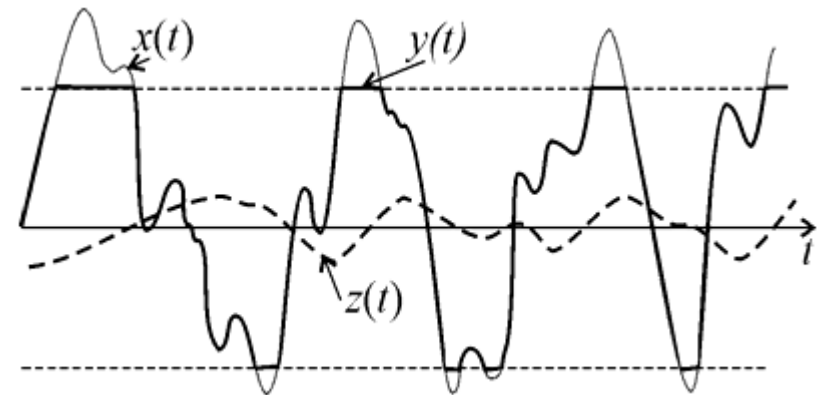


А. Б. Токарев

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА:
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Учебное пособие



Воронеж 2015

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

А.Б. Токарев

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА:
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2015

Токарев А.Б. Статистическая радиотехника: лабораторный практикум: учеб. пособие / А.Б. Токарев. - Воронеж, ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015. - 210 с.

Учебное пособие содержит теоретический минимум и комплекс заданий к занятиям по дисциплине «Статистическая радиотехника». Цикл лабораторных и лабораторно-практических занятий охватывает вопросы вероятностного описания случайных процессов, измерения параметров и статистических характеристик случайных процессов, преобразования случайных сигналов в различных радиотехнических цепях, оптимальной обработки данных при частотной фильтрации сигналов неизвестной формы, обнаружении сигналов на фоне помех, а также при фильтрации случайных процессов на фоне шума.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 210600 «Радиоэлектронные системы и комплексы», специальность 210601.65 «Радиоэлектронные системы и комплексы», специализация «Радиоэлектронные системы передачи информации».

Табл. 16. Ил. 52. Библиогр.: 8 назв.

Рецензенты: кафедра инфокоммуникационных систем и технологий Воронежского института МВД РФ (начальник д-р техн. наук, проф. О.И. Бокова); д-р техн. наук, проф. Ю.Г. Пастернак

© Токарев А.Б., 2015

© Оформление. ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015

ВВЕДЕНИЕ

Освоение дисциплины «Статистическая радиотехника» предполагает изучение студентами теоретических основ математического описания случайных процессов и особенностей их преобразования в различных радиотехнических устройствах, проверку понимания теории путём решения ряда задач, соответствующих пройденному материалу, а также выполнение лабораторных работ, позволяющих в деталях проанализировать свойства и особенности случайных сигналов, встречающихся в радиотехнической практике. В соответствии с этим, каждый раздел настоящего учебного пособия содержит краткое теоретическое введение, определяющее круг вопросов, подлежащих изучению, практический раздел, включающий набор типовых задач для перепроверки правильности усвоения теории, домашнее задание к лабораторным исследованиям и методические рекомендации по проведению экспериментов. Для обретения требуемых Федеральным государственным образовательным стандартом компетенций каждому студенту необходимо решить не менее 2 практических задач из каждого раздела дисциплины, рассчитать домашнее задание к лабораторной работе, с использованием вычислительной техники провести лабораторные исследования, проанализировать и обсудить их итоги в малых исследовательских группах и защитить полученные результаты перед преподавателем.

Состав малых исследовательских групп, а также выполняемые ими варианты лабораторных исследований согласуются с преподавателем на начальном этапе освоения учебного курса. Применительно же к контрольным задачам индивидуальный вариант определяется самим студентом независимо для каждого изучаемого раздела курса. Для этого необходимо

определить общее количество вариантов задач в конкретной теме V_{all} , которое равно в 10 раз больше числа задач в теме, затем просуммировать порядковый номер студента по списку в группе с номером самой учебной группы и определить остаток V_{person} от деления полученного значения на V_{all} . Последняя цифра числа V_{person} определит подвариант индивидуального задания, т.е. номер строки или рисунка в тексте задачи, конкретизирующих их условие, а первая цифра V_{person} определяет номер первой из решаемых задач. Вторая из задач, требующих решения, имеет номер на единицу больший предыдущей или нулевой, если первая из задач имела максимально возможный для текущего раздела номер.

Например, раздел №1 содержит всего 4 проверочных задачи (см. подраздел 1.3), поэтому общее доступное количество вариантов $V_{all} = 40$ и для первого студента группы «РП-151»

$$V_{person} = \text{ОСТ}(1 + 151; V_{all}) = \text{ОСТ}(152; 40) = 32,$$

т.к. $152 = 3 \times 40 + 32$. Таким образом, в обеих задачах студент должен решать 2-й подвариант (использовать 2-й из приводимых 10 рисунков или 2-ю из набора конкретизирующих условие строк). Решению подлежат задача №3 и задача с нулевым номером, т.к. задач с номером больше трёх эта тема не содержит.

Следует иметь в виду, что предусматриваемый данным пособием объем теории, практических задач и лабораторных исследований является лишь необходимым минимумом. Студентам, заинтересованным в получении высококачественной подготовки необходимо расширять этот минимум чтением рекомендованной учебной литературы и проработкой дополнительного круга задач по индивидуальному согласованию с преподавателем.

1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Теоретические основы

Случайный процесс (СП) – это численное выражение некоторого явления, протекающего во времени случайным образом. Подробную информацию о вероятностном описании СП, а также об их основных числовых характеристиках можно найти в учебной литературе [1, с. 56-63; 2, с. 109-118; 3, с. 9-14, 21-28, 31-33; 4, с. 91-100, 106-108, 116-119].

1.1.1. Одномерные характеристики случайных процессов

Одномерная функция распределения характеризует вероятность наблюдения реализаций СП, проходящих в выбранный момент времени t ниже заданного порога x

$$F_{\xi}(x; t) = P\{\xi(t) < x\} \quad (1.1)$$

Одномерная плотность вероятностей (ПВ) характеризует возможность наблюдения реализаций СП, принимающих в заданный момент времени t значения близкие к аргументу x , и определяется отношением вероятности попадания значений реализации процесса $\xi(t)$ в бесконечно малую окрестность аргумента x к ширине этой окрестности

$$W_{\xi}(x; t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \xi(t) < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \frac{\partial F_{\xi}(x; t)}{\partial x} \quad (1.2)$$

Из (1.1)-(1.2) следует, что по плотности распределения вероятностей функцию распределения СП можно найти как

$$F_{\xi}(x_0; t) = \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi}(x; t) dx. \quad (1.3)$$

Обратите внимание, что все расчетные операции осуществляются по отношению к аргументу x ; что же касается аргумента

t , то в расчетных формулах он не участвует, выступая лишь как “внешний” параметр, определяющий к какому моменту времени относятся анализируемые характеристики.

Математическое ожидание СП характеризует зависимость от времени среднего арифметического значений разных реализаций, наблюдаемых в момент t ,

$$M_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x;t) dx. \quad (1.4)$$

Это среднее значение определяется применительно ко всей совокупности реализаций и имеет такую же размерность, как и сам случайный процесс $\xi(t)$.

Дисперсия характеризует разброс значений, принадлежащих различным реализациям, относительно математического ожидания

$$D_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi}(t))^2 \cdot W_{\xi}(x;t) dx, \quad (1.5)$$

принимает лишь неотрицательные значения, а её размерность – это квадрат размерности исследуемого случайного процесса.

1.1.2. Многомерные характеристики случайных процессов

Многомерные характеристики СП характеризуют его поведение для совокупности моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ (совокупности временных сечений) и отражают динамику развития СП вдоль оси времени. Однако даже двухмерные законы распределения представляют собой многомерные поверхности, оперировать с которыми достаточно трудно; с инженерной точки зрения более востребованными оказываются корреляционное и спектральное описание, которые будут рассматриваться в разделе 2.

1.1.3. Классификация случайных процессов

Случайные процессы, свойства которых изменяются во времени произвольным образом, называются нестационарными. Процессы, *свойства* которых не зависят от момента начала отсчета времени и остаются неизменными вдоль всей временной оси, называются стационарными.

Свойства стационарных СП:

У стационарных процессов одномерная функция распределения, характеризующая вероятность наблюдения реализаций, проходящих ниже заданного порога x , остается неизменной вдоль всей временной оси, а потому аргумент t оказывается избыточным

$$F_{\xi}(x;t) = F_{\xi}(x). \quad (1.6)$$

Аналогично, и плотность вероятности не зависит от времени

$$W_{\xi}(x;t) = \frac{\partial F_{\xi}(x)}{\partial x} = W_{\xi}(x). \quad (1.7)$$

Свойства стационарных СП остаются неизменными вдоль всей временной оси, поэтому и математическое ожидание, и дисперсия таких процессов является константой по отношению к аргументу t , а двухмерные функция распределения и плотность вероятности зависят не от размещения сечений t_1 и t_2 на оси времени, а лишь от интервала $\tau = t_2 - t_1$ между ними

$$F_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\} = F_{\xi}(x_1, x_2; \tau). \quad (1.8)$$

Эргодические СП и их свойства:

Эргодическими называют стационарные СП, состоящие лишь из однотипных реализаций, по каждой из которых путём её соответствующего усреднения вдоль оси времени можно определить любую вероятностную характеристику всего СП. Для эргодических процессов определяемая $F_{\xi}(x)$ вероятность проявления себя в виде среднего времени, которое каждая из реализаций данного СП проводит ниже уровня x

$$F_{\xi}(x; t) = F_{\xi}(x) = \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot T_{[\xi^{(i)}(t) \leq x]}. \quad (1.9)$$

а плотность вероятности будет показывать отношение частоты наблюдения значений из интервала $[x; x + \Delta x]$ к ширине этого интервала Δx

$$W_{\xi}(x; t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ T_{набл} \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta x \cdot T_{набл}} \cdot T_{[x \leq \xi^{(i)}(t) \leq x + \Delta x]}. \quad (1.10)$$

Математическое ожидание эргодических СП совпадает со средним по времени значением – постоянной составляющей любой из реализаций

$$M_{\xi}(t) = M_{\xi} = \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot \int_{-T_{набл}/2}^{+T_{набл}/2} \xi^{(i)}(t) dt = \xi_{-}^{(i)}. \quad (1.11)$$

Дисперсия эргодических СП совпадает со средней мощностью переменной составляющей любой из реализаций СП

$$D_{\xi}(t) = D_{\xi} = \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot \int_{-T_{набл}/2}^{+T_{набл}/2} (\xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)})^2 dt = P_{\text{ср} \sim \xi^{(i)}}. \quad (1.12)$$

Ещё раз подчеркнём, что определяемые (1.9)-(1.12) свойства являются проявлением единого принципа: любая характеристика эргодического СП может быть получена путем соответст-

вующего усреднения по времени (на интервале бесконечной протяженности) произвольной реализации этого процесса. Тот же самый принцип можно выразить и иначе: для эргодических процессов “среднее по времени” любой из реализаций совпадает со “средним по ансамблю реализаций процесса”.

Отметим также, что наиболее эффективно правила (1.9)-(1.12) удаётся применять на практике для эргодических процессов, реализации которых являются периодическими функциями времени. При этом нет необходимости в устремлении времени наблюдения к бесконечности; в качестве интервала усреднения достаточно использовать один произвольный период любой реализации. В частности, для периодических сигналов формулы расчета числовых характеристик могут быть записаны в форме:

$$M_{\xi} = \frac{1}{T_{п}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{п}} \xi^{(i)}(t) dt = \xi_{-}^{(i)}. \quad (1.13)$$

$$D_{\xi} = \frac{1}{T_{п}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{п}} (\xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)})^2 dt = P_{\text{ср} \sim \xi^{(i)}}. \quad (1.14)$$

1.2. Практические примеры

Задача 1.1. Случайное напряжение характеризуется плотностью вероятности

$$W_{\xi}(x; t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-2 \cdot t)^2}{4}\right\}, \quad 1/B. \quad (1.15)$$

Каковы возможные реализации данного случайного процесса?

Решение

а) Отметим сразу, что имеющейся в данной задаче информации о процессе $\xi(t)$ недостаточно для прогнозирования формы его реализаций, т.к. одномерная плотность вероятности

(1.2) характеризует ситуацию лишь в отдельных временных сечениях, но не содержит сведений о динамичности изменения процесса во времени. Таким образом, может существовать огромное множество процессов, соответствующих (1.2), с существенно отличающимися реализациями.

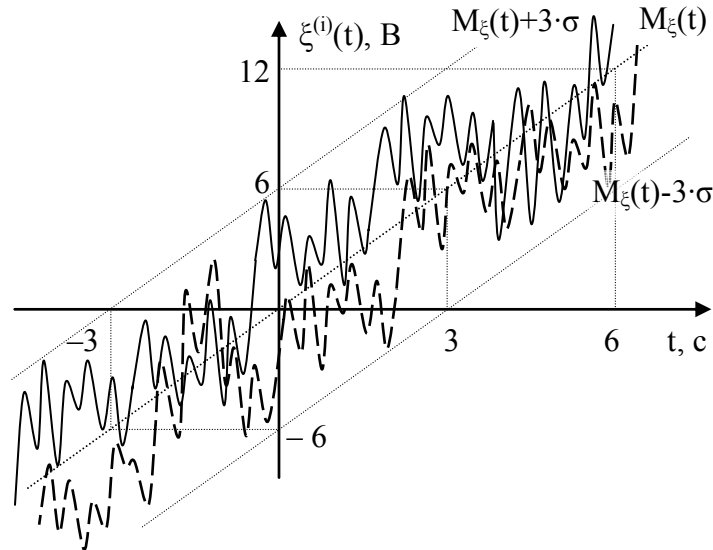


Рис. 1.1. Возможные реализации СП из задачи 1

б) Определяемый (1.2) закон распределения соответствует нормальной (гауссовской) плотности вероятности

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \quad (1.16)$$

с параметрами $a = 2 \cdot t$ (В), $\sigma = 2$ (В). Параметр a изменяется во времени, что указывает на нестационарный характер исследуемого процесса. Так как параметр a определяет математическое ожидание нормального распределения, то характерной особенностью реализаций исследуемого СП будет линейное нарастание их среднего значения с течением времени $M_{\xi}(t) = 2 \cdot t$ (В). Несколько подобных функций – возможных реализа-

ций процесса $\xi(t)$ – показано на рис. 1.1. При их построении было учтено правило “3 сигм”, утверждающее, что для подавляющего большинства случайных величин (процессов) мгновенные значения могут отклоняться от математического ожидания не более чем на три эффективных значения σ .

Задача 1.2. Реализации эргодического СП, представляют собой последовательность однополярных импульсов напряжения с амплитудой $U = 3$ В (рис. 1.2). Ширина и положение импульсов на оси времени изменяются хаотично, но среднее время, суммарно занимаемое импульсами каждой реализации, составляет 40 %. Какой дисперсией будет характеризоваться данный СП в момент времени $t = 5$ мс?

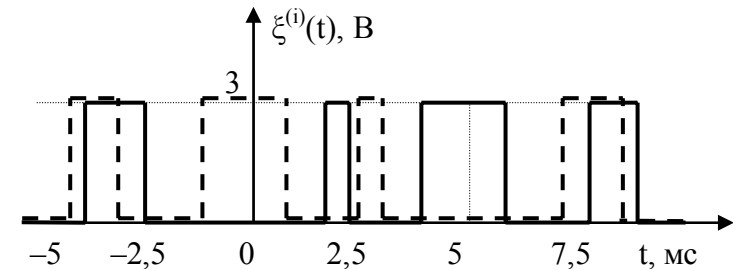


Рис. 1.2. Возможные реализации СП из задачи 2

Решение

а) Особенностью данной задачи является тот факт, что существует всего 2 возможных (наблюдаемых) значения СП: нулевое и амплитудное. Среднее время, занимаемое импульсами, определяет вероятность появления амплитудного значения $P\{\xi(t) = U\} = 0,40$. Соответственно, вероятность пребывания процесса на нулевом уровне составляет $P\{\xi(t) = 0\} = 0,60$.

б) Эргодичность случайного процесса $\xi(t)$ гарантирует его стационарность, т.е. неизменность свойств СП вдоль временной оси. Таким образом, в каждом своем сечении анализи-

руемый СП ведет себя как дискретная случайная величина, характеризуемая рядом распределения

$$\xi(t):$$

x_i	0	3
p_i	0,6	0,4

Вследствие этого формулы, определяющие числовые характеристики анализируемого СП, оказываются идентичными аналогичным выражениям для дискретной случайной величины

$$M_\xi = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ (В)}$$

$$D_\xi = \sum_i (x_i - M_\xi)^2 \cdot p_i = (0 - 1,2)^2 \cdot 0,6 + (3 - 1,2)^2 \cdot 0,4 = 2,16 \text{ (В}^2\text{)}$$

Величина $D_\xi = 2,16 \text{ В}^2$ и будет дисперсией анализируемого СП.

Задача 1.3. Эргодический случайный процесс $u(t)$ состоит из реализаций, которые в случайные моменты времени перепрыгивают с уровня $u(t) = +A$ на уровень $u(t) = -A$, а затем – обратно. Среднее время пребывания на высоком и низком уровнях – совпадают, а средняя мощность реализаций составляет 16 В^2 . Записать аналитическое выражение для одномерной плотности вероятности данного процесса.

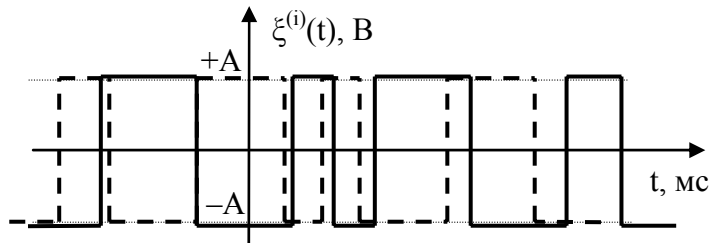


Рис. 1.3. Возможные реализации СП из задачи 3

Решение

а) Как и в предыдущей задаче, крайне важным оказывается то, что существует всего 2 возможных (наблюдаемых) зна-

чения СП: положительное и отрицательное. Это делает единственно возможной плотность вероятности вида (рис. 1.4)

$$W_\xi(x) = 0,5 \cdot \delta(x + A) + 0,5 \cdot \delta(x - A). \quad (1.17)$$

Два коэффициента по 0,5 соответствуют здесь вероятностям пребывания процесса на высоком и низком уровнях.

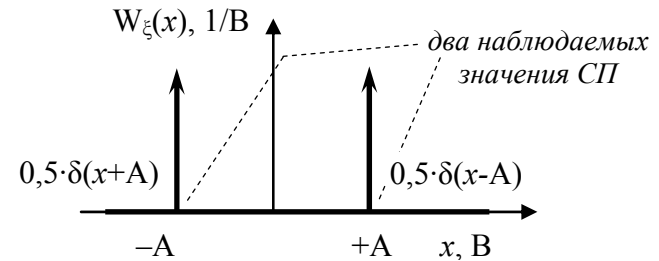


Рис. 1.4. Плотность вероятности СП из задачи 3

б) Симметричность полученной выше плотности вероятности относительно точки $x = 0$ указывает на то, что математическое ожидание СП является нулевым $M_\xi = 0 \text{ (В)}$.

в) Для эргодических СП дисперсия совпадает со средней мощностью переменной составляющей любой из реализаций, а при $M_\xi = 0$ – со средней мощностью всего СП. Таким образом, $D_\xi = 16 \text{ (В}^2\text{)}$.

С другой стороны, выражая дисперсию через полученную выше плотность вероятности, имеем

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 \cdot W_\xi(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot 0,5 \cdot \delta(x + A) \cdot dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot 0,5 \cdot \delta(x - A) \cdot dx = 0,5 \cdot (-A)^2 + 0,5 \cdot (+A)^2 = A^2.$$

Поэтому неизвестная амплитуда A обязана быть равной 4 (В) .

г) Итак, плотность вероятности исследуемого СП имеет вид $W_\xi(x) = 0,5 \cdot \delta(x + 4) + 0,5 \cdot \delta(x - 4), \text{ (1/В)}$.

Задача 1.4. Реализации нормального эргодического случайного процесса обладают постоянной составляющей $U_- = -3$ (В) и полной средней мощностью $P_{\xi(t)} = 13$ (В²). Какова частота наблюдения положительных значений этого СП?

Решение

а) Упомянутый в условии нормальный характер случайного процесса означает, что его плотность вероятности имеет вид (1.19). Эргодичность же процесса означает, что его постоянная составляющая $U_- = M_{\xi} = a$, а полная средняя мощность $P_{\xi(t)} = m_2\{\xi\} = \sigma_{\xi}^2 + M_{\xi}^2$. Подставляя численные значения из условия задачи, имеем $a = -3$ (В), $\sigma = 2$ (В).

б) Из эргодичности процесса следует также и что частота наблюдения каких-либо напряжений определяется вероятностью их попадания в соответствующий интервал значений

$$P\{\xi(t) > 0\} = 1 - P\{\xi(t) \leq 0\} = 1 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x+3)^2}{8}} dx.$$

Для расчета применим замену переменных $z = (x + 3)/2$ и воспользуемся таблицей из прил. 1

$$P\{\xi(t) > 0\} = 1 - \int_{-\infty}^{1,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - F_{\text{ст}}(1,5) = 1 - 0,9331 \approx 0,067.$$

1.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории

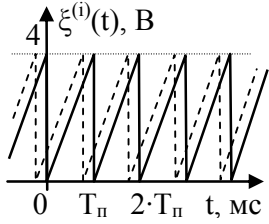
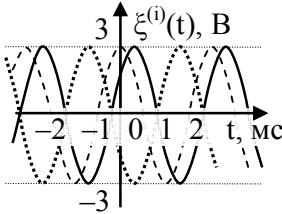
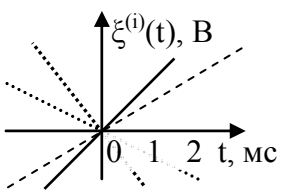
Примечание: Правило выбора индивидуального варианта контрольных задач приведено во введении (см. с. 4).

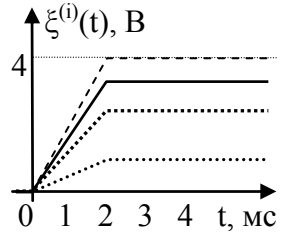
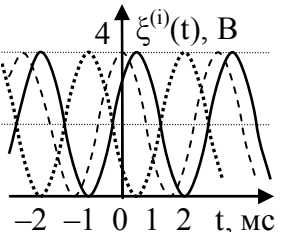
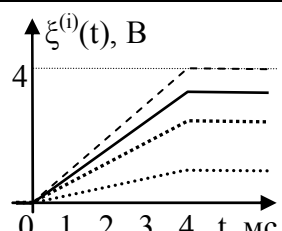
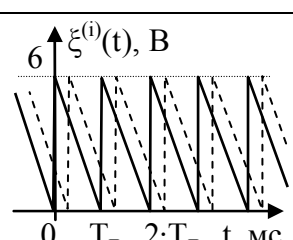
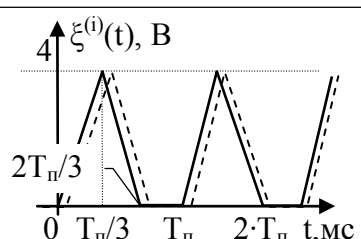
Задача 0. Шум представляет собой эргодический случайный процесс, подчиняющийся нормальному распределению. Определить полную среднюю мощность реализаций этого шума, если...

Номер	Дополнительная информация о случайном процессе
1	положительные и отрицательные значения наблюдаются одинаково часто, а 95,46% значений шума лежат в диапазоне от минус 8 до плюс 8 вольт.
2	наиболее вероятными являются значения близкие к $U_0 = 2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = 10$ (В) составляет 2,27%.
3	эффективное значение процесса составляет 2 вольт, а вероятность наблюдения значений, не превышающих $U_{\min} = -2$ (В) составляет 2,27%.
4	постоянная составляющая реализаций процесса равна $U_- = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +4$ (В) составляет 0,13%.
5	средняя мощность переменной составляющей процесса составляет $P_{\sim} = 9$ (В ²), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +6$ (В) составляет 15,87%.
6	постоянная составляющая реализаций процесса равна $U_- = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +4$ (В) составляет 2,27%.
7	положительные и отрицательные значения наблюдаются одинаково часто, а 99,74% значений шума лежат в диапазоне от минус 6 до плюс 6 вольт.
8	наиболее вероятными являются значения близкие к $U_0 = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +8$ (В) составляет 2,27%.
9	эффективное значение процесса составляет 3 вольт, а вероятность наблюдения значений, не превышающих $U_{\min} = -2$ (В) составляет 15,87%.

10	средняя мощность переменной составляющей процесса составляет $P_{\sim} = 9 \text{ (В}^2\text{)}$, а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +1,5 \text{ (В)}$ составляет 30,85%.
----	--

Задача 1. Пользуясь описанием случайного процесса из последнего столбца таблицы, приведенной ниже, определить его дисперсию для указанного в втором столбце момента времени t_1 .

Но- мер	t_1 , (мс)	Характеристика / типовые реализации случайного процесса
1	$\frac{T_{\pi}}{2}$	периодический эргодический СП со случайной начальной фазой 
2	0	периодический гармонический эргодический СП со случайной начальной фазой 
3	1	совокупность линейных реализаций вида $\xi^{(i)}(t) = k \cdot t$, где k равномерно принимает любые значения между $-4 \cdot 10^4$ и $4 \cdot 10^4 \text{ В/сек}$ 

4	4	на участке $0 \dots 2 \text{ (мс)}$ процесс линейно нарастает, а начиная с $t_0 = 2 \text{ мс}$ равномерно принимает любые значения между 1 и 4 вольтами 
5	0	периодический гармонический эргодический СП со случайной начальной фазой 
6	2	на участке $0 \dots 4 \text{ (мс)}$ процесс линейно нарастает, а начиная с $t_0 = 4 \text{ мс}$ равномерно принимает любые значения между 1 и 4 вольтами 
7	T_{π}	периодический эргодический СП со случайной начальной фазой 
8	$\frac{T_{\pi}}{3}$	периодический эргодический СП со случайной начальной фазой 

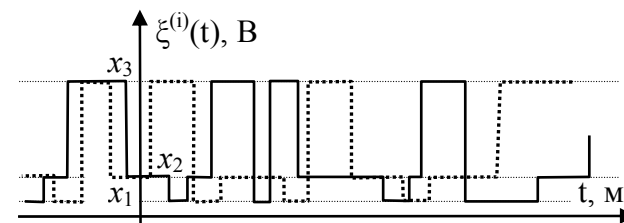
9	1	совокупность линейных реализаций вида $\xi^{(i)}(t) = k \cdot t$, где k равномерно принимает любые значения между 0 и $4 \cdot 10^4$ В/сек	
10	$\frac{T_n}{2}$	периодический эргодический СП со случайной начальной фазой	

Задача 2. Известно, что на протяжении 40% времени наблюдения реализации представленного в таблице ниже случайного процесса принимают отрицательные значения. Рассчитать второй начальный момент $m_2\{\xi(t)\}$ этого процесса, если...

Но-мер	реализации этого процесса имеют вид	Но-мер	реализации этого процесса имеют вид
1		6	
2		7	

3		8	
4		9	
5		10	

Задача 3. Эргодический случайный процесс (см. рисунок) в каждый момент времени принимает какое-то одно из 3 разрешенных значений, а постоянные составляющие реализаций одинаковы и равны +4 (В). Записать аналитическое выражение для плотности вероятности процесса $\xi(t)$, если...



Но- мер	Дополнительное условие
1	среднее время пребывания на уровне $x_1 = 1$ (В) совпадает со средним время пребывания на уровне $x_3 = 8$ (В), а продолжительность пребывания на уровне x_2 вдвое меньше.
2	все уровни $x_1 \dots x_3$ больше нуля, каждый последующий разрешенный уровень вдвое больше предыдущего, а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
3	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 10$ (В), а полная средняя мощность реализаций процесса равна $25,5$ (В ²).
4	все уровни $x_1 \dots x_3$ больше нуля, каждый последующий разрешенный уровень в 3 раза больше предыдущего, а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
5	среднее время пребывания на уровне $x_1 = 2$ (В) совпадает со средним время пребывания на уровне $x_3 = 8$ (В), а продолжительность пребывания на уровне x_2 вдвое больше.
6	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 3$ (В), а среднее время пребывания реализаций на уровне x_1 в 1,5 раза меньше времени пребывания на уровне x_2 и в 2,5 раза меньше, чем время пребывания на уровне x_3 .
7	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 10$ (В), а средняя мощность переменной составляющей этих реализаций равна 12 (В ²).
8	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 3$ (В), а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.

9	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = -2$, $x_2 = +1$, $x_3 = +8$ (В), а средняя мощность переменной составляющей этих реализаций равна 17 (В ²).
10	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 2$ (В), а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.

Лабораторная работа № 1 «Вероятностные характеристики случайных процессов»

Цель работы – экспериментальное исследование одномерных вероятностных и числовых характеристик случайных процессов (СП).

В работе изучаются основные свойства функции распределения вероятностей и плотности вероятностей СП – шума, периодической последовательности импульсов и смеси сигнала с шумом. Для разных типов процессов измеряются математическое ожидание и дисперсия, анализируются взаимосвязи числовых и вероятностных характеристик, исследуется влияние шумов на сигналы.

1.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

1.4.1. При расчете вероятностных характеристик шума следует учитывать, что:

- 1) разные процессы с весьма отличающимися по виду реализациями могут иметь одно и то же одномерное нормальное распределение, поскольку одномерные вероятностные характеристики определяют лишь свойства реализаций в одном произвольном временном сечении, но никак не регламентируют скорость изменения значений СП во времени;
- 2) стационарные СП имеют неизменяющееся во времени распределение мгновенных значений, и, следовательно, их

функция распределения и плотность вероятности является функцией одного лишь аргумента x как и у нормальной случайной величины (СВ);

3) функция распределения нормальной СВ не выражается в элементарных функциях. Ее можно найти в справочниках в табличной форме, а также в прил. 1 настоящего пособия.

1.4.2. Таблицы нормального распределения приводятся всегда для стандартной случайной величины (имеющей нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию), поэтому для получения закона распределения шума с произвольным эффективным значением необходимо найти правило перерасчета табличных значений распределения стандартной нормальной СВ в значения исследуемого шума. Для нахождения этого правила учтем, что произвольную ξ и стандартную $\eta_{\text{ст}}$ случайные величины связывает соотношение

$$\eta_{\text{ст}} = \frac{\xi - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}. \quad (1.18)$$

Если значения, принимаемые величиной $\eta_{\text{ст}}$ обозначить через y , а значения величины ξ , соответствующей исследуемому шуму, – через x , то функция, позволяющая определить y по известному x , будет иметь вид

$$y = \varphi(x) = \frac{x - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}. \quad (1.19)$$

Тогда на основе стандартных правил, определяющих изменения законов распределения при функциональных преобразованиях случайных величин, можно записать

$$W_{\xi}(x) = W_{\text{ст}}(\varphi(x)) \cdot \left| \frac{d\varphi}{dx} \right| = \frac{1}{\sigma_{\xi}} \cdot W_{\text{ст}}\left(\frac{x - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right). \quad (1.20)$$

Для получения соотношения, связывающего функции распределения вспомним, что

$$F_{\xi}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi}(x) dx. \quad (1.21)$$

Подставляя (3.3) в (3.4) имеем (используя замену переменных)

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x_0) &= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sigma_{\xi}} \cdot W_{\text{ст}}\left(\frac{x - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x_0 - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}} W_{\text{ст}}(x) dx = F_{\text{ст}}\left(\frac{x_0 - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Примечание: математическое ожидание шума для всех вариантов лабораторной работы считается нулевым $M_{\xi} = 0$.

Значения функций $W_{\text{ст}}(x)$ и $F_{\text{ст}}(x)$ представлены в таблице прил. 1 (см. с. 204), а возможный вид реализации нормального случайного процесса и его вероятностных характеристик показан на рис. 1.5.

1.4.3. Числовые характеристики нормального шума (при произвольной корреляционной функции) равны

$$M_{\text{шум}} = 0,0 \text{ (В)}; \quad D_{\text{шум}} = \sigma_{\xi}^2 \text{ (В}^2\text{)}, \quad (1.23)$$

где σ_{ξ} – среднеквадратическое отклонение (или, иначе, эффективное значение) шума.

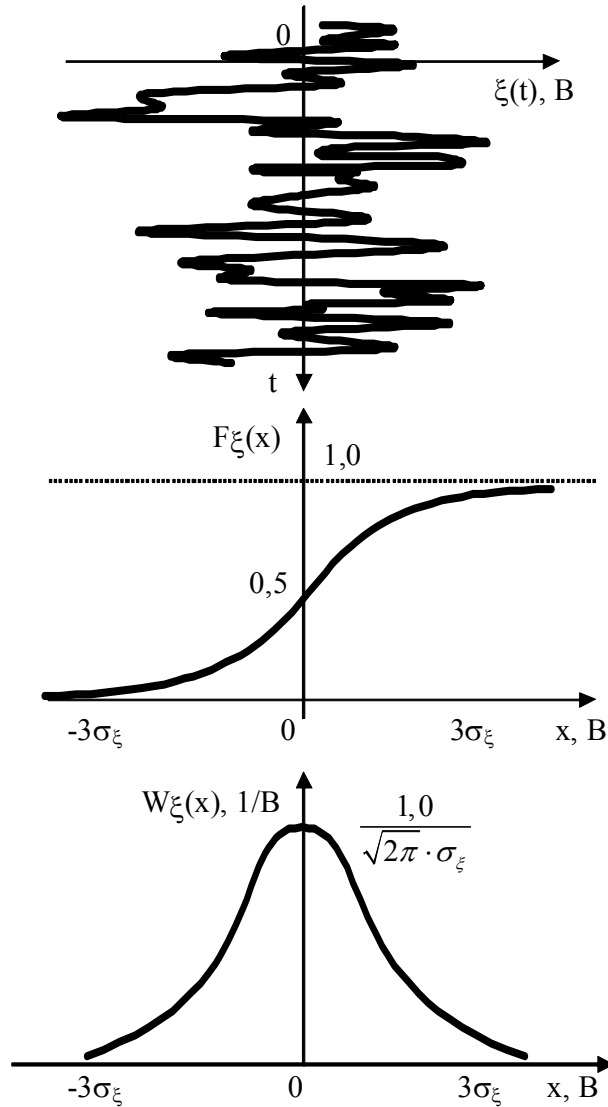


Рис. 1.5. Вероятностные характеристики нормального шума

1.4.4. Характеристики гармонического сигнала со случайной начальной фазой задаются соотношениями

плотность вероятности $W_{cos}(x) = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{U_m^2 - x^2}}, -U_m \leq x \leq U_m;$

функция распределения $F_{cos}(x) = \begin{cases} 0, & x < -U_m \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{U_m}\right), & -U_m \leq x \leq U_m \\ 1, & x > U_m \end{cases}$

дисперсия $D_{cos} = U_m^2/2$; эффективное значение $\sigma_{cos} = U_m/\sqrt{2}$.

