МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Воронежский государственный архитектурно-строительный университет»

Кафедра строительной техники и инженерной механики
имени доктора технических наук, профессора Н.А. Ульянова

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические указания
к выполнению практических работ
для студентов направлений подготовки
190109 «Наземные транспортно-технологические средства»,
190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы»,
190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Воронеж 2015

УДК 011.891.5 (07)
ББК 38.6я7

Составитель В.А. Жулай

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ: метод. указания к вып. практ. работ для студ. направлений подготовки 190109 «Наземные транспортно-технологические средства», 190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» / Воронежский ГАСУ.; сост.: В.А. Жулай. – Воронеж, 2015. – 39 с.

Методические указания разработаны для выполнения практических работ по курсу «Экспериментальные исследования машин для разработки грунтов».

Предназначены для студентов всех форм обучения направлений подготовки 190109 «Наземные транспортно-технологические средства», 190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Ил. 5. Табл. 5. Библиогр.: 7 назв.

УДК 011.891.5 (07)
ББК 38.6я7

Печатается по решению учебно-методического совета Воронежского ГАСУ

Рецензент – А.А. Кононов, д-р техн. наук, проф. кафедры информатики и графики Воронежского ГАСУ

ВВЕДЕНИЕ

Математическая обработка и анализ результатов экспериментальных исследований являются необходимыми студентам и аспирантам при изучении курсов связанных с научными исследованиями и испытаниями машин и механизмов. Недостаток знаний современных методов математической обработки эксперимента и анализа его результатов вызывает у начинающих исследователей серьезные затруднения и часто приводит к использованию ими упрощенных и неверных приемов обработки полученных данных.

Однако, количество задач, наиболее часто встречающихся при обработке результатов экспериментальных исследований не велико. В основном это оценка истинных значений измеряемых величин и точности их измерений, отыскание параметров эмпирических зависимостей и сглаживание исходных данных, корреляционный анализ и оценка параметров полученных на его основе математических моделей.

Важно отметит, что все математические методы обработки результатов экспериментов основаны на вероятностных представлениях и все результаты и получаемые выводы даются с определенной точностью и достоверностью.

Выполнение практических работ предусматривает знание основ теории вероятностей и владение навыками работы в ОС MathCAD.

1. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. Измерения и их погрешности

Целью любых экспериментальных исследований является определение численных значений параметров физических явлений, между которыми нужно установить определенную функциональную зависимость. Процесс определения численных значений, какой либо физической величины называется измерением. При этом опытном путем сравнивается измеряемая величина с некоторым ее значением, приятым за единицу измерения.

Качество результатов измерений принято характеризовать указанием их погрешностей. При достаточно точных измерениях одной и той же величины их результаты будут отличаться друг от друга из-за содержания в них ошибок.

Ошибкой или погрешностью измерения называют разность между результатом измерений x и истинным значением a измеряемой величины. Ошибка измерения, как и истинное значение измеряемой величины, обычно неизвестна. Следовательно, основной задачей обработки результатов прямых измерений является оценка истинного значения измеряемой величины по полученным опытным значениям с возможно меньшей ошибкой.

Различают абсолютную $\Delta = x - a$ и относительную $E = \Delta / a$ погрешности измерения. Относительную погрешность E принято выражать в процентах. Чем меньше относительная ошибка, тем выше точность результата измерения.

По характеру возникновения ошибки измерений подразделяются на систематические, случайные и грубые (промахи).

Грубые ошибки или промахи возникают в результате нарушения условий измерения или невнимательности экспериментатора. При их обнаружении соответствующий результат нужно сразу отбросить, а само измерение, по возможности, повторить. Признаком промаха является резкое отличие его величины от остальных результатов измерений. В дальнейшем предполагается, что оставленные для математической обработки результаты не содержат грубых ошибок.

Систематические ошибки имеют постоянные значения при различных измерениях. Они могут быть обусловлены различными причинами, основной из которых является погрешность средств измерений. Минимальное значение ошибки измерений определяется их точностью.

Погрешность средств измерений определяется классом точности прибора и погрешностью отсчета. Для большинства приборов со шкалой, кроме электроизмерительных, она равна наименьшей цене деления шкалы. У цифровых приборов систематическую погрешность принимают равной единице наименьшего учитываемого разряда по индикатору прибора. Погрешность электроизмерительных приборов определяется их классом точности, который характеризует её предельное значение в процентах.

Случайные ошибки вызываются большим количеством неконтролируемых факторов. Они являются неустранимыми и присутствуют в каждом из результатов измерений. Их влияние на оценку истинного значения измеряемой величины можно оценить и минимизировать с помощью методов теории вероятностей.

Рассмотрим основные минимальные сведения из теории вероятностей необходимые для определения значения измеряемой величины с возможно меньшей ошибкой.

1.2 Оценки истинного значения измеряемой величины

В качестве оценки истинного значения a измеряемой величины применяют среднее арифметическое значение серии результатов измерений

$$a \approx \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad (1.1)$$

где x_i – результат i-го измерения;

n – количество измерений.

Среднее арифметическое значение является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой истинного значения *a*.

Оценкой (характеристикой точности измерений) при неизвестной точности измерений служит эмпирический стандарт (среднее квадратичное отклонение)

$$s_x = \sqrt{\frac{\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}, \qquad (1.2)$$

который служит оценкой средней квадратичной ошибки σ.

Среднее квадратичное отклонение s_x дает точечную оценку (одним числом) степени близости $\bar{x}$ к истинному значению измеряемой величины a без указания вероятности выхода за этот интервал. Более надежной и информативной является интервальная оценка, заключающаяся в указании величины интервала в котором находится *a*, с заданной вероятностью.

В этом случае характеристиками точности и надежности измерения будут доверительный интервал ε и доверительная вероятность α. Доверительный интервал ε ограничивает такую окрестность $\bar{x} \pm \Delta x_\alpha$, куда с заданной вероятностью α попадает истинное значение a.

Величину Δx_α называют доверительной случайной погрешностью. Фактически полуширина доверительного интервала Δx_α характеризует абсолютную погрешность измерения при влиянии только случайных ошибок.

Величина доверительного интервала для небольшой выборки ($n<30$) с заданной вероятностью α определяется с помощью, так называемого распределения Стьюдента (введено в 1908 г. английским математиком В.С. Госсетом) по формуле

$$\Delta x_\alpha = t_{\alpha(n)} \frac{s_x}{\sqrt{n}}, \qquad (1.3)$$

где $t_{\alpha(n)}$ – коэффициент Стьюдента, учитывающий число измерений.

Распределение Стьюдента зависит от одного параметра $k = n - 1$, называемого числом степеней свободы. Величина коэффициента Стьюдента для различных значений и n приведена в табл. П.1.1.

Для инженерных расчетов заданную вероятность попадания в доверительный интервал достаточно принимать α = 0,9 ... 0,95.

Таким образом, величина доверительного интервала для заданной вероятности попадания в него записывается следующим образом

$$\varepsilon = \bar{x} \pm t_{\alpha(n)} \frac{s_x}{\sqrt{n}}. \qquad (1.4)$$

1.3. Исключение грубых ошибок

Метод исключения грубых ошибок при неизвестной точности измерений основан на применении эмпирического стандарта s_x.

Для этого абсолютную величину разности $\left|x_* - \overline{x}\right|$ между «выскакивающей» величиной x_* и средним арифметическим значением $\overline{x}$ делят на эмпирический стандарт s_x

$$t = \frac{\left|x_* - \overline{x}\right|}{s_x} \qquad (1.5)$$

и сравнивают полученный результат t с критическим значением критерия $t_n(\alpha)$ из табл. П.1.2.

Если при данном числе измерений n и требуемой надежности α окажется, что $t > t_n(\alpha)$,то проверяемую величину x_* следует считать промахом.

1.4. Определение необходимого количества измерений

Увеличение количества измерений позволяет повысить точность определения измеряемой величины, но при соответствующем увеличении затрат времени и средств. Необходимое количество измерений для достижения требуемой величины доверительного интервала с заданной надежностью можно определить только, когда известна средняя квадратичная ошибка измерений, что на практике обычно неосуществимо.

Если средняя квадратичная ошибка измерений заранее неизвестна, но известен хотя бы её порядок, то предварительно необходимое количество измерений n^l для требуемых значений надежности α и доверительного интервала ε можно определить в зависимости от отношения

$$q = \frac{\varepsilon}{s'_x}, \qquad (1.6)$$

где s'_x – предварительная оценка будущего эмпирического стандарта.

Предварительное определение количества измерений n^l в зависимости от принятых α и q производится по данным табл. П.1.3.

После этого проводится n^l измерений по результатам, которых определяются значения $\overline{x}$ и s_x, которые используются для определения необходимого количество измерений n по формуле

$$n \geq \left[\frac{t_{\alpha(n)}}{\Delta x_\alpha}\right]^2 s_x^2 . \qquad (1.7)$$

При этом нахождение n придется вести методом последовательного приближения, так как значения коэффициента Стьюдента $t_{\alpha(n)}$ зависит не только доверительной вероятности, но и от числа измерений. То есть расчеты по формуле (1.7) нужно будет провести несколько раз.

