2	0.8	1.5	$u = 1$	$u = 2$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} = -2$
3	1.25	1	$u = 0$	$u = 0$	$u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 2$
4	2	1	$u = 5$	$u = -5$	$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} = -2$
№ варианта	a	b	Граничные условия			
			$x = 0$	$x = a$	$y = 0$	$y = b$
5	0.9	1.6	$\frac{\partial u}{\partial n} = 1$	$\frac{\partial u}{\partial n} = -1$	$u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} = -1$
6	1	2	$u = -y$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 2$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$
7	1	1	$u = -y$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 2$	$u = x$	$\frac{\partial u}{\partial n} = -2$
8	1	1.5	$u = 0$	$u = 1.5$	$u = 0$	$u = x$
9	1	0.6	$u = 0$	$u = 0$	$u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 10$
10	1	2	$\frac{\partial u}{\partial n} = 1$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$	$u = 10$	$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0$

7. Решить задачу распространения тепла в стенках трубы, изображенной на рис. П9. На внутренней границе поддерживается постоянная температура 100°C , а на внешней границе задано условие $k \cdot \partial u / \partial n = -\alpha u$ (для простоты положить $k = 1$, $\alpha = 1$).

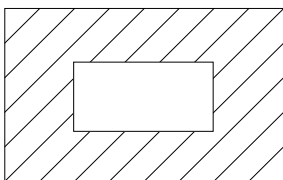


Рис. 4.5

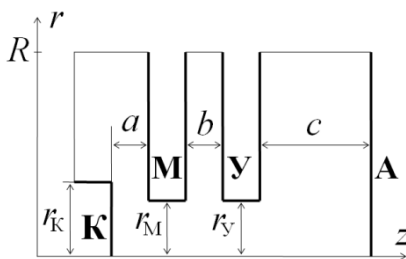


Рис. 4.6

8. Электростатическая линза (рис. 4.6):

$u_K = 0$; $u_M = -70$; -40 ; -10 ; $u_Y = 300$; 800 ; 1500 ; $u_A = 6000$.

$r_K = 0.2$ мм; $r_M = r_Y = 0.25$ мм; $a = 0.15$ мм; $b = 0.265$ мм, $c = 1.22$ мм.

Толщина электродов М и Y – 0.13 и 0.52 мм соответственно.

9. Найти конфигурацию магнитостатического поля для изображенных в таблице сверхпроводниковых тел, помещенных во внешнее однородное поле $\vec{H}_e$. Расчет произвести в двух вариантах – в продольном и поперечном поле с $|\vec{H}_e| = 1$.

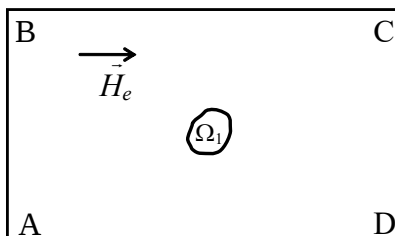


Рис. 4.7

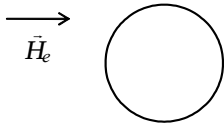
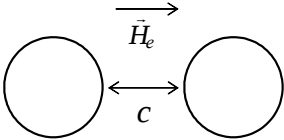
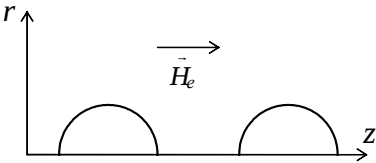
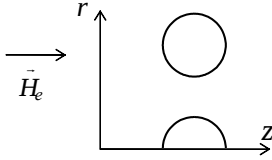
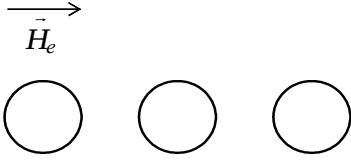
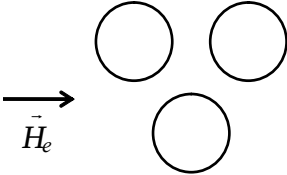
Указание. Для задания внешнего однородного поля расчетную область следует выбирать в виде прямоугольника (рис. 4.7), стороны которого отнесены на такое расстояние от сверхпроводников Ω_1 , чтобы влиянием последних на распределение поля можно было пренебречь. Как правило, это примерно пять-шесть характерных размеров сверхпроводника или

системы сверхпроводников. Граничные условия на сторонах прямоугольника можно задать следующими способами:

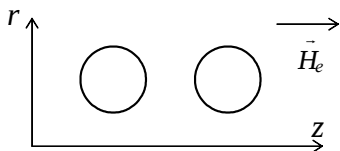
1) $u|_{AB} = u_0$; $u|_{CD} = u_0 - |\vec{H}_e| \cdot AD$ (u_0 выбирается произвольно).