1.4.5. Последовательность прямоугольных импульсов со случайной начальной фазой имеет следующие характеристики

плотность вероятности $W_{rect}(x) = 0,5 \cdot \delta(x+U_m) + 0,5 \cdot \delta(x-U_m)$

функция распределения $F_{rect}(x) = \begin{cases} 0, & x < -U_m \\ 1/2, & -U_m \leq x \leq U_m \\ 1, & x > U_m \end{cases}$

дисперсия $D_{rect} = U_m^2$; эффективное значение $\sigma_{rect} = U_m$.

1.4.6. Последовательность треугольных импульсов характеризуется равномерным законом распределения:

плотность вероятности $W_{\wedge}(x) = 1/(U_{max} - U_{min}), U_{min} \leq x \leq U_{max}$

функция распределения $F_{\wedge}(x) = \begin{cases} 0, & x < U_{min} \\ \frac{x - U_{min}}{U_{max} - U_{min}}, & U_{min} \leq x \leq U_{max} \\ 1, & x > U_{max} \end{cases}$

дисперсия $D_{\wedge} = U_m^2/3$; эффективное значение $\sigma_{\wedge} = U_m/\sqrt{3}$.

Графически все эти характеристики показаны на рис. 1.6.

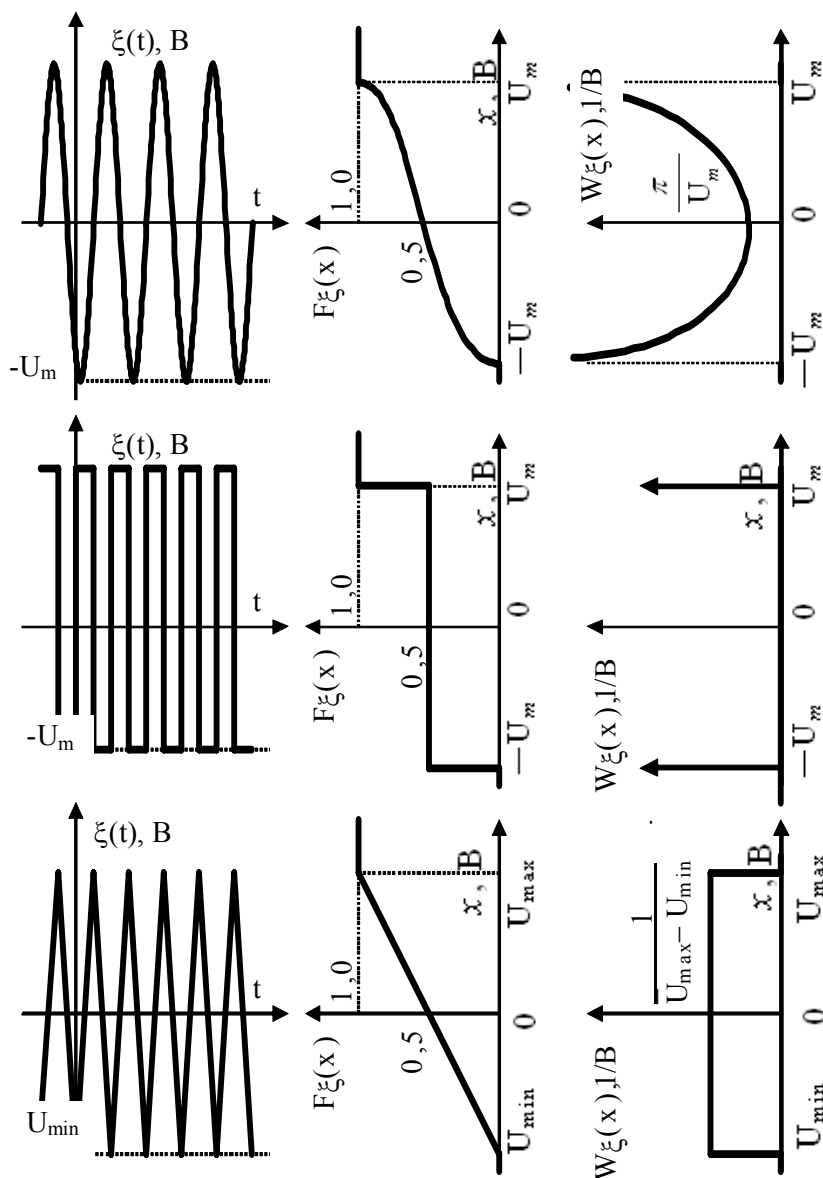


Рис. 1.6. Вероятностные характеристики квазислучайных сигналов

1.4.7. Наиболее просто и наглядно влияние шума на вероятностные характеристики смеси сигнала и шума проявляется применительно к последовательности прямоугольных импульсов, имеющей плотность вероятности

$$W_{\text{rect}}(x) = 0,5 \cdot \delta(x + U_m) + 0,5 \cdot \delta(x - U_m)$$

Шум характеризуется законом распределения

$$W_{\text{шум}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\text{шум}}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma_{\text{шум}}^2}} \quad (1.24)$$

Эти две составляющие смеси, очевидно, статистически независимы друг от друга, поэтому плотность распределения суммы $\zeta(t)$ определяется сверткой распределений слагаемых

$$W_{\zeta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) \cdot W_{\text{шум}}(z - x) dx, \quad (1.25)$$

откуда

$$W_{\zeta}(z) = 0,5 \cdot W_{\text{шум}}(z + U_m) + 0,5 \cdot W_{\text{шум}}(z - U_m). \quad (1.26)$$

Полученный результат схематично отображен на рис. 1.7. Как видно из рисунка, искомое распределение является суперпозицией распределений шума, сдвинутых относительно нуля на $\pm U_m$. Анализ "привязки" распределения к оси абсцисс показывает, что его ширина зависит от абсолютных значений интенсивностей сигнала и шума, а форма – определяется отношением сигнал-шум. Оно может задаваться, как отношение эффективных напряжений сигнала и шума, в этом случае говорят об отношении сигнал-шум по напряжению

$$h = \sigma_{\text{сигн}} / \sigma_{\text{шум}}; \quad (1.27)$$

в других случаях выгоднее сопоставлять мощности и говорить

об отношении сигнал-шум по мощности

$$h^2 = \sigma_{\text{сигн}}^2 / \sigma_{\text{шум}}^2. \quad (1.28)$$

Как следствие статистической независимости сигнала и шума дисперсия смеси определяется суммой дисперсий слагаемых

$$D_{\zeta} = D_{\xi} + D_{\text{шум}}. \quad (1.29)$$

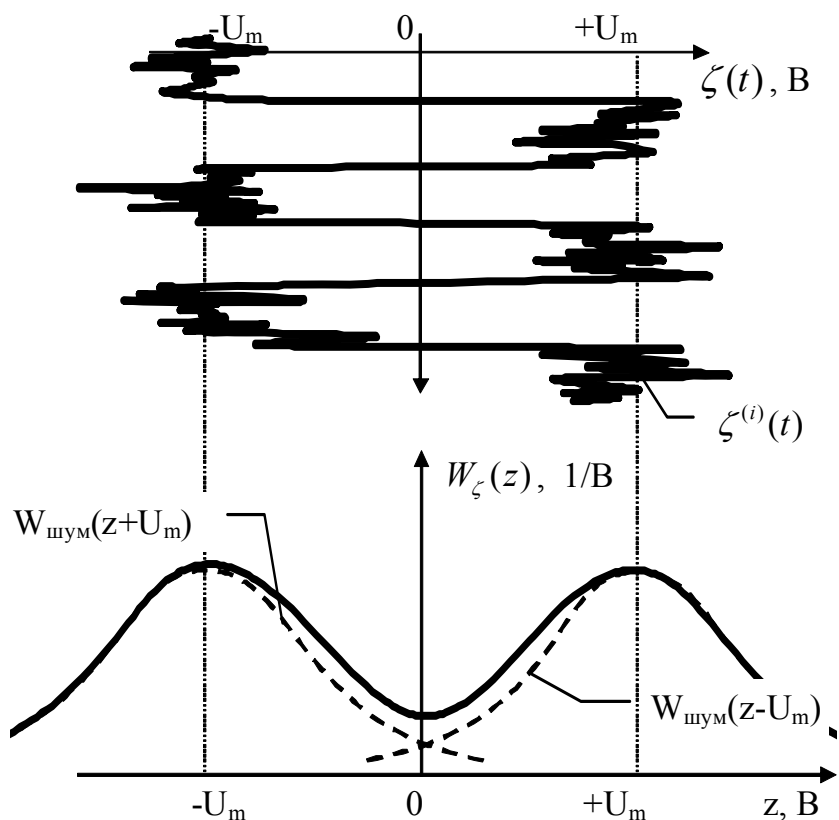


Рис. 1.7. Аддитивная смесь последовательности прямоугольных импульсов и нормального шума и ее распределение

1.5. Домашнее задание к лабораторной работе

1.5.1. Ознакомьтесь с разделом 1.4 данного руководства.

1.5.2. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант лабораторных исследований.

1.5.3. Для своего индивидуального варианта рассчитайте и внесите в отчет графики функции распределения и плотности вероятности нормального шума, параметры которого заданы в табл. 1.1. При расчетах следует иметь в виду, что тип источника шума, задаваемый центральной колонкой таблицы, характеризует динамичность развития процесса во времени и не влияет на одномерные характеристики случайного процесса.

1.5.4. Рассчитайте и внесите в отчет с указанием масштабов графики функции распределения и плотности вероятности сигнала из табл. 1.2.

1.5.5. Определите, чему будет равно отношение сигнал-шум, если проанализированный в п. 1.5.4 сигнал смешать с соответствующим Вашему индивидуальному заданию шумом.

1.5.6. Определите, как следует изменить параметры входящих в смесь процессов, чтобы отношение сигнал-шум стало равно $h = 1$. (Примечание: если номер Вашей бригады четный – изменяйте интенсивность сигнала; для бригад с нечетным номером следует изменять эффективное значение шума)

1.5.7. Если в Вашем распоряжении есть подходящая вычислительная техника, то для двух случаев, рассмотренных в п. 1.5.5–1.5.6 рассчитайте плотность вероятности смеси Вашего сигнала с шумом (см. (1.25)); при «ручном» расчете допустимо заменять сигнал из Вашего индивидуального варианта задания последовательностью прямоугольных импульсов и руководствоваться в расчетах соотношением (1.26).

Таблица 1.1

Номер бригады	Модуль №1 - источник шума	Параметры источника шума
1	широкополосный	$\sigma = 0,5 \text{ В}$
2	широкополосный	$\sigma = 0,7 \text{ В}$
3	низкочастотный	$\sigma = 0,9 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}$
4	узкополосный	$\sigma = 1,2 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}; F = 1,6 \text{ кГц}$
5	широкополосный	$\sigma = 1,2 \text{ В}$
6	широкополосный	$\sigma = 0,4 \text{ В}$
7	низкочастотный	$\sigma = 0,6 \text{ В}; \tau = 2,5 \text{ мс}$
8	узкополосный	$\sigma = 0,8 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}; F = 2,0 \text{ кГц}$

Таблица 1.2

Номер бригады	Вид формируемого сигнала	Параметры сигнала
1	гармонический	$U_m = 2,2 \text{ В}; F = 1,3 \text{ кГц}$
2	прямоугольный	$U_m = 1,8 \text{ В}; F = 1,4 \text{ кГц}$
3	треугольный	$U_{\min} = -1,3 \text{ В}; U_{\max} = +2,7 \text{ В}; F = 1,5 \text{ кГц}$
4	гармонический	$U_m = 3,2 \text{ В}; F = 1,6 \text{ кГц}$
5	прямоугольный	$U_m = 2,8 \text{ В}; F = 1,7 \text{ кГц}$
6	треугольный	$U_{\min} = -2,3 \text{ В}; U_{\max} = +1,7 \text{ В}; F = 1,8 \text{ кГц}$
7	гармонический	$U_m = 4,2 \text{ В}; F = 1,9 \text{ кГц}$
8	прямоугольный	$U_m = 3,8 \text{ В}; F = 2,0 \text{ кГц}$

1.6. Возможности моделирующей программы и рекомендации по работе с ней

Программа моделирования состоит из 3 основных модулей, обеспечивающих управление совокупностью анализируемых источников сигналов и цепей обработки, параметрами моделируемых устройств, блоком анализа характеристик.

1.6.1. Окно "Источники сигналов и блоки обработки"

Начинать работу с программой необходимо с определения совокупности исходных сигналов и используемых для их обработки радиотехнических блоков. Для осуществления указанных действий служит окно "Источники сигналов и блоки обработки", показанное на рис. 1.8.



Рис. 1.8. Окно управления исследуемыми сигналами и блоками обработки

Пять прямоугольников с надписями "Модуль1"... "Модуль5" предназначены для схематичного отображения совокупности моделируемых источников случайных процессов, цепей, используемых для их обработки, и способа их объединения. При этом модули № 1...3 предназначены для моделирования сигналов и лишь блоки № 4...5 применяются для выбора уст-

ройства обработки. Конечно, в реальности преобразование случайных процессов может быть гораздо более сложным и многоступенчатым, чем предусматривает данная схема, но даже подобная простая структура позволяет наблюдать и анализировать громадную совокупность различных случайных процессов и для учебных целей вполне достаточна.

Изменить назначение любого из модулей весьма просто. Для этого необходимо лишь:

- С помощью щелчка "мышью" или нажатия комбинации $\langle \text{Alt} \rangle + \langle \text{номер модуля} \rangle$ сделать нужный модуль активным. Например, после нажатия $\langle \text{Alt} \rangle + \langle 5 \rangle$ активным станет модуль №5 и его заголовок выделится синим цветом (см. рис. 1.8);
- Активировать пункт меню "Активный модуль" → "Изменить тип" и выбрать подходящий вариант из предлагаемого подменю; Так, при выборе варианта, показанного на рис. 1.9, модуль №5 будет представлять собой уже не идеальный ФНЧ, а реальную интегрирующую RC-цепочку;
- Активировать пункт меню "Активный модуль" → "Изменить параметры модуля" и изменить свойства моделируемого устройства, пользуясь описанным в следующем подразделе окном "Параметры модулей".

1.6.2. Выбор параметров используемых модулей

Для контроля и изменения параметров моделируемых устройств служит окно "Параметры модулей", показанное на рис. 1.10 (при старом варианте функционирования модуля №5).

В показанном на рис. 1.10 виде блоки управления параметрами предназначены для непосредственного ввода значений величин с клавиатуры. Для быстрой (хотя и менее точной) вариации параметра пользователем предназначена вкладка, показанная на рис. 1.11, используя которую значение параметра легко изменять, просто перемещая движок регулятора мышью. Последующие вкладки являются служебными и при выполнении лабораторных работ не используются.

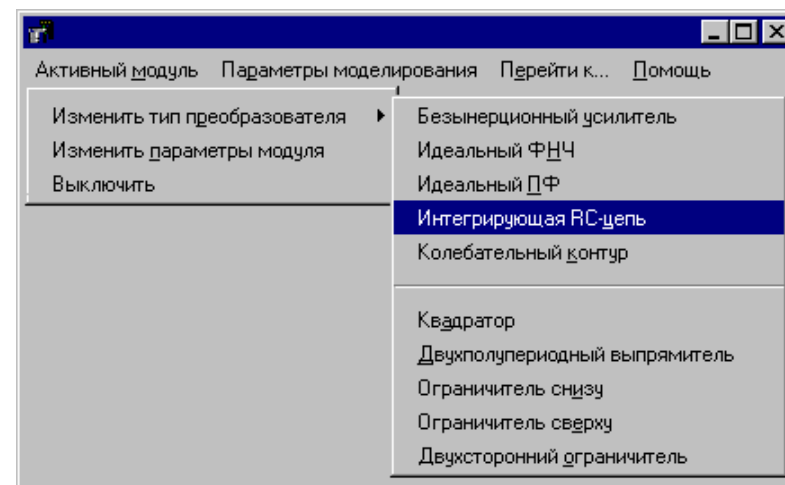


Рис. 1.9. Меню управления типом преобразователей

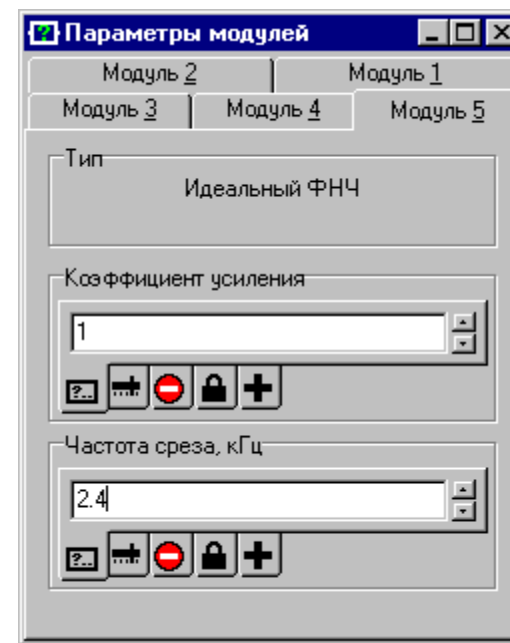


Рис. 1.10. Управление параметрами моделируемых устройств

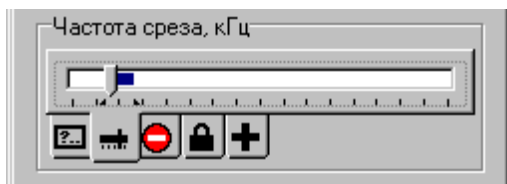


Рис. 1.11. Вкладка ускоренной регулировки параметра

1.6.3. Общее представление об измерительной подсистеме

Для выполнения оценки параметров наблюдаемых случайных процессов предназначен блок анализаторов. Визуально блок анализаторов отображается как окно, содержащее один или два измерительных блока, подключенных к какой-либо из контрольных точек №1...7, показанных на рис. 1.8. Один из возможных вариантов внешнего вида блока анализаторов представлен на рис. 1.12.

Метки "(5)" и "(6)", отображаемые в верхней части каждого анализатора, показывают, к какой именно контрольной точке схемы подключен измерительный прибор. Так на рис. 1.12 правый осциллограф показывает случайный процесс, формируемый как аддитивная смесь гармонического сигнала и шума, а левый прибор подключен к контрольной точке №5 ("Выход") и отображает результат детектирования этой смеси выпрямителем и идеальным ФНЧ (блоки №4 и №5 на рис. 1.8).

Каждый измерительный прибор снабжен регуляторами вертикального и горизонтального масштабирования изображения, расположенными сверху и снизу от окна отображения результатов измерения. Для корректировки масштаба достаточно лишь щелкнуть "мышью" по соответствующему сектору переключателя. Выделенные на рис.1.12 секторы переключателя показывают, например, что при отображении информации на экране осциллографа вертикальный масштаб составляет 1 В/дел,

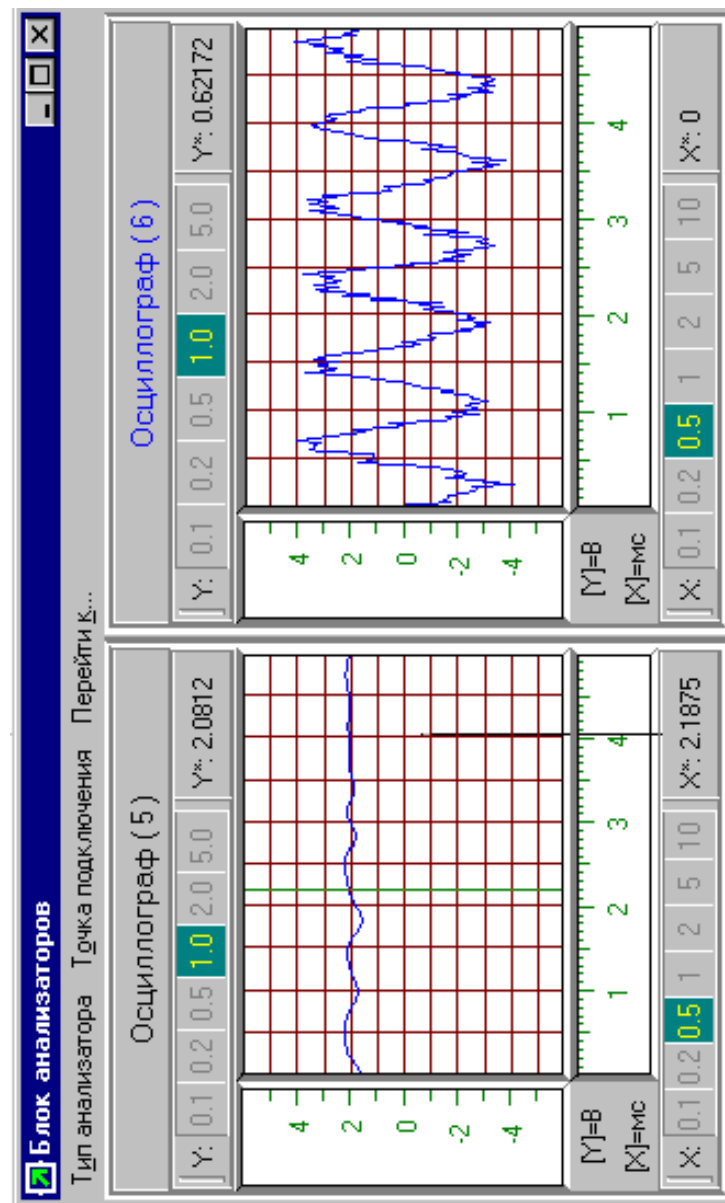


Рис. 1.12. Окно подсистемы измерения характеристик случайных процессов

а горизонтальный - 0,5 мс/дел. Изменять масштаб можно и при помощи клавиш "+", "-", "*", "/" дополнительной клавиатуры, а именно:

- </> - Увеличить масштаб изображения по вертикали;
- <*> - Уменьшить масштаб изображения по вертикали;
- <-> - Увеличить масштаб изображения по горизонтали;
- <+> - Уменьшить масштаб изображения по горизонтали.

Для более точного измерения каких-либо точек или фрагментов диаграмм предназначены вертикальные маркеры. Они легко управляются как с клавиатуры, так и при помощи "мыши", а их текущие горизонтальные и вертикальные координаты отображаются справа от соответствующих переключателей масштаба. Так, например, на левом приборе, изображенном на рис. 1.12, маркер расположен по оси времени на расстоянии 2,1875 мс от момента начала отсчета и, судя по индикатору в верхней правой части анализатора, наблюдаемое в данном временном сечении значение напряжения составляет 2.0812 В.

1.6.4. Выбор используемых измерительных приборов

Для изменения состава и/или точек подключения контрольно-измерительных приборов служит главное меню окна "Блок анализаторов". Разберем использование данного меню на примере замены осциллографа, показанного на рис. 1.12 справа, спектроанализатором, подключенным к выходу схемы. Для этого выполним следующие шаги:

1) Щелчком мышь по надписи "Осциллограф (6)" сделаем данный измерительный прибор активным (на рис. 1.12 это уже выполнено);

2) При помощи меню "Тип анализатора" заменяем осциллограф спектроанализатором (рис. 1.13);

3) При помощи меню "Точка подключения" изменяем контрольную точку схемы на №5 (см. рис. 1.8).

В результате блок анализаторов приобретает вид, показанный на рис. 1.14.

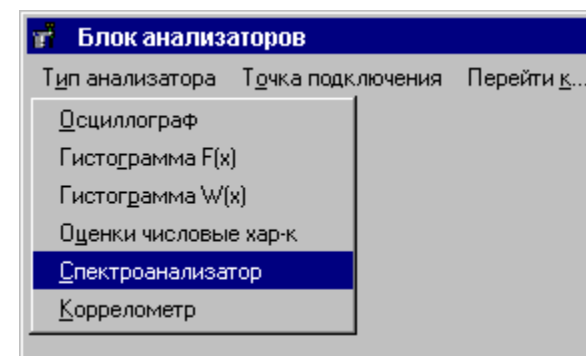


Рис. 1.13. Выбор типа используемого контрольно-измерительного прибора

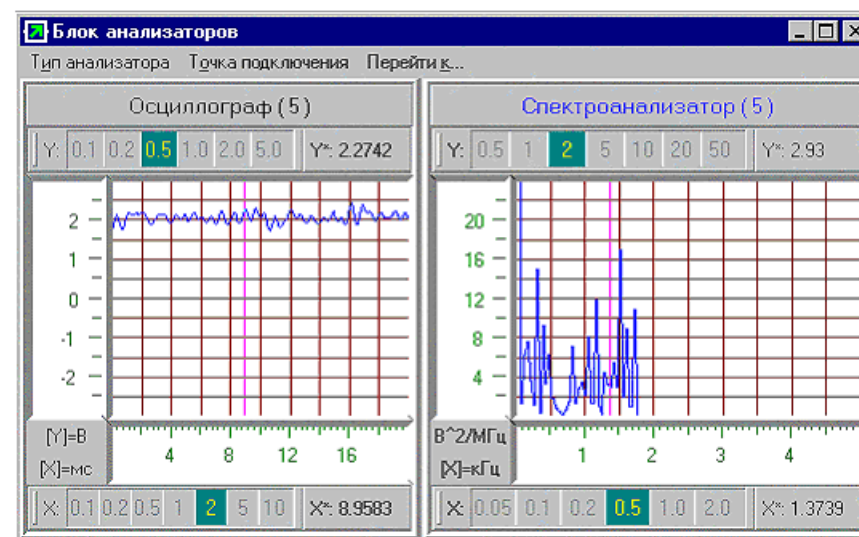


Рис. 1.14. Результат временного и спектрального анализа процесса на выходе схемы

1.7. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Исследование характеристик нормального шума

Цели этапа:

- 1) получить гистограммы распределения шума и сравнить их с теоретическими распределениями;
- 2) исследовать оценки математического ожидания и эффективного значения процесса;
- 3) проанализировать влияние объема используемой выборки на точность оценивания этих характеристик.

Рекомендации по выполнению:

1.7.1. Установить тип и параметры модуля №1 схемы моделирования случайных процессов в соответствии с требованиями табл. 1.1; остальные модули перевести (при необходимости) в выключенное состояние. Установить объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов. В блоке анализаторов настроить оба анализатора на контрольную точку №1; установить левый анализатор в состояние осциллографа, а правый - в состояние оценки числовых характеристик СП.

1.7.2. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов. По наблюдаемым осциллограммам оценить изменения формы реализаций. Определить по значениям, выводимым на правый анализатор, диапазон изменения оценок математического ожидания и дисперсии СП. Наибольшее и наименьшее наблюдавшиеся значения для каждой из оценок занести в отчет.

1.7.3. Переключить измеритель числовых характеристик в режим построения гистограмм $F_{\xi}^*(\tilde{x})$ и провести еще 15...20 экспериментов. Оценить стабильность формы (значений) наблюдаемых гистограмм. Внести в отчет одну или (при существенной нестабильности данных) две гистограммы и сравнить их с теоретическими функциями распределения шума.

1.7.4. Аналогично п.1.7.3 зафиксировать в отчете гистограммы $W_{\xi}^*(\tilde{x})$ плотности распределения вероятностей СП.

1.7.5. Повторить пп. 1.7.2-1.7.4, установив предварительно объем формируемой выборки $N = 256$ отсчетов.

Этап 2. Исследование зависимости статистических характеристик квазислучайных процессов от их параметров

Цели этапа:

- 1) получить гистограммы распределения периодического сигнала и сравнить их с теоретическими распределениями;
- 2) исследовать зависимость статистических характеристик сигналов от их параметров.

Рекомендации по выполнению:

1.7.6. Восстановить объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов. Установить тип и параметры модуля №1 моделирующей программы в соответствии с требованиями табл. 1.2.

1.7.7. Установить режим отображения гистограмм $F_{\xi}^*(\tilde{x})$ и провести серию из 15...20 экспериментов. Занести в отчет одну или две из полученных гистограмм. Аналогично зафиксировать в отчете получаемые гистограммы плотности вероятности $W_{\xi}^*(\tilde{x})$.

1.7.8. Выполнить (по отдельности, каждый раз по отношению к варианту из табл. 1.2) две корректировки параметров, указанные в табл. 1.3, и для каждой зафиксировать в отчете гистограммы распределения получаемых случайных процессов; сопоставить их с наблюдавшимися ранее и записать выводы.

Примечание: если корректировка подразумевает добавление к сигналу постоянной составляющей, то этого можно добиться, настроив модуль №3 на формирование постоянной составляющей и анализируя результат суммирования процессов в контрольной точке №6.

Таблица 1.3

Номер бригады	Первая корректировка параметров	Вторая корректировка параметров
1, 2	увеличить амплитуду сигнала до $U_m^* = 4 \text{ В}$	добавить к сигналу постоянную составляющую $U = -2,2 \text{ В}$
3, 6	установить частоту сигнала $F^* = 2,5 \text{ кГц}$	при исходной частоте изменить минимальный уровень сигнала на $U_{\min}^* = -2 \text{ В}$
4, 5	установить частоту сигнала $F^* = 2,5 \text{ кГц}$	добавить к сигналу постоянную составляющую $U = 0,8 \text{ В}$
7, 8	уменьшить амплитуду сигнала до $U_m^* = 1,3 \text{ В}$	при исходных параметрах сигнала установить его частоту $F^* = 2,5 \text{ кГц}$

Этап 3. Исследование влияния аддитивного шума на вероятностные характеристики СП

Цель этапа:

1) исследовать зависимость характеристик смеси сигнала и шума от интенсивностей составляющих и отношения сигнал-шум.

Рекомендации по выполнению:

1.7.9. Настроить модуль №1 схемы моделирования на формирование квазислучайного сигнала из табл. 1.2, а модуль №3 - на формирование шума из табл. 1.1. Внести в отчет гистограммы функции распределения и плотности распределения вероятностей для наблюдаемой в контрольной точке №6 аддитивной смеси сигнала и шума, указав соответствующее Вашему индивидуальному варианту отношение сигнал-шум.

1.7.10. Установить отношение сигнал-шум $h = 1$, изменив параметры процессов на рассчитанные в п. 1.4.6. Внести в отчет получаемые гистограммы $F_{\xi}^*(\tilde{x})$ и $W_{\xi}^*(\tilde{x})$; сравнить их с результатами теоретических расчетов (п. 1.5.7) и записать выводы о влиянии аддитивного шума на закон распределение мгновенных значений сигнала.

1.8. Рекомендации к написанию отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- наименование работы и все материалы домашней подготовки (расчеты, таблицы, графики);
- результаты экспериментальных исследований в виде таблиц, графиков и осциллограмм с их физическим толкованием;
- выводы по работе с сопоставлением расчетных теоретических и экспериментальных данных.

Текст в целом должен быть написан кратким и ясным языком; не следует переписывать в отчет рассуждения общетеоретического характера, не имеющие прямого отношения к поставленной задаче и ее решению. Вместе с тем, основные результаты работы желательно прокомментировать, обратив особое внимание на расхождения между теоретическими положениями и результатами исследований и указывая, по возможности, причины выявленных отличий.

Особое внимание следует уделять оформлению рисунков и графиков. Они должны:

- иметь название, указываемое в верхней части рисунка;
- располагаться сразу же за ссылкой на них по тексту или в крайнем случае на следующей странице;
- иметь на каждой оси координат масштабную сетку, символ отображаемой переменной и (через запятую) ее размерность;
- содержать пометки о значениях параметров, которым соответствует построенный график.

1.9. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Дайте определение одномерной функции распределения случайного процесса, опишите ее основные свойства, приведите примеры.

2. Что такое одномерная плотность вероятности случайного процесса? Перечислите ее основные свойства и приведите примеры.

3. Дайте определение многомерной функции распределения случайного процесса и перечислите ее основные свойства.

4. Что такое многомерная плотность вероятности, и какие статистические свойства случайного процесса она характеризует?

5. Дайте определения важнейших числовых характеристик случайных процессов и перечислите их основные свойства.

6. Какие случайные процессы называются стационарными? Дайте определения строгой стационарности и стационарности в “широком” смысле; приведите примеры.

7. Как могут быть вычислены или измерены числовые характеристики эргодических процессов?

8. Укажите принципы измерения вероятностных характеристик эргодических процессов.

9. Каков физический смысл (математического ожидания) и дисперсии эргодического процесса? Как связаны между собой форма (вид) реализаций процесса и его среднее значение, дисперсия и функции распределения?

10. Какие изменения вносит аддитивный шум в распределения мгновенных значений квазислучайных сигналов? Проиллюстрируйте ответ на конкретных примерах.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Теоретические основы

Часто используемыми энергетическими характеристиками случайного процесса являются корреляционная, ковариационная функция и спектральная плотность мощности.

2.1.1. Корреляционная функция численно определяется величиной взаимной корреляции значений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.1)$$

Для стационарных случайных процессов, свойства которых не изменяются вдоль оси времени, она зависит лишь от продолжительности временного интервала между контролируемыми моментами времени $\tau = t_2 - t_1$ и характеризует степень линейной взаимосвязи между двумя значениями, разнесенными во времени на интервал τ . Как следствие:

1. $B_{\xi}(\tau)$ является четной функцией аргумента τ .

2. $B_{\xi}(\tau)$ имеет размерность квадрата случайной величины, в частности, B^2 - для напряжения и A^2 - для тока.

3. Значение, принимаемое корреляционной функцией в начале координат равно второму начальному моменту процесса, что для эргодических случайных процессов соответствует полной средней мощности любой из реализаций процесса

$$B_{\xi}(0) = m_2 \{ \xi(t) \} \rightarrow P_{\text{полн } \xi^{(i)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t)]^2 dt. \quad (2.2)$$

Также корреляционная функция $B_{\xi}(\tau)$ подчиняется теореме Винера-Хинчина, о которой будет говориться в п. 2.1.3.

Родственной к $B_\xi(\tau)$ является ковариационная функция, отличающаяся от (2.1) компенсацией математического ожидания процесса

$$K_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M_\xi) \cdot (x_2 - M_\xi) \cdot W_\xi(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (2.3)$$

и характеризующая степень линейной взаимосвязи между значениями переменной составляющей процесса, наблюдаемыми через временной интервал τ друг от друга. Ковариационная функция связана с корреляционной соотношением

$$K_\xi(\tau) = B_\xi(\tau) - M_\xi^2, \quad (2.4)$$

а её значение при $\tau = 0$ совпадает с дисперсией СП, которая, в свою очередь, для эргодических СП совпадает со средней мощностью переменной составляющей каждой из реализаций

$$K_\xi(0) = D_\xi \rightarrow P_{\xi^{(i)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t) - \xi_-^{(i)}]^2 dt. \quad (2.5)$$

Взаимозависимость значений в разные моменты времени не может быть больше, чем в совпадающие, поэтому значения, принимаемые корреляционной и ковариационной функциями при $\tau \neq 0$, не могут превышать их значение в начале координат

$$B_\xi(0) \geq |B_\xi(\tau)|_{\tau \neq 0}, \quad K_\xi(0) \geq |K_\xi(\tau)|_{\tau \neq 0}. \quad (2.6)$$

Отметим, что для эргодических СП, реализаций которых являются периодическими функциями времени, в соотношениях (2.2), (2.5) и им аналогичных достаточно осуществлять усреднение во времени лишь на одном произвольном периоде сигнала, например

$$B_\xi(\tau) = \frac{1}{T_n} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_n} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t-\tau) dt. \quad (2.7)$$

2.1.2. Спектральная плотность мощности случайного процесса определяется выражением

$$S_\xi(f) = m_1 \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T) \right|^2 \right\}, \quad (2.8)$$

где $\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T) = \int_{-T/2}^{+T/2} \xi^{(i)}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$ - комплексные спектральные плотности отдельных реализаций процесса $\xi(t)$.