Полученное, в соответствии изложенным, число измерений n_1 будет первым приближением. Для получения второго приближения необходимо провести n_1 измерений и повторить все необходимые расчеты, приведенные выше. Если полученное число измерений n_1 меньше предварительно проведенного числа измерений или равно ему, то второго приближения делать не следует.

Увеличение числа измерений n приводит к уменьшению случайной ошибки. Однако увеличивать n целесообразно, до тех пор, пока случайная погрешность Δx_α превышает систематическую Δ_C. На практике обычно принимают $\Delta x_a \le 0{,}1\Delta_C$, а иногда удовлетворяются даже гораздо менее жесткими требованиями: $\Delta x_a \le 0{,}2\,\Delta_C$ или даже $\Delta x_a \le 0{,}3\Delta_C$.

Основной систематической погрешностью обычно является приборная погрешность средств измерений. Для приборов со шкалой (кроме электроизмерительных) она равна наименьшему делению шкалы прибора. У некоторых механических средств измерений погрешность указывается на них, например, микрометр – 0,01 мм; штангенциркуль – 0,1 или 0,05мм. Для металлических линеек с нарезанными миллиметровыми делениями, а не просто нанесенными краской, погрешность принято считать равной 0,5мм.

Для цифровых показывающих приборов систематическую погрешность принимают равной единице наименьшего учитываемого разряда по индикатору прибора.

У электроизмерительных приборов систематическая погрешность определяется классом точности, обозначается цифрами: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Это число означает процентную погрешность от максимального значения шкалы прибора.

1.5. Определение суммарных погрешностей

При реальных измерениях присутствуют как систематические Δ_C, так и случайные погрешности Δx_α. В связи с тем, что случайные погрешности по своей природе на коррелированы с другими видами погрешностей то в общем случае суммарная погрешность находится геометрическим суммированием Δ_C и Δx_α

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta x_a} = \sqrt{\Delta_C^2 + t_{\alpha(n)} \frac{s_x}{\sqrt{n}}}\,. \tag{1.8}$$

Геометрическое суммирование дает меньшее значение суммарной погрешности по сравнению с арифметическим.

Когда погрешностей не две, а более, их суммирование производят точно так же.

Кроме абсолютного значения определяют также относительную погрешность

$$\delta = \frac{\varepsilon_{\bar{x}}}{\bar{x}}\,. \tag{1.9}$$

Геометрическое суммирование погрешностей имеет одну важную особенность. Если одна из ошибок составляет половину другой то $\varepsilon_{\bar{x}} = \sqrt{1+0{,}5} = 1{,}12$, т.е. суммарное значение изменяется на 12%. Таким образом, меньшая погрешность почти ничего не добавляет к большей, даже если она составляет половину от неё.

Повышение точности результатов измерений целесообразно проводить путем уменьшения систематических ошибок, т.е. использованием более точных приборов, изменением методики эксперимента, а не увеличением числа опытов.

Правила округления значений рассчитанной погрешности и полученного результата измерения.

Любое округление чисел дает систематическую погрешность. Поэтому результаты измерений и погрешности следует округлять по следующим правилам.

1. Округление проводится только один раз при получении окончательных результатов. Все промежуточные результаты целесообразно представлять тем числом разрядов, которые удается получить.
2. Округление начинается с округления погрешности результата измерения.
3. Погрешность результата измерения округлятся до двух значащих цифр, если при движении слева направо первая значащая цифра округляемой погрешности меньше 3.Погрешность результата измерения округляется до одной значащей цифры, если при движении слева направо первая значащая цифра округляемой погрешности больше 3 или равна 3.
4. Результат измерения округляется так, чтобы он оканчивался цифрой того же разряда, что и значение погрешности. Если числовое значение результата измерения представляется десятичной дробью, оканчивающейся нулями, то нули отбрасываются только до того разряда, который соответствует разряду числового значения погрешности.
5. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остающиеся цифры в числе не изменяют. Если эта цифра больше 5, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях отбрасывают.
6. Если отбрасываемая цифра равна 5, а следующие за ней цифры отсутствуют или нули, то последнюю сохраняемую цифру числа не изменяют. Если отбрасываемая цифра равна 5, а следующие за ней цифры отличны от нуля, то последнюю сохраняемую цифру числа увеличивают на единицу.

Окончательный результат записывают в виде

$$a = \bar{x} \pm \varepsilon_{\bar{x}}, \qquad (1.10)$$

при этом здесь же обязательно должны быть указаны доверительная вероятность α.

1.6. Порядок выполнения работы

В соответствии с указаниями преподавателя, для конкретных условий, провести серию измерений физической величины. После чего определить следующие параметры.

– Среднее арифметическое значение (ф-ла 1.1) и эмпирический стандарт (ф-ла 1.2) с помощью функций системы MathCAD *mean*, *Var* и *Stdev*.

– Определить величину доверительного интервала (ф-ла 1.3) и проверить исходные данные на наличие грубых ошибок с помощью ф-лы 1.5.

– В случае наличия промахов в исходных данных, исключить их и повторить расчеты по ф-лам 1.1 ... 1.3.

– Определить минимально необходимое количество измерений с помощью формул 1.6 и 1.7.

– Определить суммарную погрешность проведенных измерений (ф-лы 1.8 и 1.9) и записать окончательный вариант результата измерений (ф-ла 1.10).

Контрольные вопросы

1. Что такое измерение?
2. Какие бывают виды ошибок измерений?
3. Как называются оценки истинного значения среднего квадратичного отклонения и как они определяются?
4. Что такое доверительный интервал и как определяется его величина?
5. Что такое «промах» и как он выявляется?
6. Как определяется необходимое количество измерений?
7. Как определяются погрешности приборов с различными шкалами?
8. Как определяется суммарная погрешность результатов прямых измерений?
9. Перечислите правила округления результатов прямых измерений.

2. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Погрешности косвенных измерений

При проведении испытаний наземных транспортно-технологических машин большинство определяемых параметров и характеристик нельзя измерить непосредственно. Они рассчитываются по известным зависимостям от одной или нескольких первичных величин определяемых прямыми измерениями.

При определении погрешности результата косвенных измерений, когда интересующий нас параметр определяется по результатам измерений одной или нескольких величин, связанных с ним функциональной зависимостью, исходят из следующих положений теории ошибок.

Рассмотрим зависимость

$$y = f(x), \tag{2.1}$$

где y – результат косвенного измерения (функция);

x – результат прямого измерения (аргумент).

Предполагая, что погрешность измерения аргумента x известна и составляет величину $\pm\Delta x$, обозначим погрешность измерения функции у как $\pm\Delta y$. Тогда, с учетом погрешностей $\pm\Delta x$ и $\pm\Delta y$ выражение (2.1) примет вид

$$y \pm \Delta y = f(x \pm \Delta x). \tag{2.2}$$

Разлагая правую часть выражения (2.2) в ряд Тейлора, и учитывая, что члены разложения, содержащие вторые и более высокие степени ошибок, лежат за пределами точности измерений и ими можно пренебречь, получим

$$y \pm \Delta y = f(x) \pm \Delta x \frac{df(x)}{dx}. \tag{2.3}$$

Учитывая, что y есть функция $f(x)$, получим для Δy

$$\Delta y = \pm \Delta_x \frac{df(x)}{dx}, \tag{2.4}$$

где Δy – абсолютная погрешность результата косвенного измерения величины y;

Δx – абсолютная погрешность результата прямого измерения величины x, т. е. абсолютная ошибка функции равна абсолютной ошибке аргумента, умноженной на производную этой функции.

Для сложной функции

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{2.5}$$

с независимыми переменными, в соответствии с теорией ошибок, суммарная абсолютная ошибка равна геометрической сумме частных ошибок, в каждой из которых за переменную принимается только один из аргументов, т. е.

$$\Delta y = \pm \sqrt{(\Delta x_1)^2 \left(\frac{dy}{dx_1}\right)^2 + (\Delta x_2)^2 \left(\frac{dy}{dx_2}\right)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2 \left(\frac{dy}{dx_n}\right)^2}. \tag{2.6}$$

От абсолютной ошибки можно перейти к относительной, зная, что относительная ошибка измерения какой-либо величины является частным от деления абсолютной ошибки на эту величину, т. е.

$$\frac{\Delta y}{y} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{y}\right)^2 \left(\frac{dy}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{y}\right)^2 \left(\frac{dy}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta x_n}{y}\right)^2 \left(\frac{dy}{dx_n}\right)^2}. \tag{2.7}$$

Таким образом, для расчета погрешности результата косвенного измерения можно использовать частные производные независимых переменных формул подсчета определяемой величины.

При определении суммарной ошибки опыта берут наиболее неблагоприятный случай, когда все частные ошибки, составляющие ошибку результата, имеют одинаковый знак «плюс» независимо от знака, полученного при дифференцировании.

Формулы для вычисления суммарных абсолютных и относительных погрешностей результатов косвенных измерений для некоторых зависимостей приведены в табл. П.2.1.

Погрешность результата косвенного измерения целесообразно определять следующим образом:

1) установить величины погрешностей прямых измерений каждой из составляющих, определяемого параметра;

2) оценить относительную ошибку результата косвенных измерений;

3) перейти от относительной ошибки к абсолютной ошибке результата.

Рассмотрим пример оценки погрешностей результата косвенных измерений при лабораторных испытаниях двигателя внутреннего сгорания. Требуется определить ошибку измерения часового расхода топлива двигателя на тормозном стенде.