2) $(\nabla u \cdot \vec{n})|_{AB} = |\vec{H}_e|$; $(\nabla u \cdot \vec{n})|_{CD} = -|\vec{H}_e|$; $u(P) = u_0$ (P – произвольная точка внутри области).

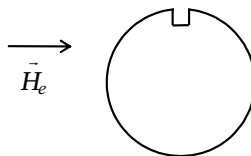
3) $u|_{AB} = u_0$; $(\nabla u \cdot \vec{n})|_{CD} = -|\vec{H}_e|$.

1) Сверхпроводниковый шар 	2) Два цилиндра 
3) Два шара 	4) Шар и кольцо 
5) Три цилиндра а)  б) 	

6) Два соосных кольца



7) Цилиндр с прямоугольным вырезом



10. Найти стационарное распределение температуры u в изображенном на рис. 4.8 секторе круга. Использовать показанные краевые условия.

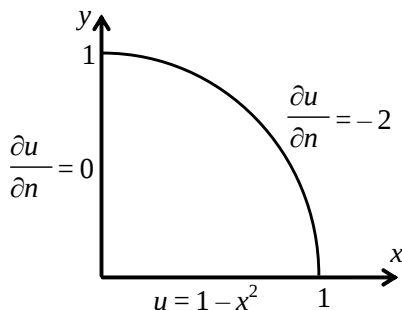


Рис. 4.8

3.2. Краевые задачи для уравнения Лапласа с дополнительными условиями

Пусть имеется система электродов, возможно, во внешнем электрическом поле. Требуется найти распределение электростатического поля в области, окружающей эти электроды, при условии, что электрод (проводник) заряжен (известен либо его заряд, либо потенциал на его поверхности) или не заряжен (известно только, что потенциал постоянен на поверхности проводника). Искомое распределение удовлетворяет уравнению Лапласа для потенциала с граничными условиями 1-го или 2-го рода, а также дополнительными условиями:

$u = \text{const}$ на поверхности проводника;

$$\int_S (\partial u / \partial n) dS = Q \quad (\text{интеграл по поверхности провод-}$$

ника равен вполне определенному числу)

В двумерной задаче поверхность проводника превращается в линию, а интеграл по поверхности – в криволинейный интеграл.

Пример 4. Найти распределение электростатического поля вблизи бесконечного провода круглого сечения, помещенного в поле плоского конденсатора (рис. 4.9).

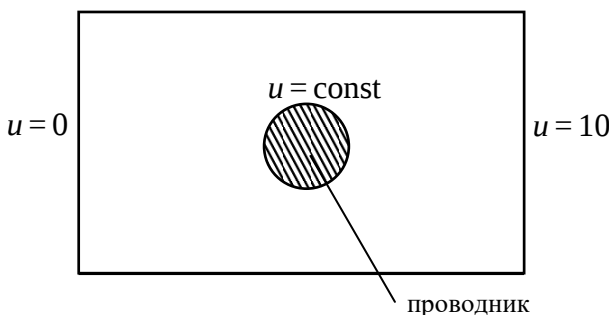


Рис. 4.9

Ввиду симметрии задачи достаточно рассмотреть лишь половину области.

Пример 5. Найти распределение электростатического потенциала для системы проводников, изображенной на рис. 4.10.

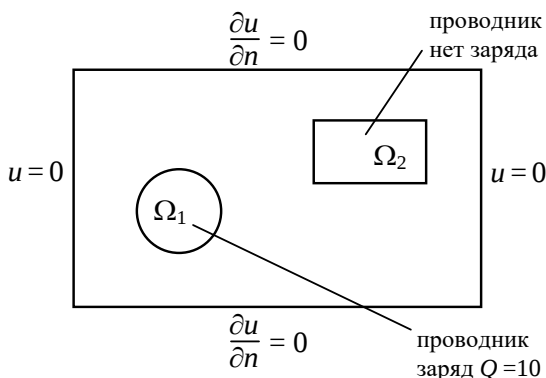


Рис. 4.10

Модификации. Решить рассмотренную задачу при измененных условиях:

а) на всех внешних граничных линиях задано $u=0$, остальные условия те же;

б) на левой внешней границе области $u=0$, на правой $u=1$, на верхней и нижней – $\partial u / \partial n = 0$; на линиях зоны $\{21\}$ и зоны $\{2\}$: $u = \text{const}$,

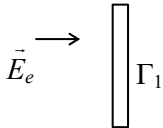
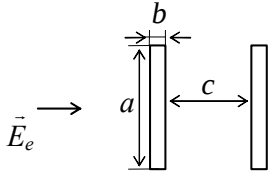
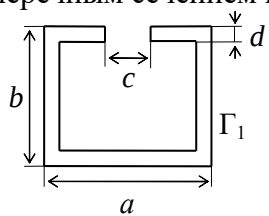
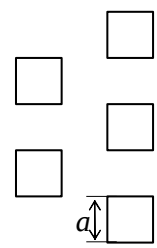
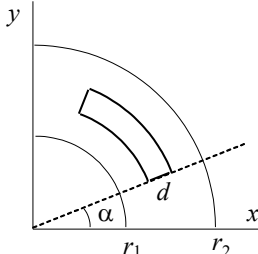
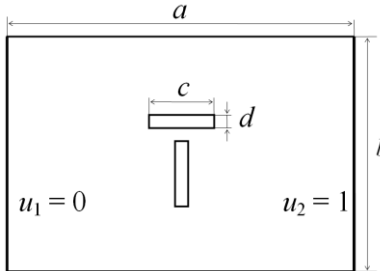
в) на всех внешних граничных линиях $u = \text{const}$; заданы полные заряды электродов (зоны $\{21\}$ и $\{2\}$), т.е. интегральные условия на соответствующих линиях.

Задания

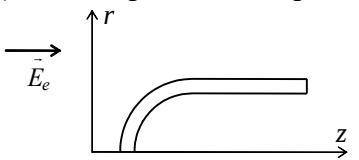
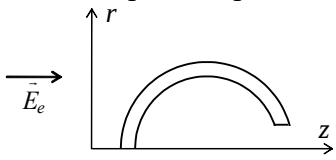
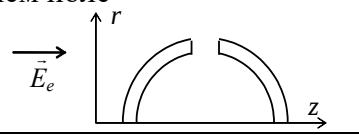
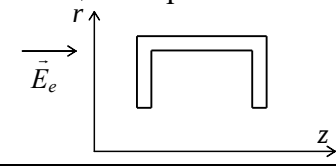
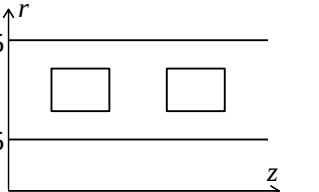
11. Для изображенных областей и указанных граничных условий найти распределение электростатического поля, построить эквипотенциальные кривые и графики изменения напряженности поля вдоль некоторых линий. Для проводящих границ использовать различные варианты условий ($u = u_0$, $u = \text{const}$ или $\int_{\Gamma} \partial u / \partial n = Q$).

Задачи с плоской геометрией

1) Плоская пластина во внеш-	2) Две пластины во внешнем
------------------------------	----------------------------

нем поле  (отношение сторон 4×1, 8×1, 12×1); $u _{\Gamma_1} = \text{const}$	поле  $a:b:c = 8:1:5; 6:1:2; 4:1:4$
3) Бесконечно длинный экран с поперечным сечением вида:  $a:b = 2:1; 1:1; c:a = 1:4; 1:3; 1:2;$ $d:a = 1:12; 1:8; 1:4$	4) Система электродов во внешнем поле 
5) Цилиндрический конденсатор с электродами внутри (показана четверть области). $r_2/r_1 = 2; 3; 4; \alpha = 15^\circ; 30^\circ;$ $d = 0.1(r_2 - r_1); 0.2(r_2 - r_1); 0.4(r_2 - r_1)$	
6) Заряженные проводники во внешнем поле $a:b = 1:1;$ $c:a = 1:5;$ $d:c = 1:3; 1:5.$	

Осесимметричные задачи

7) Цилиндрический экран 	8) Полый шар с отверстием 
9) Две полусферы во внешнем поле 	10) Кольцо П-образного сечения 
10) Цилиндрический конденсатор с двумя кольцами внутри а) кольца проводящие ($u = \text{const}$) б) кольца из диэлектрика ($\epsilon \neq 1$)	

12. Для односвязных сверхпроводниковых систем, представленных в заданиях 23-26 с соответствующими конфигурациями, найти распределение магнитного поля через векторный магнитный потенциал A .