Спектральная плотность мощности характеризует среднее распределение мощности реализаций вдоль оси частот.

Наиболее важные свойства спектральной плотности мощности состоят в следующем:

1. $S_\xi(f)$ является четной (двухсторонней) функцией частоты f и принимает неотрицательные действительные значения.

2. $S_\xi(f)$ характеризует мощность, приходящуюся на каждый герц оси частот, и для напряжений имеет размерность $\text{В}^2/\text{Гц}$, а для токов – $\text{А}^2/\text{Гц}$.

3. Если реализации процесса $\xi(t)$ обладают дискретными спектральными составляющими, то спектральная плотность мощности на этих частотах выражается δ -функциями. В частности, для процессов с ненулевым математическим ожиданием

$$\begin{aligned} S_\xi(f) &= S_{\xi_-}(f) + M_\xi^2 \cdot \delta(f), \\ S_\xi(\omega) &= S_{\xi_-}(\omega) + 2\pi \cdot M_\xi^2 \cdot \delta(\omega). \end{aligned} \quad (2.9)$$

4. Полная средняя мощность реализаций случайного процесса $\xi(t)$ может быть определена путем интегрирования спектральной плотности мощности вдоль всей оси частот

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega) d\omega = m_2 \{ \xi(t) \} = D_\xi + M_\xi^2 \rightarrow P_{\text{полн } \xi^{(i)}} \quad (2.10)$$

5. Спектральная плотность мощности подчиняется теореме Винера-Хинчина.

2.1.3. Теорема Винера-Хинчина утверждает: “Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса связаны интегральным преобразованием Фурье”

$$S_{\xi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \quad (2.11)$$

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} df \quad (2.12)$$

Выражения (2.11), (2.12) являются лишь одним из многих возможных вариантов записи теоремы Винера-Хинчина. Так, с учетом четности обеих функций, оказываются справедливыми варианты записи приведенные ниже

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2 \cdot \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau \quad (2.13)$$

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot \tau} d\omega \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\omega \quad (2.14)$$

Следствием теоремы Винера-Хинчина является свойство положительной определенности корреляционной функции случайного процесса. Положительная определенность означает, что корреляционной функцией может быть лишь такая четная функция аргумента τ , преобразование Фурье от которой неотрицательно на всех частотах.

2.1.4. Ширина спектра и интервал корреляции случайного процесса

Практической шириной спектра случайного процесса $\xi(t)$ называют величину

$$\Pi_f = \frac{1}{\max_{f>0} S_{\xi}(f)} \cdot \int_{0+0}^{+\infty} S_{\xi}(f) df \quad (2.15)$$

Смысл этого определения состоит в том, что если взять процесс $\eta(t)$ с прямоугольным спектром, ширина которого в области положительных частот равна Π_f , а максимальное значение совпадает с максимумом $S_{\xi}(f)$, то процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ будут обладать одинаковыми средними мощностями (рис. 2.1). Нижний предел интегрирования в (2.15) равный «0+0» указывает на то, что постоянная составляющая в расчете ширины спектра не участвует.

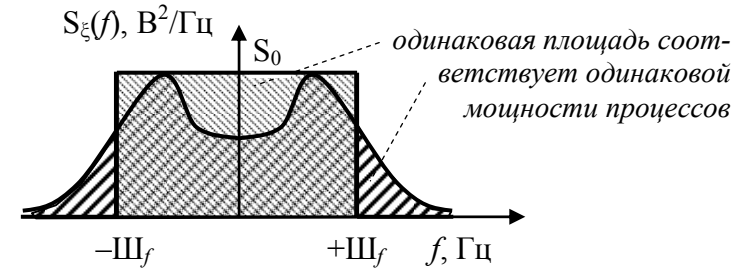


Рис. 2.1. Определение практической ширины спектра СП

Интервалом корреляции случайного процесса $\xi(t)$ называют величину

$$\tau_{\kappa} = \frac{1}{K_{\xi}(0)} \cdot \int_0^{+\infty} |K_{\xi}(\tau)| d\tau \quad (2.16)$$

За счет наличия модуля в подынтегральном выражении интервал корреляции определяется скоростью убывания абсолютных значений корреляционной функции и характеризует временной интервал предсказуемости значений случайного процесса. В соответствии со свойствами преобразования Фурье малый интервал корреляции соответствует процессам с

широким спектром и быстро изменяющимися реализациями. Напротив, процессы с большим интервалом корреляции имеют узкий спектр и изменяются медленно, оставаясь достаточно предсказуемыми на протяжении значительного интервала времени.

Для процессов с нулевым математическим ожиданием, неотрицательной (при всех τ) корреляционной функцией и максимумом спектра на нулевой частоте между шириной спектра и интервалом корреляции существует жесткое соответствие

$$Ш_f = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{\xi}(f)}{S_{\xi}(0)} df = \frac{m_2\{\xi\}}{2 \cdot S_{\xi}(0)} = \frac{B_{\xi}(0)}{2 \cdot \left(2 \cdot \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau \right)} = \frac{1}{4 \cdot \tau_{\kappa}} \quad (2.17)$$

2.1.5. Понятие белого шума и его практическое применение

Белым шумом называется случайный процесс, спектральная плотность мощности которого остается постоянной на всех частотах $S_{\xi}(f) = N_0$. Корреляционная функция такого процесса

имеет вид $B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \cdot e^{+j\omega\tau} d\omega = N_0 \cdot \delta(\tau)$, т.е. его сколь

угодно близко расположенные отсчеты не коррелированы. Иначе говоря, значение белого шума невозможно предсказать в момент t_2 , даже сколь угодно близкий к отсчету $\xi(t_1)$. Следует иметь в виду, что белый шум – это абстрактная математическая модель и в реальности не встречается, т.к. он должен был бы обладать бесконечной средней мощностью.

Полезность понятия белого шума заключается в том, что для наблюдения и обработки случайных процессов в радиотехнике используются реальные цепи, обладающие конечной полосой пропускания, а ширина спектра многих реально существующих шумов существенно превышает эту полосу пропуска-

ния, так что по отношению к используемым устройствам обработки реальные шумы вполне допустимо считать белыми. Подобная ситуация характерна, например, для дробового и теплового шума.

Дробовой шум обусловлен дискретной структурой тока (произвольным количеством зарядов, смещающихся в сечении проводника в конкретный момент времени). Более всего дробовой шум проявляется в усилительных приборах (электронной лампе, транзисторах), где ток образуется относительно небольшим числом заряженных частиц. Ширина спектра дробового шума определяется геометрией усилительного элемента, временем пролета электронов и обычно многократно превышает полосу пропускания реальных устройств.

$$S_j(\omega) = e \cdot I_0 \quad \text{при } |\omega| < \tau_e, \quad (2.18)$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл (заряд электрона), I_0 - постоянная составляющая тока, τ_e - длительность броска тока, обусловленного переносом заряда одного электрода.

Тепловой шум порождается хаотическим движением электронного газа в проводящих средах и проявляется в форме случайного изменения разности потенциалов на зажимах резистивных элементов. Это случайное напряжение характеризуется спектральной плотностью мощности

$$S_u(\omega) = 2 \cdot k \cdot T \cdot R, \quad (2.19)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/(Гц·Град) – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура по Кельвину, R – сопротивление резистивного элемента в омах.

Полезную информацию об энергетических характеристиках СП можно также найти в учебной литературе [2, с. 118-123; 3, с. 27-39 или 4, с. 139-142, 147-148].

2.2. Практические примеры

Задача 2.1. Реализации эргодического случайного процесса $\xi(t)$ были записаны на магнитофонную ленту. В результате воспроизведения записей с удвоенной скоростью образовался новый процесс $\eta(t)$. Сопоставить энергетические характеристики процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Решение

а) Исходя из способа получения СП $\eta(t)$ можно прийти к выводу, что все его реализации обязаны быть однотипными, а сам процесс – относиться к классу эргодических. Корреляционную функцию эргодического СП можно искать как среднюю по времени величину произведения двух разнесенных по времени на интервал τ значений этого процесса

$$B_{\eta}(\tau) = \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot \int_{-T_{набл}/2}^{+T_{набл}/2} \eta^{(i)}(t) \cdot \eta^{(i)}(t - \tau) dt. \quad (2.20)$$

Вместе с тем, реализации СП $\eta(t)$ образуются из реализаций процесса $\xi(t)$ по правилу $\eta(t) = \xi(2 \cdot t)$. Подставляя это соотношение в (2.20) несложно получить

$$\begin{aligned} B_{\eta}(\tau) &= \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot \int_{-T_{набл}/2}^{+T_{набл}/2} \xi^{(i)}(2 \cdot t) \cdot \xi^{(i)}(2 \cdot t - 2 \cdot \tau) dt = \\ &= \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T_{набл}} \cdot \int_{-T_{набл}}^{+T_{набл}} \xi^{(i)}(z) \cdot \xi^{(i)}(z - 2 \cdot \tau) dz = B_{\xi}(2 \cdot \tau). \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционные функции анализируемых процессов отличаются лишь горизонтальным масштабом – функция $B_{\eta}(\tau)$ вдвое сжата вдоль оси времени по отношению к $B_{\xi}(\tau)$. Подобный результат вполне закономерен: воспроизводимые записи изменяются вдвое быстрее, а значит интервал их предсказуемости вдвое меньше. Средняя же мощность от скорости изменения не зависит, а потому вертикальный масштаб (значение корреляционной функции в нуле) изменяться не должен.

б) В соответствии с теоремой Винера-Хинчина и свойствами преобразования Фурье сжатие корреляционной функции вдоль оси времени соответствует в спектральной области соотношению

$$S_{\eta}(f) = 0,5 \cdot S_{\xi}(0,5 \cdot f).$$

Полученные соотношения проиллюстрированы на рис. 2.2. Ускоренное воспроизведение привело к расширению спектра процесса, а распределение мощности по большему диапазону частот привело к снижению в 2 раза мощности, приходящейся на каждый герц оси частот.

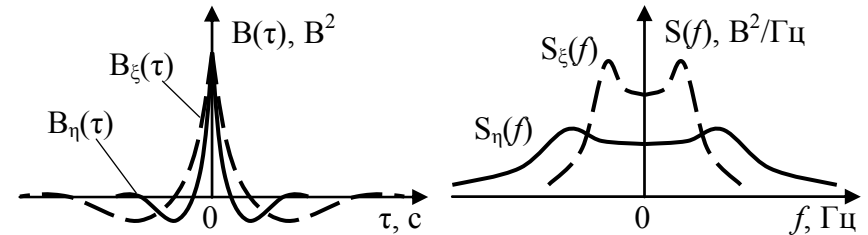


Рис. 2.2. Соотношение энергетических характеристик процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ из задачи 2.1

Задача 2.2. Проанализируйте, может ли случайный процесс иметь корреляционную функцию прямоугольной формы?

Решение

а) Если корреляционная функция некоторого процесса может иметь прямоугольную форму, то согласно п. 2.1.3 спектральная плотность мощности (СПМ) должна определяться по корреляционной функции соотношением

$$S_{\xi}(f) = \int_{-\tau_k}^{+\tau_k} B_0 \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau = 2 \cdot B_0 \tau_k \cdot \text{sin } c(2\pi \cdot f \cdot \tau_k).$$

б) Sinc-образная функция частоты показана на рис. 2.3 справа, однако она не может служить спектральной плотностью мощности какого-либо процесса, т.к. является знакопеременной, а СПМ случайных процессов обязана быть неотрицательной

для всех частот. Полученное противоречие свидетельствует, что функция прямоугольной формы не является положительно определенной, а потому не может служить корреляционной функцией никакого случайного процесса (см. следствие из теоремы Винера-Хинчина на стр. 45).

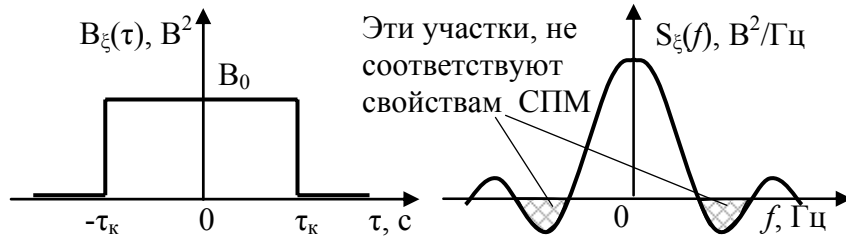


Рис. 2.3. Энергетические характеристики из задачи 2.2

Задача 2.3. Спектральная плотность мощности нормально-го случайного процесса $\xi(t)$ определяется выражением

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot 10^{-3} / (10^6 + \omega^2), \quad \text{В}^2/\text{Гц}.$$

Определить интервал корреляции этого процесса, а также вероятность наблюдения значений процесса $\xi(t)$, превышающих +1 милливольт.

Решение

а) Интервал корреляции случайного процесса встречается выше в соотношениях (2.16), (2.17) однако последнее из них рассчитано на неотрицательную корреляционную функцию, а для анализируемого процесса характер зависимости $B_{\xi}(\tau)$ пока не установлен. В связи с этим начать решение задачи необходимо с определения корреляционной функции процесса $B_{\xi}(\tau)$.

В соответствии с (2.14)

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\omega = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega \cdot \tau)}{10^6 + \omega^2} d\omega$$

Для сокращения выкладок воспользуемся табличным интегралом

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega \cdot \tau)}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot e^{-|a \cdot \tau|}. \quad (2.21)$$

При $a = 10^3$ и с учетом поправочного коэффициента $2 \cdot 10^{-3}$ корреляционная функция процесса $B_{\xi}(\tau)$ равна

$$B_{\xi}(\tau) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^3} \cdot e^{-|10^3 \cdot \tau|} = 10^{-6} \cdot e^{-|10^3 \cdot \tau|}, \quad \text{В}^2.$$

б) Итак, корреляционная функция анализируемого процесса неотрицательна, а потому

$$\tau_k = \int_0^{+\infty} \frac{|B_{\xi}(\tau)|}{B_{\xi}(0)} d\tau = \frac{1}{B_{\xi}(0)} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau = \frac{S_{\xi}(0)}{2 \cdot B_{\xi}(0)}. \quad (2.22)$$

и, в результате, $\tau_k = 2 \cdot 10^{-9} / (2 \cdot 10^{-6}) = 10^{-3}$, т.е. интервал корреляции равен 1 миллисекунде.

в) Спектральная плотность мощности на нулевой частоте конечна и, следовательно, приходящаяся на постоянную составляющую мощность бесконечно мала, т.е. процесс $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание. В результате, значение $B_{\xi}(0) = 10^{-6}$ определяет мощность переменной составляющей реализаций или, иначе, дисперсию процесса. Учитывая, что по условию процесс $\xi(t)$ обладает нормальным распределением, плотность вероятности СП может быть записана в виде

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10^{-3}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 10^{-6}}}, \quad 1/\text{В}.$$

г) По полученной плотности вероятности определим вероятность попадания значений СП $\xi(t)$ в объявленный в условии диапазон $P\{\xi(t) > 10^{-3}\} = \int_{10^{-3}}^{+\infty} W_{\xi}(x) dx$. Поскольку применительно к нормальному распределению записанный интеграл в элементарных функциях не выражается, то для его расчета воспользу-

емся вспомогательным (противоположным) событием " $\xi(t) \leq 10^{-3}$ ", а также заменой переменных $z = x/10^{-3}$. С учетом таблицы нормального распределения из прил. 1, получаем

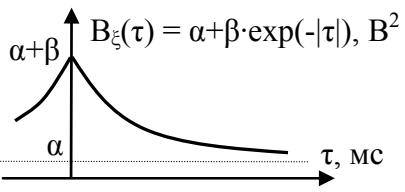
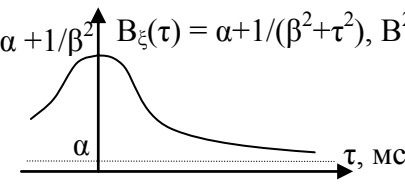
$$P\{\xi(t) > 10^{-3}\} = 1 - \int_{-\infty}^{10^{-3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10^{-3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 10^{-6}}} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^1 e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

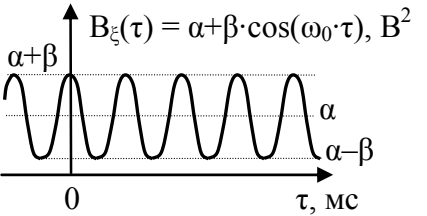
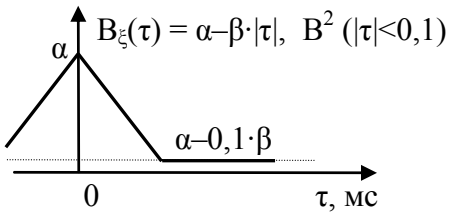
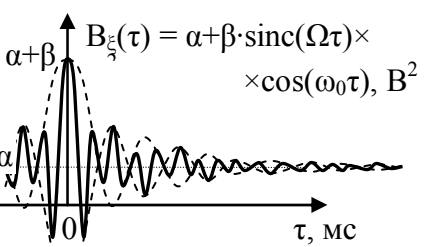
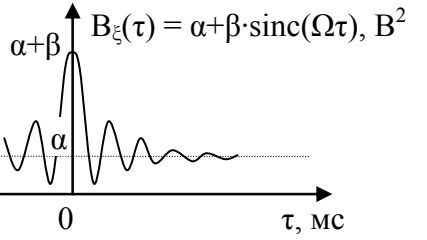
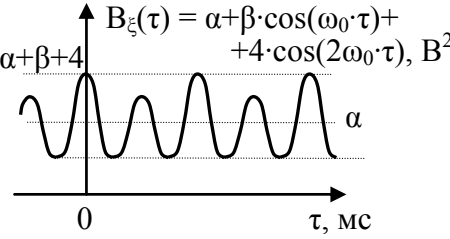
$$= 1 - F_{\text{ст}}(1) = 1 - 0,8413 \approx 0,16.$$

Итак, вероятность наблюдения значений, превышающих +1 милливольт, для процесса $\xi(t)$ составляет примерно 16%.

2.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории

Задача 0. Полная средняя мощность $P_{\text{полн}}$ реализаций эргодического случайного процесса $\xi(t)$ приведена в левой колонке таблицы, а в центральной колонке указана дисперсия этого СП. Определить параметры α и β , соответствующие корреляционной функции данного процесса, показанной в правой колонке таблицы.

Но- мер	$P_{\text{полн}},$ B^2	$D_{\xi},$ B^2	Корреляционная функция СП
1	3	2	
2	5	1	

3	4	3	
4	6	2	
5	7	6	
6	8	4	
7	9	8	

8	10	1	
9	11	7	
10	12	8	

Задача 1. Нарисовать потенциально возможные осциллограммы нормального случайного процесса $\xi(t)$, обладающего спектральной плотностью мощности...

Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$	Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$
1		6	

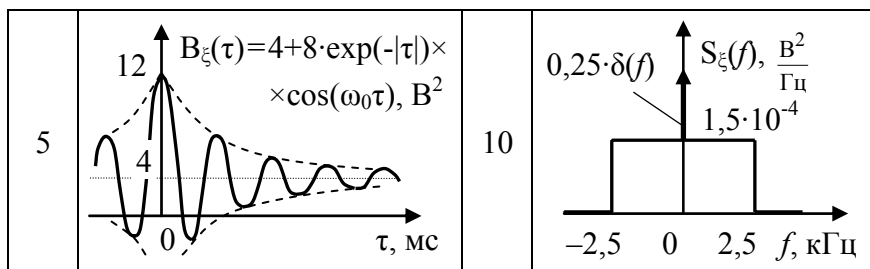
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Задача 2. По представленной в таблице ниже спектральной плотности мощности эргодического случайного процесса $\xi(t)$ определить постоянную составляющую реализаций этого процесса и его дисперсию D_ξ .

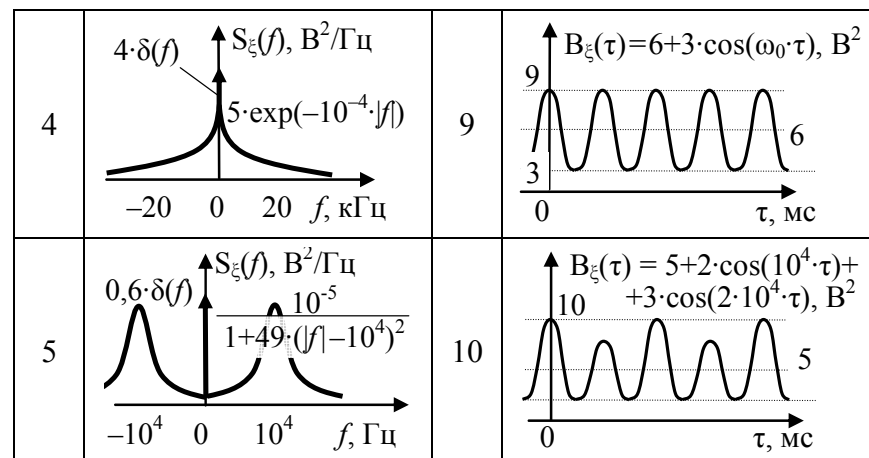
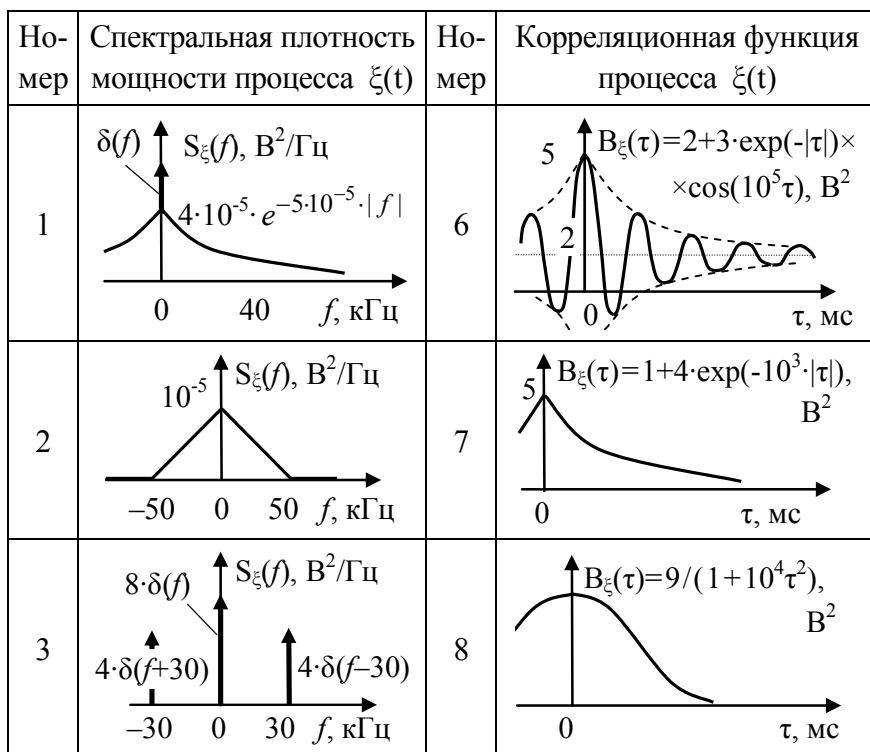
Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$	Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Задача 3. По заданному в таблице ниже энергетическому описанию случайного процесса $\xi(t)$ определить сопряженную характеристику (корреляционную функцию, если задана СПМ, и СПМ, если известна корреляционная функция).

Но- мер	Корреляционная функция процесса $\xi(t)$	Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	

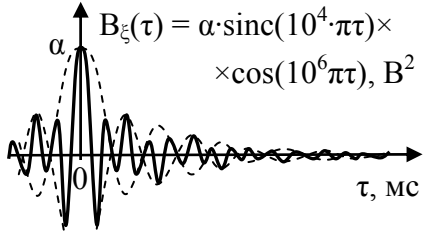
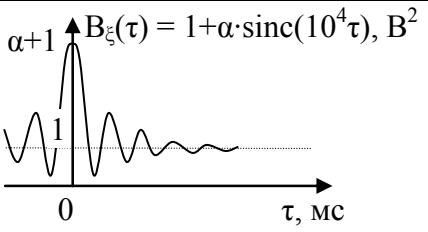
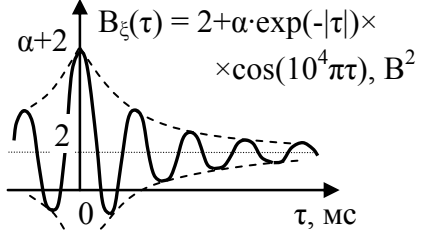
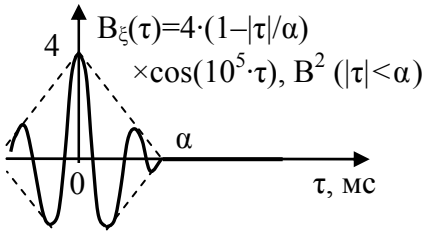
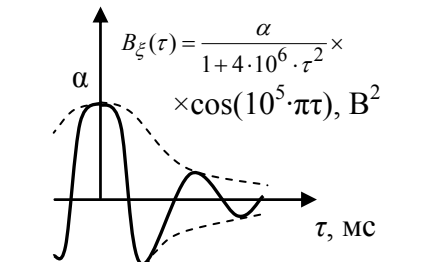


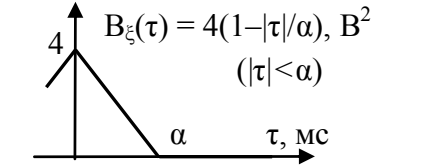
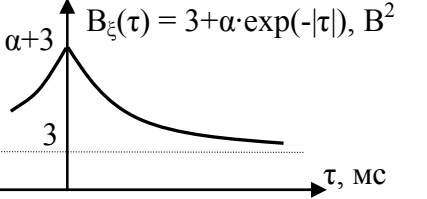
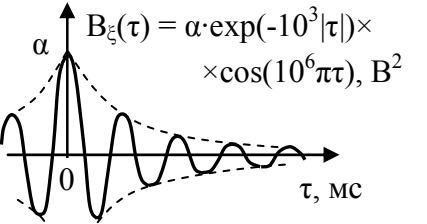
Задача 4. Определить интервал корреляции СП $\xi(t)$, энергетические характеристики которого представлены в таблице...



Задача 5. В левой колонке представленной ниже таблицы приведено общее выражение для корреляционной функции эргодического случайного процесса $\xi(t)$. Определите входящую в описание свойств процесса неизвестную константу α , если известно, что на указанной в центральной колонке частоте f_1 спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$ принимает значение, приведенное в правой колонке таблицы.

Но- мер	Корреляционная функция процесса $\xi(t)$	Частота f_1 , кГц	СПМ, $S_\xi(f_1)$, $B^2/Гц$
1		1	$4 \cdot 10^{-3}$
2		1	10^{-3}

3		500	$3 \cdot 10^{-8}$
4		1	$5 \cdot 10^{-4}$
5		5	$4 \cdot 10^{-3}$
6		$50/\pi$	$2 \cdot 10^{-2}$
7		50	10^{-4}

8		$1/(6\alpha)$	$2 \cdot 10^{-4}$
9		0,01	10^{-9}
10		500	10^{-4}

Лабораторная работа № 2 «Энергетические характеристики случайных процессов»

Цель работы – экспериментальное исследование энергетических (корреляционных и спектральных) характеристик случайных процессов.

2.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

2.4.1. При определении энергетических характеристик шума следует учитывать, что процессы с одним и тем же одномерным распределением могут иметь весьма отличающиеся корреляционные функции и спектральные плотности мощности (СПМ), так как одномерные законы распределения определяют поведение СП в одном временном сечении, а энергетические характеристики – развитие процесса во времени.

Так, например, имеющий нормальное распределение мгновенных значений случайный процесс может (формально) обладать неизменной во всей бесконечно протяженной области частот спектральной плотностью мощности. Подобный СП называется нормальным белым шумом и обладает следующими характеристиками

СПМ	$S_{\text{БШ}}(f) = N_0$, при любых f ,	
корреляционная функция	$B_{\text{БШ}}(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau)$,	(2.23)
дисперсия	$D_{\text{БШ}} \rightarrow \infty$.	

Неограниченная дисперсия процесса указывает, что на практике подобный процесс (с бесконечно большой мощностью) наблюдаться не может. Вместе с тем, модель белого шума удобна при описании воздействия на реальные устройства реальных широкополосных процессов, занимающих полосу частот, существенно превышающую полосу пропускания обрабатываемой системы. Определяемые соотношениями (2.23) характеристики вместе с приближенным видом реализации подобного процесса показаны на рис. 2.4(а).

2.4.2. Если спектральная плотность мощности СП остается неизменной лишь в ограниченной области частотной оси, то соответствующий СП характеризуется уже конечной (реальной) дисперсией и обладает, естественно, иными, чем белый шум, свойствами. Пример реализации и характеристик ограниченного по частоте белого шума показан выше на рис. 2.4(б).

Характеристики ограниченного по частоте белого шума определяются выражениями

СПМ	$S_{\text{ОЧ}}(f) = N_0$, при $ f < F_{\text{max}}$,	
коррел. функция	$B_{\text{ОЧ}}(\tau) = 2 \cdot N_0 \cdot F_{\text{max}} \cdot \text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot F_{\text{max}} \cdot \tau)$,	(2.24)
дисперсия	$D_{\text{ОЧ}} = 2 \cdot N_0 \cdot F_{\text{max}}$,	

где $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$.

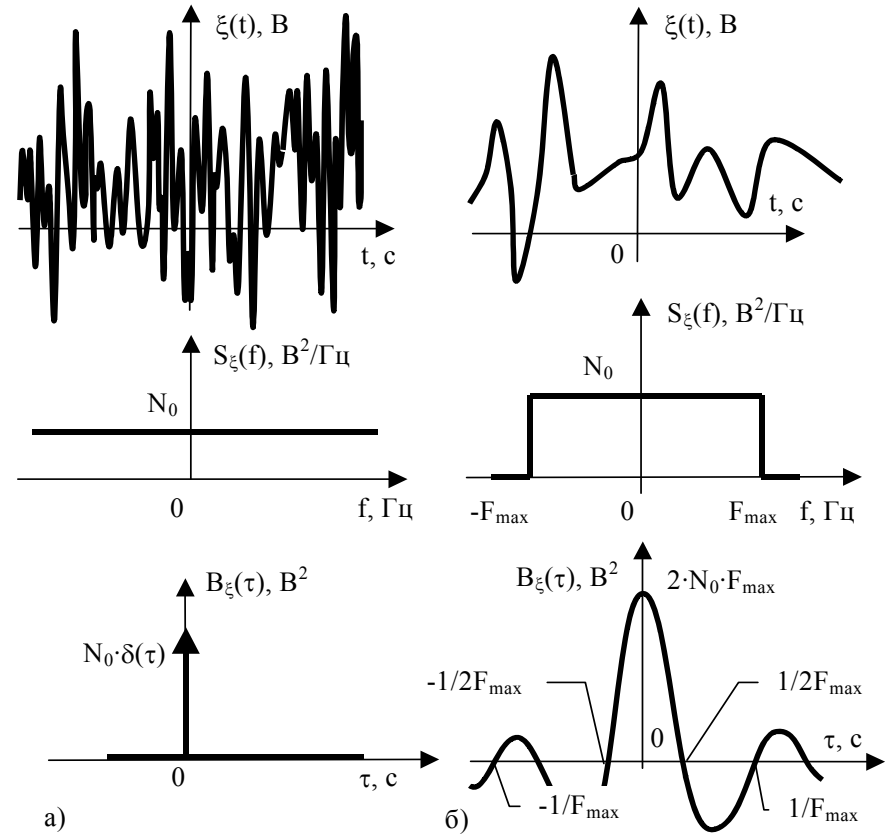


Рис. 2.4. Энергетические характеристики белого шума (а) и белого шума, ограниченного по частоте (б)

Отличительной особенностью этого процесса является сравнительно плавный характер изменения его мгновенных значений, причем чем меньше величина F_{max} (т.е. чем более узким является спектр процесса), тем более гладкими оказываются его реализации.

2.4.3. Интересным для практики является и нормальный белый шум, ограниченный по полосе. Пример его реализации и характеристик приведен на рис. 2.5.

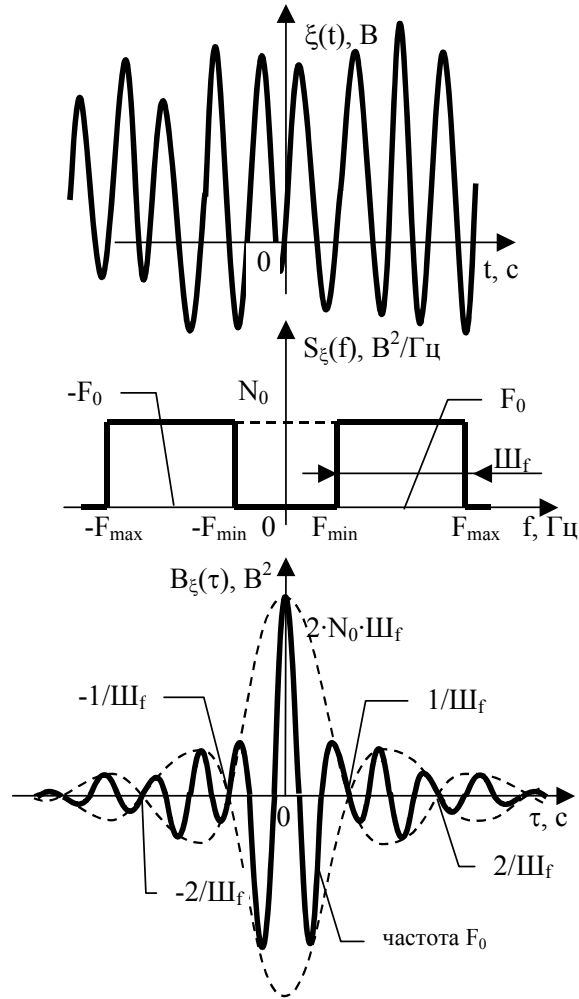


Рис. 2.5. Энергетические характеристики ограниченного по полосе белого шума

Для такого процесса характерен колебательный характер изменения его мгновенных значений, причем, чем меньше величина Ш_f (т.е. чем более узким является спектр процесса), тем более гладкой является огибающая его реализаций; чем больше частота F_0 , тем более высокочастотным является заполнение.

Аналитически характеристики ограниченного по полосе белого шума определяются выражениями

$$S_{\text{ОП}}(f) = N_0, \quad \text{при } F_{\min} < |f| < F_{\max},$$

$$B_{\text{ОП}}(\tau) = 2 \cdot N_0 \cdot \text{Ш}_f \cdot \text{sinc}(\pi \cdot \text{Ш}_f \cdot \tau) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot \tau), \quad (2.25)$$

$$D_{\text{ОП}} = 2 \cdot N_0 \cdot \text{Ш}_f,$$

где $F_0 = 0,5 \cdot (F_{\max} + F_{\min})$ - центральная частота,
 $\text{Ш}_f = (F_{\max} - F_{\min})$ - ширина спектра процесса.