В результате испытаний было установлено: расход топлива за опыт $G_{on} = 650$ г, продолжительность опыта $T_{on} = 197{,}3$ с. Часовой расход топлива равен

$$G_T = 3{,}6\frac{G_{on}}{T_{on}} = 11{,}860 \text{ кг/ч}. \qquad (2.8)$$

Продифференцировав формулу для подсчета часового расхода топлива $G_T = 3{,}6G_{on}/T_{on}$ (из свойств производной $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'\,f_2 - f_2'\,f_1}{f_2^2}$), и взяв все члены со знаком плюс, получим формулу для определения абсолютной погрешности результата косвенного измерения величины часового расхода топлива

$$\Delta_{G_T} = \pm 3{,}6\frac{\sqrt{G_{on}^2\Delta_{T_{on}}^2 + T_{on}^2\Delta_{G_{on}}^2}}{T_{on}^2}. \qquad (2.9)$$

Разделив это выражение на $G_T = 3{,}6G_{on}/T_{on}$, получим формулу для относительной ошибки

$$\frac{\Delta_{G_T}}{G_T} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta_{T_{on}}}{T_{on}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{G_{on}}}{G_{on}}\right)^2}. \qquad (2.10)$$

Таким ошибка измерения часового расхода топлива складывается из погрешности взвешивания и погрешности измерения продолжительности опыта.

Основная систематическая погрешность взвешивания равна наименьшему делению шкалы весов, которая составляет $\Delta_{G_{on}} = \pm 5$ г. Из опыта известно, что случайные погрешности взвешивания перекрываются нечувствительностью весов.

Предельная погрешность измерения продолжительности опыта слагается из инструментальной погрешности секундомера и случайной погрешности несвоевременности включения и выключения его.

Приведенная погрешность секундомера по данным поверки составляет ± 5 % или в абсолютном значении ± (0,5 $T_{on}/100$)с. Погрешность несвоевременности включения и выключения секундомера по опытным данным составляет 0,4 с.

Таким образом, абсолютная погрешность измерения продолжительности опыта равна

$$\Delta_{T_{on}} = \pm\left(0{,}005\,T_{on} + 0{,}4\right) \text{ с.}$$

Тогда относительная погрешность измерения часового расхода топлива двигателя равна

$$\frac{\Delta_{G_T}}{G_T} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta_{T_{on}}}{T_{on}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{G_{on}}}{G_{on}}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{5}{650}\right)^2 + \left(\frac{0{,}005\cdot 197{,}3 + 0{,}4}{197{,}3}\right)^2}\ 100 = \pm 1{,}04189\,\%,$$

а абсолютная погрешность будет

$$\Delta_{G_T} = \pm\frac{11{,}860\cdot 1{,}04189}{100} = \pm 0{,}123568 \text{ кг/ч.}$$

Окончательно, после округления полученных значений, результат косвенного измерения часового расхода топлива двигателя записывается в виде

$$G_T = 11{,}86 \pm 0{,}12 \text{ кг/ч.}$$

2.2. Порядок выполнения работы

В соответствии с указаниями преподавателя, по результатам испытаний транспортно-технологической машины, определить погрешности результата косвенных измерений одного из параметров. Для чего необходимо:

– установить функциональную зависимость этого параметра от характеристик, полученных прямыми измерениями и значения их абсолютных погрешностей (аналог – ф-ла 2.8);

– продифференцировать установленную функцию нескольких переменных, взяв частные производные по каждой из них (аналог – ф-ла 2.9);

– получить формулу для относительной ошибки результата косвенного измерения (аналог – ф-ла 2.10);

– определить значения относительной и абсолютной погрешностей результата косвенного измерения и записать его окончательный вариант после округления.

Контрольные вопросы

1. Что такое косвенное измерение?
2. По какой формуле определяется абсолютная погрешность результата косвенного измерения функции одной переменной?
3. По какой формуле определяется абсолютная погрешность результата косвенного измерения функции нескольких переменных?
4. По какой формуле определяется относительная погрешность результата косвенного измерения функции нескольких переменных?
5. Составьте алгоритм действий при обработке косвенных измерений.

3. ОТЫСКАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ И СГЛАЖИВАНИЕ

При проведении экспериментальных исследований транспортно-технологических машин часто одной из основных задач является установление зависимостей между двумя или несколькими параметрами, вид которых, как правило, заранее не известен. Кроме того результаты эксперимента имеют отклонения вызванные случайными вариациями условий проведения опытов и погрешностями измерений.

Изучение таких стохастических зависимостей и получение математических моделей исследуемых явлений производится с помощью регрессионного анализа, основной задачей которого является установление вида эмпирической зависимости.

3.1. Постановка задачи отыскания параметров

При экспериментальном исследовании зависимости одного параметра y от другого x ряд измерений величины y при различных значениях x. Результаты могут быть представлены в виде таблицы или графика. Графическое представление дает возможность наглядно продемонстрировать постановку задачи.

Каждое измеренное значение представляется точкой на графике (рис. 2.1). Множество точек образуют на графике зону, через которую необходимо провести кривую, наилучшим образом описывающую зависимость $y = f(x)$. Задача заключается в выборе вида этой аналитической зависимости.

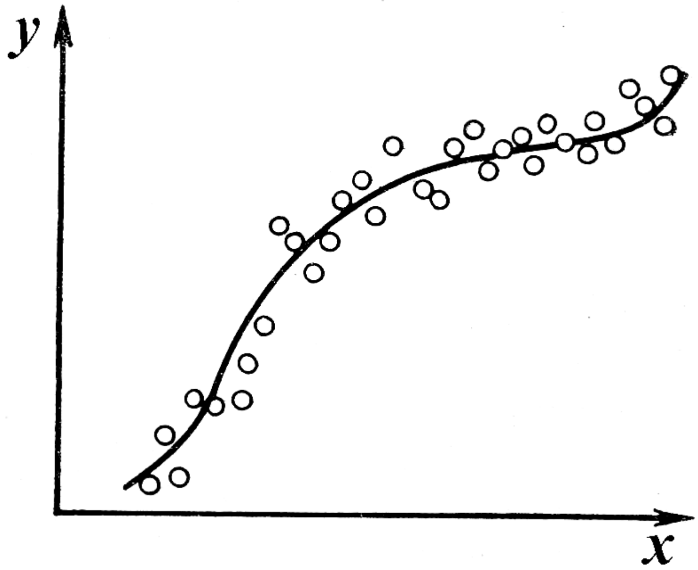

Рис. 3.1. Графическая зависимость результатов экспериментальных исследований

Особенностью задачи является наличие случайных ошибок измерений, что делает нецелесообразным, да и невозможным, подбор такой функции, которая точно описывала бы все экспериментальные значения. Т.е. график искомой функции не должен проходить через все точки на рис. 2.1, а должен наилучшим образом сгладит случайные отклонения. Лучшей считается такая функция $y = f(x)$, для которой сумма квадратов ортогональных относительно оси y расстояний будет минимальной.

Формулу, описывающую эмпирическую зависимость $y = f(x)$ (математическую модель процесса) обычно выбирают из функций определенного типа, а при невозможности такого выбора, используют степенные или тригонометрические ряды.

Иными словами, задача сводится к определению параметров функции, вид которой заранее известен из каких либо теоретических предпосылок или соображений достаточной простоты описания эмпирических зависимостей.

Пусть выбранная функция имеет вид

$$y = f(x; a_1, a_2 \ldots a_N) \tag{3.1}$$

с явно указанными параметрами, подлежащими определению. Величины этих параметров a_1, a_2, … a_N невозможно определить точно по эмпирическим значениям функции $y_1, y_2 \ldots y_N$, так как в них содержатся случайные ошибки.

Для получения несмещенных и состоятельных оценок всех параметров функции 3.1 используется метод наименьших квадратов, заключающийся в определении таких значений a_1, a_2, … a_N при которых сумма квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от расчетных $y = f(x; a_1, a_2 \ldots a_N)$, будет минимальной.

3.2. Метод наименьших квадратов

Если все независимые измерения значений функции y_1, y_2 … y_N произведены с одинаковой точностью при произвольном расположении значений аргумента x_1, x_2 ... x_N, то оценки параметров a_1, a_2, … a_N, обеспечивающие минимальную среднеквадратичную погрешность приближения к исходной функции, определяются из условия минимального значения суммы квадратов отклонений измеренных значений y_i от расчетных $y = f(x; a_1, a_2 \ldots a_N)$, т.е.

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - f(x_i; a_1, a_2 \ldots a_N) \right]^2 = min\,. \tag{3.2}$$

Функция (3.2) есть функция нескольких переменных. Как известно, для нахождения экстремума функции нескольких переменных необходимо найти частные производные и приравнять их к нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{da_1} = \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - f(x_i; a_1, a_2 \ldots a_N) \right] \dfrac{d\,f(x_i; a_1, a_2 \ldots a_N)}{da_1} = 0 \\ \dfrac{dS}{da_2} = \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - f(x_i; a_1, a_2 \ldots a_N) \right] \dfrac{d\,f(x_i; a_1, a_2 \ldots a_N)}{da_2} = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{dS}{da_N} = \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - f(x_i; a_1, a_2 \ldots a_N) \right] \dfrac{d\,f(x_i; a_1, a_2 \ldots a_N)}{da_N} = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Решив систему уравнений (3.3) получим значения параметров a_1, a_2, … a_N при которых функция (3.2) имеет минимум.