Указание. В случае плоской геометрии данная задача сводится к уравнению Лапласа $\Delta A = 0$ с условием $A = \text{const}$ на поверхности односвязного сверхпроводника и граничными условиями 1-го и 2-го рода для учета внешнего поля.

3.3 Краевые задачи для уравнения Пуассона

Уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y).$$

Ему подчиняется, например, стационарное распределение температуры или потенциала в области с распределенными источниками. Оно, как правило, дополняется граничными усло-

виями 1-го, 2-го и 3-го рода, могут ставиться и другие дополнительные условия.

Пример 6. Найти стационарное распределение температуры в пластине L-образной формы, рассмотренной в примерах 2 и 3, все стороны которой поддерживаются при нулевой температуре. Пластина нагревается постоянным током, выделяющим в единице объема тепло Q . Данная задача сводится к решению уравнения Пуассона $\Delta u = -Q/k$ (k – коэффициент теплопроводности) в соответствующей области с условием 1-го рода $u|_{\Gamma} = 0$.

Модификации. Провести аналогичный расчет поля для других граничных условий:

а) $u|_{x=a}=0, u|_{x=b}=0, [\partial u/\partial n + u]_{y=d} = 0, [\partial u/\partial n]_{y=0} = 0$;

б) $[\partial u/\partial n]_{x=a} = 0, [\partial u/\partial n]_{x=b} = 0, [\partial u/\partial n + u]_{y=d} = 0, [\partial u/\partial n]_{y=0} = 0$;

в) $u|_{x=a} = 0, u|_{x=b} = 1, [\partial u/\partial n + u]_{y=d} = 0, [\partial u/\partial n]_{y=0} = 0$

(здесь предполагается $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq d$).

Решить данную задачу как осесимметричную, считая, что геометрия области задана в координатах (r, z) цилиндрической системы, принимая $z = x, r = y$. В этом случае подобласть источников поля будет представлять собой шар, а вся область задачи – цилиндр.

Задания

13. Найти стационарное распределение температуры в прямоугольной пластине $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, все стороны которой поддерживаются при нулевой температуре. Пластина нагревается от источников тепла, мощность которых описывается законом:

1) $Q(x, y) = c(x^2 + y^2) + d$ (c, d – постоянные);

2) $Q(x, y) = c \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$ (m, n – целые).

Данная задача сводится к решению уравнения Пуассона $k\Delta u = -Q(x, y)$ (k – коэффициент теплопроводности) в прямо-

угольнике с граничными условиями $u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0$.

14. Найти стационарное распределение температуры в области, представленной на рис. 4.10, если в подобластях Ω_1 и Ω_2 имеются источники поля постоянной плотности. В качестве граничных условий на внешней границе области использовать $[\partial u / \partial n + u]_{\Gamma} = 0$, $u|_{\Gamma} = 0$ либо какие-нибудь другие, не лишённые физического смысла.

15. Для конфигураций, представленных в заданиях 23-26, найти распределение магнитного поля, считая, что через проводники течёт ток с заданной постоянной плотностью j . *Указание.* Искомое распределение в виде векторного магнитного потенциала A можно найти, решив уравнения:

$$\nabla^2 A = -\mu_0 j \quad \text{внутри проводника,}$$

$$\nabla^2 A = 0 \quad \text{вне проводника.}$$

16. Решить задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,$$

в области, заданной неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$, с условием на границе Γ $u|_{\Gamma} = 2y$.

17. Решить задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4,$$

в области, заданной неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$, с условием на границе Γ $u|_{\Gamma} = 2xy$.

18. Решить задачу Дирихле

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xe^y, \quad \text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y,$$

в области, заданной неравенствами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, с условиями на границах:

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = e \cdot x, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = e^y.$$

3.4. Решение краевой задачи при наличии физически неоднородных сред

Пример 8. В однородное электростатическое поле помещен бесконечный цилиндр диаметром $d=2$ из диэлектрика с проницаемостью ε_1 . Найти распределение поля вблизи и внутри цилиндра. Диэлектрическую проницаемость окружающего пространства считать равной 1.