Обратите внимание, что во всех ранее представленных случаях спектральная плотность мощности – это двухсторонняя (т.е. справедливая как для положительных, так и на отрицательных частот) функция, измеряемая в $\text{В}^2/\text{Гц}$.

2.4.4. Энергетические характеристики **гармонического** сигнала со случайной начальной фазой задаются соотношениями
 корреляционная функция $B_{\cos}(\tau) = 0,5 \cdot U_m^2 \cdot \cos(2\pi \cdot F_0 \cdot \tau)$, В^2
 СПМ $S_{\cos}(f) = 0,25 \cdot U_m^2 \cdot [\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0)]$, $\text{В}^2/\text{Гц}$
 дисперсия $D_{\cos} = U_m^2/2$; эффективное значение $\sigma_{\cos} = U_m/\sqrt{2}$.

Графически эти характеристики показаны на рис. 2.6.

2.4.5. Последовательность **прямоугольных** импульсов со случайной начальной фазой имеет следующие энергетические характеристики

корреляционную функцию $B_{\text{rect}}(\tau) = U_m^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\text{rect}}(\tau - kT_{\Pi})$, В^2 ,

где $\gamma_{\text{rect}}(\tau) = 1 - 4 \cdot |\tau| / T_{\Pi}$, при $|\tau| \leq 0,5 \cdot T_{\Pi}$

$$\text{СПМ } S_{\text{rect}}(\omega) = \frac{8 \cdot U_m^2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \delta\left(f - \frac{2n+1}{T_{\Pi}}\right), \quad \text{В}^2/\text{Гц},$$

дисперсию $D_{\text{rect}} = U_m^2$; эффективное значение $\sigma_{\text{rect}} = U_m$.

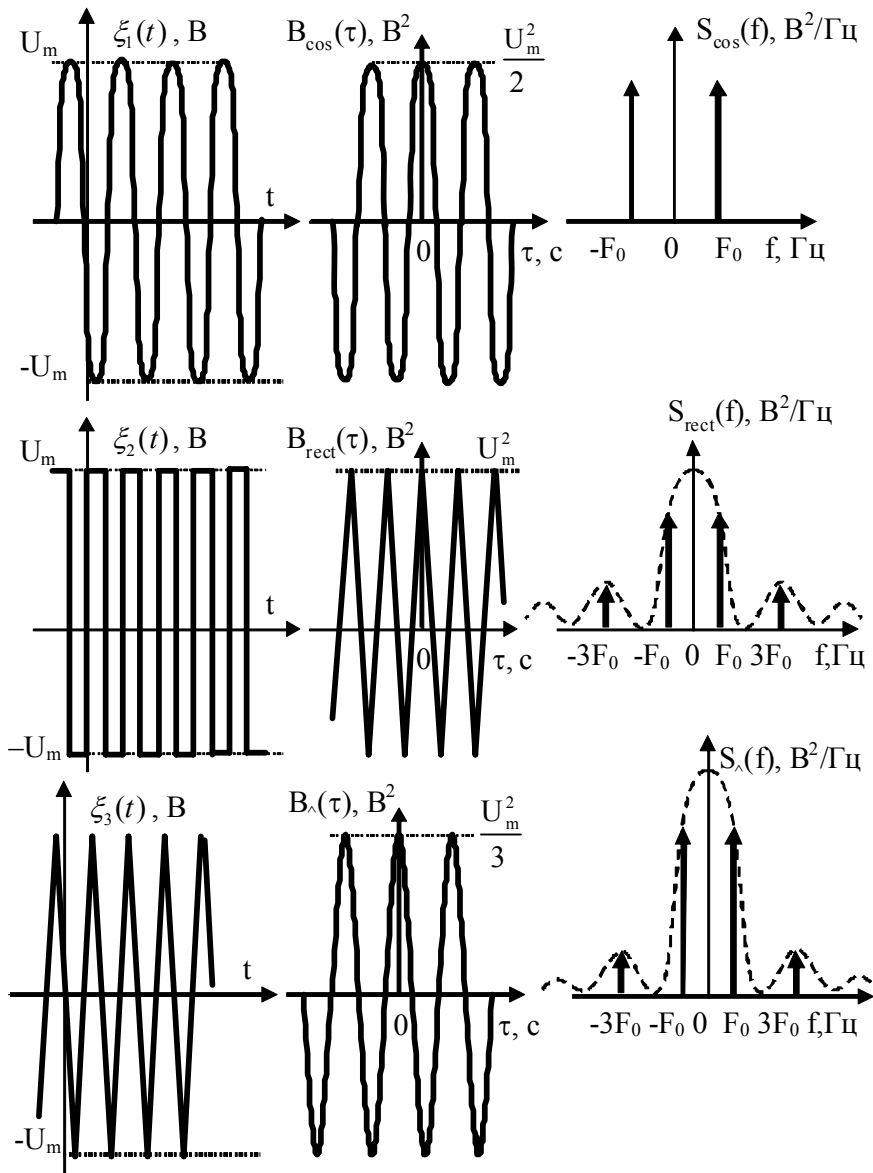


Рис. 2.6. Энергетические характеристики случайных сигналов

2.4.6. Последовательность **треугольных** импульсов со случайной временной задержкой характеризуется следующими энергетическими показателями

корреляционной функцией $B_{\wedge}(\tau) = U_m^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\wedge}(\tau - kT_n)$, B^2 ,

где $\gamma_{\wedge}(\tau) = \frac{1}{3} - 8 \cdot \left| \frac{\tau}{T_n} \right|^2 + \frac{32}{3} \cdot \left| \frac{\tau}{T_n} \right|^3$, при $|\tau| \leq 0,5 \cdot T_n$

СПМ $S_{\wedge}(\omega) = \frac{8 \cdot U_m^2}{\pi^4} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \cdot \delta\left(f - \frac{2n+1}{T_n}\right)$, $B^2/\Gamma_{\text{ц}}$,

дисперсия $D_{\wedge} = U_m^2/3$; эффективное значение $\sigma_{\wedge} = U_m/\sqrt{3}$

Таблица 2.1

Номер бригады	Тип шума: ограниченный по...	Максимальное значение СПМ S_0 , $B^2/\Gamma_{\text{ц}}$	Частотные ограничения
1	частоте	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$F_{\text{max}} = 1,0 \text{ кГц}$
2	полосе	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$F_{\text{min}} = 1,2 \text{ кГц};$ $F_{\text{max}} = 2,0 \text{ кГц}$
3	частоте	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$F_{\text{max}} = 25,0 \text{ кГц}$
4	частоте	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$F_{\text{max}} = 32,0 \text{ кГц}$
5	частоте	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$F_{\text{max}} = 1,6 \text{ кГц}$
6	полосе	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$F_{\text{min}} = 1,6 \text{ кГц};$ $F_{\text{max}} = 2,4 \text{ кГц}$
7	частоте	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$F_{\text{max}} = 36,0 \text{ кГц}$
8	частоте	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$F_{\text{max}} = 32,0 \text{ кГц}$

2.5. Домашнее задание к лабораторной работе

2.5.1. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант исследований.

2.5.2. Для своего индивидуального варианта рассчитайте и внесите в отчет графики спектральной плотности мощности и корреляционной функции нормального шума, параметры которого заданы в табл. 2.1.

2.5.3. Применительно к квазислучайным сигналам, указанным в табл. 2.2 и проанализированному нормальному шуму (из табл. 2.1) рассчитайте амплитуду сигнала $A_{\max}$, обеспечивающую отношение сигнал-шум по напряжению $h = 2$, и амплитуду сигнала $A_{\min}$, обеспечивающую отношение сигнал-шум $h = 0,2$. Для каждой из найденных амплитуд рассчитайте и постройте графики корреляционных функций и спектральных плотностей мощности аддитивной смеси сигнала и шума.

Таблица 2.2

Номер бригады	Вид формируемого сигнала	Параметры сигнала
1	Прямоугольный	$U_m = A_{\max}; F = 1,1 \text{ кГц}$
2	Треугольный	$U_{\min} = -A_{\max}; U_{\max} = +A_{\max}; F = 1,2 \text{ кГц}$
3	Гармонический	$U_m = A_{\max}; F = 1,3 \text{ кГц}$
4	Прямоугольный	$U_m = A_{\max}; F = 1,4 \text{ кГц}$
5	Треугольный	$U_{\min} = -A_{\max}; U_{\max} = +A_{\max}; F = 1,5 \text{ кГц}$
6	Гармонический	$U_m = A_{\max}; F = 1,6 \text{ кГц}$
7	Прямоугольный	$U_m = A_{\max}; F = 1,7 \text{ кГц}$
8	Гармонический	$U_m = A_{\max}; F = 1,8 \text{ кГц}$

Примечание: при построении энергетических характеристик смеси сигнала и шума следует иметь в виду, что для некоррелированных СП корреляционная функция суммы равна сумме корреляционных функций слагаемых. Аналогичное утверждение справедливо и для спектральной плотности процессов.

2.6. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Исследование энергетических характеристик шума

Цели этапа:

- 1) получить оценки корреляционной функции и спектральной плотности мощности шума и сравнить их с теоретическими;
- 2) оценить стабильность получаемых оценок энергетических характеристик СП.

Таблица 2.3

Номер бригады	Модуль №1 - источник шума	Параметры источника шума
1	тип 1	$\sigma = 0,5 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}$
2	тип 2	$\sigma = 0,8 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}; F = 1,6 \text{ кГц}$
3	Широкополосный	$\sigma = 1,0 \text{ В}$
4	Широкополосный	$\sigma = 0,8 \text{ В}$
5	тип 1	$\sigma = 0,8 \text{ В}; \tau = 1,5 \text{ мс}$
6	тип 2	$\sigma = 0,8 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}; F = 2,0 \text{ кГц}$
7	Широкополосный	$\sigma = 1,2 \text{ В}$
8	Широкополосный	$\sigma = 1,6 \text{ В}$

Рекомендации по выполнению:

2.6.1. Установить тип и параметры модуля №1 схемы моделирования случайных процессов в соответствии с требо-

ваниями табл. 2.3; остальные модули перевести (при необходимости) в выключенное состояние. Установить объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов; частоту дискретизации $F_d = 48$ кГц. В блоке анализаторов настроить оба анализатора на контрольную точку №1; установить левый анализатор в состояние осциллографа, а правый - коррелометра. Ось вертикального масштабирования коррелометра установить в состояние наибольшего разрешения (мелкий масштаб).

2.6.2. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов. Оценить стабильность наблюдаемых корреляционных функций. Одну или две из них занести в отчет.

2.6.3. Переключить правый анализатор в состояние спектроанализатора. Продолжая обновлять данные, убедиться, что в отличие от корреляционной функции оценка спектральной плотности мощности даже при большой длительности выборки оказывается весьма неустойчивой, однако расположение спектральных выбросов по частоте носит случайный характер и при усреднении различных спектральных оценок результирующая функция частоты будет носить гладкий характер. Зарисовать в отчет приближенный вид произвольного наблюдаемого спектра.

Этап 2. Исследование энергетических характеристик квазислучайных процессов

Цели этапа:

- 1) получить и сравнить их с теоретическими оценки корреляционной функции и спектральной плотности мощности периодических квазислучайных сигналов;
- 2) исследовать влияние объема анализируемой выборки сигнала на точность получаемых оценок;
- 3) оценить влияние параметров сигналов на вид (масштаб) их энергетических характеристик.

Рекомендации по выполнению:

2.6.4. Установить тип и параметры модуля №1 схемы моделирования в соответствии с требованиями табл. 2.2; вертикальный масштаб спектроанализатора установить максимально возможным. Проследить за изменениями оценок спектральной плотности мощности наблюдаемого СП и типовой спектр качественно (приблизительно) занести в отчет.

2.6.5. Переключить левый анализатор в режим оценки числовых характеристик СП, а правый анализатор – в состояние коррелометра. Провести серию из 15...20 экспериментов, в ходе которой сопоставить наблюдаемые корреляционные функции с теоретическими. Зафиксировать в отчете (строго, с соблюдением масштаба) типовую оценку корреляционной функции и полученные по той же реализации значения оценок математического ожидания и дисперсии СП.

2.6.6. Установить объем выборки $N = 512$. Провести серию из 15...20 экспериментов и, если изменение N повлияло на вид наблюдаемых оценок, занести одну из наиболее отличающихся оценок корреляционной функции СП в отчет.

2.6.7. Восстановить объем выборки $N = 4096$ отсчетов, переключить оба анализатора на выход первого сумматора, т.е. на контрольную точку №6 и установить модуль №3 схемы моделирования в режим формирования постоянной составляющей, выбирая ее величину по правилу

$$U = 1 + 0,3 \cdot N_{бр}, \quad В$$

где $N_{бр}$ - номер бригады.

Для указанного способа формирования СП повторить п. 2.6.5.

Этап 3. Исследование влияния аддитивного шума на энергетические характеристики СП

Цель этапа:

1) исследовать зависимость характеристик смеси сигнала и шума от интенсивностей составляющих и отношения сигнал-шум.

Рекомендации по выполнению:

2.6.8. Переключить модуль №3 схемы моделирования в режим формирования шума с параметрами из табл. 2.3. Проверить, что модуль №1 обеспечивает генерацию сигнала, задаваемого табл. 2.2. Установить анализаторы в состояние осциллографа и коррелометра и настроить (если это не было сделано ранее) на выход первого сумматора, т.е. на контрольную точку №6.

2.6.9. Подобрать такой горизонтальный масштаб отображения корреляционной функции, чтобы при сохранении различимости ее формы на экране умещалось как можно больше периодов колебаний. Формируя новые реализации случайного процесса путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов и внести в отчет типовую корреляционную функцию СП. Для упрощения построения графика допустимо фиксировать его качественно, т.е. с приближенным сохранением формы и регистрацией наиболее важных вертикальных и горизонтальных координат.

2.6.10. Повторить предыдущий пункт, изменив амплитуду сигнала, формируемого модулем №1, на величину $A_{\min}$, рассчитанную при выполнении п. 2.5.3 домашнего задания.

2.6.11. В окне программы "Параметры модулей" открыть вкладку "Модуль 3", контролирующую параметры формируе-

мого схемой моделирования шума. Осуществляя ручную корректировку уровня шума в пределах от $0,2 \cdot \sigma^*$ до $2 \cdot \sigma^*$, (где σ^* – эффективное значение шума, определяемое индивидуальным вариантом задания) проследить за изменением оценок корреляционной функции СП, обращая внимание на разницу в поведении этих функций при значениях аргумента $|\tau| \approx 0$ и при $|\tau| \gg 0$.

По результатам наблюдения принять решение о возможности по форме корреляционной функции обнаружить наличие в составе анализируемого СП некоторой периодической компоненты. Сделанное заключение внести в отчет.

2.6.12. Переключить коррелометр в состояние спектроанализатора и повторить исследования, описанные в предыдущем пункте. Оценить возможность обнаружения факта присутствия в составе наблюдаемого СП периодической компоненты по результатам анализа его спектральной плотности мощности и внести соответствующее заключение в отчет.

2.7. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Дайте определения корреляционной и ковариационной функций СП. Перечислите их основные свойства.

2. Что называется спектральной плотностью мощности СП? Как она связана с амплитудным Фурье-спектром реализации и с корреляционной функцией СП?

3. Приведите известные Вам определения интервала корреляции и ширины спектра СП. Как они связаны между собой?

4. Какие процессы называют узкополосными? Как аналитически рассчитываются корреляционные функции узкополосных случайных процессов при известной спектральной плотности мощности? Приведите примеры.

5. Как определить эффективное значение случайного процесса по его корреляционной функции и спектральной плотности мощности?

6. Какой случайный процесс называют “белым” шумом? Каковы энергетические характеристики ограниченного по частоте и ограниченного по полосе белого шума?

7. Как влияет аддитивный широкополосный шум на корреляционную функцию гармонического колебания со случайной начальной фазой? Приведите примеры для нескольких существенно различных отношений сигнал-шум.

8. Можно ли обнаружить факт присутствия периодического сигнала в шуме при отношении сигнал-шум $h < 1$? Предложите способ реализации такого обнаружителя.

9. Как может быть определена экспериментально корреляционная функция и спектральная плотность мощности эргодического процесса?

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

3.1. Теоретические основы

Случайный процесс $\zeta(t)$, поступающий на вход линейного устройства порождает на его выходе реакцию $\eta(t)$, которая, естественно, также является случайной, а её вероятностные и энергетические характеристики определяются статистическими характеристиками воздействия $\zeta(t)$ и свойствами цепи.

3.1.1. Оценка вероятностных характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие

Большинство линейных цепей являются цепями инерционными, поэтому текущее значение на выходе цепи определяется не только значением, воздействующим на вход в данный момент времени, но и всей бесконечной совокупностью значений воздействия, поступавших на вход ранее. Поскольку расчет закона распределения даже для суммы двух случайных величин требует выполнения свертки плотностей вероятности слагаемых, а в рассматриваемых случаях таких лагаемых бесконечно много, то общего способа расчета закона распределения реакции линейной цепи на случайное воздействие не существует. Вместе с тем, есть два случая, когда вероятностные свойства реакции цепи можно предсказать:

1. Если на линейную цепь воздействует нормальный СП, то и процесс на выходе цепи будет обладать нормальным распределением.

2. При воздействии на узкополосную цепь широкополосного СП наблюдается “**эффект нормализации**”, заключающийся в том, что закон распределения реакции цепи неограниченно приближается к нормальному. Причиной эффекта нормализации служит центральная предельная теорема Ляпунова.

3.1.2. Частотный метод расчета энергетических характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие

Частотный метод предполагает известной амплитудно-частотную характеристику цепи $|K(f)|$ и устанавливает соответствие между спектральными плотностями мощности процессов на входе и выходе цепи

$$S_{\eta}(f) = S_{\xi}(f) \cdot |K(f)|^2. \quad (3.1)$$

Корреляционные свойства реакции цепи могут быть рассчитаны по $S_{\eta}(f)$ в соответствии с теоремой Винера-Хинчина (2.12), (2.14).

3.1.3. Временной метод расчета энергетических характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие

При использовании временного метода анализа свойства цепи определяются корреляционной функцией ее импульсной характеристики

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 \cdot e^{+j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot g(x-\tau) dx, \quad (3.2)$$

где $|\dot{K}(\omega)|$ – АЧХ, а $g(\tau)$ – импульсная характеристика цепи.

Согласно временному методу соответствие между корреляционными функциями воздействия и реакции цепи имеет вид

$$B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(x) \cdot R_g(\tau - x) dx. \quad (3.3)$$

Спектральные свойства реакции цепи могут быть рассчитаны по $B_{\eta}(\tau)$ в соответствии с теоремой Винера-Хинчина (2.11), (2.13).

3.1.4. Понятие шумовой полосы пропускания цепи

Шумовая полоса пропускания линейной цепи используется при воздействии на цепь белого шума или процесса, спектр которого существенно шире величины полосы пропускания цепи. Она представляет собой полосу пропускания идеального фильтра, который обладает коэффициентом передачи равным максимальному коэффициенту передачи анализируемой цепи и обеспечивает на выходе ту же мощность реакции, что и анализируемая цепь. Выражение для расчета шумовой полосы имеет вид

$$\Pi_{\text{шф}} = \int_0^{+\infty} \frac{|\dot{K}(f)|^2}{\max_f \{|\dot{K}(f)|^2\}} df. \quad (3.4)$$

Ширина шумовой полосы линейной цепи, как правило, пропорциональна полосе пропускания по уровню 0,707. Для RC-цепочек и колебательных контуров, в частности, соотношение между этими двумя параметрами составляет

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{f\,0,707}. \quad (3.5)$$

3.2. Практические примеры

Задача 3.1. Источник постоянного напряжения обеспечивает протекание через резистор с сопротивлением $R = 5 \text{ кОм}$ (рис. 3.1) постоянного тока силой $I_0 = 2 \text{ мА}$.

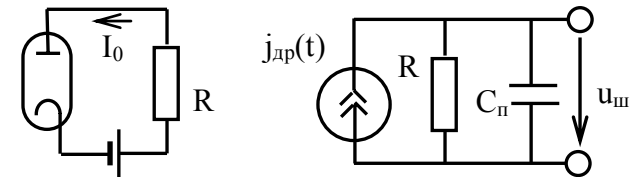


Рис. 3.1. Исследуемая схема из задачи 1 и ее схема замещения по переменной составляющей

Каково эффективное значение шумового напряжения на этом резисторе, вызываемого действием дробового тока, если паразитная емкость электронной лампы составляет 20 пФ?

Решение

а) Выше в п. 2.1.5 уже отмечалось, что в радиотехнических цепях даже при (формально) постоянных воздействиях возникают флуктуации напряжения и тока, вызываемые реально хаотическим движением заряженных частиц. Точно также и в рассматриваемой цепи наряду с упорядоченным движением зарядов, порождаемых подключенным источником постоянного напряжения, существует флуктуационная составляющая тока. Обнаружить эту составляющую можно, например, измеряя чувствительным прибором переменную составляющую напряжения на резисторе R .

б) Дробовой ток представляет собой стационарный широкополосный случайный процесс со спектральной плотностью мощности, определяемой (2.18). Для расчета наблюдаемого на резисторе R напряжения воспользуемся схемой замещения по переменной составляющей. Учитывая, что используемая в схеме электронная лампа обладает паразитной емкостью $C_{\text{п}}$ эта схема замещения будет иметь вид, показанный на рис. 3.1 справа.

в) При воздействии на параллельную RC-цепочку тока и выходном сигнале в форме напряжения в роли коэффициента передачи цепи выступает ее комплексное сопротивление

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{1}{1/R + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega \cdot RC},$$

а АЧХ цепи задается выражением $|\dot{K}(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}}$.

г) Стандартным методом дальнейшего решения задачи является использование частотного метода анализа (такой вариант будет использован, например, в следующей задаче). Вместе с тем, есть и альтернативный, более компактный путь решения

задачи, основанный на понятии шумовой полосы пропускания цепи. Действительно, для RC-цепочки в соответствии с (3.5)

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot RC} = \frac{1}{4 \cdot RC} = \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-12}} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ (Гц)},$$

максимум коэффициента передачи определяется

$$K_0 = \max_{\omega} |\dot{K}(\omega)| = R$$

и, следовательно, мощность шума на выходе исследуемой цепи должна совпадать с мощностью шума на выходе идеального ФНЧ, на вход которого поступает дробовой ток. Применительно к идеальному ФНЧ спектральные плотности мощности на входе и на выходе показаны на рис. 3.2, а мощность (дисперсия) выходного процесса определяется площадью под кривой $S_{\text{вых}}(f)$.

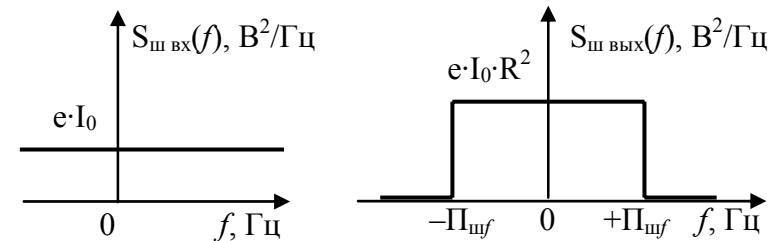


Рис. 3.2. Спектральная плотность мощности шума на входе и на выходе идеального ФНЧ

Это с учетом прямоугольной формы графика приводит нас к результату

$$D_{\text{ш вых}} = 2 \cdot \Pi_{\text{шф}} \cdot e \cdot I_0 \cdot R^2 = 5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5000^2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ В}^2.$$

Итак, эффективное значение шумового напряжения на выходе цепи составит $\sigma_{\text{ш вых}} = \sqrt{D_{\text{ш вых}}} = 2 \cdot 10^{-4} = 0,2 \text{ мВ}$.

Задача 3.2. На последовательную RC-цепь с номиналами элементов $R = 2 \text{ кОм}$, $C = 0,5 \text{ мкФ}$ воздействует нормальный случайный процесс с математическим ожиданием $M_{u1} = +1 \text{ (В)}$

и корреляционной функцией $B_{u1}(\tau) = 1 + 10 \cdot e^{-10^3 \cdot |\tau|}$ (B^2). Найти плотность вероятности напряжения, снимаемого с емкости.

Решение

а) В пункте 3.1.1 отмечалось, что хотя общего решения задача о нахождении закона распределения процесса на выходе линейной цепи не имеет, но при воздействии на цепь нормального процесса реакция обязана иметь нормальное распределение. Таким образом, поставленная задача фактически сводится к поиску параметров a_2 и σ_2 выходного процесса.

б) Комплексный коэффициент передачи последовательной RC-цепи (рис. 3.3) определяется выражением

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \tau_u}, \quad \text{где } \tau_u = R \cdot C = 10^{-3} \text{ (с)},$$

а ее АЧХ $|\dot{K}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_u)^2}}$ представлена на рис. 3.3 справа.

в) Для оценки математического ожидания напряжения $u_2(t)$ целесообразно учесть, что физически математическому ожиданию соответствует постоянная составляющая случайного процесса. Но, как следует из физических свойств и АЧХ цепи, RC-цепь передает постоянную составляющую на выход без изменений и, следовательно, оцениваемое матожидание просто совпадает с исходным $M_{u2} = M_{u1} = a_2 = +1$ (В).

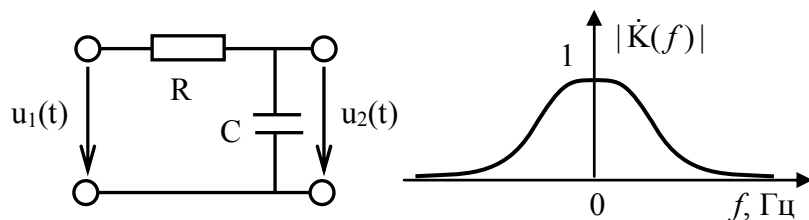


Рис. 3.3. Исследуемая цепь из задачи 2

г) Последующая часть решения требует учета корреляционной функции воздействующего напряжения, однако использовать в расчетах непосредственно заданное в условии численное выражение допустимо, но не целесообразно. Переписав $B_{u1}(\tau)$ в символьной форме, мы не только сможем получить более универсальное решение, но и контролировать корректность промежуточных величин, на основе анализа их размерностей. Значение $B_{u1}(0)$ характеризует полную мощность реализаций случайного процесса, состоящую из мощности постоянной M_{u1}^2 и флуктуационной D_{u1} составляющих. Но $M_{u1}^2 = 1$ (B^2), поэтому амплитуда “10” второго слагаемого $B_{u1}(\tau)$ однозначно соответствует дисперсии воздействия $D_{u1} = 10$ (B^2). Кроме того, можно учесть, что $10^3 = 1/\tau_u$ (введено выше), а потому корреляционную функцию воздействия можно переписать в виде

$$B_{u1}(\tau) = 1 + D_{u1} \cdot e^{-|\tau|/\tau_u} \text{ (В}^2\text{)}. \quad (3.6)$$

д) Корреляционная функция (3.6) не является δ -образной, поэтому мощность этого процесса распределена вдоль оси частот неравномерно, воздействие не является белым шумом и воспользоваться для поиска эффективного значения выходного напряжения понятием шумовой полосы невозможно. Будем рассчитывать величину σ_2 на основе частотного метода анализа, изложенного в п. 3.1.2, для чего, воспользовавшись теоремой Винера-Хинчина (2.13), определим спектральную плотность мощности воздействующего напряжения.

Учитывая, что при интегрировании лишь по неотрицательным значениям τ знак модуля в выражении корреляционной функции оказывается избыточным, запишем (2.13) в виде

$$S_{u1}(\omega) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} (1 + D_{u1} \cdot e^{-\tau/\tau_u}) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2\pi \cdot \delta(\omega) +$$

$$+ 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ D_{u1} \cdot \frac{e^{-\tau(1/\tau_y + j\omega)}}{-(1/\tau_y + j\omega)} \right\} \Big|_0^{+\infty} = 2\pi \cdot \delta(\omega) + 2 \cdot D_{u1} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1/\tau_y + j\omega} \right\} =$$

$$= 2\pi \cdot \delta(\omega) + D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_y}{1 + (\omega\tau_y)^2} \quad (\text{В}^2/\text{Гц}).$$

Первое слагаемое полученного выражения отражает факт наличия у воздействия постоянной составляющей, вследствие чего на нулевой частоте (в одной точке оси частот) сосредоточена мощность $M_{u1}^2 = 1 (\text{В}^2)$, а спектральная плотность мощности бесконечно велика. Влияние этого слагаемого на реакцию, наблюдаемую на выходе цепи, мы уже реально оценили выше, когда получили $M_{u2} = a_2 = +1 (\text{В})$, поэтому в дальнейших расчетах, направленных на анализ переменной составляющей выходного напряжения, будем учитывать лишь второе слагаемое $S_{u1}(\omega)$.

е) В соответствии с (3.1) спектральная плотность мощности переменной составляющей напряжения, снимаемого с емкости RC-цепи, определяется соотношением

$$S_{u2}(\omega) = D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_y}{1 + (\omega\tau_y)^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_y)^2}} \right)^2 = D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_y}{[1 + (\omega\tau_y)^2]^2}.$$

Интегрируя эту часть спектральной плотности мощности по аналогии с (2.10), получим среднюю мощность переменной составляющей реализации процесса, т.е дисперсию выходного напряжения

$$D_{u2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_y}{[1 + (\omega\tau_y)^2]^2} d\omega = \frac{D_{u1} \cdot \tau_y}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{dx / (\tau_y \cdot \cos^2(x))}{[1 / \cos^2(x)]^2}$$

Здесь использована подстановка $\omega\tau_y = \operatorname{tg}(x)$, где x изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, $[1 + (\omega\tau_y)^2] = 1 / \cos^2(x)$ и $d\omega = dx / (\tau_y \cdot \cos^2(x))$. Продолжая преобразование, получаем

$$D_{u2} = \frac{D_{u1}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{D_{u1}}{\pi} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{D_{u1}}{2}.$$

ж) Итак, поскольку на низких частотах коэффициент передачи RC-цепи близок к единице, а на высоких – снижается, то интенсивность процесса на выходе цепи оказывается ниже, чем на входе. В рассматриваемой задаче это уменьшение оказалось двукратным $D_{u2} = \sigma_2^2 = D_{u1} / 2 = 5 (\text{В}^2)$. Найденное таким образом значение σ_2 позволяет завершить решение и записать итоговую плотность вероятности выходного напряжения

$$W_{u2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{5}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot 5}} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{10}}, \quad (1/\text{В}).$$

Задача 3.3. Показанный на рис. 3.4 резонансный усилитель обеспечивает на частоте резонанса контура $f_{\text{рез}} = 2$ МГц коэффициент усиления $K_0 = 25$ и обладает полосой пропускания $\Delta f_{0,707} = 50$ кГц. Усилитель работает при температуре $t^\circ \text{C} = 17^\circ \text{C}$. Тепловой шум резисторов $R_1 = 36$ кОм и $R_2 = 7,5$ кОм, усиливаясь, проходит на выход. Если на вход усилителя подать слабое гармоническое напряжение частоты $f_c = 2$ МГц, то при какой амплитуде воздействия на выходе будет наблюдаться отношение сигнал-шум $h = 1$?

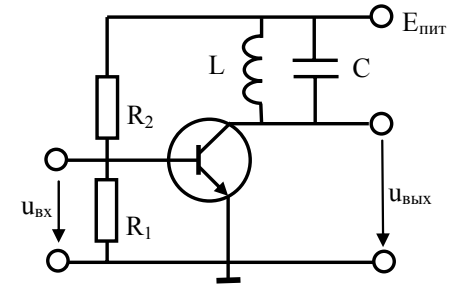


Рис. 3.4. Резонансный усилитель из задачи 3

Решение

а) Если исследуемому усилителю поставить в соответствие его схему замещения, то по отношению к переменной составляющей резисторы R_1 и R_2 окажутся включенными параллельно и их можно будет заменить эквивалентным сопротивлением

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{36 \cdot 7,5}{36 + 7,5} = 6,2 \text{ кОм}.$$

б) Ширина спектра теплового шума многократно превосходит полосу пропускания усилителя, так что по отношению к нему этот шум можно считать белым. Как следствие, для расчета интенсивности отклика усилителя на этот шум можно использовать понятие шумовой полосы, которая согласно (3.5) будет равна

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{f_{0,707}} = 78,54 \text{ кГц}.$$

в) С использованием понятия шумовой полосы мощность процесса на выходе линейной цепи определяется соотношением

$$D_{\text{вых}} = 2 \cdot \Pi_{\text{шф}} \cdot K_0^2 \cdot N_0, \quad (3.7)$$

где N_0 – спектральная плотность мощности процесса на входе цепи, для теплового шума определяемая (2.19). Учитывая также, что абсолютная температура отличается от температуры в градусах Цельсия на 273° , получаем окончательно

$$\begin{aligned} D_{\text{вых}} &= 2 \cdot \Pi_{\text{шф}} \cdot K_0^2 \cdot 2 \cdot k \cdot (t_C^\circ + 273^\circ) \cdot R_3 = \\ &= 2 \cdot 78540 \cdot 25^2 \cdot 2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 6200 = 4,87 \cdot 10^{-9} \text{ (В}^2\text{)}. \end{aligned}$$

г) Соотношение сигнал-шум равно единице, если мощности полезного сигнала и шума совпадают. Таким образом, для выполнения требований условия задачи на вход усилителя следует подать гармонический сигнал такой амплитуды, чтобы мощность отклика на него на выходе составляла $P_{\text{вых}} = 4,87 \cdot 10^{-9} \text{ (В}^2\text{)}$.

Вместе с тем, учитывая совпадение частоты воздействия с частотой настройки усилителя, можно записать

$$P_{\text{вых}} = (U_0 \cdot K_0)^2 / 2,$$

$$\text{откуда } U_0 = \frac{\sqrt{2 \cdot P_{\text{вых}}}}{K_0} = \frac{\sqrt{9,74 \cdot 10^{-9}}}{25} = 3,95 \cdot 10^{-6} \text{ (В)}.$$

Итак, тепловой шум оказывает на анализируемый усилитель такое же (по мощности) влияние, как и полезный гармонический сигнал с амплитудой $U_0 \approx 4 \text{ мкВ}$.

Задача 3.4. На фильтр, амплитудно-частотная характеристика которого показана на рис. 3.5 (слева), воздействует случайный процесс, спектральная плотность мощности которого отображена на рис. 3.5 (справа). Найти граничную частоту полосы пропускания фильтра, если известно, что средние мощности реализаций процессов на входе и выходе фильтра совпадают.