Отыскание параметров линейной функции.

Линейная функция графически изображается прямой линией, уравнение которой имеет вид

$$y = a\,x + b\,. \tag{3.4}$$

Сумма квадратов отклонений от линейной функции равна

$$S_{(a,b)} = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a\,x_i + b) \right]^2 = min\,. \tag{3.5}$$

Составляем систему уравнений с частными производными аналогично (3.3)

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - (a\,x_i + b) \right] x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - (a\,x_i + b) \right] = 0 \end{cases}. \tag{3.6}$$

Перепишем систему (3.6) в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(y_i x_i) - a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i - bN = 0 \end{cases}. \qquad (3.7)$$

Решив систему линейных уравнений (3.7), получим значения параметров a и b обеспечивающих минимум суммы $S_{(a,b)}$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i - N\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - N\sum_{i=1}^{N} x_i^2}, \quad b = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i\right). \qquad (3.8)$$

Аналогично можно определить параметры и других функций. Значения параметров для наиболее распространенных функций приведены в [1, 5].

Для определения погрешности аппроксимации принятой функциональной зависимостью вычисляют среднеквадратическое отклонение теоретической кривой от экспериментальных значений

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \left(a\,x_i + b\right)\right]^2}\,. \qquad (3.9)$$

Полученное значение σ нужно сравнить с известной погрешностью эксперимента ε. Если $\sigma \le \varepsilon$, то вид аппроксимирующей функции выбран удачно, а если $\sigma >> \varepsilon$ – аппроксимация слишком грубая и необходимо использовать другой вид функции.

3.3. Сглаживание эмпирических данных

При большом количестве экспериментальных точек подбор формулы для эмпирической зависимости может оказаться затруднительным из-за того что функции с малым количеством параметров будут давать значительную погрешность, а большое количество параметров неудобно для анализа. Кроме того, некоторые задачи анализа и интерпретации результатов эксперимента не требуют единой аналитической формулы для всего диапазона их вариации. Например, для численного дифференцирования или интегрирования необходимо лишь устранить случайные погрешности («шум») эксперимента, сохранив при этом информацию об исследуемой зависимости. Для этого используется сглаживание эмпирических данных, заключающееся в замене таблицы исходных точек новой таблицей с приближенными точками, лежащими более близко к реальной кривой.

Сглаживание осуществляется с помощью аппроксимирующих многочленов различных, желательно оптимальных, степеней приближающих опытные данные по методу наименьших квадратов. Если используется аппроксимирующий многочлен первой степени, сглаживание называется линейным, если более высокой степени – нелинейным.

Наилучшее сглаживание достигается для точек находящихся в середине таблицы, поэтому количество экспериментальных точек выбирают нечетным. Крайние точки в начале и конце таблицы сглаживаются с меньшей точностью.

Таблицы исходных данных формируют таким образом, чтобы значения аргумента x_i было монотонно возрастающими или убывающими, желательно также выбирать шаг изменения аргумента Δx_i постоянным.

Сглаживание осуществляется по группам точек скользящих вдоль всей таблицы. Например, при линейном сглаживании по трем точкам берут первую группу точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ и сглаживают (находят значение аппроксимирующего многочлена) среднюю точку y_2 заменяя ее вычисленным значением $\tilde{y}_2$. Затем берут следующую группу точек $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, вычисляют значение многочлена для средней точки этой группы y_3 и сглаживают ее, заменяя вычисленным значением $\tilde{y}_3$. И так «скользят» до конца таблицы. После этого производят сглаживание двух первых и двух последних точек по специальным менее точным формулам.

Рассмотрим наиболее простые и часто употребляемые формулы для сглаживания *экспериментальных данных с постоянным шагом*. Для удобства расчетов средней точке из рассматриваемой группы присваивается индекс 0, а симметрично расположенным точкам индексы ± 1 и ± 2. Сглаженные значения функции обозначаются $\tilde{y}_i$ (с волнистой чертой сверху). Основной является формула для сглаживания средней точки y_0, а остальные применяются только для крайних значений в начале и конце таблицы.

Формулы линейного сглаживания по *трем* точкам:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{y}_0 &= \frac{1}{3}(y_{-1} + y_0 + y_1) \\
\tilde{y}_{-1} &= \frac{1}{6}(5y_{-1} + 2y_0 - y_1) \\
\tilde{y}_1 &= \frac{1}{6}(-y_{-1} + 2y_0 + y_1)
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Формулы линейного сглаживания по *пяти* точкам:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{y}_0 &= \frac{1}{5}(y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_1 + y_2) \\
\tilde{y}_{-1} &= \frac{1}{10}(4y_{-2} + 3y_{-1} + 2y_0 + y_1) \\
\tilde{y}_{-2} &= \frac{1}{5}(3y_{-2} + 2y_{-1} + y_0 - y_2) \\
\tilde{y}_1 &= \frac{1}{10}(y_{-1} + 2y_0 + 3y_1 + 4y_2) \\
\tilde{y}_2 &= \frac{1}{5}(-y_{-2} + y_0 + 2y_1 + 3y_2)
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

3.4. Порядок выполнения работы

Для варианта исходных данных выданных преподавателем следует выполнить с помощью системы MathCAD.

1. Ввести в файл MathCAD исходные данные и разместите их в массивах (x), (y).
2. Построить график с точками исходных данных и по его виду задаться типом аппроксимирующей функции.
3. Определить формулы для расчета значений параметров аппроксимирующей функции, обеспечивающих минимум суммы квадратов отклонений от нее.
4. Составить программу в системе MathCAD для расчета значений параметров аппроксимирующей функции и определить их.
5. Построить совместный график с точками исходных данных и кривой аппроксимирующей функции.
6. Определить погрешность аппроксимации принятой функцией и сделать вывод о соответствии ее исследуемой экспериментальной зависимости.
7. Составить в системе MathCAD таблицу сглаженных данных, используя формулы и алгоритм линейного сглаживания по трем точкам. Построить на одном графике исходные (y_i) и сглаженные ($\tilde{y}_i$) данные.
8. Провести линейное сглаживание данных по пяти точкам. Построить графики исходных и сглаженных данных.
9. Провести сглаживание исходных данных с помощью встроенной функций системы MathCAD –supsmooth(x,y). Сравнить по построенным графикам качество этого сглаживания с полученными ранее результатами. Сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается задача аналитического описания экспериментальной зависимости?
2. Почему экспериментальные данные имеют разброс относительно исследуемой функциональной зависимости?
3. Какая функция считается лучшей для описания исследуемой экспериментальной зависимости?
4. В чем заключается задача метода наименьших квадратов?
5. Минимум, какой функции определяется в методе наименьших квадратов?
6. Как находится экстремум функции нескольких переменных?
7. Приведите формулы для определения параметров линейной аппроксимирующей функции.
8. Для чего используется сглаживание эмпирических данных?
9. Что устраняется при сглаживании эмпирических данных?

10. В чем заключается сглаживание эмпирических данных?
11. Для каких точек достигается наилучшее сглаживание?
12. Какие требования предъявляются к форме экспериментальных данных?
13. Напишите формулы линейного сглаживания по *трем* точкам.
14. Напишите формулы линейного сглаживания по *пяти* точкам.

4. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1. Основы теории планирования экспериментов

Различают пассивный и активный эксперимент. При пассивном эксперименте уровни факторов (значения изучаемой зависимости) не зависят от экспериментатора, а получаются в произвольном порядке. При активном эксперименте уровни факторов выбираются определенным образом, позволяющим значительно сократить число опытов. Таким образом, активный эксперимент представляет собой процедуру выбора уровней факторов, их числа и условий проведения эксперимента, необходимых и достаточных для получения математической модели явления с заданной точность.

В теории планирования активных экспериментов решаются задачи: минимизации количества опытов; одновременного варьирования всеми первичными параметрами по специальным правилам – алгоритмам; применения математического аппарата, формализующего действия экспериментатора.

При планировании активного эксперимента вначале выбирается центр плана, вокруг которого симметрично располагают уровни факторов при одинаковом шаге их варьирования. Поскольку каждый уровень любого из факторов сочетается с уровнями других факторов, то в округе центра плана образуется так называемое факторное пространство. Например, для функции отклика, зависящей от трех факторов, факторное пространство при ортогональном планировании представляет собой решетку, в узлах которой располагаются опытные точки (рис. 4.1).