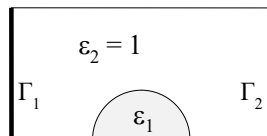


Рис. 4.11

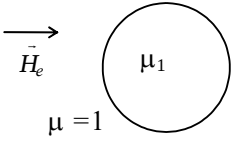
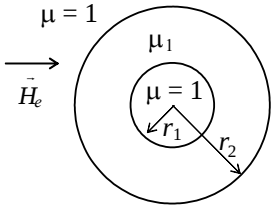
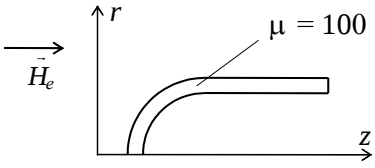
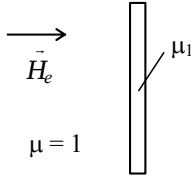
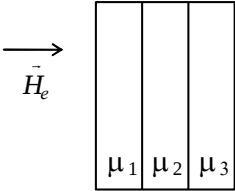
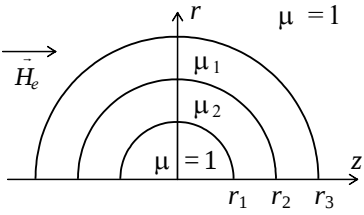
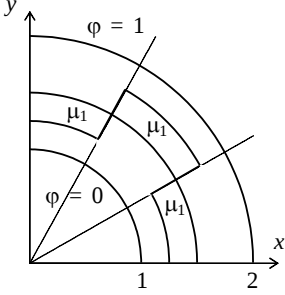
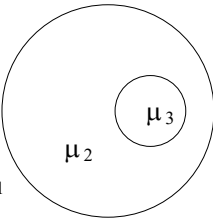
Задача сводится к решению уравнения Лапласа $\varepsilon \Delta u = 0$ в прямоугольной области, состоящей из подобластей с различными значениями проницаемости, и с граничными условиями $u = 0$ при $x = a$, $\partial u / \partial n = 1$ при $x = b$ (a произвольно, расстояние $|b-a|$ достаточно велико) и $\partial u / \partial n = 0$ на остальной части границы.

Задания

19. Для представленных ниже конфигураций найти распределение магнитостатического поля, построить эквипотенциальные кривые и графики изменения напряженности поля вдоль нескольких линий.

При неуказанных размерах геометрию области задавать приближенно, сохраняя конфигурацию и масштаб рисунка. В случае затруднений обращаться к преподавателю.

1) Цилиндр с проницаемостью μ_1 в вакууме	2) Бесконечный полый цилиндр
---	------------------------------

 $\mu_1 = 0.01; 0.333; 3; 10; 100.$	 $r_2 : r_1 = 3 : 2; 2 : 1; 3 : 1.$ $\mu_1 = 5; 10; 100.$
3) Полый цилиндр с дном 	4) Пластина 
5) Система плотно прилегающих пластин с различными проницаемостями  $\mu_1 = 5; \mu_2 = 10; \mu_3 = 20.$	6) Полый шар  $r_3 : r_2 : r_1 = 5 : 4 : 3; 3 : 2 : 1; 5 : 3 : 1.$ $\mu_1 = 3, \mu_2 = 5; \mu_1 = 3, \mu_2 = 10.$
7)  $\mu_1 = 5; 50; 100.$	8)  1) $\mu_1 = \mu_3; \mu_2 > \mu_1$ 2) $\mu_1 = 1; \mu_2 = 10; \mu_3 = 20$

20. Найти стационарное распределение температуры в области, представленной на рис. 4.10, если подобласти Ω_1 и Ω_2 заполняют среды с коэффициентами теплопроводности $k_1 \neq k_0$ и $k_2 \neq k_0$ (k_0 – коэффициент теплопроводности в остальной части области). На внешней границе области использовать подходящие условия температурного режима.

21. Решить задачу о распределении магнитного поля для областей, представленных в задании 19, используя формулировку на основе векторного потенциала:

$$\nabla \left(\frac{1}{\mu} \nabla A \right) = 0.$$

22. Найти распределение магнитостатического поля в области, представленной на рис. 4.10, если через проводники Ω_1 и Ω_2 с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 протекают токи с постоянной плотностью j_1 и j_2 соответственно.