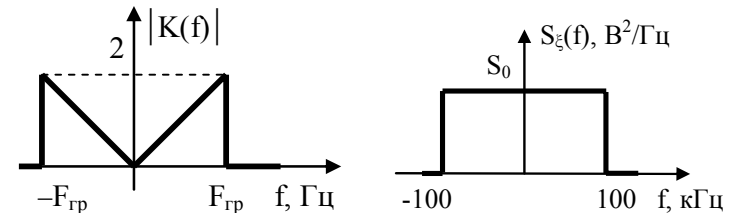


Рис. 3.5. Характеристики фильтра и воздействия из задачи 3.4

Решение

а) Учитывая прямоугольную форму спектральной плотности мощности воздействия, среднюю мощность реализаций процесса на входе фильтр можно определить из соотношения

$$P_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) df = 2 \cdot \Pi_{f_{\xi}} \cdot S_0,$$

где $\Pi_{f_{\xi}} = 100 \text{ кГц}$ – ширина спектра воздействия.

б) Рассчитать аналогично (из геометрических соображений) среднюю мощность реализаций на выходе фильтра весьма проблематично, поскольку спектральная плотность мощности выходного процесса пропорциональна квадрату АЧХ (см. (3.1)) и имеет параболическую форму. Более того, существует два различных и удовлетворяющих требованиям условия значения $F_{гр}$, одно из которых заметно меньше, а другое – заметно больше $\Pi_{f\xi}$ и способы расчета каждого из них имеют свои особенности.

в) Для варианта $F_{гр} < \Pi_{f\xi}$ на основании (2.10) записываем

$$P_{полн} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot |K(f)|^2 df = S_0 \cdot \int_{-F_{гр}}^{+F_{гр}} (2 \cdot f / F_{гр})^2 df = \frac{4 \cdot S_0}{F_{гр}^2} \cdot \frac{f^3}{3} \Big|_{-F_{гр}}^{+F_{гр}} =$$

$$= \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot F_{гр} \text{ и, приравнявая } \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot F_{гр} = 2 \cdot \Pi_{f\xi} \cdot S_0, \text{ получаем}$$

$$F_{гр} = \frac{3}{4} \cdot \Pi_{f\xi} = 75 \text{ кГц.}$$

г) Для варианта $F_{гр} > \Pi_{f\xi}$ на основании (2.10) записываем

$$P_{полн} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot |K(f)|^2 df = S_0 \cdot \int_{-\Pi_{f\xi}}^{+\Pi_{f\xi}} (2 \cdot f / F_{гр})^2 df = \frac{4 \cdot S_0}{F_{гр}^2} \cdot \frac{f^3}{3} \Big|_{-\Pi_{f\xi}}^{+\Pi_{f\xi}} =$$

$$= \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot \frac{\Pi_{f\xi}^3}{F_{гр}^2} \text{ и, приравнявая } \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot \frac{\Pi_{f\xi}^3}{F_{гр}^2} = 2 \cdot \Pi_{f\xi} \cdot S_0, \text{ получаем}$$

$$F_{гр} = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \Pi_{f\xi} = 115,47 \text{ кГц.}$$

3.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории

Примечание: Правило выбора индивидуального варианта контрольных задач приведено во введении (см. с. 4).

Задача 0. На фильтр, схема которого приведена в таблице ниже, воздействует нормальный случайный процесс, имеющий прямоугольную спектральную плотность мощности

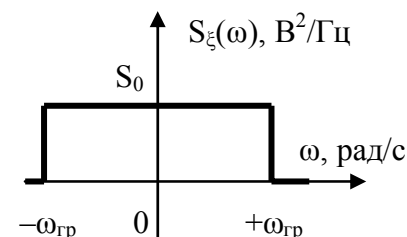
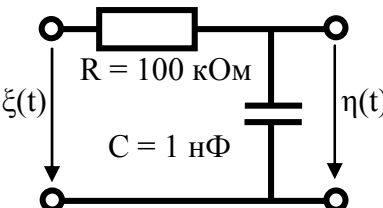
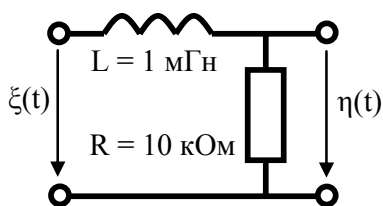
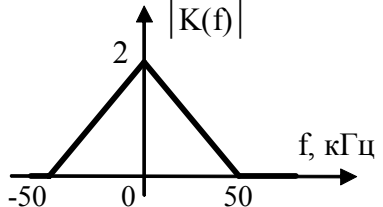
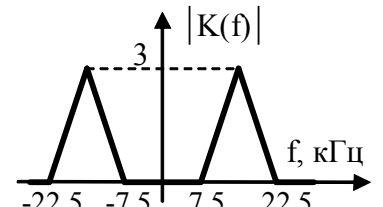
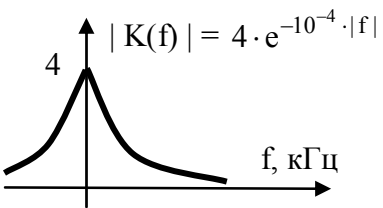
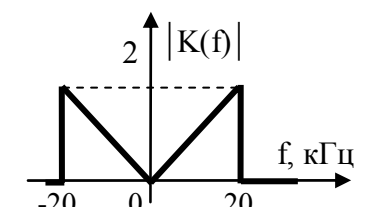


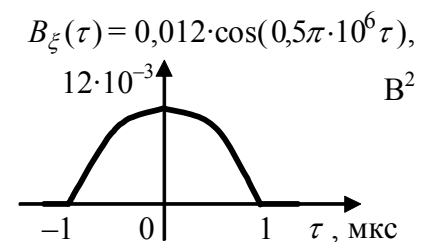
Рис. 3.6. Спектральные характеристики воздействующего шума из задачи 0

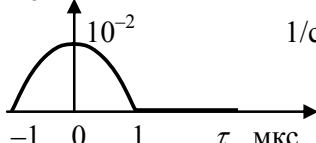
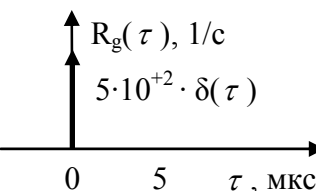
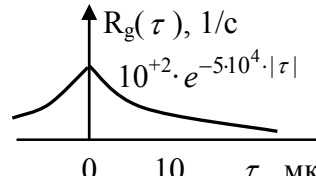
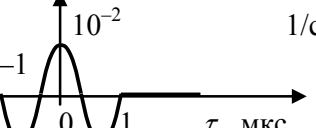
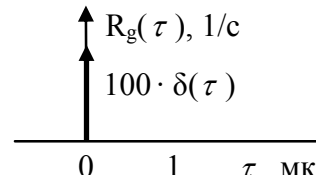
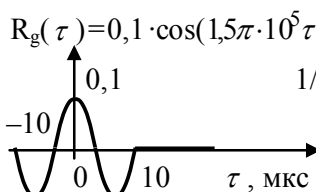
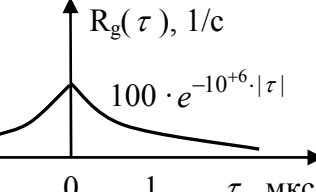
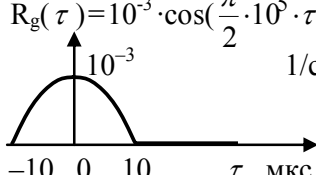
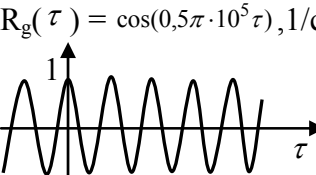
Но- мер	$\omega_{гр}$, рад/с	Схема или АЧХ фильтра	Определить...
1	10^4		константу S_0 , если эффективное значение напряжения на выходе цепи составляет 1 мВ.
2	10^8		константу S_0 , если эффективное значение напряжения на выходе цепи составляет 10 мВ.

3	10^4		эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-6}$ (В ² /Гц)
4	10^7		эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-7}$ (В ² /Гц)
5	$\pi \cdot 10^5$		во сколько раз мощность переменной составляющей процесса на выходе усилителя больше чем на входе
6	10^{10}	резонансный усилитель с максимальным коэффициентом усиления $K_0 = 20$ и частотой резонанса $\omega_p = 10^6$ рад/с	добротность контура усилителя, если $S_0 = 10^{-12}$ (В ² /Гц), а эффективное значение выходного напряжения $\sigma_{u \text{ вых}} = 2$ мВ.
7	10^7		эффективное значение выходного напряжения, если $S_0 = 10^{-8}$ (В ² /Гц)

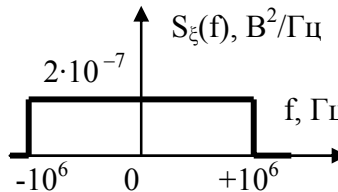
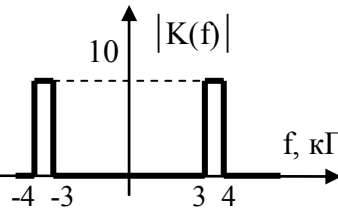
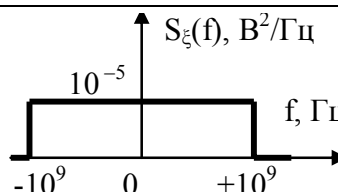
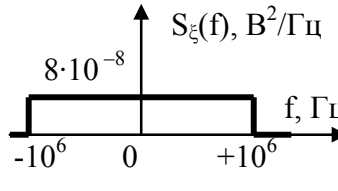
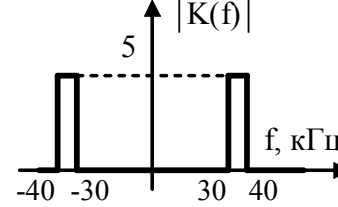
8	$\pi \cdot 10^6$		во сколько раз мощность переменной составляющей СП на выходе усилителя больше чем на входе
9	10^{10}	резонансный усилитель с максимальным коэффициентом усиления $K_0 = 20$ и частотой резонанса $\omega_p = 10^6$ рад/с	константу S_0 , если эффективное значение напряжения на выходе цепи составляет 4 мВ, а добротность контура усилителя $Q = 100$
10	10^7		эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-7}$ (В ² /Гц)

Задача 1. Шум с приведенной на рисунке слева корреляционной функцией $B_\xi(\tau)$ поступает на вход линейной цепи, обладающей корреляционной функцией импульсной характеристики $R_g(\tau)$, показанной в представленной ниже таблице. Используя временной метод анализа, определить корреляционную характеристику отклика цепи $B_\eta(\tau)$.



Но- мер	Корр. функция импульсной характеристики цепи $R_g(\tau)$	Но- мер	Корр. функция импульсной характеристики цепи $R_g(\tau)$
1	$R_g(\tau) = 10^{-2} \cdot \cos(0,5\pi \cdot 10^6 \tau)$,  1/c	6	$R_g(\tau) = 5 \cdot 10^{+2} \cdot \delta(\tau)$ 
2	$R_g(\tau) = 10^{+2} \cdot e^{-5 \cdot 10^4 \cdot \tau }$  1/c	7	$R_g(\tau) = 10^{-2} \cdot \cos(1,5\pi \cdot 10^6 \tau)$,  1/c
3	$R_g(\tau) = 100 \cdot \delta(\tau)$  1/c	8	$R_g(\tau) = \cos(0,5\pi \cdot 10^6 \tau)$, 1/c 
4	$R_g(\tau) = 0,1 \cdot \cos(1,5\pi \cdot 10^5 \tau)$,  1/c	9	$R_g(\tau) = 100 \cdot e^{-10^{+6} \cdot \tau }$  1/c
5	$R_g(\tau) = 10^{-3} \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot 10^5 \cdot \tau)$,  1/c	10	$R_g(\tau) = \cos(0,5\pi \cdot 10^5 \tau)$, 1/c 

Задача 2. Шум с показанной в левом столбце приведенной ниже таблицы спектральной плотностью мощности воздействует на усилитель, АЧХ которого представлена в правом столбце той же таблицы. Используя эффект нормализации широкополосных процессов в узкополосных цепях, определить вероятность наблюдения на выходе усилителя *отрицательных* мгновенных значений, меньших чем $-0,2$ В.

Но- мер	Спектральная плотность мощности шума на входе	Характеристика фильтра
1	$S_{\xi}(f)$, В ² /Гц 	$ K(f) $ 
2	белый шум $S_{\text{вх}}(f) = 2,5 \cdot 10^{-6}$ А ² /Гц	интегрирующая RC-цепь с постоянной времени $\tau_{\text{ц}} = 5 \cdot 10^{-4}$ с
3	$S_{\xi}(f)$, В ² /Гц 	параллельный колебательный контур с полосой пропускания $\Pi_{0,707} = 2 \cdot 10^5$ рад/с и резонансным сопротивлением $R_{\text{к}} = 2$ кОм
4	$S_{\xi}(f)$, В ² /Гц 	$ K(f) $ 

5		интегрирующая RC-цепь с номиналами элементов $R = 20 \text{ кОм}, C = 5 \text{ нФ}$
6		$ K(f) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f - 10^4 }, & f > 0 \\ 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f + 10^4 }, & f < 0 \end{cases}$
7	белый шум $S_{\xi}(f) = 8 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	интегрирующая RC-цепь с номиналами элементов $R = 20 \text{ кОм}, C = 5 \text{ нФ}$
8		
9		
10	белый шум $S_{\xi}(f) = 5 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$ K(f) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f - 10^4 }, & f > 0 \\ 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f + 10^4 }, & f < 0 \end{cases}$

Задача 3. Случайный процесс с показанной в левом столбце таблицы ниже спектральной плотностью мощности воздействия на вход фильтра, определяемого центральным столбцом

той же таблицы. После прохождения через фильтр мощность случайного процесса не изменяется. Определить значение параметра, приведенного в последнем столбце таблицы.

Но- мер	Спектральная плотность мощности воздействия	Фильтр / схема фильтра	Ис- кать
1			$F_{гр}$
2			F_M
3		$ K(f) = 1,1 \cdot e^{-\alpha \cdot f }$	α
4			K_0
5			$F_{гр}$

6		$ K(f) = 2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot f }$	α
7			K_0
8			$F_{гр}$
9			F_M
10			K_0

Задача 4. На резонансный усилитель, настроенный на частоту $\omega_{рез} = 3 \cdot 10^6$ (рад/с) и обладающий коэффициентом усиления на частоте резонанса $K_0 = 40$ воздействует нормальное случайное напряжение, обладающее спектральной плотностью мощно-

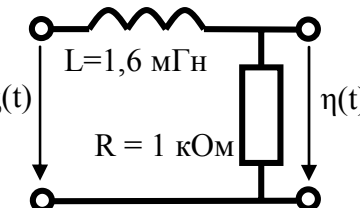
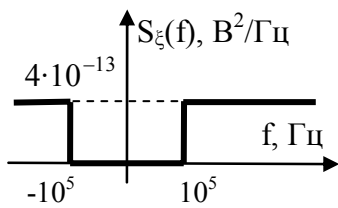
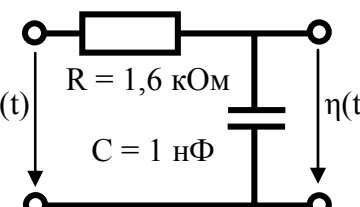
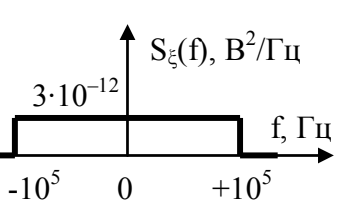
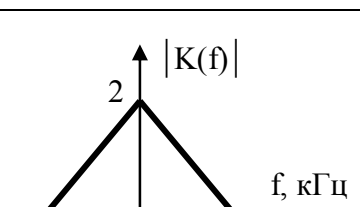
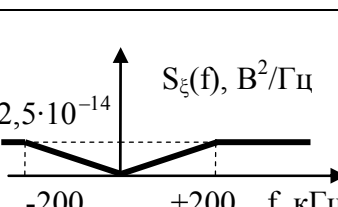
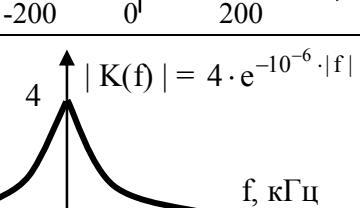
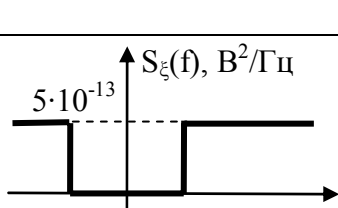
сти, представленной в таблице ниже. Определить эквивалентную добротность контура усилителя $Q_э$, если известно, что...

Но- мер	Спектральная плотность мощности шума на входе	Дополнительная информация
1		средняя мощность реализаций СП на выходе усилителя $P_{вых} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ В}^2$
2		вероятность наблюдения на выходе усилителя значений, по абсолютной величине превышающих +0,3 мВ $P\{ u_{вых} > 3 \cdot 10^{-4}\} = 13\%$.
3		у СП на выходе усилителя второй начальный момент распределения равен $m_2\{\eta(t)\} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2$
4		вероятность наблюдения на выходе усилителя мгновенных значений, превышающих +0,2 мВ $P\{u_{вых} > 2 \cdot 10^{-4}\} = 16\%$.
5		дисперсия случайного процесса на выходе усилителя составляет $D_\eta = 10^{-9} \text{ В}^2$

6		вероятность наблюдения на выходе усилителя значений, по абсолютной величине превышающих 1 мВ $P\{ u_{\text{вых}} > 10^{-3}\} = 0,8\%$.
7	белый шум $S_{\text{вх}}(f) = 8 \cdot 10^{-13} \text{ В}^2/\text{Гц}$	средняя мощность реализаций СП на выходе усилителя $P_{\text{вых}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ В}^2$
8		эффективное значение СП на выходе усилителя равно $\sigma_\eta = 2 \cdot 10^{-4} \text{ В}$
9		вероятность наблюдения на выходе усилителя мгновенных значений, превышающих -0,2 мВ $P\{u_{\text{вых}} > -2 \cdot 10^{-4}\} = 58\%$.
10		у СП на выходе усилителя второй начальный момент распределения равен $m_2\{\eta(t)\} = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ В}^2$

Задача 5. На фильтр, свойства которого определяются левой колонкой таблицы ниже, воздействует смесь гармонического сигнала с частотой $f_s = 100 \text{ кГц}$ и амплитудой $A_s = 10^{-4} \text{ В}$ и шума, характеристики которого приведены в таблице справа. Определить соотношение сигнал-шум, наблюдаемое на выходе фильтра.

Но- мер	Схема или АЧХ фильтра	Спектральная плотность мощности шума на входе
1	резонансный усилитель с коэф. усиления $K_0 = 20$, резон. частотой $f_p = 96 \text{ кГц}$ и добротностью $Q_\Sigma = 12$	белый шум $S_\xi(f) = 8 \cdot 10^{-13} \text{ В}^2/\text{Гц}$
2		
3		
4	резонансный усилитель с коэф. усиления $K_0 = 20$, резон. частотой $f_p = 10^5 \text{ Гц}$ и добротностью $Q_\Sigma = 50$	
5		
6		

7		
8		
9		
10		

Лабораторная работа № 3 «Прохождение случайных процессов через линейные цепи»

Цель работы – экспериментальное исследование вероятностных и энергетических характеристик СП при типовых линейных преобразованиях.

3.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

3.4.1. При расчете энергетических характеристик СП на выходе линейных цепей полезно учесть, что если линейная цепь обладает малой полосой пропускания, а воздействующий шум в области частот, охватывающей (с запасом) полосу пропускания цепи, характеризуется постоянной спектральной плотностью мощности, то для подобной цепи этот шум оказывается по свойствам эквивалентен белому шуму и расчет дисперсии (средней мощности переменной составляющей) выходного СП можно производить с использованием понятия шумовой полосы по формуле (3.7).

3.4.2. Шум и полезный сигнал порождаются разными источниками (причинами) и потому оказываются независимыми (некоррелированными) случайными процессами. Как следствие, корреляционная функция смеси сигнала и шума, поступающих на вход устройства обработки, может быть рассчитана путем суммирования соответствующих характеристик, относящихся отдельно к сигналу и шуму

$$B_{\xi \text{ смеси}}(\tau) = B_{\xi \text{ сигнала}}(\tau) + B_{\xi \text{ шума}}(\tau). \quad (3.8)$$

При линейных преобразованиях в соответствии с принципом суперпозиции реакция цепи на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий в отдельности. По этой причине и на выходе линейной цепи энергетические характеристики смеси оказываются равными сумме энергетических характеристик прошедших через цепь сигнала и шума

$$B_{\eta \text{ смеси}}(\tau) = B_{\eta \text{ сигнала}}(\tau) + B_{\eta \text{ шума}}(\tau). \quad (3.9)$$

Наконец, так как спектральные плотности мощности связаны с корреляционными функциями линейным преобразованием Фурье, то аналогичные (3.8) и (3.9) соотношения справедливы и для спектральных характеристик процессов.

3.4.3. При прохождении через линейную цепь, обладающую фильтрующими свойствами, форма реализаций, а значит и характеристики процессов, могут существенно изменяться. Например, если на идеальный полосовой фильтр, пропускающий составляющие, лежащие в полосе частот от 1,5 до 4,5 кГц, воздействует сигнал треугольной формы с частотой $F_0 = 1$ кГц, то из всех спектральных составляющих этого сигнала на выход фильтра пройдет лишь третья гармоника. Таким образом, отклик фильтра вместо треугольной формы будет иметь характер гармонического колебания со строго косинусоидальной корреляционной функцией.

При количественном расчете учтем, что спектр исходного колебания может быть представлен в виде (см. п. 2.4.6)

$$S_{\wedge}(f) = \frac{8 \cdot U_m^2}{\pi^4} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \cdot \delta\left(f - \frac{2n+1}{T_{\Pi}}\right). \quad (3.10)$$

В этом выражении индекс n используется лишь для указания порядкового номера слагаемого, а не номера гармоники сигнала. В частности, при $n = 0$ дельта-функция, входящая в слагаемое имеет вид $\delta(f - 1/T_{\Pi})$, что соответствует первой гармонике сигнала.

Подобные особенности нумерации связаны с тем, что в спектральной плотности мощности треугольного сигнала значимыми являются лишь нечетные гармоники. Интенсивность же четных составляющих равна нулю, и вносить номера четных гармоник в расчетное выражение (3.10) нецелесообразно.

Третья гармоника характеризуется δ -функцией $\delta(f - 3/T_{\Pi})$, то есть слагаемым с $n = 1$ и поправочным коэффициентом при δ -функции равным

$$P_3 = \frac{8 \cdot U_m^2}{\pi^4 \cdot (2n+1)^4} \Big|_{n=1} \approx 0,001 \cdot U_m^2, \text{ определяющим мощность составляющей спектра на частоте } 3F_0. \text{ На выходе идеального}$$

фильтра амплитуды составляющих увеличиваются в K_0 раз, а мощности – в K_0^2 раз, поэтому спектральная плотность мощности профильтрованных треугольных импульсов будет иметь вид, представленный на рис. 3.8 слева.

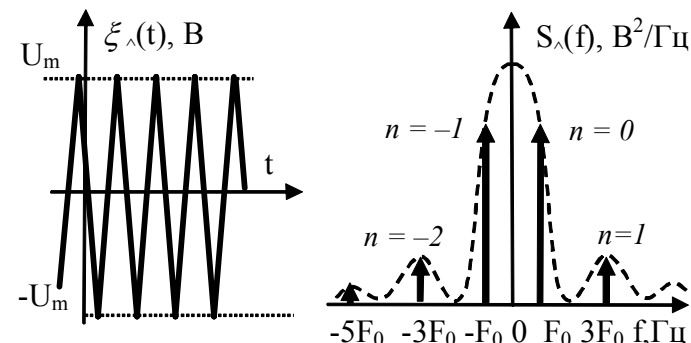


Рис. 3.7. Спектральная плотность мощности периодической последовательности треугольных импульсов со случайным сдвигом вдоль оси времени

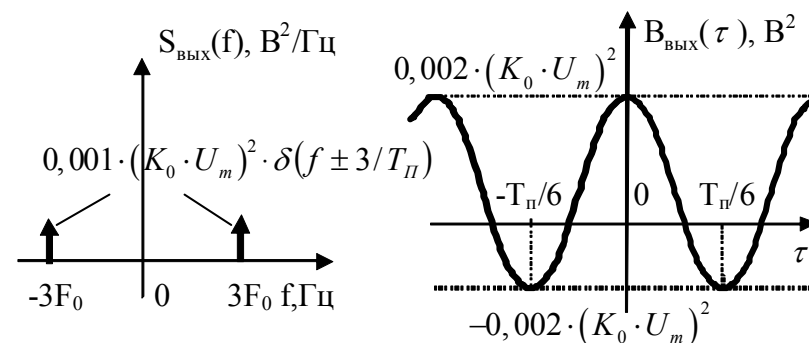


Рис. 3.8. Спектральная плотность мощности отклика идеального фильтра на последовательность треугольных импульсов

Корреляционная функция, соответствующая наблюдаемому после фильтрации гармоническому сигналу, показана на рис. 3.8

справа. Её максимальное значение, равное $0,002 \cdot (K_0 U_m)^2$, возникает в результате суммирования мощностей составляющих на частотах $+3F_0$ и $-3F_0$ (вспомните, СПМ – это двухсторонняя функция частоты, соответствующая комплексному спектру сигналов) и соответствует средней мощности гармонического колебания, наблюдаемого на выходе фильтра.

3.4.4. Энергетические характеристики прочих случайных сигналов, исследуемых в работе, можно найти в подразделе 2.4, а комплексные коэффициенты передачи используемых в работе линейных цепей в табл. 3.1. При расчете шумовых полос пропускания цепей полезно помнить, что у RC-цепи и колебательного контура они в $\pi/2$ раз превышают величину полосы пропускания по уровню 0,707.

Таблица 3.1

Интегрирующая RC-цепь	$\dot{K}(f) = \frac{K_0}{1 + j \cdot f / F_{\text{ср}}}$
Колебательный контур	$\dot{K}(f) = \frac{K_0}{1 + j \cdot \xi}, \quad \xi = 2Q \frac{f - F_{\text{рез}}}{F_{\text{рез}}}, f > 0$
Идеальный ФНЧ	$\dot{K}(f) = \begin{cases} K_0, & \text{при } f \leq F_{\text{ср}} \\ 0, & \text{при } f > F_{\text{ср}} \end{cases}$
Идеальный полосовой фильтр	$\dot{K}(f) = \begin{cases} K_0, & \text{при } F_{\text{ср ниж}} \leq f \leq F_{\text{ср верх}} \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$

3.4.5. Дополнительную полезную информацию по вопросам прохождения случайных процессов через линейные цепи можно найти в учебной литературе [2, с.202-204, 218-220, 329-337; 3, с.71-82; 4, с.307-316, 492-493].

3.5. Домашнее задание к лабораторной работе

3.5.1. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант исследований.

3.5.2. Определите и запишите в отчет шумовую полосу пропускания фильтра, указанного в табл. 3.2. Рассчитайте корреляционную функцию, спектральную плотность мощности и дисперсию шума, который будет наблюдаться на выходе этого фильтра, если на его вход воздействует нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-5} \text{ В}^2/\text{Гц}$. Графики полученных теоретических зависимостей занесите в отчет в масштабе, достаточном для отображения поверх них результатов лабораторных исследований.

Таблица 3.2

Номер бригады	Модуль №4 - тип фильтра	Параметры фильтра
1	интегр. RC-цепь	$K_0 = 2$; $F_{\text{ср}} = 2 \text{ кГц}$
2	колебат. контур	$K_0 = 8$; $F_{\text{резон}} = 4 \text{ кГц}$; $Q = 32$
3	идеальный ФНЧ	$K_0 = 2,5$; $F_{\text{ср}} = 2 \text{ кГц}$
4	идеальный ПФ	$K_0 = 2,2$; $F_{\text{ср ниж}} = 0,7 \text{ кГц}$, $F_{\text{ср верх}} = 3,3 \text{ кГц}$
5	идеальный ПФ	$K_0 = 3,2$; $F_{\text{ср ниж}} = 1,9 \text{ кГц}$, $F_{\text{ср верх}} = 3,1 \text{ кГц}$
6	идеальный ФНЧ	$K_0 = 2,9$; $F_{\text{ср}} = 1,5 \text{ кГц}$
7	колебат. контур	$K_0 = 10$; $F_{\text{резон}} = 3 \text{ кГц}$; $Q = 40$
8	интегр. RC-цепь	$K_0 = 2,8$; $F_{\text{ср}} = 1 \text{ кГц}$

3.5.3. Полагая, что на вход фильтра помимо шума будет действовать еще и сигнал, указанный в табл. 3.3, рассчитайте и постройте корреляционную функцию и спектральную плотность мощности смеси, наблюдаемой на выходе фильтра. Укажите особенности получаемых энергетических характеристик, указывающие на присутствие периодического сигнала в составе воздействующего на фильтр случайного процесса. Определите и внесите в отчет отношение сигнал-шум на входе и выходе фильтра. Продумайте, как может изменяться наблюдаемое на выходе фильтра отношение сигнал-шум при изменении его параметров.

Таблица 3.3

Номер бригады	Вид формируемого сигнала	Параметры сигнала
1,8	гармонический	$U_m = 0,2 \text{ В}$; $F = 1 \text{ кГц}$
2,7	гармонический	$U_m = 0,2 \text{ В}$; $F = 3,5 \text{ кГц}$
3,6	прямоугольный	$U_m = 0,1 \text{ В}$; $F = 1 \text{ кГц}$
4,5	треугольный	$U_{\min} = -0,3 \text{ В}$; $U_{\max} = +0,3 \text{ В}$; $F = 2 \text{ кГц}$

3.6. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Преобразование нормального шума в линейных цепях

Цели этапа:

- 1) получить экспериментально статистические характеристики шума и сравнить их с теоретическими;
- 2) исследовать влияние характеристик линейных цепей на энергетические характеристики СП, наблюдаемых на их выходе.

Рекомендации по выполнению:

3.6.1. Установить частоту дискретизации $F_{\text{дискр}} = 48 \text{ кГц}$, а объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов. Настроить модуль №1 схемы моделирования случайных процессов на формирование широкополосного нормального шума с эффективным значением $\sigma_{\text{шум}} = 0,5 \text{ В}$, а модуль №4 - в соответствии с требованиями табл. 3.2; остальные модули перевести (при необходимости) в выключенное состояние. В блоке анализаторов установить оба анализатора в состояние осциллографа и настроить один из них на контрольную точку №6, а другой - на контрольную точку №4.

3.6.2. Обновляя данных (нажатием одноименной кнопки в окне управления, показанном на рис. 1.8), сопоставить сигналы на входе и выходе фильтра и качественно (приблизенно) зарисовать в отчет вид наиболее типичных наблюдаемых реализаций.

3.6.3. Переключить анализаторы в режим оценки числовых характеристик и занести в отчет показатели процессов, наблюдаемых на входе и выходе фильтра.

3.6.4. Перейти к исследованию гистограмм $W(x)$ наблюдаемых случайных процессов. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов и оценить (визуально) близость распределения вероятностей процессов, наблюдаемых на входе и выходе фильтра, к нормальному. Внести в отчет по одной наиболее типичной гистограмме.

3.6.5. Переключить анализаторы в режим измерения спектральной плотности мощности. Продолжая обновление данных, провести серию из 15...20 экспериментов, контролируя распределение по частотам выбросов наблюдаемых графиков. Зафиксировав (приблизенно, по результатам визуального на-

блюдения) для каждой из частот среднее значение интенсивности спектральных составляющих, занести в отчет усредненные спектральные характеристики процессов, наблюдаемых на входе и выходе фильтра.

3.6.6. Переключить анализаторы в режим коррелометра и, обновляя данные, выделить и внести в отчет корреляционные функции, соответствующие процессам на входе и выходе фильтра.

3.6.7. Выполнить (по отдельности, каждый раз по отношению к варианту из табл. 3.2) две корректировки параметров, указанные в табл. 3.4. Для каждой корректировки проанализировать осциллограммы, а также вероятностные и энергетические характеристики на выходе фильтра, сопоставить их (можно без занесения в отчет) с уже зафиксированными ранее (при выполнении пп. 3.6.1-3.6.6) данными и записать выводы о влиянии предложенных корректировок на результаты фильтрации.

Таблица 3.4

Номер бригады	Первая корректировка параметров	Вторая корректировка параметров
1, 3, 6, 8	уменьшить частоту среза в 3 раза	увеличить K_0 в 3 раза
2, 7	увеличить и резонансную частоту, и добротность контура в 3 раза	установить добротность контура $Q = 10$
4, 5	сохраняя центральную частоту, уменьшить вдвое полосу пропускания, а K_0 вдвое увеличить	установить нижнюю частоту среза $F_{\text{ср низ}} = 2,5 \text{ кГц}$

Этап 2. Прохождение смеси квазислучайного сигнала и шума через линейную цепь

Цели этапа:

- 1) получить экспериментально энергетические характеристики для смеси шума и полезного периодического сигнала;
- 2) исследовать признаки, указывающие на присутствие в шуме периодических сигналов.

Рекомендации по выполнению:

3.6.8. Вернуть параметры модуля №4 к данным из табл. 3.2, а модуль №3 установить в режим формирования сигнала из табл. 3.3. Оба анализатора, контролирующие ситуацию на входе и выходе фильтра, установить в состояние осциллографа.

3.6.9. Сопоставить сигналы, наблюдаемые на входе и выходе фильтра, и качественно (приблизенно) зарисовать в отчет вид наиболее типичных реализаций.

3.6.10. Переключить анализаторы в режим спектрального анализа процессов. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов и зафиксировать в отчете типовые усредненные графики распределения интенсивностей спектральных составляющих на входе и выходе фильтра.

3.6.11. Переключить анализаторы в режим коррелометра и внести в отчет типовую корреляционную функцию, соответствующую процессу на выходе фильтра. Оценить по этой функции отношение сигнал-шум на выходе фильтра.

3.6.12. Выполнить (по отдельности, каждый раз по отношению к варианту из табл. 3.2) две корректировки параметров, указанные в табл. 3.4. Для каждой корректировки внести в отчет типовые осциллограммы и энергетические характеристики процессов на выходе фильтра и сделать выводы о влиянии фильтрации на отношение сигнал-шум.

3.7. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Можно ли в линейных цепях отдельно анализировать прохождение сигнала и шума? Как изменяется форма реализаций широкополосного СП при низкочастотной и полосовой фильтрации?

2. При каких условиях СП на выходе линейной цепи является стационарным? Как влияет амплитудно-частотная характеристика цепи на спектральную плотность мощности и корреляционную функцию выходного СП? Каково влияние на те же свойства СП фазо-частотной характеристики цепи?

3. Каковы возможные изменения энергетических и вероятностных характеристик СП при его прохождении через **безынерционную** линейную цепь?

4. Может ли увеличиваться дисперсия СП после прохождения через линейную цепь? Может ли уменьшаться? Если "да", то приведите примеры. (Рассмотрите как пассивные, так и активные линейные цепи)

5. В каких случаях при теоретическом анализе допустимо считать шум на входе цепи «белым»? Как влияет изменение центральной частоты полосового фильтра на корреляционную функцию выходного СП, когда на входе действует «белый» шум?

6. Как изменяются вероятностные, энергетические и числовые характеристики **нормального** СП при его прохождении через линейные цепи?