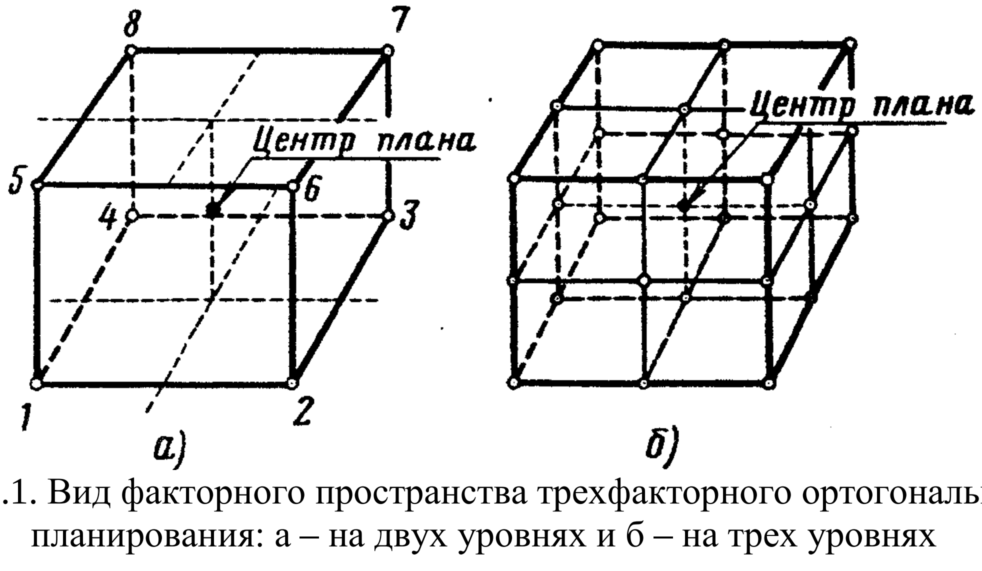

Рис. 4.1. Вид факторного пространства трехфакторного ортогонального планирования: а – на двух уровнях и б – на трех уровнях

При этом число опытных точек (число точек, отвечающих решетке планирования) равно:

в общем случае число точек факторного пространства составляет

$$N = n^m, \tag{4.1}$$

где n - число уровней;

m - число факторов;

для трехфакторного эксперимента на двух уровнях

$$N = 2^3 = 8;$$

для трехфакторного эксперимента на трех уровнях

$$N = 3^3 = 27.$$

Каждой точке факторного пространства соответствует опытное значение функции отклика. Совокупность значений функции отклика, отвечающих точкам факторного пространства, называется поверхностью функции отклика. Поверхности функции отклика двухфакторной зависимости показаны на рис. 4.2.

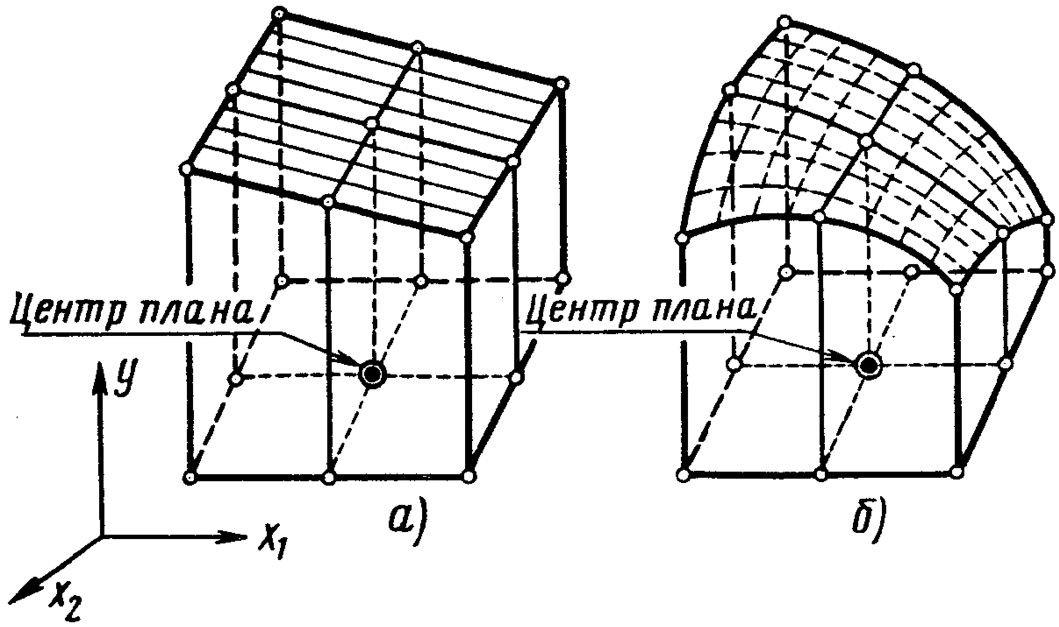

Рис. 4.2. Поверхности функции отклика для двухфакторной зависимости на трех уровнях: *а* – линейная зависимость; *б* – квадратическая зависимость

Таблица, содержащая значения уровней факторов, называется матрицей планирования. Уровни факторов в матрице планирования обычно записываются в кодированном виде, т.е. в условных величинах – 1; 0; +1. После получения математической модели от кодированных значений переходят к натуральным значениям факторов.

При проведении активных экспериментов могут применяться различные виды планирования, например: ортогональное первого и второго порядка, композиционное, ротатабельное, униформ-ротатабельное, Д – оптимальные и др.

Основной целью активного планирования эксперимента является получение математической модели изучаемого явления, позволяющей установить степень влияния каждого из факторов, т.е. решить задачу их ранжирования.

Вывод матричного уравнения для определения коэффициентов регрессии.

На основании априорной информации принято решение описывать рассматриваемое явление моделью первого порядка

$$\tilde{y} = B_0 x_0 + B_1 x_1 + \ldots + B_m x_m = \sum_{i=1}^{n} B_i x_i . \qquad (4.2)$$

При n - испытаниях теоретические уравнения регрессии запишутся так:

$$\tilde{y}_1 = B_0 x_{01} + B_1 x_{11} + \ldots + B_j x_{j1} + \ldots + B_m x_{m1};$$
$$\tilde{y}_2 = B_0 x_{02} + B_1 x_{12} + \ldots + B_j x_{j2} + \ldots + B_m x_{m2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{y}_i = B_0 x_{0i} + B_1 x_{1i} + \ldots + B_j x_{ji} + \ldots + B_m x_{mi};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{y}_n = B_0 x_{0n} + B_1 x_{1n} + \ldots + B_j x_{jn} + \ldots + B_m x_{mn},$$

где $\tilde{y}_i$ – теоретические (расчетные) значения функции отклика;

$B_0, B_1, \ldots B_m$ – неизвестные (искомые) коэффициенты регрессии;

$x_0, x_1, \ldots, x_m$ – факторы (аргументы);

$i(n)$- номер строки, т.е. порядковый номер опыта;

$j(m)$- номер столбца;

m - число факторов (число столбцов);

n- число испытаний (число строк).

В соответствии с методом наименьших квадратов потребуем, чтобы функция U, равная сумме квадратов отклонений теоретических значений функции отклика от опытных данных, имела бы наименьшее значение, т.е.

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\tilde{y}_{i_{теор.}} - y_{i_{опытн.}} \right)^2 = min, \qquad (4.3)$$

Дифференцируя выражение U по неизвестным B_0, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ и приравнивая полученные частные производные нулю, получим систему нормальных уравнений, которая может быть представлена одним матричным уравнением:

$$X^T X B = X^T Y. \qquad (4.4)$$

Если теперь полученное матричное уравнение нормальных уравнений (4.4) умножить слева на так называемую матрицу ошибок $\left(X^T X\right)^{-1}$, представляющую собой обратную к информационной матрице, тогда получим окончательно

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \qquad (4.5)$$

Таким образом, получено общее выражение для вычисления, в соответствии с методом наименьших квадратов, коэффициентов регрессии. При вычислении коэффициентов регрессии проводят ограниченное число опытов, поэтому получаемые значения являются лишь приближенными значениями коэффициентов регрессии, т.е. являются их оценками.

4.2. Ортогональное планирование первого порядка.

Ортогональное планирование – это такое планирование, при котором уровни факторов выбираются симметрично относительно центра плана.

В этом случае информационная матрица $X^T X$ будет диагональной, что значительно упростит вычисление коэффициентов регрессии. Основным требованием ортогональности является выполнение условий:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \text{ и} \sum_{i=1}^{n} x_j x_k = 0 \text{ при } j \neq k. \qquad (4.6)$$

Рассмотрим пример ортогонального планирования.

Проводятся экспериментальные исследования зависимости коэффициента сцепления колесного движителя φ с пневматической шиной размером 12,00–20 от влажности грунта в относительных единицах $\eta = w / w_o$ и давления воздуха в шине p_w. Требуется на основе результатов эксперимента получить математическую модель исследуемого явления.

По предварительной информации принято решение описывать рассматриваемое явление моделью первого порядка на двух уровнях по каждому из факторов:

$$\tilde{y} = B_0 x_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2. \qquad (4.7)$$

Число точек матрицы планирования равно

$$N = n^m = 2^2 = 4.$$

Для снижения статистических ошибок при оценке коэффициентов регрессии и возможности оценки воспроизводимости опытов, были проведены параллельные опыты, результаты которых представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Результаты испытаний

№ опыта	Уровни факторов		Значения функции отклика при параллельных опытах			Опытные средние арифметические $\bar{y}_i$
	Давление воздуха p_w	Влажность грунта η	y_1	y_2	y_3	
1	2	0,38	0,81	0,96	0,90	0,89
2	2	1,17	0,53	0,44	0,47	0,48
3	5	0,38	0,91	0,74	0,84	0,83
4	5	1,17	0,21	0,28	0,26	0,25

Графическая интерпретация результатов эксперимента представлена на рис. 4.1.