Решить ту же задачу, если $j_2 = 0$, $j_1 \neq 0$, а также для случая, когда оба проводника помещены во внешнее однородное магнитное поле H_e .

Указание. Для решения использовать следующую формулировку:

$$\nabla \left(\frac{1}{\mu} \nabla A \right) = -\mu_0 j \quad \text{внутри проводника,}$$

$$\nabla^2 A = 0 \quad \text{вне проводника.}$$

3.5. Смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности

В этой работе требуется найти распределение функции $u(x, y, t)$, удовлетворяющей нестационарному уравнению теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Q,$$

заданного в области Ω , граничным условиям 1–3-го рода и начальному условию

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y).$$

Помимо задачи распределения тепла (u – температура), такой постановке удовлетворяет, например, задача распределения магнитного поля внутри проводника, на который действует внешнее поле H_e (в квазистационарном приближении). Действительно, в случае трансляционной симметрии в направлении z , требуется решить уравнение внутри проводника

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}, \quad (4.1)$$

где $\chi = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, σ – удельная проводимость: $\sigma \sim 10^7$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$) с соответствующими начальными и граничными условиями.

Задания

31. Затухание магнитного поля в прямоугольной бесконечно длинной пластине.

Пусть прямоугольная пластина со сторонами a и $b = a/2$ имеет бесконечное направление вдоль оси z , а магнитное поле,

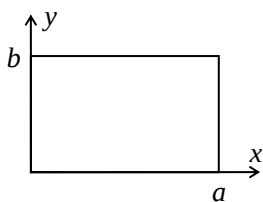


Рис. 4.16

направленное вдоль этой же оси, в начальный момент времени внутри пластины имеет распределение $H_0(x, y)$. Тогда изменение магнитного поля $H_z(x, y)$ в последующие моменты времени определится уравнением (4.1) с учетом граничных и начальных условий

$$H_z(0, y, t) = H_z(a, y, t) = H_z(x, 0, t) = H_z(x, b, t) = 0, \quad 0 < t < \infty,$$

$$H_z(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Найти конечно-элементное решение для $b=1$, $a=2$; 5; 10, $\chi=0.1$, $H_0 = 1$, $H_0 = \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$.

Сравнить с аналитическим решением:

$$H_{\tau}(x, y, t) = \sum_{m,n} \frac{4}{ab} \left(\int_0^b dy \int_0^a dx H(x, y, 0) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \times \\ \times \exp \left\{ -\chi \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) t \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

32. Проникновение переменного магнитного поля в прямоугольную бесконечно длинную проводящую пластину.

Рассмотрим ту же пластину, что и в предыдущей задаче, но помещенную во внешнее переменное поле с частотой ω . Тогда для определения поля внутри пластины требуется решить уравнение (4.1) при следующих условиях

$$H_z(0, y, t) = H_z(a, y, t) = H_z(x, 0, t) = H_z(x, b, t) = H_0 \sin \omega t, \quad 0 < t < \infty, \\ H_z(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Таким образом, имеем задачу с периодическими граничными условиями. Размеры пластины взять, как в задании 1, а частоту $\omega = 10, 20, 100, 200$. Определить глубину скин-эффекта.

33. Для следующих областей (рис. 4.17-4.19) решить задачи в условиях заданий 31 и 32.

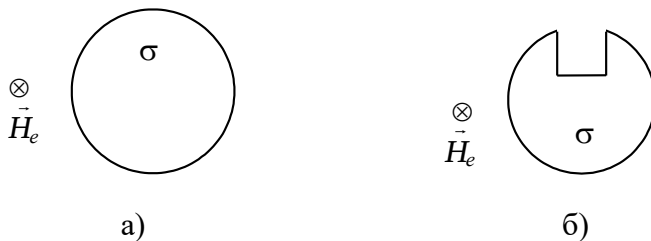


Рис. 4.17. Бесконечный цилиндр

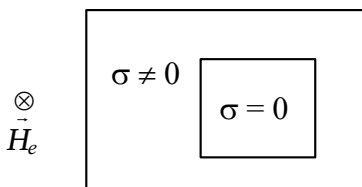


Рис. 4.18. Пластина с отверстием

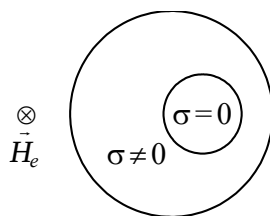


Рис. 4.19. Полый цилиндр

34. Найти изменение распределения температуры со временем в тонком однородном стержне. На концах стержня задаются температурные режимы. Начальная температура всего стержня постоянная.