7. Что называют эффектом нормализации широкополосных СП в узкополосных линейных цепях? Разъясните причины возникновения эффекта нормализации.

8. Для смеси узкополосного полезного сигнала и широкополосного шума объясните качественно, как изменяется отношение сигнал-шум на выходе ФНЧ при уменьшении его верхней граничной частоты?

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Теоретические основы

4.1.1. Безынерционные нелинейные преобразования случайных процессов

Если каждое значение $y(t)$ случайного процесса $\eta(t)$ на выходе нелинейного преобразователя определяется значением $x(t)$ сигнала $\xi(t)$, воздействующего на вход преобразователя в тот же самый момент времени, то говорят, что случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ связаны безынерционным нелинейным преобразованием $y = f(x)$. Для функций $y = f(x)$, не содержащих горизонтальных участков (см. пример на рис. 4.1 слева), каждое выходное значение y может быть получено из конечного числа аргументов x , т.е. существует *конечнозначная* обратная функция $x = \varphi_i(y)$, где i – номер ветви обратной функции $\varphi(\cdot)$. В таком случае взаимосвязь между одномерными законами распределения выходного и входного СП имеет вид

$$W_\eta(y) = \sum_i W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right|, \quad (4.1)$$

где суммирование идет по всем ветвям обратной функции.

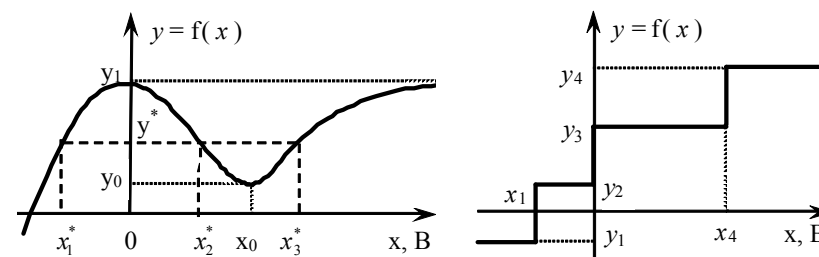


Рис. 4.1. Возможные варианты функции прямого преобразования для безынерционного преобразователя

Если же функция прямого преобразования $y = f(x)$, напротив, состоит лишь из горизонтальных участков (как показано на рис. 4.1 справа), то получаемый СП может принимать лишь квантованное множество значений y_m (на рис. 4.1 справа подобных значений четыре – от y_1 до y_4). Значение y_m на выходе будет наблюдаться только в тех случаях, когда значение воздействия $\xi(t)$ будет лежать в пределах соответствующего этому y_m интервала оси x . Например, вероятность появления значения y_1

$$P\{\eta = y_1\} = P\{\xi \leq x_1\} = \int_{-\infty}^{x_1} W_\xi(x) dx.$$

Аналогично, для уровня y_2 имеем

$$P\{\eta = y_2\} = P\{x_1 \leq \xi < 0\} = \int_{x_1}^0 W_\xi(x) dx.$$

И поскольку записанные выше вероятности приходятся на отдельные точки оси x плотность вероятности в этих точках оказывается бесконечно большой и может быть записана посредством дельта-функции

$$W_\eta(y) = \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (4.2)$$

где число слагаемых определяется количеством горизонтальных участков зависимости $y = f(x)$.

Универсальная формула, определяющая одномерную плотность вероятности СП на выходе безынерционного нелинейного преобразователя, имеет вид:

$$W_\eta(y) = \sum_i W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| + \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (4.3)$$

где первая сумма включает все ветви обратных функций по всем наклонным участкам зависимости $y = f(x)$, а вторая сумма – все горизонтальные участки той же самой зависимости.

Числовые характеристики СП на выходе безынерционного нелинейного преобразователя могут быть рассчитаны по стандартным правилам (на основе найденной $W_\eta(y)$), либо минуя данный этап по правилам:

$$M_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_\xi(x) dx, \quad (4.4)$$

$$D_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - M_\eta]^2 \cdot W_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \cdot W_\xi(x) dx - M_\eta^2. \quad (4.5)$$

4.1.2. Амплитудное и фазовое детектирование узкополосных нормальных случайных процессов

Узкополосными называют случайные процессы, центральная частота спектра которых существенно превышает его ширину. Их реализации представляют собой квазигармонические колебания с медленно изменяющимися огибающей

$$A(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)} \quad (4.6)$$

и фазой

$$\Theta(t) = \arctg\left(\frac{\eta(t)}{\xi(t)}\right). \quad (4.7)$$

Здесь вспомогательный процесс $\eta(t)$ является сопряженным с $\xi(t)$ по Гильберту.

Для выделения огибающей и фазы случайных процессов используют амплитудный и фазовый детекторы. Идеальным амплитудным детектором называют устройство, которое в ответ на воздействие узкополосного СП $\xi(t)$ формирует на своем выходе его огибающую $A(t)$. Напряжение на выходе идеального фазового детектора, формируемое в ответ на воздействие узкополосного СП $\xi(t)$, определяется набегом фазы, т.е. пропорционально $\Delta\varphi(t) = \Theta(t) - 2\pi f_0 t$.

Для нормального случайного процесса с нулевым средним значением огибающая имеет релеевский закон распределения с параметром σ , равным эффективному значению исходного процесса. Фаза подобного процесса имеет равномерный в пределах от 0 до 2π закон распределения. Таким образом, при воздействии на идеальный амплитудный детектор процесса $\xi(t)$ с плотностью вероятности

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\xi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) \quad (4.8)$$

распределение выходного напряжения будет иметь вид

$$W_A(x) = \frac{x}{\sigma_{\xi}^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right), \quad x \geq 0. \quad (4.9)$$

При этом, в соответствии со свойствами распределения Релея

$$M_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_{\xi} \approx 1,25 \cdot \sigma_{\xi}, \quad (4.10)$$

$$D_A = \sigma_{\xi}^2 \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \approx 0,43 \cdot \sigma_{\xi}^2. \quad (4.11)$$

Если же на идеальный амплитудный детектор подать смесь детерминированного гармонического сигнала и узкополосного нормального шума

$$\varsigma(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0) + \xi(t), \quad (4.12)$$

где U_0 , ω_0 и ψ_0 – некоторые константы, то наблюдаемая на выходе огибающая будет иметь обобщенное релеевское распределение (распределение Релея-Райса)

$$W_A(x) = \frac{x}{\sigma_{\xi}^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + U_0^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x \cdot U_0}{\sigma_{\xi}^2}\right), \quad x \geq 0, \quad (4.13)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя 0-го порядка первого рода (ее табличные значения можно найти в прил. 3).

Математическое ожидание распределения Релея-Райса равно

$$M_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_{\xi} \cdot \left\{ I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) + h^2 \cdot \left[I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \right] \right\}, \quad (4.14)$$

$$\text{где отношение сигнал-шум} \quad h^2 = 0,5 \cdot U_0^2 / \sigma_{\xi}^2. \quad (4.15)$$

Наконец, на выходе фазового детектора, формирующего на своем выходе набег фазы $\Delta\varphi(t)$, при приёме смеси гармонического сигнала и нормального шума имеет вид будет наблюдаться СП с плотностью распределения вероятностей

$$W_{\Delta\varphi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{U_0^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) + \frac{\chi \cdot F_{cm}(\chi)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{\chi^2}{2} - \frac{U_0^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right), \quad (4.16)$$

$$\text{где} \quad \chi = \left(U_0 / \sigma_{\xi} \right) \cdot \cos(\varphi - \psi_0). \quad (4.17)$$

4.2. Практические примеры

Задача 4.1. Случайное напряжение $\xi(t)$, значения которого распределены равномерно на интервале от a до b ($0 \leq a \leq b$) подвергается преобразованию вида $\eta = \ln(\xi)$. Определить закон распределения СП $\eta(t)$ и его математическое ожидание.

Решение

а) Обратной к функции $y = f(x) = \ln(x)$ является функция $x = \varphi(y) = \exp(y)$ однозначная для всех своих возможных аргументов. Это означает, что в универсальной формуле (4.3) сумма “по m ”, ориентированная на бесконечнозначную $\varphi(y)$, в анализируемом преобразовании отсутствует, а сумма “по i ” будет содержать лишь единственное слагаемое

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}(\varphi(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| = W_{\xi}(e^y) \cdot e^y. \quad (4.18)$$

б) Важной особенностью решаемой задачи является тот факт, что плотность вероятности исходного СП отличается от нуля лишь на промежутке от a до b , а потому входящий в правую часть выражения (4.18) сомножитель $W_\xi(e^y)$ будет отличен от нуля лишь при выполнении неравенства $a \leq e^y \leq b$, т.е. для $y \in [\ln a; \ln b]$. Учитывая, что для $x \in [a; b]$ исходная плотность вероятности равна $1/(b-a)$, запишем окончательно

$$W_\eta(y) = e^y / (b-a) \quad \text{при} \quad \ln a \leq y \leq \ln b. \quad (4.19)$$

в) Обратите внимание, что без указания допустимого диапазона аргументов y предыдущая формула становится явно некорректной. Действительно, если никаких ограничений на y наложено не будет, то при любых аргументах от минус бесконечности до плюс бесконечности формула (4.19) будет выдавать положительное значение плотности вероятности, означаящее, что подобное значение y СП $\eta(t)$ может наблюдаться в каком-то из опытов. Вместе с тем значения исходного СП, лежащие в диапазоне от a до b , преобразователем $y = \ln x$ могут быть преобразованы лишь в интервал значений от $\ln a$ до $\ln b$, и никаких иных значений в результате анализируемого преобразования физически наблюдаться не может.

Во-вторых, именно при указанных в (4.19) ограничениях выполняется свойство нормировки. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_\eta(y) dy = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{e^y}{b-a} dy = \frac{1}{b-a} \cdot e^y \Big|_{\ln a}^{\ln b} = \frac{e^{\ln b} - e^{\ln a}}{b-a} = 1.$$

Без установленных ограничений на аргумент y пределы интегрирования оказались бы иными и выполнение свойства нормировки было нарушено. В связи с этим очень полезно после нахождения закона распределения, характеризующего результат функционального преобразования, проверять полученную формулу на соответствие свойству нормировки, что позволяет выявлять многие потенциально возможные ошибки в расчетах.

г) Наконец, для расчета математического ожидания можно воспользоваться двумя подходами. Во-первых, поскольку плотность вероятности СП $\eta(t)$ уже найдена можно использовать стандартное выражение

$$M_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot W_\eta(y) dy = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{y \cdot e^y}{b-a} dy = \frac{1}{b-a} \cdot [y \cdot e^y - e^y]_{\ln a}^{\ln b}$$

(в последнем выражении было использовано интегрирование по частям), в результате чего окончательно получим

$$M_\eta = \frac{b \cdot \ln b - a \cdot \ln a}{b-a} - 1.$$

Альтернативный подход к расчету математического ожидания заключается в использовании формулы (4.4)

$$M_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_\xi(x) dx = \int_a^b \frac{\ln x}{b-a} dx = \frac{b \cdot \ln b - a \cdot \ln a}{b-a} - 1.$$

Естественно, результаты, полученные как первым, так и вторым способом, совпадают между собой.

Задача 4.2. Случайный процесс $\xi(t)$, распределенный равномерно на интервале от 0 до 1, подвергается квантованию в соответствии с правилом $\eta = [(n+1) \cdot \xi]$, где $[\cdot]$ – знак взятия целой части числа, а n – целочисленная константа. Определить закон распределения квантованного процесса $\eta(t)$.

Решение

а) Для наглядности имеет смысл построить график зависимости значений $y = f(x)$. Подобный график для $n = 4$ изображен на рис. 4.2. Действительно, для аргументов $x \in [0; 1/5]$ значение $5 \cdot x$ лежит между нулем и единицей (не достигая ее) и, следовательно, целая часть этого значения оказывается равной нулю; для $1/5 \leq x < 2/5$ величина $5 \cdot x$ лежит в диапазоне от 1 до величины чуть меньшей, чем 2, поэтому целая часть этого числа дает единичный результат и т.д.

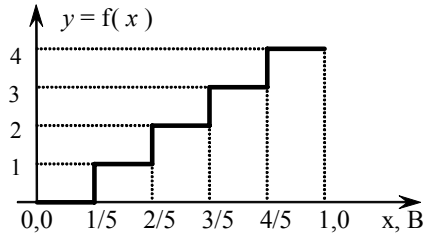


Рис. 4.2. Преобразование $y = f(x)$ из задачи 4.2 при $n = 4$

б) Важно, что график на рис. 4.2 не содержит наклонных участков, а состоит лишь из горизонтальных отрезков, так что СП $\eta(t)$ оказывается представленным лишь целочисленными значениями 0, 1, 2, 3 и 4. Реакция $\eta(t) = k$ наблюдается при подаче на вход значения из интервала $k/(n+1) \leq x < (k+1)/(n+1)$. Учитывая, что распределенное равномерно входное напряжение имеет плотность вероятности $W_\xi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{при прочих } x. \end{cases}$

для вероятности наблюдения $\eta(t) = k$ получаем

$$P\{\eta = k\} = \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} 1 \cdot dx = \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Итак, функциональная взаимосвязь $\eta = [(n+1) \cdot \xi]$ преобразует СП $\xi(t)$ с непрерывным равномерным распределением в чередование квантованных уровней $\eta(t)$ с дискретным равномерным распределением $P\{\eta = k\} = 1/(n+1)$ для всех целочисленных k из диапазона $0 \leq k \leq n$.

Задача 4.3 Случайный процесс $\xi(t)$ с одномерной плотностью вероятности $W_\xi(x) = e^x$ при $x \leq 0$, подвергается безынерционному преобразованию $\eta = \begin{cases} 16, & \text{при } \xi \leq -6, \\ (\xi + 2)^2, & \text{при иных } \xi. \end{cases}$

Определить закон распределения и математическое ожидание случайного процесса $\eta(t)$.

Решение

Начнем решение задачи с построения и анализа графика функциональной взаимосвязи

$$y = f(x) = \begin{cases} 16, & \text{при } x \leq -6, \\ (x+2)^2, & \text{при иных } x. \end{cases} \quad (4.20)$$

Из графика, представленного на рис. 4.3, следует, что при $x \leq 0$ значения, получаемые в результате преобразования, лежат в диапазоне от 0 до 16, однако различным частям этого диапазона соответствует разное число ветвей в обратной функции.

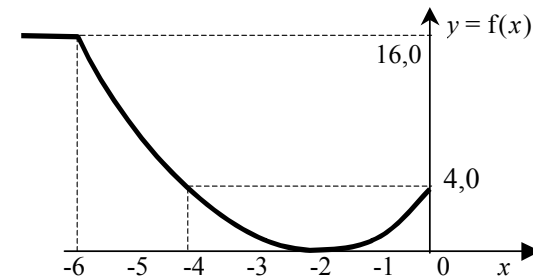


Рис. 4.3. Функциональная зависимость, анализируемая в примере

Значениям $y \in [0; 4]$ соответствует по два возможных аргумента x , определяемых ветвями обратной функции $x_1 = \varphi_1(y) = +\sqrt{y} - 2$ и $x_2 = \varphi_2(y) = -\sqrt{y} - 2$. На данном участке слагаемые, входящие в “сумму по m ” формулы (4.3) не потребуются, а первая сумма (по ветвям обратной функции) будет содержать два слагаемых

$$W_\eta(y) = \sum_{i=1}^2 W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| = \\ = W_\xi(+\sqrt{y} - 2) \cdot \left| +\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + W_\xi(-\sqrt{y} - 2) \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{e^{-2+\sqrt{y}} + e^{-2-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}.$$

Значениям y , удовлетворяющим неравенству $4 < y < 16$, соответствует единственный аргумент $x = \varphi(y) = -\sqrt{y} - 2$, поэтому вместо указанных ранее двух слагаемых остается лишь одно

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}(\varphi(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| = \frac{e^{-2-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}.$$

Наконец, горизонтальному участку $y = 16$ соответствует бесконечный по протяженности интервал $x \leq -6$, вероятность попадания в который определяется интегралом

$$P\{\eta(t) = 16\} = P\{\xi(t) \leq -6\} = \int_{-\infty}^{-6} e^x dx = e^{-6} \approx 0,0025.$$

Объединяя полученные результаты, плотность вероятности СП $\eta(t)$ можно записать окончательно в виде

$$W_{\eta}(y) = \begin{cases} e^{-2}(e^{+\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}})/2\sqrt{y} & \text{при } 0 \leq y \leq 4 \\ e^{-2-\sqrt{y}}/2\sqrt{y} + 0,0025 \cdot \delta(y-16) & \text{при } 4 < y \leq 16 \\ 0 & \text{при прочих } y \end{cases}$$

Соответствующий этому выражению график плотности распределения вероятностей представлен на рис. 4.4.

Математическое ожидание можно рассчитать, руководствуясь формулой (4.4) и дважды применив интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} M_{\eta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{-6} 16 \cdot e^x dx + \int_{-6}^0 (x+2)^2 \cdot e^x dx = \\ &= 16 \cdot e^{-6} + 4 - 16e^{-6} - 2(x+2) \cdot e^x \Big|_{-6}^0 + \int_{-6}^0 2 \cdot e^x dx = \\ &= 4 - (4 + 8e^{-6}) + 2 \cdot e^x \Big|_{-6}^0 = -8 \cdot e^{-6} + 2 - 2 \cdot e^{-6} = 2 - 10 \cdot e^{-6}. \end{aligned}$$

Полученный результат хорошо согласуется с полученной выше плотностью вероятности СВ η , так как согласно рис. 4.4 координата $y = M_{\eta} \approx 2$ близка к центру масс отображаемой фигуры.

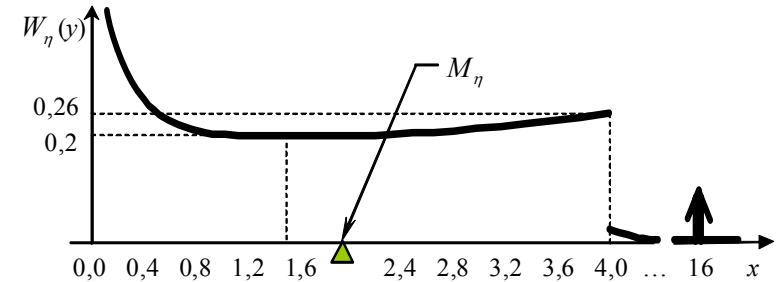


Рис. 4.4. Плотность вероятности, соответствующая СП $\eta(t)$

Задача 4.4 Случайное напряжение, распределенное нормально с параметрами $M_u = 0$ В, $\sigma_u = 1,25$ В, воздействует на нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой (ВАХ), представленной на рис. 4.5. Определить закон распределения тока, протекающего через этот нелинейный элемент.

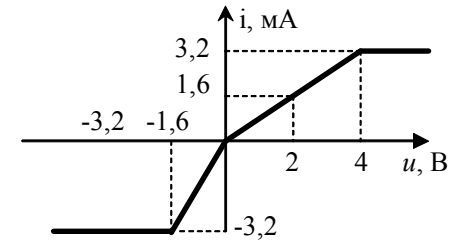


Рис. 4.5. ВАХ нелинейного элемента из задачи 4.4

Решение

а) Определим аналитическое выражение для ВАХ нелинейного элемента. Характеристика имеет несколько точек излома, в которых свойства ВАХ скачкообразно изменяются,

поэтому каждый кусочно-линейный участок придется проанализировать отдельно. В соответствии с классическим уравнением прямой для каждого из наклонных участков связь между током и напряжением будет выражаться формулой $i = k \cdot u + b$. Так как оба наклонных участка проходят через начало координат, то для них коэффициент b оказывается нулевым. Угловой же коэффициент k для участка $0 \leq u \leq 4$ В будет равен $k_+ = 3,2 \text{ мА} / 4 \text{ В} = 0,8 \text{ мА/В}$, а для участка $-1,6 \leq u \leq 0$ В получаем $k_- = 2 \text{ мА/В}$. Объединяя полученную информацию, ВАХ нелинейного элемента можно представить в виде

$$i = f(u) = \begin{cases} -3,2 & \text{при } u \leq -1,6, \\ 2 \cdot u & \text{при } -1,6 < u \leq 0, \\ 0,8 \cdot u & \text{при } 0 < u \leq 4, \\ +3,2 & \text{при } u > 4. \end{cases} \quad (4.21)$$

б) Рис. 4.5, как впрочем и выражение (4.21), показывает, что ток, который под воздействием случайного напряжения будет протекать через нелинейный элемент, будет принимать значения из интервала от минус 3,2 В до плюс 3,2 В. Верхний и нижний граничные уровни тока по абсолютному значению совпадают, однако вероятности их наблюдения будут отличаться друг от друга

$$\begin{aligned} P\{i = -3,2\} &= P\{u \leq -1,6\} = \int_{-\infty}^{-1,6} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_u^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1,6/\sigma_u} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = F_{\text{ст}}\left(-\frac{1,6}{1,25}\right) \approx 1 - F_{\text{ст}}(1,3) \approx 0,1. \\ P\{i = +3,2\} &= P\{u \geq +4\} = \int_{+4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_u^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+4/\sigma_u}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 1 - F_{\text{ст}}\left(\frac{4}{1,25}\right) \approx 1 - F_{\text{ст}}(3,2) \approx 0,0007. \end{aligned}$$

в) Для значений, лежащих между граничными уровнями, обратная к (4.21) функция может быть записана в следующем виде:

$$u = \varphi(i) = \begin{cases} i/2 & \text{при } -3,2 < i \leq 0, \\ 1,25 \cdot i & \text{при } 0 \leq i < +3,2. \end{cases} \quad (4.22)$$

Важно понимать, что кусочно-линейная форма представления выражения (4.22) указывает лишь на то, что для разных аргументов i значение напряжения u следует рассчитывать по разным правилам. При этом для любого из своих допустимых аргументов эта функция оказывается *однозначной* (существует *единственная*, хотя и представленная двумя отдельными выражениями, ветвь).

В связи со сказанным, для аргументов $y \in (-3,2; +3,2)$ универсальная формула (4.3) будет представлена лишь единственным слагаемым первого типа

$$\begin{aligned} \text{для } -3,2 < i \leq 0: W_i(y) &= W_u\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left(-\frac{(y/2)^2}{2\sigma_u^2}\right), \\ \text{для } 0 \leq i < +3,2: W_i(y) &= W_u(1,25 \cdot y) \cdot |1,25| = \frac{1,25}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left(-\frac{(1,25 \cdot y)^2}{2\sigma_u^2}\right). \end{aligned}$$

г) Объединяя полученные выше данные, закон распределения тока, наблюдаемого в нелинейном элементе, можно записать в виде

$$W_i(y) = \begin{cases} \frac{1}{2,5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{12,5}\right) + 0,1 \cdot \delta(y + 3,2) & \text{при } -3,2 \leq i \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) + 0,0007 \cdot \delta(y - 3,2) & \text{при } 0 \leq i \leq +3,2. \end{cases}$$

Задача 4.5. На вход идеального амплитудного детектора воздействует узкополосный нормальный шум неизвестной интенсивности. Напряжение, наблюдаемое на выходе детектора, превышает уровень 1,2 вольт в 70% случаев. Определить среднюю мощность реализаций шума на входе детектора.

Решение

а) Огибающая нормального шума имеет релеевское распределение, поэтому вероятность наблюдения для нее значений, превышающих произвольный уровень $U_{\text{пор}}$, может быть рассчитана по формуле

$$P_{\text{прев}} = P\{A(t) > U_{\text{пор}}\} = \int_{U_{\text{пор}}}^{+\infty} \frac{x}{\sigma_{\xi}^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) dx = \exp\left(-\frac{U_{\text{пор}}^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right).$$

Таким образом, вероятность превышения огибающей шума некоторого порогового уровня определяется отношением этого уровня к эффективному значению анализируемого шума σ_{ξ} . Для отношения $U_{\text{пор}} / \sigma_{\xi}$, имеем

$$\frac{U_{\text{пор}}}{\sigma_{\xi}} = \sqrt{-2 \cdot \ln(P_{\text{прев}})}.$$

б) Шумовой характер воздействия подразумевает, что математическое ожидание воздействующего напряжения равно нулю, а значит средняя мощность реализаций входного процесса совпадает с мощностью их переменной составляющей и численно равна дисперсии процесса. Учитывая нормальное распределение воздействующего напряжения, получаем

$$P_{\text{ср}}|_{M_{\xi}=0} = D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 = \frac{U_{\text{пор}}^2}{-2 \cdot \ln(P_{\text{прев}})} = \frac{1,2^2}{-2 \cdot \ln(0,7)} = \frac{1,44}{0,713} \approx 2 \text{ (В}^2\text{)}.$$

Задача 4.6. Белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-12} \text{ В}^2/\text{Гц}$ проходит через усилитель с АЧХ, представленной на рис. 4.6, и поступает на вход идеального амплитудного детектора. При каком коэффициенте усиления усилителя наблюдаемая на выходе детектора постоянная составляющая реализаций будет составлять 0,25 мВ?

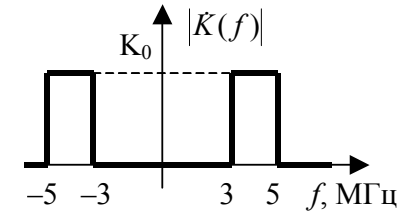


Рис. 4.6. АЧХ усилителя из задачи 4.6

Решение

а) Используемую в данной задаче цепь по отношению к белому шуму можно считать узкополосной, а потому прохождение шума через усилитель будет сопровождаться эффектом нормализации, описанным в п. 3.1.1, и независимо от характера распределения значений исходного шума процесс, поступающий на вход детектора, будет иметь нормальное распределение. Это, в свою очередь, означает, что СП на выходе детектора будет релеевским, а его постоянная составляющая (математическое ожидание) будет связана с эффективным значением нормального процесса на входе детектора соотношением (4.10), откуда

$$\sigma_{\xi} = \frac{M_A}{\sqrt{\pi/2}} = \frac{0,25}{1,25} = 0,2 \text{ В}.$$

б) Прямоугольная форма АЧХ усилителя означает, что его шумовая полоса (см. (3.4)) будет равна $\Pi_{\text{шф}} = 2 \text{ МГц}$. Тогда, опираясь на формулу (3.7) и учитывая, что в нашем случае $P_{\text{вых}} =$

$= \sigma_{\xi}^2$, для расчета необходимого коэффициента усиления усилителя получаем соотношение

$$K_0 = \frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{2 \cdot P_{\text{уф}} \cdot N_0}} = \frac{0,2}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12}}} = \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} = 100.$$

Задача 4.7. Определить закон распределения огибающей и фазы нормального случайного процесса, обладающего спектральной плотностью мощности, показанной на рис. 4.7, для случаев (а) $\Delta f = 3,14$ МГц и (б) $\Delta f = 348$ кГц.

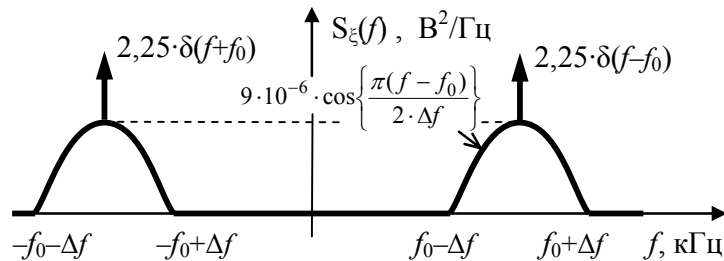


Рис. 4.7. Спектральная плотность мощности СП из задачи 4.7

Решение

а) Особенностью СПМ, представленной на рис. 4.7, является наличие δ -функций на частотах $f = -f_0$ и $f = +f_0$. Спектральные всплески подобной формы однозначно указывают на наличие в составе исследуемого СП гармонической компоненты. Таким образом, анализируемый случайный процесс представляет собой смесь узкополосного нормального шума с сигналом вида $u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \psi_0)$.

б) Оценим наблюдаемое соотношение сигнал-шум. Коэффициенты “2,25” при δ -функциях характеризуют мощность узкополосных компонент на соответствующих частотах, поэтому мощность гармонического сигнала составляет $4,5 \text{ В}^2$, что соответствует косинусоиду с амплитудой $U_0 = 3,0 \text{ В}$. Мощность же

шумовой составляющей СП определяется площадью под кривой СПМ и может быть определена, например, по правилу (2.10)

$$P_{\text{ш}} = 2 \cdot \int_0^{+\infty} S_{\xi}(f) df = 2 \cdot \int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} 9 \cdot 10^{-6} \cdot \cos\left(\frac{\pi(f-f_0)}{2 \cdot \Delta f}\right) df =$$

$$= 9 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2 \Delta f}{\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{36 \cdot 10^{-6}}{\pi} \cdot \Delta f \cdot \text{В}^2.$$

Таким образом, применительно к случаю (а) мощность шума равна $P_{\text{ш}} = 36 \text{ В}^2$, а в случае (б) $P_{\text{ш}} \approx 4 \text{ В}^2$.

в) Согласно (4.13) огибающая смеси нормального шума и гармонического сигнала подчиняется распределению Релея-Райса. При низком отношении сигнал-шум (случай “а”) это распределение похоже по форме на стандартное релеевское, а по мере увеличения отношения сигнал/шум все больше концентрируется в окрестности точки $x = U_0$. Для построения графиков распределений перепишем (4.13) в виде

$$W_A(x) = \frac{x}{\sigma_{\xi}^2} \cdot \exp\left(-\frac{(x-U_0)^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{x U_0}{\sigma_{\xi}^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x \cdot U_0}{\sigma_{\xi}^2}\right) \right\}, \quad x \geq 0$$

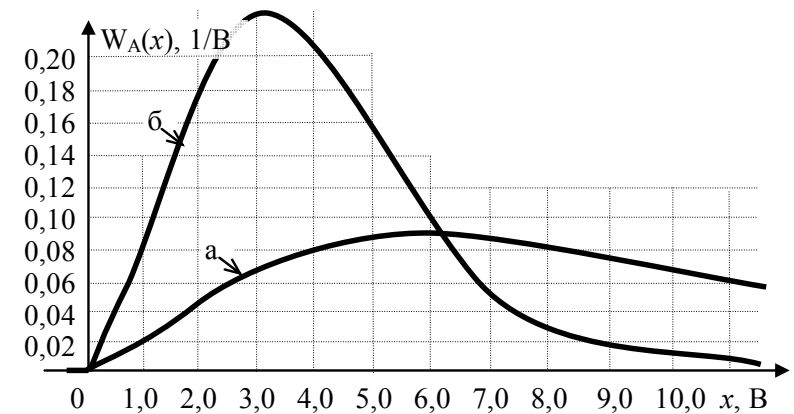


Рис. 4.8. Закон распределения огибающей смеси нормального шума и гармонического сигнала

и воспользуемся табличными данными из прил. 3. Результаты представлены на рис. 4.8.

г) Следует заметить, что анализируемый процесс является нестационарным СП и, в частности, возможные значения фазы концентрируются в окрестности значения мгновенной фазы гармонической компоненты. Поскольку в условии не определены ни начальная фаза гармонического сигнала, ни момент времени, для которого требуется построить закон распределения фазы, то однозначного решения данная задача не имеет. Если, к примеру, что начальная фаза гармонической компоненты $\psi_0 = 5\pi/4$, то распределения фазы СП, определяемое (4.16), будет иметь вид, представленный на рис. 4.9.

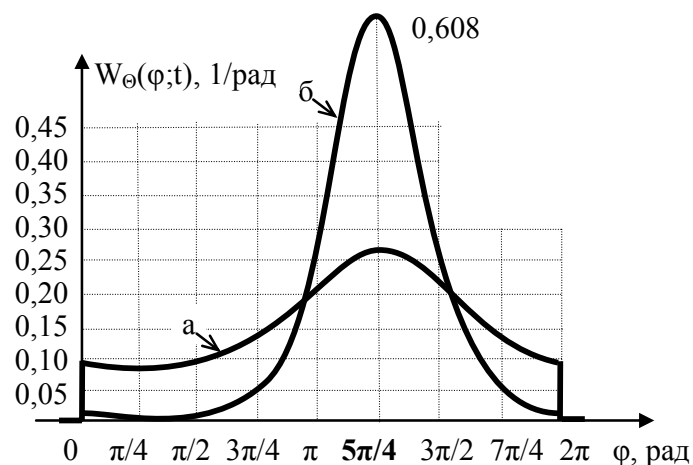


Рис. 4.9. Закон распределения фазы смеси нормального шума и гармонического сигнала из задачи 4.7

Примечание: дополнительную информацию и примеры расчета свойств СП на выходе нелинейных преобразователей можно найти в [2, с.202-204, 218-220, 329-337; 4, с.307-316, 492-493].

4.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории

Задача 0. Случайный процесс $\xi(t)$ характеризуется представленной в таблице ниже функцией распределения. Определить закон распределения случайной величины, указанной в правой колонке таблицы

Но- мер	Функция распределения СВ ξ	Искомая величина
1	$\begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0,25, & x = 1 \\ 0,125 + x/8, & 1 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$	$\eta = (4 - \xi)^2$
2	$\begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0,5, & 2 \leq x < 3 \\ 0,8, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$	$\eta = 1 + \cos(\pi \cdot \xi / 3)$
3	$1 / (1 + x^2), \quad x \leq 0$	$\eta = \exp(\xi)$
4	$(x - 2)^2, \quad \text{при } 2 \leq x \leq 3$	$\eta = 4 \cdot \xi$
5	$x^2, \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1$	$\eta = \arcsin(\xi)$
6	$1 - 1/x, \quad \text{при } 1 \leq x < +\infty$	$\eta = \operatorname{arctg}(\xi)$
7	$1 + x, \quad \text{при } -1 \leq x \leq 0$	$\eta = \arccos(\xi)$
8	$\exp(2 \cdot x), \quad x \leq 0$	$\eta = \exp(-\xi)$
9	$\sin(\pi \cdot x / 4), \quad \text{при } 0 \leq x \leq 2$	$\eta = \xi - 1 $
10	$\cos(\pi \cdot x / 4), \quad \text{при } -2 \leq x \leq 0$	$\eta = (\xi - 1)^2$

Примечание: если в формулах, приведенных выше, не учтены какие-либо интервалы, то это означает, что функция распределения принимает для подобных аргументов вырожденное значение (0 или 1).

Задача 1. Узкополосный нормальный шум с математическим ожиданием, приведенным в левой колонке таблицы ниже, через разделительную ёмкость, устраняющую постоянную составляющую процесса, поступает на вход идеального амплитудного детектора. Вероятность наблюдения отрицательных шумовых напряжений до разделительной ёмкости приведена в предпоследней колонке таблицы. Определить параметр выходного процесса, указанный в правой колонке.