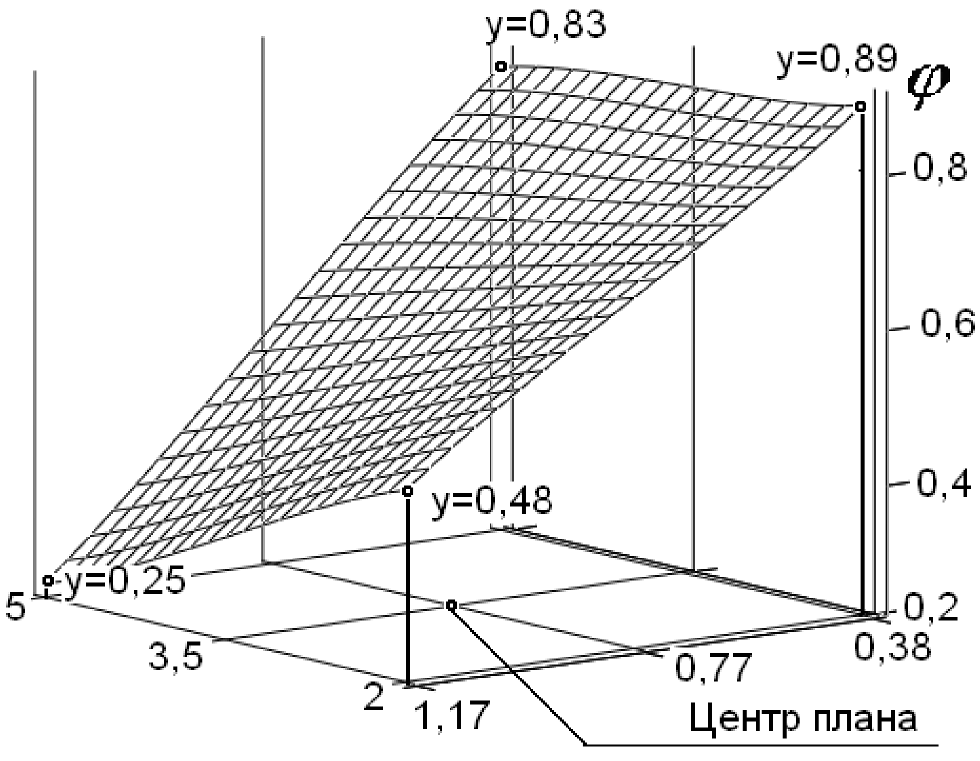

Рис. 4.3. Поверхность функции отклика двухфакторной зависимости на двух уровнях линейной модели ортогонального планирования

4.2.1 Кодируем уровни факторов:

$$\tilde{p}_w = \frac{p_w - \bar{p}_w}{\left|p_w - \bar{p}_w\right|}, \tag{4.8}$$

$$\tilde{p}_w = \frac{p_w - 3{,}5}{1{,}5}; \;\; \tilde{p}_w = 5 \to (+1); \quad \tilde{p}_w = 2 \to (-1)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta - \overline{\eta}}{|\eta - \overline{\eta}|} = \frac{\eta - 0{,}775}{0{,}395}; \;\; \tilde{\eta} = 1{,}17 \to (+1); \quad \tilde{\eta} = 0{,}38 \to (-1),$$

где – $\overline{p}_w, \overline{\eta}$ – центр плана (среднее значение уровней факторов).

4.2.2. Для определения значения свободного члена модели B_0, введем фиктивную переменную $x_0 = 1$ и составим матрицу планирования для кодированного вида уровней факторов (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Матрица планирования двухфакторной зависимости на двух уровнях в кодированном виде уровней факторов

№ опыта	Уровни факторов			Опытные средние значения функции отклика $\overline{y}_i$
	x_0	x_1 (p_w)	x_2 (η)	
1	1	-1	-1	0,89
2	1	-1	1	0,48
3	1	1	-1	0,83
4	1	1	1	0,25
		Σ= 0	Σ= 0	

4.2.3. Составляем исходную и транспонированную матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} \\ x_{40} & x_{42} & x_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & +1 & +1 \end{pmatrix},$$

$$X^T = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{20} & x_{30} & x_{40} \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

4.2.4. Для нахождения информационной матрицы умножаем слева исходную матрицу на транспонированную ($c_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$)

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты уравнения регрессии можно определить при решении нормальных уравнений

$$X^T X \cdot B = X^T Y,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 0{,}48 \\ 0{,}83 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Переходя от матричной формы записи к алгебраической, нормальные уравнения рассматриваемого примера запишутся

$$B_0 4 + 0 + 0 = 2{,}45;$$

$$0 + B_1 4 + 0 = -0{,}29;$$

$$0 + 0 + B_2 4 = -0{,}99.$$

Из их решения

$$B_0 = \frac{2{,}45}{4} = 0{,}613; \qquad B_1 = \frac{-0{,}29}{4} = -0{,}0725; \qquad B_2 = \frac{-0{,}99}{4} = -0{,}248.$$

Тогда, в кодированном виде уравнение регрессии рассматриваемого примера запишется

$$y = B_0 x_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 = 0{,}613 - 0{,}0725 x_1 - 0{,}248 x_2.$$

Для получения окончательного выражения для математической модели явления перейдем от кодированных значений факторов к реальным

$$\tilde{y} = 0{,}613 - \frac{0{,}0725}{1{,}5}(p_w - 3{,}5) - \frac{0{,}248}{0{,}395}(\eta - 0{,}775) = 1{,}27 - 0{,}048 p_w - 0{,}628\eta.$$

Поверхность функции отклика полученной линейной математической модели исследуемого явления показана на рис. 4.2.

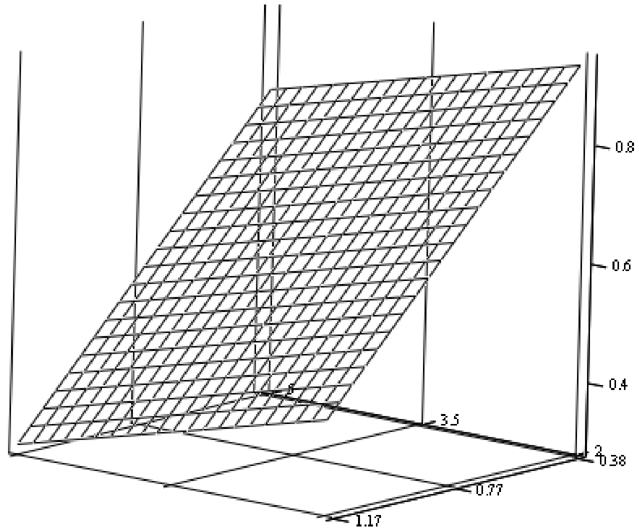

Рис. 4.4. Вид поверхности функции отклика математической модели исследуемого явления

Полученное регрессионное уравнение раскрывает зависимость функции отклика от каждого из факторов, а по величине коэффициентов регрессии можно судит о степени влияния каждого из факторов на величину функции отклика.

4.3. Проверка воспроизводимости результатов эксперимента

При проведении экспериментальных исследований определение значений их результатов (функции отклика) производится, как правило, с одинаковой точностью, т.е. имеет место равноточность воспроизводимости опытов. Из этого следует, что дисперсии функции отклика в каждой строке матрицы планирования (различных уровнях факторов) должны быть одинаковы (однородны). Однородность дисперсии проверяется с помощью различных статистических критериев.

Если во всех точках матрицы планирования проводится одинаковое число параллельных опытов j, то для проверки однородности дисперсии применяется критерий Кохрена.

Для этого вычисляем для каждой строки средние арифметические значения $\bar{y}_i$ и построчные эмпирические дисперсии $S^2(y_i)$ функции отклика y_{ij}

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{j=m=3} y_{ij}}{m}, \qquad S^2(y_i) = \frac{\sum_{j=1}^{j=m=3} \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{m-1}, \tag{4.9}$$

где $i = 1,2,\ldots,n$ – номер строки,

$j = 1,2,\ldots m$ – номер параллельного опыта в строке.

Затем определяем опытное значение критерия Кохрена, равное отношению максимальной построчной эмпирической дисперсии $S^2(y_i)max$ к сумме дисперсии по всем строкам

$$G_{оп} = \frac{S^2(y_i)max}{\sum_{i=1}^{n} S^2(y_i)} \tag{4.10}$$

и теоретическое значение критерия Кохрена $G_т$ при заданной доверительной вероятности α, числе степеней свободы f и числе строк (опытов) n приведенное в таблице П. 3.1. Число степеней свободы f равно числу параллельных опытов m минус 1.

Сравниваем опытное значение критерия Кохрена с теоретическим. Если опытное значение критерия меньше теоретического, то гипотеза о равноточности измерений не отвергается, в противном случае гипотеза отвергается, т.е.

$$G_{оп} \begin{cases} < G_т & - не \quad отвергается; \\ \geq G_т & - отвергается. \end{cases}$$

Общая дисперсия всего эксперимента получается в результате усреднения результат дисперсий всех опытов, т.е.

$$S^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n=9} \sum_{j=1}^{j=m=3} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n(m-1)}. \tag{4.11}$$

Рассмотрим порядок проверки однородности дисперсий применительно к рассматриваемому примеру (табл. 4.1). Требуется проверить однородность дисперсий при заданной доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

4.3.1. Вычисляем по формулам (4.9) для каждой строки средние арифметические значения и построчные дисперсии функции отклика (табл. 4.3). Всего 4 строки $(n = 4)$ $j = 1{,}2$ и 3 – номер результата в строке. Всего три параллельных опыта $(m = 3)$.