Задача сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$u(x, 0) = u_0$, $u(0, t) = \mu_0(t)$, $u(a, t) = \mu_1(t)$, где $u(x, t)$ – температура стержня в точке x в момент времени t . Коэффициент k принять равным 1.

№ варианта	a	t_1	u_0	$\mu_0(t)$	$\mu_1(t)$
1	1.2	2	10	$u_0 + 0.2t$	$u_0 - 0.3t$
2	1.1	2.2	12	$u_0 - t$	$u_0 + \sin 2\pi t$
3	0.8	2.4	15	u_0	$u_0 - 4t$
4	0.6	2.6	18	$u_0 e^t$	$u_0 e^{-t}$
5	1.4	2.8	22	$u_0 + \sin \pi t$	u_0

35. Найти изменение температуры $u(x, y, t)$ во времени для однородной квадратной пластины. Начальное распределение температуры задано: $u(x, y, 0) = x + y$. Краевые условия: $u(x, 0, t) = x e^{-at}$; $u(x, 1, t) = (1 + x) e^{-at}$; $u(0, y, t) = y e^{-at}$; $u(1, y, t) = (1 + y) e^{-at}$. Задача сводится к решению уравнения теплопроводности

$\partial u / \partial t = k \Delta u$ в области $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq t_1\}$. Коэффициент k принять равным 1, t_1 и a взять из таблицы задания 34.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зенкевич О., Морган К. Метод конечных элементов и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
2. Сабоннадьер Ж.-К. Метод конечных элементов и САПР / Ж.-К. Сабоннадьер, Ж.-Л. Кулон. – М.: Мир, 1989. – 190 с.
3. Шунин Г.Е., Кострюков С.А., Пешков В.В., Кудряш А.А. Введение в конечно-элементный анализ: учеб. пособие. Воронеж: ВГТУ, 2017. – 204 с.; электронный ресурс кафедры ВМФММ.
4. Кострюков С.А., Пешков В.В., Шунин Г.Е. Основы вариационного исчисления: учеб. пособие. Воронеж: ВГТУ, 2011. – 165 с.; электронный ресурс кафедры ВМФММ.
5. Описание программы Maple [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx>
6. Описание программы Mathematica [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.wolfram.com/mathematica/>
7. Описание программы Matlab [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
8. Описание программы Scilab [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.scilab.org>
9. Описание программы Maxima [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://maxima.sourceforge.net/>
10. Описание программы COMSOL Multiphysics [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.comsol.com/comsol-multiphysics>
11. COMSOL Multiphysics user's guide. 2008 COMSOL 3.5a, May 2011 COMSOL 4.2.

12. Описание программы FlexPDE [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.pdesolutions.com>
13. Описание программы Elmer [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.csc.fi/web/elmer>
14. Описание программы FreeFEM++ [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.freefem.org/ff++/>
15. Описание программы Elcut [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.elcut.ru>
16. Описание программы FEMM [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. Режим доступа: <http://www.femm.info/wiki/HomePage>
17. Конечно-элементный комплекс программ FEMPDE-Solver / С.А. Кострюков, В.В. Пешков, Г.Е. Шунин и др. // Системы управления и информационные технологии. – 2010. – № 4(42). – С. 52-57.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	4
1.1. Сущность метода конечных элементов	4
1.2. Вариационные методы дискретизации	7
1.3. Проекционные методы дискретизации	12
1.4. Конечные элементы и аппроксимация	15
1.5. Решение дифференциальных уравнений с частными производными	21
2. СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ	25
2.1. Универсальные системы компьютерной математики	25
2.2. Мультифизические системы конечно-элементного анализа	31
2.3. Специализированные конечно-элементные комплексы программ	45
3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КУРСОВЫХ РАБОТ И ТИПОВЫХ РАСЧЁТОВ	56
3.1. Краевые задачи для уравнения Лапласа	56
3.2. Краевые задачи для уравнения Лапласа с дополнительными условиями	61
3.3. Краевые задачи для уравнения Пуассона	65
3.4. Краевые задачи при наличии физически неоднородных сред	68
3.5. Смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности	70
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	74