Но- мер	Матожидание нор- мального шума, В	$P\{u_{\text{вх}}(t) < 0\}$	Искомый параметр
1	0,14	0,421	$m_2\{u_{\text{вых}}(t)\}$
2	0,16	0,345	$m_1\{u_{\text{вых}}(t)\}$
3	0,24	0,212	$D\{u_{\text{вых}}(t)\}$
4	0,32	0,345	$P\{u_{\text{вых}}(t) < 1\text{ В}\}$
5	0,48	0,382	$P\{u_{\text{вых}}(t) > 1\text{ В}\}$
6	– 0,60	0,618	$D\{u_{\text{вых}}(t)\}$
7	– 1,20	0,726	$m_2\{u_{\text{вых}}(t)\}$
8	– 1,80	0,816	$m_1\{u_{\text{вых}}(t)\}$
9	– 2,20	0,864	$P\{u_{\text{вых}}(t) < 1\text{ В}\}$
10	– 3,30	0,933	$P\{u_{\text{вых}}(t) > 1\text{ В}\}$

Задача 2. Случайная величина ξ подчиняется нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и параметром σ , представленным в центральной колонке таблицы ниже. Определить закон распределения случайной величины η , связанной с СВ ξ функцией...

Но- мер	Параметр рас- пределения σ_ξ	Функциональная зависимость $\eta = f(\xi)$
1	2	$\eta = \begin{cases} -2 & \text{при } \xi \leq -4 \\ 0,5 \cdot \xi & \text{при } -4 \leq \xi \leq 0 \\ 2 \cdot \xi & \text{при } \xi \geq 0 \end{cases}$
2	3	$\eta = \exp(\xi^2)$
3	2	$\eta = \begin{cases} -2 \cdot \xi & \text{при } \xi \leq -2 \\ 4 & \text{при } -2 \leq \xi \leq 0 \\ 4 + 0,5 \cdot \xi & \text{при } \xi \geq 0 \end{cases}$
4	1	$\eta = \sqrt{ \xi }$
5	2	$\eta = \begin{cases} \xi^2 & \text{при } \xi > 2 \\ 4 & \text{при } \xi \leq 2 \end{cases}$
6	3	$\eta = \xi / 3 $
7	2	$\eta = \begin{cases} \exp(\xi^2) & \text{при } x < 0 \\ -\exp(\xi^2) & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$
8	1	$\eta = 1 - \xi^2$
9	2	$\eta = \begin{cases} -2 & \text{при } \xi \leq -2 \\ 0 & \text{при } -2 \leq \xi \leq 2 \\ 2 & \text{при } \xi \geq 2 \end{cases}$
10	3	$\eta = 1 + \xi^2$

Задача 3. На идеальный амплитудный детектор воздействует эргодический узкополосный нормальный СП $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием. Записать аналитическое выражение плотности вероятности воздействующего процесса, если известно, что на выходе детектора...

Но- мер	информация о процессе на выходе детектора
1	дисперсия процесса равна 0,108 В.
2	полная средняя мощность процесса составляет 0,08 В ² .
3	постоянная составляющая реализаций равна 0,625 В.
4	математическое ожидание процесса равно 0,158 В.
5	средняя мощность переменной составляющей 0,048 В ² .
6	второй начальный момент $m_2\{u_{\text{вых}}(t)\} = 0,18 \text{ В}^2$.
7	постоянная составляющая реализаций равна 0,125 В.
8	дисперсия процесса составляет 0,027 В ² .
9	полная средняя мощность реализаций составляет 0,98 В ² .
10	математическое ожидание процесса равно 0,25 В.

Задача 4. Напряжение η , наблюдаемое на выходе квадратичного детектора, связано со случайным сигналом ξ , поступающим на вход, соотношением $\eta = 2 \cdot \xi^2$. Определить закон распределения и математическое ожидание величины η , если одномерная плотность вероятности СП $\xi(t)$...

Но- мер	$W_{\xi}(x)$	Но- мер	$W_{\xi}(x)$
1	соответствует равномерному распределению с пределами $a = -2$, $b = +2$	6	соответствует нормальному распределению с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1,5$
2	$\begin{cases} 0,2 \cdot x & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \\ 0,1 & \text{при } -6 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0,2 & \text{при } -2 \leq x \leq 0 \\ 0,6 & \text{при } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$

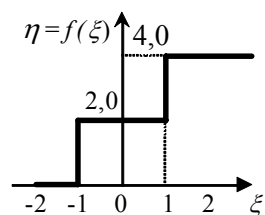
3	$0,3 + 0,4 \cdot \delta(x-1)$ при $-1 \leq x \leq 1$	8	$1/\{\pi \cdot (1+x^2)\}$ при любых x
4	$\frac{1+\sin(x)}{\pi}$ при $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	9	$\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)$ при $-1 \leq x \leq 1$
5	$0,5 \cdot \exp(- x)$ при любых x	10	$0,4 \cdot (1 - 0,4 \cdot x)$, $ x \leq 2,5$

Задача 5. Случайный процесс $\xi(t)$ равновероятно принимает любые значения из диапазона $-5 \leq \xi(t) \leq +5$ (В). Определить одномерный закон распределения и математическое ожидание СП $\eta(t)$, значения которого формируются из $\xi(t)$ безынерционным преобразователем с характеристикой прямого преобразования $y = f(x)$, представленной в таблице...

Но- мер	$y = f(x)$	Но- мер	$y = f(x)$
1		6	
2		7	
3		8	

4		9	
5		10	

Задача 6. Случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ связаны между собой функциональной зависимостью, показанной на рисунке.



Определить закон распределения и дисперсию случайного процесса $\eta(t)$, если распределение $\xi(t)$...

Но- мер	$F_{\xi}(x)$	Но- мер	$F_{\xi}(x)$
1	$\cos(\pi \cdot x / 6), -3 \leq x \leq 0$	6	$\sin(\pi \cdot x / 3), 0 \leq x \leq 1,5$
2	$\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -4 \\ 0,4 + 0,1 \cdot x & \text{при } -4 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{при } 2 \leq x \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2 \\ 0,5 + 0,2 \cdot x & \text{при } -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{при } 2 \leq x \end{cases}$

3	$0,4 \cdot x$ при $0 \leq x \leq 2,5$	8	$(12 + 4 \cdot x - x^2) / 16, -2 \leq x \leq 2$
4	$\begin{cases} \sqrt{(x+5)/16} & \text{при } -5 \leq x < 0 \\ 0,6 + x/4 & \text{при } 0 \leq x \leq 1,6 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 0,4 \cdot e^{+x/4} & \text{при } x < 0 \\ 1 - 0,4 \cdot e^{-x/4} & \text{при } 0 \leq x \end{cases}$
5	$(1 + x/2) / 2, -2 \leq x \leq 2$	10	$0,5 + \arctg(x) \cdot 2/\pi$

Таблица 4.1

Примечание: для уменьшения размера рисунков в таблице показаны лишь правые половины графиков СПМ, соответствующие частотам $f > 0$. Симметричную левую часть следует учитывать в решении самостоятельно.

Задача 7. Спектральные плотности мощности (СПМ) различных эргодических случайных процессов представлены в табл. 4.1. Шум с СПМ, указанной в левой колонке таблицы, приведенной ниже, поступает на вход идеального амплитудного детектора. Из параметров СПМ шума один указан в таблице ниже, а другой необходимо найти, учитывая, что на выходе детектора...

Но- мер	Вид СПМ (табл. 4.1)	Известный параметр	дополнительное условие
1	А	$\Delta f = 1 \text{ кГц}$	$P\{u_{\text{вых}}(t) < 1 \text{ В}\} = 0,12$
2	В	$\Delta f = 2 \text{ кГц}$	$P\{u_{\text{вых}}(t) > 1 \text{ В}\} = 0,97$
3	Д	$\Delta f = 3 \text{ кГц}$	$m_2\{u_{\text{вых}}(t)\} = 0,08 \text{ В}^2$
4	Б	$\Delta f = 4 \text{ кГц}$	$D\{u_{\text{вых}}(t)\} = 0,107 \text{ В}^2$
5	Г	$\Delta f = 5 \text{ кГц}$	$m_1\{u_{\text{вых}}(t)\} = 10^{-4} \text{ В}$
6	А	$S_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$m_1\{u_{\text{вых}}(t)\} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ В}$
7	В	$S_0 = 7 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$D\{u_{\text{вых}}(t)\} = 0,068 \text{ В}^2$
8	Д	$S_0 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$m_2\{u_{\text{вых}}(t)\} = 0,002 \text{ В}^2$
9	Б	$S_0 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$P\{u_{\text{вых}}(t) < 1 \text{ В}\} = 0,39$
10	Г	$S_0 = 10^{-5} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$P\{u_{\text{вых}}(t) > 1 \text{ В}\} = 0,946$

Задача 8. Узкополосный нормальный случайный процесс со спектральной плотностью мощности, указанной в левой колонке таблицы ниже, поступает на вход идеального амплитудного детектора. Определить вероятность наблюдения на выходе детектора напряжений, превышающих +1 вольт, если параметры входного процесса, соответствуют указанным в таблице...

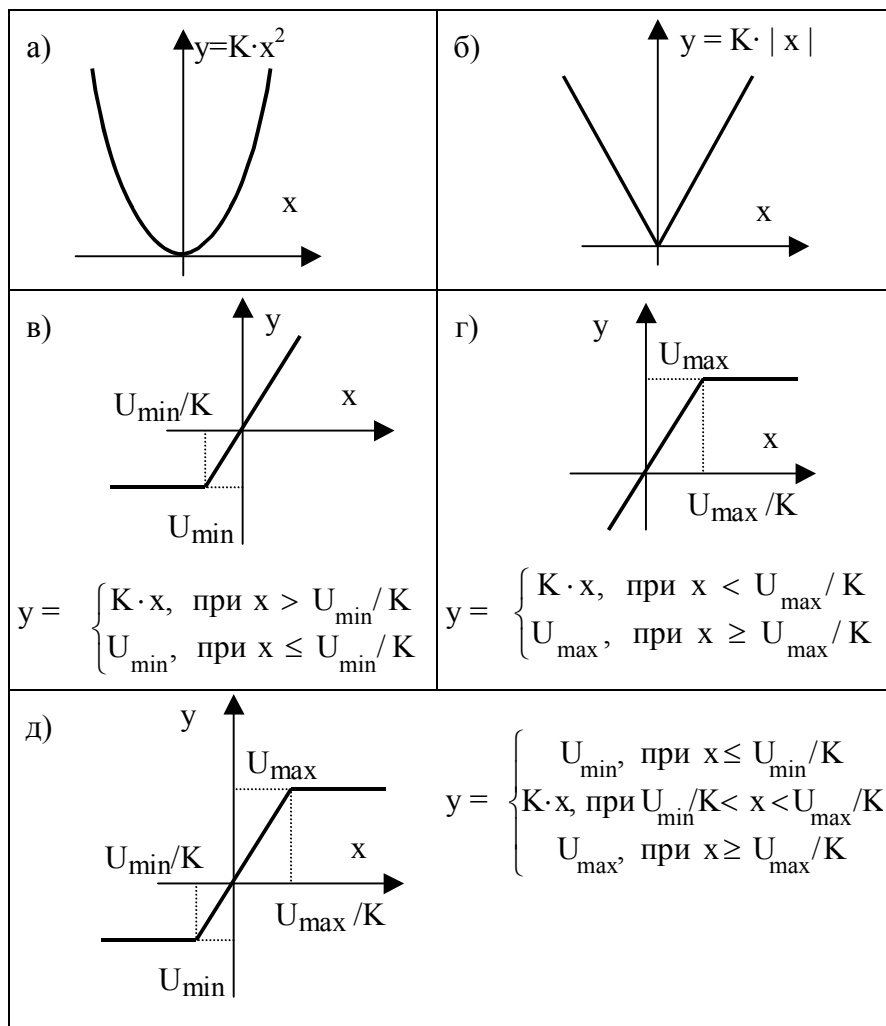
Но- мер	Вид СПМ (табл. 4.1)	Максимум СПМ S_0 , $\text{В}^2/\text{Гц}$	Δf , кГц
1	Д	$6 \cdot 10^{-6}$	15
2	Б	$7 \cdot 10^{-6}$	15
3	Г	$8 \cdot 10^{-6}$	20
4	Е	$9 \cdot 10^{-6}$	20
5	А	10^{-5}	25
6	Д	$4 \cdot 10^{-5}$	25
7	Б	$3 \cdot 10^{-5}$	50
8	Г	$2 \cdot 10^{-5}$	50
9	Е	10^{-5}	100
10	А	10^{-6}	100

Лабораторная работа № 4 «Нелинейные преобразования случайных процессов»

Цель работы – экспериментальное исследование изменения вероятностных и энергетических характеристик СП при их нелинейных преобразованиях.

4.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

4.4.1. Полезно учесть, что сложность теоретического анализа преобразования случайных процессов в нелинейных цепях существенно зависит от инерционности этих преобразований. Выпрямители, ограничители, квадраторы и другие аналогичные цепи можно считать идеальными безынерционными устройствами, реализующими кусочно-линейные преобразования, представленные на рис. 4.10. Расчет вероятностных и числовых характеристик процессов на выходе этих устройств следует вести по правилам (4.3)-(4.5).



а - квадратор, б - двухполупериодный выпрямитель,
 в - ограничитель снизу, г - ограничитель сверху,
 д - двухсторонний ограничитель

Рис. 4.10. Преобразования, реализуемые исследуемыми
 безынерционными нелинейными устройствами

4.4.2. Если же нелинейные цепи являются одновременно инерционными, то определение вероятностных характеристик и расчет корреляционных и спектральных показателей процессов на выходе этих цепей оказывается весьма проблематичным. Особым случаем, когда анализ характеристик всё же возможен, является исследование нелинейных цепей безынерционных по отношению к огибающим процессов. К числу подобных цепей можно отнести, в частности, амплитудный детектор. Свойства СП, наблюдаемых на его выходе, определяются соотношениями (4.9)-(4.15).

4.5. Домашнее задание к лабораторной работе

4.5.1 Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант исследований.

4.5.2. Применительно к сигналу и нелинейному преобразователю из табл. 4.2, рассчитайте и постройте плотность распределения вероятности процесса на выходе цепи. Продумайте, как будет изменяться данный график при изменении параметров воздействующего на цепь случайного процесса или характеристик самого преобразователя.

4.6. Выполнение лабораторных исследований

4.6.1. Установить оба анализатора в состояние осциллографа и настроить один из них на контрольную точку №6, а другой - на контрольную точку №5. Модули №1 и №4 схемы моделирования настроить в соответствии с требованиями табл. 4.2, а все прочие модули выключить.

Примечание: исключение составляет задание для бригад №7-8, которым необходимо детектировать сигнал. Идеального амплитудного детектора программа моделирования не предлагает, поэтому для проведения лабораторных исследований следует использовать модуль №4 схемы моделирования как двухполупериодный выпрямитель с коэффициентом усиления 1,5, а модуль №5 - как ИФНЧ с частотой среза $F_{\text{ср}} = 0,5$ кГц.

Таблица 4.2

Номер бригады	Формируемый сигнал	Нелинейный преобразователь
1	широкополосный нормальный шум с $\sigma_{ш} = 0,8 \text{ В}$	двухполупериодный выпрямитель с коэффициентом усиления $K = 1$
2	гармонический с $U_m = 1,2 \text{ В}$; $F = 3 \text{ кГц}$	двухполупериодный выпрямитель с коэффициентом усиления $K = 2$
3	широкополосный нормальный шум с $\sigma_{ш} = 0,8 \text{ В}$	ограничитель снизу с коэф. усиления $K = 2$ и уровнем ограничения $U_{\min} = -1 \text{ В}$
4	гармонический с $U_m = 4 \text{ В}$; $F = 2 \text{ кГц}$	ограничитель сверху с коэф. усиления $K = 1$ и уровнем ограничения $U_{\max} = +1 \text{ В}$
5	широкополосный нормальный шум с $\sigma_{ш} = 0,8 \text{ В}$	двухсторонний ограничитель с $K = 1,5$ и уровнями ограничения $U_{\max} = +0,8 \text{ В}$, $U_{\min} = -0,8 \text{ В}$
6	гармонический с $U_m = 1,8 \text{ В}$; $F = 1 \text{ кГц}$	квадратор с коэффициентом усиления $K = 2$
7	широкополосный нормальный шум с $\sigma_{ш} = 0,8 \text{ В}$	идеальный амплитудный детектор (см. прим. к п. 4.6.1)
8	нормальный шум (тип 2) с $\sigma_{ш} = 0,8 \text{ В}$ $\tau = 2 \text{ мс}$; $F = 4 \text{ кГц}$	идеальный амплитудный детектор (см. прим. к п. 4.6.1)

4.6.2. Сопоставить сигналы, наблюдаемые на входе и выходе преобразователя, и качественно (приближенно) зарисовать в отчет вид наиболее типичных реализаций.

4.6.3. Переключить анализаторы в режим отображения гистограмм плотности вероятности случайного процесса и, формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов. Зафиксировать в отчете типовые графики плотности распределения вероятности процессов на входе и выходе цепи.

4.6.4. Переключить анализаторы в режим спектрального анализа процессов. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов и зафиксировать в отчете типовые графики распределения усредненных интенсивностей спектральных составляющих на входе и выходе фильтра.

4.6.5. Переключив анализатор, подсоединенный к точке №5, в режим расчета числовых характеристик СП, зафиксировать в отчете значения оценок математического ожидания и эффективного значения процесса на выходе нелинейного преобразователя.

4.7. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Как рассчитывается одномерная плотность вероятности при функциональном преобразовании СП? Приведите примеры.

2. Каков будет закон распределения СП на выходе квантователя с разным числом уровней, если на его вход подать шум или гармонический сигнал со случайной начальной фазой?

3. Запишите аналитические выражения законов распределения огибающей и фазы узкополосного нормального СП с нулевым матожиданием и рассчитайте их средние и дисперсии.

4. Каким образом на вероятностных характеристиках огибающей и фазы аддитивной смеси узкополосного нормального шума и детерминированного гармонического сигнала отражается изменение амплитуды сигнала при фиксированном уровне

шума и изменение уровня шума при фиксированной амплитуде сигнала?

5. Как рассчитать корреляционную функцию и спектральную плотность мощности процесса на выходе безынерционного нелинейного преобразователя?

6. Каковы возможные изменения спектрального состава процессов на входе и выходе нелинейного преобразователя? Поясните на примерах работы ограничителя и квадратора.

7. Каковы возможные изменения корреляционных функций процессов при воздействии на вход нелинейного преобразователя квазислучайных периодических колебаний?

8. Поясните изменение спектральных характеристик случайных процессов при воздействии на вход идеального амплитудного детектора узкополосного нормального шума.

5. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

5.1. Теоретические основы

5.1.1. Линейная фильтрация сигналов неизвестной формы

Пусть на вход устройства обработки на фоне аддитивного шума поступает сигнал неизвестной формы несущий полезную информацию. Обработку смеси сигнала и шума, направленную на максимально точное восстановление формы этого полезного сигнала, называют оптимальной фильтрацией сигналов неизвестной формы. Ограничивая поиск классом линейных устройств, можно показать, что минимальную среднеквадратическую погрешность выделения полезного сигнала из смеси с аддитивным шумом обеспечивает фильтр с нулевой фазо-частотной характеристикой и АЧХ, определяемой выражением

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(f)| = \frac{S(f)}{S(f) + N(f)} = \frac{1}{1 + N(f)/S(f)}, \quad (5.1)$$

где $S(f)$ – спектральная плотность мощности полезного сигнала; $N(f)$ – спектральная плотность мощности помехи, на фоне которой поступает полезный сигнал.

Обеспечиваемая оптимальным фильтром минимальная среднеквадратическая погрешность характеризуется средней мощностью сигнала ошибки, рассчитываемой по формуле

$$P_{\Delta \text{cp}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(f) \cdot N(f)}{S(f) + N(f)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{N(f)} + \frac{1}{S(f)}} df. \quad (5.2)$$

5.1.2. Обнаружение сигналов известной формы на фоне помех

При **обнаружении** сигналов известной формы на фоне помех оптимальным является фильтр, обеспечивающий на выходе фильтра при приходе обнаруживаемого сигнала наибольшее соотношение сигнал-шум в заранее выбранный момент времени.

Применительно к белому шуму подобным оптимальным устройством является согласованный фильтр, представляющий собой линейное аналоговое устройство с импульсной характеристикой

$$g_{\text{сф}}(t) = A \cdot s(t_0 - t), \quad (5.3)$$

где $s(t)$ - обнаруживаемый сигнал; t_0 - момент времени, в который обеспечивается максимум отношения сигнал-шум (должен совпадать с моментом окончания сигнала или выбираться позже него); A - произвольная константа (свойства фильтра не зависят от A , так как изменение этого коэффициента одинаково увеличивает как интенсивность полезного сигнала, так и среднеквадратическое значение шума на выходе фильтра).

Комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра должен, очевидно, соответствовать (5.3) и может быть рассчитан по формуле

$$\dot{K}_{\text{сф}}(\omega) = A \cdot G_s^*(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}, \quad (5.4)$$

где $G_s^*(\omega)$ - величина, комплексно-сопряженная спектральной плотности обнаруживаемого сигнала.

Обеспечиваемое согласованным фильтром отношение сигнал-шум не зависит от формы обнаруживаемого сигнала, а определяется лишь его энергией и спектральной плотностью мощности помехи. Квадрат отношения сигнал/шум (отношение сигнал/шум по мощности) на выходе согласованного фильтра в момент времени t_0 равен

$$q_{\text{сф}}^2 = \mathcal{E}_s / N_0, \quad (5.5)$$

где N_0 - спектральная плотность мощности шума, а $\mathcal{E}_s$ - энергия полезного сигнала определяемая соотношением

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_s(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.6)$$

Если шум, на фоне которого производится обнаружение, не является белым, то согласованный фильтр уже не обеспечивает максимально возможного отношения сигнал-шум. Оптимальным для обнаружения сигналов в подобной ситуации оказывается фильтр с комплексным коэффициентом передачи

$$\dot{K}_{\text{опт}}(\omega) = A \cdot \frac{G_s^*(\omega)}{S_{\xi}(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}, \quad (5.7)$$

где $S_{\xi}(\omega)$ – спектральная плотность мощности помехи, на фоне которой выполняется обнаружение полезного сигнала.

Обеспечиваемое им отношение сигнал-шум составляет

$$q^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\dot{G}_s(\omega)|^2}{S_{\xi}(\omega)} d\omega. \quad (5.8)$$

5.2. Практические примеры

Задача 5.1. Спектральные плотности мощности случайного полезного сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, на фоне которой принимается этот сигнал, показаны на рис. 5.1. Определить амплитудно-частотную характеристику фильтра, обеспечивающего выделение сигнала из шума с наименьшей среднеквадратической погрешностью.

Решение

а) Согласно рис. 5.1 спектральные плотности мощности фигурирующих в данной задаче СП представляют собой четные кусочно-линейные функции и потому могут быть записаны в виде совокупности выражений вида $y = k \cdot |f| + b$, где коэффициенты k и b можно определить, в частности, по паре контрольных точек анализируемого линейного участка. Например, линия, выделенная на рис. 5.1 овалом, должна проходить через точки (частоты подставляются в герцах)

$$N(10^3) = k \cdot 10^3 + b = 0$$

$$N(6 \cdot 10^3) = k \cdot 6 \cdot 10^3 + b = 2 \cdot 10^{-6}$$

Рассматривая эти два соотношения как систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными, несложно установить, что для анализируемого участка коэффициенты k и b должны равняться

$$k = 4 \cdot 10^{-10}; \quad b = -4 \cdot 10^{-7}.$$

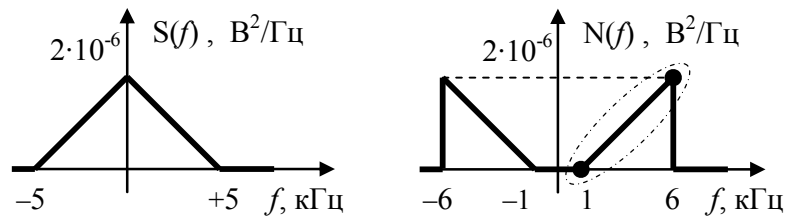


Рис. 5.1. Спектральные плотности мощности стационарных сигнала и помехи из задачи 1

Анализируя подобным образом прочие участки графиков $S(f)$ и $N(f)$, можно убедиться, что спектральным плотностям мощности полезного сигнала и шума соответствуют выражения

$$S(f) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|, & \text{при } |f| \leq 5 \cdot 10^3 \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$$

$$N(f) = \begin{cases} -4 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|, & \text{при } 1 \cdot 10^3 \leq |f| \leq 5 \cdot 10^3 \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$$

б) Согласно правилу (5.1), коэффициент передачи оптимального фильтра принимает отличающиеся от нуля значения лишь для совокупности частот, где $S(f) > 0$, т.е. имеются спектральные составляющие полезного сигнала. Более того, для всех частот, где сигнал наблюдается без шума, коэффициент передачи

следует брать равным единице и лишь там, где действует смесь сигнала с шумом, АЧХ цепи обязана быть меньше единицы.

В соответствии со сказанным, расчет АЧХ фильтра требуется лишь для совокупности частот от 1 до 5 кГц. Подставляя в (5.1) полученные выше аналитические выражения, получаем

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(f)| = \frac{2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|}{(2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|) + (-4 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|)} = \frac{2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|}{1,6 \cdot 10^{-6}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} \cdot |f|.$$

Итак, коэффициент передачи оптимального по критерию минимума среднеквадратической погрешности фильтра имеет вид

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(f)| = \begin{cases} 1, & \text{при } |f| \leq 1 \text{ кГц} \\ 1,25 - 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot |f|, & \text{при } 1 < |f| \leq 5 \text{ кГц} \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$$

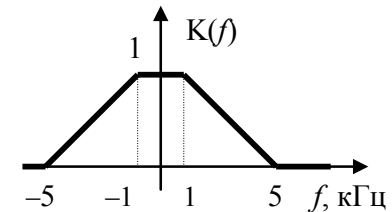


Рис. 5.2. Коэффициент передачи фильтра из задачи 5.1

Задача 5.2. Случайный сигнал $s(t)$ с корреляционной функцией $B_s(\tau) = \sigma_s^2 \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|}$ (B^2) принимается на фоне помехи $n(t)$ с корреляционной функцией $B_n(\tau) = \sigma_n^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|}$ (B^2), где α и β – некоторые положительные константы. Найти коэффициент передачи фильтра, выделяющего сигнал из смеси с наименьшей

среднеквадратической погрешностью, и получить выражение для оценки самой этой погрешности.

Решение

а) Так как основные расчетные формулы, относящиеся к оптимальной фильтрации сигналов неизвестной формы, опираются на спектральные характеристики обрабатываемых случайных процессов, то решение задачи следует начать с поиска спектральной плотности мощности процессов $s(t)$ и $n(t)$.

Входящий в выражения корреляционных функций знак модуля несколько затрудняет интегрирование, но от него легко избавиться, если в качестве математической записи теоремы Винера-Хинчина использовать выражение (2.13). Оно предполагает интегрирование лишь по области $\tau \geq 0$, применительно к которой $|\tau| \equiv \tau$, поэтому в подынтегральном выражении знак модуля может быть пропущен

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma_s^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot e^{-j\omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2 \cdot \sigma_s^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-\tau \cdot (\alpha + j\omega)}}{-(\alpha + j\omega)} \bigg|_0^{+\infty} \right\} = \\ &= 2 \cdot \sigma_s^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\alpha + j\omega} \right\} = \sigma_s^2 \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{В}^2/\text{Гц}). \end{aligned}$$

По аналогии, $N(\omega) = \sigma_n^2 \cdot \frac{2 \cdot \beta}{\beta^2 + \omega^2} \quad (\text{В}^2/\text{Гц}).$

б) В соответствии с (5.1) для АЧХ оптимального фильтра получаем $|\dot{K}_{\text{опт}}(\omega)| = \frac{1}{1 + \frac{N(\omega)}{S(\omega)}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\beta^2 + \omega^2}}.$

В качестве оценки погрешности имеет смысл использовать среднюю мощность сигнала ошибки, рассчитываемую в соответствии с (5.2) как

$$P_{\Delta cp} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{N(\omega)} + \frac{1}{S(\omega)}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{\beta^2 + \omega^2}{2\beta \cdot \sigma_n^2}} d\omega$$

Введем вспомогательные обозначения

$$\frac{\alpha^2}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{\beta^2}{2\beta \cdot \sigma_n^2} = c^2; \quad \frac{1}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{1}{2\beta \cdot \sigma_n^2} = q^2.$$

С их использованием предыдущий интеграл принимает вид

$$P_{\Delta cp} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c^2 + (q \cdot \omega)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi \cdot c q} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + z^2} dz = \frac{1}{2 \cdot c \cdot q}.$$

После подстановки ранее введенных значений c и q для средней мощности сигнала ошибки получаем выражение

$$P_{\Delta cp} = \left(\frac{\alpha}{\sigma_s^2} + \frac{\beta}{\sigma_n^2} \right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{1}{\beta \cdot \sigma_n^2} \right)^{-0,5}.$$

Задача 5.3. Предложить структурную схему фильтра, согласованного с видеоимпульсом, показанным на рис. 5.3, и определить форму отклика этого фильтра на сигнал $s_1(t)$.

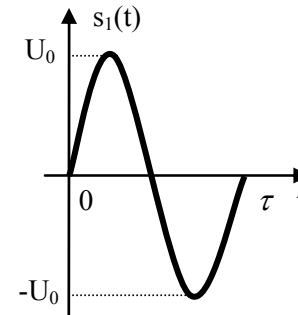


Рис. 5.3. Обнаруживаемый видеоимпульс из задачи 5.3

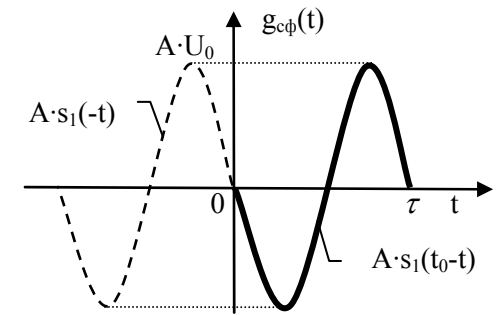


Рис. 5.4. Импульсная характеристика фильтра, согласованного с $s_1(t)$

Решение

а) На основании (5.3) импульсная характеристика фильтра, согласованного с сигналом $s_1(t)$, должна иметь вид, показанный на рис. 5.4, чему соответствует аналитическое выражение

$$g_{сф}(t) = -A \cdot U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot t / \tau).$$

Один из возможных способов реализации подобной импульсной характеристики предложен на рис. 5.5.

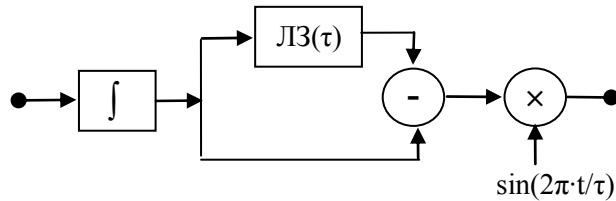


Рис. 5.5. Структурная схема фильтра, согласованного с $s_1(t)$

б) Так как согласованный фильтр — это линейное устройство и его импульсная характеристика известна, то наиболее простым способом расчета отклика такого фильтра на любой сигнал является интеграл Дюамеля

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x) \cdot g_{сф}(t-x) dx. \quad (5.9)$$

Для уточнения пределов интегрирования проанализируем графики функций, входящих в интеграл Дюамеля, в отдельности для случаев $0 \leq t \leq \tau$ (см. рис. 5.6а) и $\tau \leq t \leq 2\tau$ (см. рис. 5.6б). В соответствии с рис. 5.6а при $0 \leq t \leq \tau$ интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \int_0^t U_0 \cdot \sin(2\pi x / \tau) \cdot A \cdot U_0 \cdot \sin(2\pi(t-x) / \tau) dx = \\ &= \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot \int_0^t \{ \cos(2\pi t / \tau) - \cos(2\pi(2x-t) / \tau) \} dx = \\ &= \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot t \cdot \cos(2\pi \cdot t / \tau) - \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot \frac{\tau}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot t / \tau). \end{aligned}$$

Если заменить пределы интегрирования на показанные на рис. 5.6б и повторить расчет для моментов времени из интервала $\tau \leq t \leq 2\tau$, то нетрудно получить выражение аналогичное полученному выше.

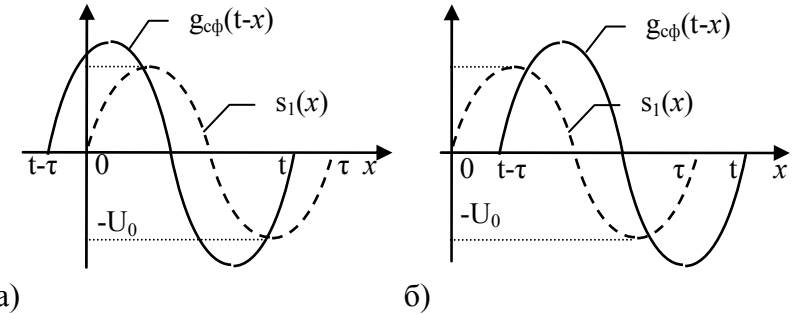


Рис. 5.6. Компоненты интеграла Дюамеля из задачи 5.3

Объединяя эти результаты искомый сигнал можно записать в виде

$$s_2(t) = \begin{cases} \frac{AU_0^2}{2} \cdot t \cdot \left[\cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) - \sin c\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{AU_0^2}{2} \cdot \left[(2\tau - t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) + t \cdot \sin c\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right], & \text{при } \tau \leq t \leq 2\tau \end{cases}$$

где функция $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$.

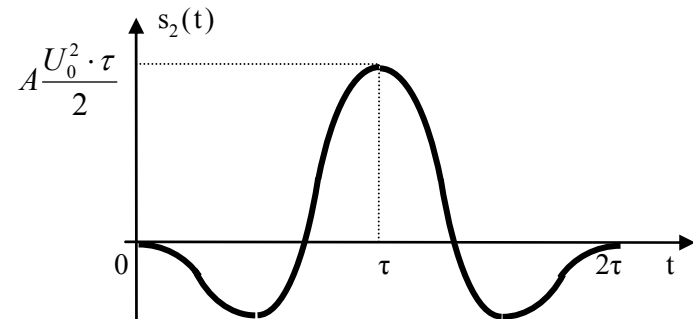


Рис. 5.7. Отклик согласованного фильтра на сигнал $s_1(t)$

Соответствующая найденному выражению реакция фильтра показана на рис. 5.7. Обратите внимание, что отклик достигает максимума в момент окончания входного сигнала и этот максимум равен $A \cdot \mathcal{E}_s$, где $\mathcal{E}_s$ - энергия обрабатываемого сигнала.

Задача 5.4. Существует ли сигнал, с которым согласован фильтр, имеющий комплексный коэффициент передачи

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{\alpha + j \cdot \omega} \quad ? \quad (5.10)$$

Решение

а) Ограничение, связанное с вопросами согласованной фильтрации, может относиться лишь к практической реализуемости фильтра, однако любому фильтру можно поставить в соответствие сигнал, с которым этот фильтр согласован

$$s_{\text{согл}}(t) = g_{\text{сф}}(t_0 - t) / A, \quad (5.11)$$

где t_0 и A - произвольные по величине константы.

б) Импульсная характеристика анализируемого фильтра, определяемая обратным преобразованием Фурье от (5.10), имеет вид

$$g_{\text{сф}}(t) = \exp(-\alpha \cdot t), \quad t \geq 0.$$

Таким образом, согласованными с данным фильтром являются любые сигналы, удовлетворяющие соотношению

$$s_{\text{согл}}(t) = \exp(\alpha \cdot (t - t_0)) / A, \quad t \leq t_0.$$

Несколько возможных вариантов подобных сигналов показаны на рис. 5.8.