Таблица 4.3

Результаты параллельных опытов

№ опыта	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Опытные средние $\bar{y}_i$	Дисперсии в строках $S^2(y_i)$
1	1	-1	-1	0,81	0,96	0,90	0,89	$5{,}7\times10^{-3}$
2	1	-1	1	0,53	0,44	0,47	0,48	$2{,}1\times10^{-3}$
3	1	1	-1	0,91	0,74	0,84	0,83	$7{,}3\times10^{-3}$
4	1	1	1	0,21	0,28	0,26	0,25	$1{,}3\times10^{-3}$
Σx_{ij}	4	0	0				$\Sigma S^2(y_i) = 16{,}4\times10^{-3}$	
Σx_{ij}^2	4	4	4					

4.3.2. Вычисляем опытное значение критерия Кохрена по формуле (4.10)

$$G_{on} = \frac{7{,}3 \times 10^{-3}}{16{,}4 \times 10^{-3}} = 0{,}445$$

4.3.3. Определяем по табл. 4.3 теоретическое значение критерия Кохрена для заданной доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$, числе степеней свободы $f = m - 1 = 3 - 1 = 2$ и числе строк $n = 4$

$$G_m = 0{,}7679$$

4.3.4. Сравниваем опытное значение критерия Кохрена с теоретическим

$$(G_{on} = 0{,}445) < (G_m = 0{,}7679).$$

Следовательно, для рассматриваемого примера при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ гипотеза об однородности дисперсий измерения функции отклика по критерию Кохрена не отвергается.

4.3.5. Вычисляем по формуле (4.11) общую дисперсию всего эксперимента

$$S^2(y) = \frac{\Sigma S^2(y_i)(m-1)}{n(m-1)} = \frac{32{,}8 \times 10^{-3}}{4(3-1)} = 2{,}05 \times 10^{-3}.$$

4.4. Статистическая оценка значимости коэффициентов регрессии

Статистическая оценка значимости коэффициентов регрессии проводится для исключения из математической модели второстепенных факторов, не оказывающих незначительное влияние на величину функции отклика. Осуществляется она с помощью критерия Стьюдента.

Основной идеей оценки статистической значимости коэффициента регрессии B_i является сравнение его величины с величиной доверительного интервала разброса результата измерения случайной величины (см. работу 1).

Для этого вычисляют при заданной доверительной вероятности α величину полуинтервала доверительного разброса среднего значения каждого из коэффициентов δ_i. Если половина доверительного интервала будет превышать значение коэффициента B_i, то этот коэффициент является незначимым и его надо исключить из математической модели. В противном случае коэффициент считается значимым, т.е.

$$\delta_i \begin{cases} > |B_i| & - \quad \textit{коэффициент незначим;} \\ \geq |B_i| & - \quad \textit{коэффициент значим.} \end{cases}$$

Величина полуинтервала определяется по формуле

$$\delta = \frac{S(y)}{\sqrt{n}} t_{\alpha(f)} = S(B_i) \cdot t_{\alpha(f)}, \tag{4.12}$$

где $S(y)$ - среднее квадратическое отклонение всего эксперимента;

$n = \sum x_{ij}^2$ - сумма квадратов факторов матрицы планирования;

$S(B_i)$ -среднее квадратическое отклонение разброса коэффициента регрессии;

$t_{\alpha(f)}$ - критерий Стьюдента при заданной доверительной вероятности α и числе степеней свободы f.

В связи с тем, что при ортогональном планировании коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга, исключение незначимых коэффициентов не требует пересчета значений остальных.

Определим значимость коэффициентов регрессии уравнения, полученного в рассматриваемом примере.

4.4.1. Определяем по формуле (4.12) величину полуинтервала доверительного разброса среднего значения каждого из коэффициентов δ_i.

Величина суммы квадратов кодированных факторов матрицы планирования $n = \sum x_{ij}^2$ приведена в таблице П.4.3.

Число степеней свободы в рассматриваемой задаче равно $f = m \cdot n - 1 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$.

Значение критерия Стьюдента определяется по таблице П.1.1. Для числа степеней свободы $f = 11$ и заданной доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ $t_{0{,}95(11)} = 2{,}201$.

Общее среднее квадратическое отклонение всего эксперимента для рассматриваемого примера (см. п. 4.3.5) равно

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)} = \sqrt{2{,}05 \times 10^{-3}} = 0{,}045.$$

Таблица 4.4

Значения показателей расчета значимости коэффициентов уравнения регрессии

№ п/п	$\sum x_{ij}^2$	Среднее квадратическое отклонение коэффициента регрессии $S(B_i)=\dfrac{S(y)}{\sqrt{n}}$	Величина полуинтервала $\delta_i = S(B_i)\cdot t_{\alpha(f)}$	Значения коэффициентов B_i	Значимость
B_0	4	$\dfrac{0{,}045}{\sqrt{4}}=0{,}0225$	$2{,}201\cdot 0{,}0225=\pm 0{,}0495$	$0{,}613>0{,}0495$	Да!
B_1	4	$\dfrac{0{,}045}{\sqrt{4}}=0{,}0225$	$2{,}201\cdot 0{,}0225=\pm 0{,}0495$	$0{,}0725>0{,}0495$	Да!
B_2	4	$\dfrac{0{,}045}{\sqrt{4}}=0{,}0225$	$2{,}201\cdot 0{,}0225=\pm 0{,}0495$	$0{,}248>0{,}0495$	Да!

Из данных представленных в табл. 4.4 видно, что для всех коэффициентов регрессии доверительный интервал не превышает их абсолютную величину. Следовательно, они являются статистически значимыми с вероятностью 95 %.

4.5. Проверка адекватности математической модели

Для проверки соответствия полученной математической модели изучаемому явлению, необходимо проверить ее адекватность. Эта проверка представляет собой оценку ошибки аппроксимации.

Для проведения этой оценки используется метод сравнения дисперсий с помощью критерия Фишера при заданной доверительной вероятности α. При этом, если опытное значение критерия Фишера меньше его теоретического значения, то модель считается адекватной, в противном случае модель признают неадекватной, т.е.

$$F_{оп}\begin{cases} < F_{теор} & - \quad \textit{модель адекватна;} \\ \geq F_{теор} & - \quad \textit{модель неадекватна.} \end{cases}$$

Опытное значение критерия Фишера принимается равным отношению остаточной дисперсии (так называемой дисперсии адекватности) к общей опытной дисперсии всего эксперимента

$$F_{on} = \frac{S^2(y)_{ocm}}{S^2(y)} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1`}^{i=n}\left(\tilde{y}_i - \bar{y}_{ion}\right)}{n-d}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{n(m-1)}},$$

где $\tilde{y}_i$ – расчетные (теоретические) построчечные значения функции отклика;

$\bar{y}_i$ – опытные построчечные средние значения функции отклика;

y_{ij} – частные опытные значений функции отклика;

n – число строк в матрице планирования;

d – число значащих коэффициентов регрессии.

Теоретическое значение критерия Фишера определяется по справочным таблицам (табл. П.3.2) для заданной доверительной вероятности α, и числа степеней свободы $K_1 = n - d$ и $K_2 = N' - 1$

где N' - число всех параллельных опытов.

Проведем проверку адекватности математической модели полученной для рассматриваемого примера.

4.5.1. Вычисляем значение остаточной дисперсии, входящей в выражение опытного значения критерия Фишера (табл. 4.5).

Таблица 4.5

Вычисление суммы квадратов отклонений расчетных значений функции отклика от ее средних опытных значений

№ п/п	x_1	x_2	B_0x_0	B_1x_1	B_2x_2	$\tilde{y}_i$	y_i	$\Delta = \tilde{y}_i - y_i$	Δ^2
1	-1	-1	0,613	0,0725	0,248	0,93	0,89	0,04	0,0016
2	-1	1	0,613	0,0725	-0,248	0,43	0,48	-0,05	0,0025
3	1	-1	0,613	-0,0725	0,248	0,79	0,83	-0,04	0,0016
4	1	1	0,613	-0,0725	-0,248	0,29	0,25	0,04	0,0016

Итого $\sum \Delta^2 = 0{,}0073$

Таким образом, остаточная дисперсия (дисперсия адекватности) равна

$$S^2(y)_{ocm} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n=4}\left(\tilde{y}_i - \bar{y}_{ion}\right)^2}{n-d} = \frac{0{,}0073}{4-3} = 0{,}0073.$$

4.5.2. Вычисляем опытное значение критерия Фишера.

Общая опытная дисперсия всего эксперимента равна (п. 4.3.5)

$$S^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n=4} \sum_{j=1}^{m=3} \left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2}{n(m-1)} = \frac{32{,}8 \times 10^{-3}}{4(3-1)} = 2{,}05 \times 10^{-3}.$$

Таким образом, опытное значение критерия Фишера составляет

$$F_{оп} = \frac{S^2(y)_{ост}}{S^2(y)} = \frac{0{,}0073}{0{,}00205} = 3{,}56.$$

4.5.3. Определяем теоретическое значение критерия Фишера по справочным таблицам (табл. П.3.2). Для уровня значимости $q = 0{,}05$ $(\alpha = 0{,}95)$, и числа степеней свободы $K_1 = n - d = 4 - 3 = 1$ и $K_2 = N' - 1 = 12 - 1 = 11$

$$F_{теор} = 4{,}84$$

и

$$F_{оп} = 3{,}56 < F_{теор} = 4{,}84.$$

Следовательно, с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}95$ полученное уравнение регрессии адекватно описывает изучаемое явление.

4.6. Порядок выполнения работы

Для исходных данных результатов экспериментальных исследований составить план активного эксперимента, получить математическую модель исследуемого явления и ценить ее адекватность. Для чего следует выполнить.

1. Провести ортогональное планирование для линейной модели в соответствии с положениями п. 4.1.
2. Составить план эксперимента в кодированном виде уровней факторов.
3. Составить необходимые матрицы и провести с ними требуемые операции в системе MathCAD в соответствии с порядком, изложенным в п.4.2.3 и п.4.2.4.
4. Записать полученное уравнение регрессии (математическую модель) с реальными уровнями факторов.
5. Провести проверку воспроизводимости результатов эксперимента в соответствии с порядком, изложенным в п.4.3.
6. Провести статистическую оценку значимости коэффициентов регрессии в соответствии с порядком, изложенным в п.4.4.
7. Провести проверку адекватности математической модели в соответствии с порядком, изложенным в п.4.5.

Контрольные вопросы

1. Виды экспериментов. Их отличия.
2. Задачи теории планирования активных экспериментов.
3. Что такое факторное пространство?
4. Что такое уровни факторов?
5. Как определяется число точек факторного пространства?
6. Что такое функция отклика и ее поверхность?
7. Виды планирования при проведении активных экспериментов?
8. На каком условии основан вывод матричного уравнения для определения коэффициентов регрессии?
9. Запишите общее выражение для вычисления значений коэффициентов регрессии.
10. Запишите выражение для кодирования уровней факторов.
11. В чем заключается проверка воспроизводимости результатов эксперимента?
12. Как проверяется однородность дисперсии?
13. Для чего проводится статистическая оценка значимости коэффициентов регрессии?
14. На какой идее основана оценка статистической значимости коэффициента регрессии?
15. Что означает понятие адекватности математической модели?
16. В чем заключается проверка адекватности математической модели и какой метод для этого используется?
17. Перечислите последовательность действий при проверке адекватности математической модели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Румшиский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М. : Наука, 1971. – 192 с.
2. Тойберт П. Оценка точности результатов измерений : Пер. с нем. – М. : Энергоатомиздат, 1988. –88 с.
3. Миронов Э.Г. Методы и средства измерений. Учебное пособие. – Екатеринбург. : Изд-во ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2009. – 463 с.
4. РМГ 29-99 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 2000. – 69 с.
5. Дьяконов В.П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. М. : Наука, 1985. – 224 с.
6. Завадский Ю.В. Статистическая обработка эксперимента. – М. : Высш. школа, 1976. – 270 с.
7. Бидасюк Ю.М. Mathsoft* MathCAD 11/ Самоучитель. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2004. – 224 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1.1

Величины коэффициента Стьюдента для различных значений доверительной вероятности

Число степеней свободы k=n-1	Доверительная вероятность α			
	0,90	0,95	0,99	0,999
1	6,314	12,706	63,657	636,619
2	2,920	4,303	9,925	31,598
3	2,353	3,182	5,841	12,941
4	2,132	2,776	4,604	8,610
5	2,015	2,571	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,895	2,365	3,499	5,405
8	1,860	2,306	3,355	5,041
9	1,833	2,262	3,250	4,781
10	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,771	2,160	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,921	4,015
17	1,740	2,110	2,898	3,965
18	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,725	2,086	2,845	3,850
21	1,721	2,080	2,831	3,819
22	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,714	2,069	2,807	3,767
24	1,711	2,064	2,797	3,745

25	1,708	2,060	2,787	3,725
26	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,703	2,052	2,771	3,690
28	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,699	2,045	2,756	3,659
30	1,697	2,042	2,750	3,646
40	1,684	2,021	2,704	3,551
60	1,671	2,000	2,660	3,460
120	1,658	1,980	2,617	3,373
бесконечность	1,645	1,960	2,576	3,291

Таблица П.1.2

Критические значения критерия $t_n(\alpha)$ для браковки «выскакивающих» значений x_* (n – число приемлемых результатов, α – надежность вывода)

n	α				n	α			
	0,95	0,98	0,99	0,999		0,95	0,98	0,99	0,999
5	3,04	4,11	5,04	9,43	20	2,145	2,602	2,932	3,979
6	2,78	3,64	4,36	7,41	25	2,105	2,541	2,852	3,819
7	2,62	3,36	3,96	6,37	30	2,079	2,503	2,802	3,719
8	2,51	3,18	3,71	5,73	35	2,061	2,476	2,768	3,652
9	2,43	3,05	3,54	5,31	40	2,048	2,456	2,742	3,602
10	2,37	2,96	3,41	5,01	45	2,038	2,441	2,722	3,565
11	2,33	2,89	3,31	4,79	50	2,030	2,429	2,707	3,532
12	2,29	2,83	3,23	4,62	60	2,018	2,411	2,683	3,492
13	2,26	2,78	3,17	4,48	70	2,009	2,399	2,667	3,462
14	2,24	2,74	3,12	4,37	80	2,003	2,389	2,655	3,439
15	2,22	2,71	3,08	4,28	90	1,998	2,382	2,646	3,423
16	2,20	2,68	3,14	4,20	100	1,994	2,377	2,639	3,409
17	2,18	2,66	3,01	4,13	∞	1,960	2,326	2,576	3,291
18	2,17	2,64	2,98	4,07					

Таблица П.1.2

Значения необходимого числа измерений n для соотношения q и надежности α

q	α				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1,0	5	7	9	11	17
0,5	13	18	25	31	50
0,4	19	27	37	46	74
0,3	32	46	64	78	127
0,2	70	99	139	171	277
0,1	273	387	545	668	1089
0,05	1084	1540	2168	2659	4338

Таблица П.2.1

Погрешности косвенных измерений

Функция (y)	Погрешности	
	абсолютная (Δy)	относительная (δ_y)
$x+z$	$\pm\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta z)^2}$	$\pm\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta z)^2}}{x+z}$
$x-z$	$\pm\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta z)^2}$	$\pm\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta z)^2}}{x-z}$
$x\cdot z$	$\pm\sqrt{x^2(\Delta z)^2+z^2(\Delta x)^2}$	$\pm\sqrt{\delta_x^2+\delta_z^2}$
x/z	$\pm\dfrac{\sqrt{x^2(\Delta z)^2+z^2(\Delta x)^2}}{z^2}$	$\pm\sqrt{\delta_x^2+\delta_z^2}$
x^n	$\pm n x^{n-1}\Delta x$	$\pm n\delta_x$
$\sqrt[n]{x}$	$\pm\dfrac{1}{n}x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}\Delta x$	$\pm\dfrac{1}{n}\delta_x$
$sin\,x$	$\pm\Delta x\,cos\,x$	$\pm\Delta x\,ctg\,x$
$tg\,x$	$\pm\dfrac{\Delta x}{(cos\,x)^2}$	$\pm\dfrac{2\Delta x}{(sin\,x)^2}$
$cos\,x$	$\pm\Delta x\,sin\,x$	$\pm\Delta x\,tg\,x$
$ctg\,x$	$\pm\dfrac{\Delta x}{(sin\,x)^2}$	$\pm\dfrac{2\Delta x}{sin\,2x}$
$arctg\,x$	$\pm\dfrac{\Delta x}{(1+x^2)}$	$\pm\dfrac{\Delta x}{(1+x^2)arctg\,x}$

Таблица П.3.1

Критические значения коэффициента Кохрена (*G*-критерия)
для доверительной вероятности α = 95% и числе степеней свободы *f*

Число опы-тов, *n*	Число степеней свободы, *f*									
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602
3	9669	8709	0797	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022
9	6385	4775	4027	3584	7276	3067	2768	2568	2226	1820
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	5950	0713	0595	0462
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165

Все значения *G*-критерия меньше единицы, поэтому в таблице приведены лишь десятичные знаки, следующие после запятой, перед которой при пользовании таблицей нужно ставить ноль целых. Например, при $n = 6$, $f = 3$ имеем $G_{0,95} = 0,5321$.

Таблица П.3.2

Значения критерия Фишера (F-критерия) для уровня значимости q = 5%

K_1 – число степеней свободы большей дисперсии;

K_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии

K_2	K_1									
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	241,9	245,9	248,0
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,40	19,43	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,32	2,18	2,10
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,37	2,27	2,13	2,05
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,24	2,09	2,01
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,31	2,20	2,06	1,97
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,28	2,18	2,03	1,94
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ метод. указания к вып. практ. работ для студ. направлений подготовки 190109 «Наземные транспортно-технологические средства»,
190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы»,
190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Составитель Жулай Владимир Алексеевич

Подписано в печать 20.05.2015. Формат 60х84 1/16. Уч.-изд. л 2,4.
Усл.-печ. л. 2,5. Бумага писчая. Тираж 70 экз. Заказ №…

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной литературы и учебно-методических пособий Воронежского ГАСУ
394006 Воронеж, ул 20-я Октября, 84