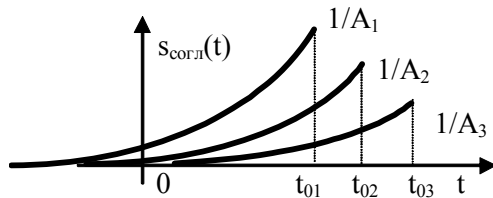


Рис. 5.8. Сигналы, согласованные с фильтром из задачи 5.4

Задача 5.5. Как изменятся требования к фильтру, рассмотренному в задаче 5.4, если согласованные с ним сигналы необходимо принимать на фоне помехи с корреляционной функцией

$$B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \quad ? \quad (5.12)$$

Решение

а) Согласно теореме Винера-Хинчина (2.13) спектральная плотность мощности помехи, на фоне которой производится теперь обнаружение сигналов, показанных на рис. 5.8, может быть найдена из выражения

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot \text{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma_{\xi}^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \cdot e^{-j \cdot \omega \tau} d\tau \right\} = \frac{2 \cdot \sigma_{\xi}^2 \cdot \beta}{\beta^2 + \omega^2}.$$

б) Из (5.7) следует, что коэффициент передачи фильтра, обеспечивающего максимальное соотношение сигнал-шум при обнаружении сигналов на фоне шума с неравномерной спектральной мощности, связан с коэффициентом передачи согласованного фильтра соотношением $\dot{K}_{\text{опт}}(\omega) = \frac{\dot{K}_{\text{сф}}(\omega)}{S_{\xi}(\omega)}$.

Таким образом, оптимальный фильтр должен обладать коэффициентом передачи

$$\dot{K}_{\text{опт}}(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2 \cdot \beta} \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\alpha + j \cdot \omega} = K_0 \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\alpha + j \cdot \omega}$$

где, в принципе, K_0 может быть произвольным по величине.

Задача 5.6. Полезный сигнал – импульс с линейной частотной модуляцией – имеет длительность $\tau = 5$ мкс и неизвестную амплитуду U . Этот полезный сигнал поступает на вход согласованного с ним фильтра. Источником шума на входе фильтра служит резистор $R = 100$ кОм, находящийся при температуре $T = 300$ К. При какой амплитуде сигнала отноше-

ние сигнал-шум на выходе фильтра будет удовлетворять соотношению $q_{\text{сф}}^2 \geq 5$?

Решение

а) В соответствии с (5.5) обеспечиваемое согласованным фильтром отношение сигнал-шум определяется энергией $\mathcal{E}_s$ полезного сигнала и спектральной плотностью мощности шума N_0 , на фоне которого производится обнаружение. Примерный вид обнаруживаемого сигнала показан на рис. 5.9. Поскольку средняя мощность гармонического сигнала не зависит от его частоты, то средняя за “период” мощность обнаруживаемого сигнала равна $U^2/2$, а энергия радиоимпульса продолжительности τ составляет

$$\mathcal{E}_s = \tau \cdot U^2/2.$$

б) Помехой, на фоне которой происходит обнаружение сигнала $s_{\text{лчм}}(t)$, служит тепловой шум, спектральная плотность мощности которого (в соответствии с (2.19)) равна

$$N_0 = 2 \cdot k \cdot T \cdot R,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/(Гц · Град) - постоянная Больцмана.

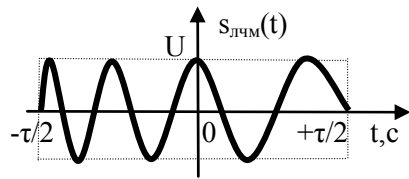


Рис. 5.9. Импульс с линейной частотной модуляцией из задачи 5.6

в) Итак, для выполнения требований задания необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\tau \cdot U^2}{4 \cdot k \cdot T \cdot R} \geq 5$,

откуда для амплитуды обнаруживаемого сигнала получаем

$$U \geq \sqrt{5 \cdot \frac{4 \cdot k \cdot T \cdot R}{\tau}} = \sqrt{5 \cdot \frac{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^{-6}}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ (В)}.$$

Т.е. заданные условием требования к соотношению сигнал-шум на выходе устройства обработки обеспечиваются при амплитуде обнаруживаемых сигналов, превышающей 40 мкВ.

Задача 5.7. Спектральная плотность амплитуд полезного сигнала $u(t)$ показана на рис. 5.10. Если на вход фильтра, согласованного с этим сигналом, подать белый шум (без полезного сигнала), то какова будет спектральная плотность мощности отклика фильтра?

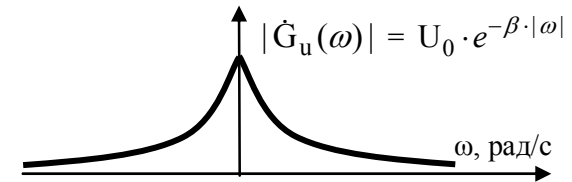


Рис. 5.10. Спектральная плотность амплитуд полезного сигнала из задачи 5.7

Решение

а) В соответствии с частотным методом анализа случайных процессов в линейных цепях для оценки спектральных характеристик процесса на выходе цепи необходимо знать квадрат ее амплитудно-частотной характеристики. Вместе с тем, формула (5.4) полностью определяет комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра и согласно ей

$$|\dot{K}_{\text{сф}}(\omega)| = A \cdot |G_u^*(\omega)|.$$

б) Исходя из соотношения (3.1) спектральная плотность мощности на выходе цепи может быть представлена в виде

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) \cdot \left| \dot{K}_{\text{сф}}(\omega) \right|^2.$$

При воздействии на вход фильтра белого шума, имеющего равномерную по частоте спектральную плотность мощности, форма $S_{\text{вых}}(\omega)$ будет определяться коэффициентом передачи фильтра. В рассматриваемом случае, очевидно, $S_{\text{вых}}(\omega)$ будет максимальна на нулевой частоте. Вместе с тем, входящий в (5.4) коэффициент A произволен по величине, поэтому мы принципиально не можем определить точное значение $S_{\text{вых}}(0)$.

Итак, без уточнения величины параметра A , входящего в коэффициент передачи согласованного фильтра, может быть определена лишь форма спектральной плотности мощности шума на выходе фильтра, которая показана на рис. 5.11.

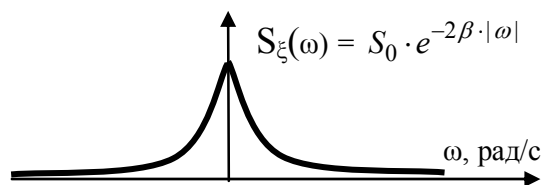


Рис. 5.11. Спектральная плотность мощности шума, наблюдаемого на выходе согласованного фильтра из задачи 5.7

5.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории

Задача 0. Детерминированный полезный сигнал $s(t)$, с представленной в таблице ниже спектральной плотностью амплитуд, поступает на вход согласованного с ним фильтра вместе с шумом, имеющим спектральную плотность мощности $N_0 = 10^{-4}$ В²/Гц. Руководствуясь представленными в таблице ниже значениями, определить величину, помеченную в этой таблице значком (?).

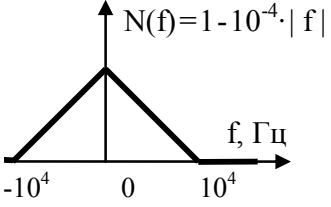
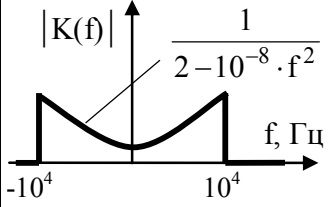
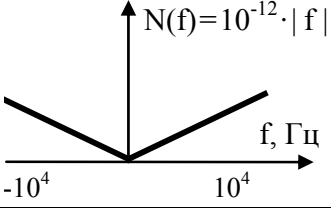
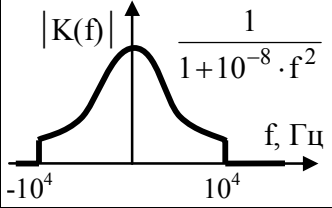
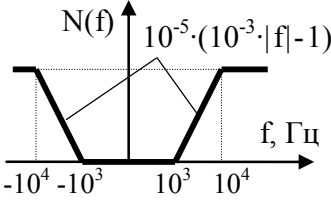
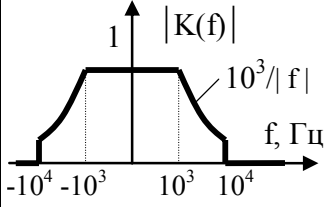
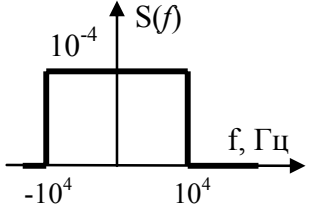
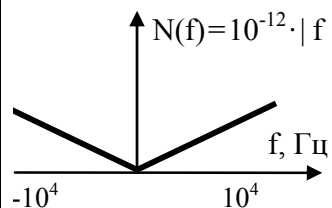
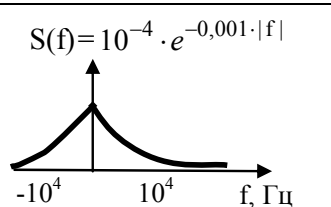
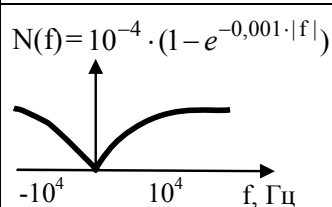
Примечание: величина q^2 , приведенная в последнем столбце таблицы, представляет собой соотношение сигнал-шум по мощности на выходе фильтра.

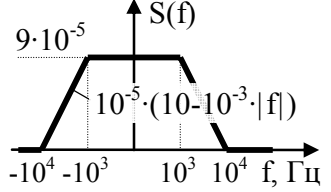
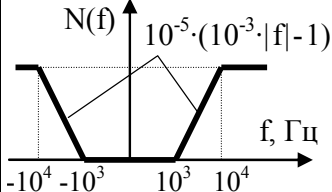
Но- мер	Спектральная плотность ам- плитуд полезного сигнала $ G_s(f) $, В / Гц	G_0 , В/Гц	$f_{\text{гр}}$, Гц	q^2
1		$\sqrt{6} \cdot 10^{-4}$	10^4	(?)
2		(?)	$4 \cdot 10^4$	6
3		10^{-4}	(?)	8
4		$2 \cdot 10^{-4}$	10^5	(?)
5		(?)	$5 \cdot 10^5$	10

Но- мер	Спектральная плотность ам- плитуд полезного сигнала $ G_s(f) $, В / Гц	G_0 , В/Гц	$f_{гр}$, Гц	q^2
6		10^{-3}	②	9
7		10^{-4}	$6 \cdot 10^4$	②
8		②	$3 \cdot 10^5$	5
9		$\sqrt{5} \cdot 10^{-3}$	②	4
10		$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^4$	②

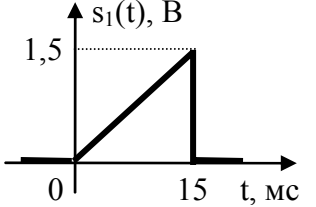
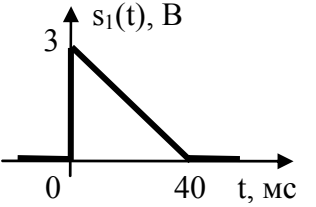
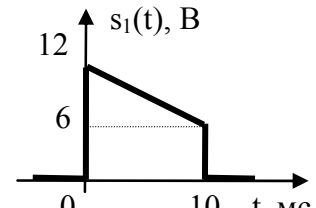
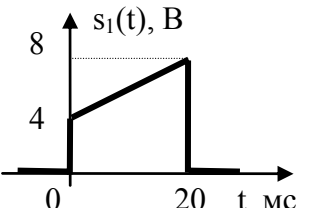
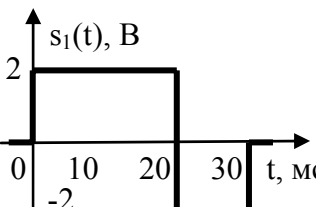
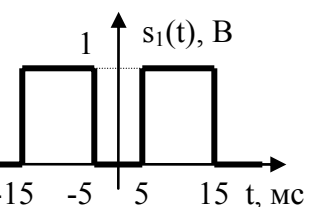
Задача 1. Случайный полезный сигнал, характеризуемый спектральной плотностью мощности (СПМ) $S(f)$, в смеси с помехой, обладающей СПМ $N(f)$, действует на вход оптимального линейного фильтра. Фильтр обладает коэффициентом передачи $K(f)$ и обеспечивает на своем выходе минимальную возможную среднеквадратическую ошибку фильтрации сигнала из смеси с помехой. По представленным в таблице ниже данным определить недостающую характеристику (из упомянутых в задаче)

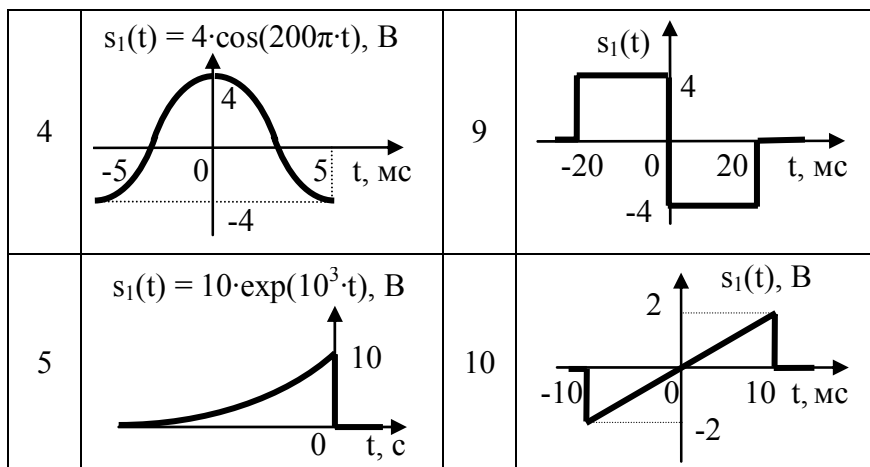
Но- мер	Известные характеристики		Иск. хар- ка
1			$N(f)$
2			$N(f)$
3			$N(f)$
4			$N(f)$

Но- мер	Известные характеристики		Иск. хар- ка
5			$S(f)$
6			$S(f)$
7			$S(f)$
8			$K(f)$
9			$K(f)$

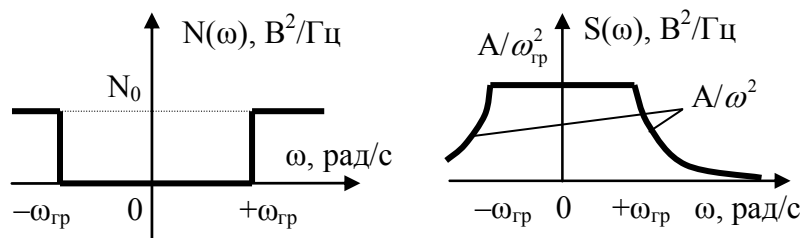
10			$K(f)$
----	---	---	--------

Задача 2. Определите импульсную характеристику фильтра, согласованного с приведенным ниже сигналом $s_1(t)$. Рассчитайте также отклик, наблюдаемый на выходе этого фильтра в ответ на воздействие сигнала $s_1(t)$.

Но- мер	Сигнал $s_1(t)$	Но- мер	Сигнал $s_1(t)$
1		6	
2		7	
3		8	



Задача 3. Полезный сигнал $s(t)$ представляет собой стационарный нормальный случайный процесс с показанной на рисунке ниже (слева) спектральной плотностью мощности (СПМ) $S(\omega)$. Смесь этого сигнала и нормального шума с СПМ $N(\omega)$ поступает на вход фильтра, обеспечивающего минимальную возможную среднеквадратическую ошибку фильтрации сигнала.

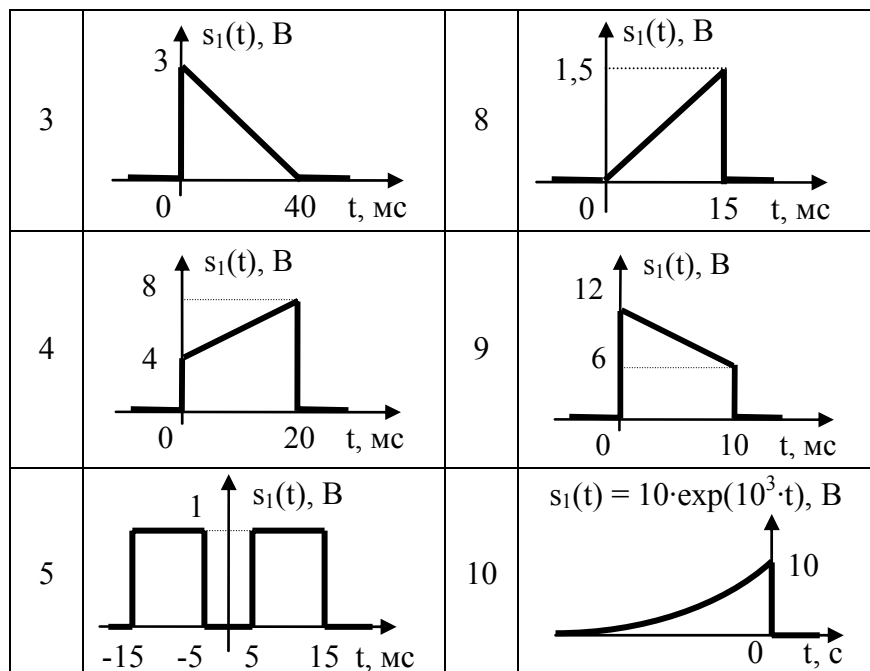


Величина P_ε – это вероятность того, что отклик, наблюдаемый на выходе фильтра, будет отклоняться от истинного значения сигнала $s(t)$ по абсолютной величине более чем на ε милливольт. Руководствуясь представленными в таблице ниже значениями, определить величину, помеченную в этой таблице значком (?).

Но- мер	$N_0,$ $\text{В}^2/\text{Гц}$	$A,$ $\text{В}^2 \cdot \text{с}$	$\omega_{\text{гр}},$ рад/с	$\varepsilon,$ мВ	P_ε
1	10^{-6}	3	$3 \cdot 10^3$	50	(?)
2	$3 \cdot 10^{-7}$	0,1	10^3	(?)	0,005
3	$3 \cdot 10^{-7}$	0,3	(?)	7	0,424
4	10^{-8}	10^{-2}	10^3	(?)	0,230
5	10^{-8}	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^3$	5	(?)
6	$3 \cdot 10^{-9}$	10^{-3}	10^3	(?)	0,005
7	$3 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-3}$	(?)	0,8	0,424
8	$2 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-5}$	10^3	(?)	0,072
9	10^{-10}	10^{-4}	10^3	0,19	(?)
10	10^{-10}	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	(?)	0,004

Задача 4. Найдите соотношение сигнал-шум, наблюдаемое на выходе фильтра, согласованного с приведенным ниже сигналом $s_1(t)$, если помимо этого сигнала на вход фильтра поступает белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-4} \text{ В}^2/\text{Гц}$.

Но- мер	Сигнал $s_1(t)$	Но- мер	Сигнал $s_1(t)$
1		6	
2		7	$s_1(t) = 4 \cdot \cos(200\pi \cdot t), \text{ В}$



Лабораторная работа № 5.1 «Оптимальная фильтрация сигналов неизвестной формы»

Цель работы – экспериментальное исследование процедуры обработки смеси случайного полезного сигнала и шума фильтром Колмогорова-Винера.

В работе изучаются основные свойства фильтра Колмогорова-Винера, производится оценка дисперсии сигнала ошибки на выходе фильтра, анализируется возрастание погрешности при использовании для обработки фильтров с характеристиками, отличающимися от оптимальных.

5.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

5.4.1. Ознакомьтесь с теорией фильтрации случайных сигналов на фоне шума по учебной литературе [1, с. 206-211, 7, с. 199-201]. Для выполнения лабораторной работы следует учесть взятые из монографии [6, с. 100-112] рекомендации по формированию стационарных случайных процессов с разнообразными спектральными свойствами, кратко изложенные ниже:

5.4.2. **Процессом типа 1** далее в настоящей работе называется низкочастотный СП с корреляционной функцией вида

$$B_1(\tau) = \sigma_\xi^2 \cdot \exp\{-|\tau|/\tau_u\} \quad (5.13)$$

и спектральной плотностью мощности

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_\xi(\tau) \cdot \exp\{-j\omega\tau\} d\tau = \sigma_\xi^2 \cdot \frac{2\tau_u}{1 + (\omega\tau_u)^2} \quad (5.14)$$

Сформировать реализации данного СП можно любым из модулей № 1...3 при выборе режима их функционирования «Нормальный шум (тип 1)».

5.4.3. Под **процессом типа 2** далее понимается узкополосный СП с корреляционной функцией вида

$$B_2(\tau) = \sigma_\xi^2 \cdot \exp\{-|\tau|/\tau_u\} \cdot \cos(\omega_0\tau) \quad (5.15)$$

и спектральной плотностью мощности

$$S_2(\omega) = \sigma_\xi^2 \cdot \frac{2\tau_u (1 + (\omega\tau_u)^2 + (\omega_0\tau_u)^2)}{\{1 + ((\omega + \omega_0)\tau_u)^2\} \cdot \{1 + ((\omega - \omega_0)\tau_u)^2\}} \quad (5.16)$$

Сформировать реализации данного СП можно любым из модулей № 1...3 при выборе режима их функционирования «Нормальный шум (тип 2)» (Примечание: при этом вместо частоты ω_0 в радианах в секунду задаётся циклическая частота $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ (Гц)).

5.4.4. Перечисленные выше СП могут в разных ситуациях играть роль как шума, так и подлежащего фильтрации полезного сигнала. Следующим СП, который, очевидно, может выполнять лишь роль шума, является **широкополосный нормальный шум**. Спектральная плотность мощности этого шума зависит от используемой при моделировании частоты дискретизации и может быть рассчитана как

$$S_{\text{бш}}(\omega) = T \cdot \sigma_{\xi}^2, \quad (5.17)$$

где $T = 1/F_s$ – интервал дискретизации.

5.4.5. **Процессом типа 3** условимся считать низкочастотный СП, получаемый при прохождении широкополосного нормального шума с эффективным значением σ_{ξ} через фильтр с прямоугольной АЧХ, подобный идеальному фильтру нижних частот – ИФНЧ. Спектральная плотность мощности этого СП равна

$$S_3(f) = \begin{cases} \sigma_{\xi}^2 \cdot T \cdot K_0^2, & |f| \leq F_c \\ 0, & |f| > F_c \end{cases} \quad (5.18)$$

Для формирования реализаций такого СП необходимо широкополосный нормальный шум (см. п. 5.4.4), формируемый модулями № 1 или № 3, пропустить через модуль № 4, установленный в режим «ИФНЧ» с частотой среза, равной F_c .

5.4.6. Под **процессом типа 4** далее понимается узкополосный СП, получаемый при прохождении широкополосного нормального шума через полосовой фильтр с прямоугольной АЧХ. Спектральная плотность мощности этого СП равна

$$S_3(f) = \begin{cases} \sigma_{\xi}^2 \cdot T \cdot K_0^2, & F_{\text{с ниж}} \leq |f| \leq F_{\text{с верх}} \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases} \quad (5.19)$$

Для формирования реализаций СП необходимо пропустить широкополосный нормальный шум (см. п. 5.4.4), формируемый модулями № 1 или № 3, через модуль № 4, работающий в режиме «ИПФ» с частотами среза $F_{\text{с ниж}}$ и $F_{\text{с верх}}$.

5.4.7. Наконец, **процесс типа 5** – это низкочастотный СП с корреляционной функцией вида

$$B_5(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \cdot \{1 - |\tau|/\tau_u\}, \quad |\tau| \leq \tau_u \quad (5.20)$$

и спектральной плотностью мощности

$$S_5(\omega) = \sigma_{\xi}^2 \cdot 4\tau_u \cdot \text{sinc}^2(\omega\tau_u) \quad (5.21)$$

Для формирования реализаций СП необходимо пропустить широкополосный нормальный шум (см. п. 5.4.4), формируемый модулями № 1 или № 3, через модуль № 4, осуществляющий скользящее суммирование последних $N_{\text{ав}} = 1 + \text{int}(\tau_u/T)$ отсчетов.

5.4.8. Учтите также, что лабораторная работа предполагает цифровую обработку сигналов с частотой дискретизации $F_s = 48$ кГц, что позволяет осуществлять обработку сигналов с частотами до 24 кГц. В подобных условиях, учитывая дополнительно четный характер подынтегрального выражения в (5.2), для расчета средней мощности ошибки фильтрации можно рекомендовать выражение

$$P_{\text{ош}} \approx 2 \cdot \int_0^{F_s/2} \frac{S(f) \cdot N(f)}{S(f) + N(f)} df. \quad (5.22)$$

5.5. Домашнее задание к лабораторной работе

5.5.1. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант лабораторных исследований. Сведения о полезных сигналах и помехах, соответствующих заданиям разных бригад, приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Номер бригады	Полезный сигнал $s(t)$			Аддитивный шум $n(t)$		
	Тип СП	$\sigma_{ш}$, В	Прочие параметры	Тип СП	$\sigma_{ш}$, В	Прочие параметры
1	1	$1,0^{12}$	$\tau_{ш} = 1,0$ мс	4	1,0	$K_0 = 5$, $F_{с\text{ ниж}} = 1$ кГц, $F_{с\text{ верх}} = 5$ кГц
2	2	$1,0^{12}$	$f_0 = 2,5$ кГц $\tau_{ш} = 2,0$ мс	3	2,5	$K_0 = 1$ $F_c = 8$ кГц
3	3	$1,0^{11}$	$K_0 = 1$, $F_c = 4$ кГц	1	1,2	$\tau_{ш} = 1,8$ мс
4	4	$1,0^{11}$	$K_0 = 3$, $F_{с\text{ ниж}} = 2$ кГц, $F_{с\text{ верх}} = 4$ кГц	БШ	2,0	—
5	1	$1,5^{11}$	$\tau_{ш} = 0,8$ мс	БШ	0,5	—
6	3	$1,0^{11}$	$K_0 = 4$, $F_c = 4$ кГц	БШ	1,5	—
7	4	$1,0^{11}$	$K_0 = 3$, $F_{с\text{ ниж}} = 2$ кГц, $F_{с\text{ верх}} = 4$ кГц	1	3,0	$\tau_{ш} = 1,0$ мс
8	5	$2,0^{11}$	$K_y = 1$ $N_{av} = 20$	2	1,0	$f_0 = 2,0$ кГц $\tau_{ш} = 2,0$ мс

Примечания: 1. «Расшифровка» типов СП приведена выше в подразделе 3.2

2. Пометки «1, 2» в колонке « $\sigma_{ш}$ » указывают номер модуля, рекомендуемый для формирования данного сигнала.

5.5.2. Для своего индивидуального варианта рассчитайте АЧХ фильтра, минимизирующего среднеквадратическую погрешность фильтрации полезного сигнала $s(t)$ на фоне аддитивного шума $n(t)$, а также соответствующую оптимальной обработке среднюю мощность ошибки фильтрации по формулам (5.1) и (5.22).

5.5.3. Осуществите приближенную кусочно-линейную аппроксимацию рассчитанной выше АЧХ фильтра (к точности аппроксимации здесь особых требований не предъявляется) и сохраните её в текстовом файле с расширением «ini», следующего формата:

Строка заголовка: «[DataList]»

Строки данных: $f1=value1$
 $f2=value2$
...

Имя файла должно состоять из одной цифры, совпадающей с номером Вашей бригады. Частоты $f1, f2$ (в килогерцах) задают координаты точек излома АЧХ, а $value1, value2$ – значения АЧХ в соответствующих точках.

Пример:

Для формирования приближенной копии АЧХ, представленной на рис. 5.12, текстовый «ini»-файл может содержать строки:

[DataList]

0.0 = 1.0

2.0 = 1.0

5.0 = 0.1

7.0 = 0.0

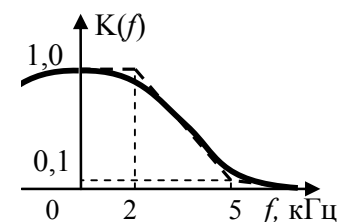


Рис. 5.12. Возможная АЧХ фильтра

5.6. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Исследование погрешности фильтрации сигналов при точной реализации фильтра Колмогорова-Винера

Рекомендации по выполнению:

5.6.1. Установить частоту дискретизации $F_s = 48$ кГц, а объем формируемой выборки не менее $N = 4096$ отсчетов.

5.6.2. Для бригад № 3-8 установить тип и параметры модулей № 1, 4 (бригады № 1, 2 используют в данном пункте модуль № 2) в соответствии с требованиями к полезному сигналу из табл. 5.1. Левый анализатор подключить к контрольной точке №4 (для бригад № 1,2 - к контрольной точке № 2) и по осциллографу и спектроанализатору убедиться в формировании сигнала нужной формы.

5.6.3. Установить для бригад № 3-8 тип и параметры модуля № 2 (бригады № 1,2 используют в данном пункте модули № 1, 4) в соответствии с требованиями к аддитивному шуму из табл. 5.1. Правый анализатор подключить к выходу модуля, формирующего шум, и с помощью осциллографа (спектроанализатора), что наблюдаемый процесс соответствует требованиям индивидуального задания.

5.6.4. Переключить правый анализатор на контрольную точку № 7, зафиксировать в отчете к лабораторной работе вид осциллограммы и спектральной плотности мощности аддитивной смеси сигнала и шума.

5.6.5. Переключить левый анализатор, подключенный к модулю, формирующему полезный сигнал, в состояние «Оценка с.к.ошибки»; в указанном состоянии анализатор рассчитывает среднеквадратическую погрешность между сигналами в точке, к которой он подключен, и выходом всей схемы моделирования – сигналом в контрольной точке № 5. Занести в отчет погрешность, соответствующую приёму полезного сигнала вместе с шумом без какой-либо обработки.

5.6.6. Установить модуль № 5 в состояние «Авто.фильтр Колмогорова-Винера» и в окне «Параметры модулей» указать для него источник полезного сигнала «2» для бригад № 3-8 и источник - «1» для бригад № 1,2.

5.6.7. Переключить правый анализатор на контрольную точку №5, зафиксировать в отчете к лабораторной работе вид осциллограммы и спектральной плотности мощности профильтрованной смеси сигнала и шума. Убедиться, что фильтрация приближает форму сигналов (в контрольной точке № 5) к форме исходного полезного сигнала.

5.6.8. По левому анализатору, подключенному к модулю формирования полезного сигнала, находящемуся в состоянии «Оценка с.к.ошибки» определить и занести в отчет среднеквадратическую погрешность фильтрации сигнала «автоматическим» фильтром Колмогорова-Винера. Сравнить полученное значение с результатами домашних расчетов из п. 5.5.2; в случае существенных расхождений проконтролировать правильность выполнения этапа 1 лабораторных исследований.

Этап 2. Исследование влияние неточности реализации фильтра Колмогорова-Винера на погрешность фильтрации

Рекомендации по выполнению:

5.6.9. Переключить модуль № 5 в состояние «Фильтр с загружаемой АЧХ». В окне «Параметры модулей» указать для него «Номер файла» равный номеру Вашей бригады (номеру файла, подготовленного при выполнении п. 5.5.3).

5.6.10. По правому анализатору убедитесь, что профильтрованный сигнал, наблюдаемый на выходе № 5 и отображаемый правым анализатором, близок по форме к исходному полезному сигналу.

При существенных искажениях формы сигнала проверьте правильность данных в файле, определяющем форму АЧХ

фильтра; для перепроверки может оказаться полезным сравнение спектральных характеристик сигналов, полученных при выполнении п. 5.6.7, со спектральными характеристиками, получаемыми при использовании фильтра с загружаемой АЧХ.

5.6.11. По данным левого анализатора, установленного в состоянии «Оценка с.к.ошибки», определить и занести в отчет среднеквадратическую погрешность фильтрации сигнала, подготовленным при выполнении домашнего задания фильтром Колмогорова-Винера. Сравнить полученное значение с результатами домашних расчетов из п. 5.5.2.

5.7. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Чем отличаются задачи оптимальной линейной фильтрации сигналов в цифровых и аналоговых системах передачи информации?

2. Каким комплексным коэффициентом передачи обладает фильтр Колмогорова-Винера? Для решения какой задачи этот фильтр предназначен?

3. Чем определяется среднеквадратическая погрешность фильтрации при использовании фильтра Колмогорова-Винера?

4. Какие особенности амплитудно-частотной характеристики фильтра Колмогорова-Винера обеспечивают его оптимальность?

5. Какие особенности фазо-частотной характеристики фильтра Колмогорова-Винера обеспечивают его оптимальность? Как изменения ФЧХ могут повлиять на среднеквадратическую погрешность фильтрации сигналов?

6. Можно ли обеспечить нулевую среднеквадратическую погрешность фильтрации полезных сигналов? При каких условиях?

Лабораторная работа № 5.2 «Обнаружение сигналов»

Цель работы – экспериментальное исследование процедуры обработки смеси сигнала известной формы и шума согласованным фильтром.

В работе изучаются основные свойства согласованных фильтров, производится оценка числовых характеристик случайных процессов, наблюдаемых на выходе согласованного фильтра в ответ на приход «своего» сигнала, «чужого» сигнала и широкополосного шума.

5.8. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

5.8.1. В рамках данной работы обнаружение сигналов производится лишь на фоне широкополосного нормального шума, являющегося эквивалентом белого шума. Оптимальным обработчиком смеси сигнала и такого шума может служить согласованный фильтр, поэтому изучите вопросы согласованной фильтрации сигналов по учебной литературе [1, с.196-202; 7, с.131-139].

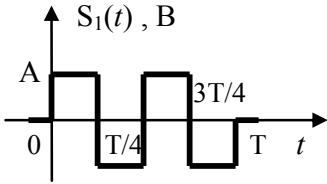
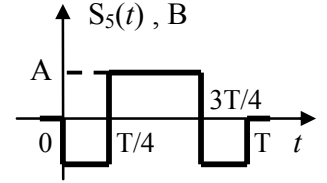
5.8.2. Для оценки спектральной плотности мощности (СПМ) шума в обрабатываемой полосе частот следует учесть, что при цифровой обработке мощность шума распределяется на полосу частот, равную используемой частоте дискретизации F_s , поэтому значение СПМ шума может быть рассчитано как

$$N_0 = \frac{\sigma_\xi^2}{F_s}. \quad (5.23)$$

5.8.3. Совокупность используемых разными бригадами сигналов, подлежащих обнаружению, приведена в табл. 5.2. Все сигналы имеют конечную протяженность τ и подаются на вход устройства обработки в момент времени $t_{нач} = 2$ мс.

Таблица 5.2

Набор обнаруживаемых сигналов

Номер бригады	Аналитическое выражение или рисунок, определяющие сигнал на интервале $[0; \tau]$
1	$s_1(t) = A \cdot t / \tau$
2	$s_2(t) = A \cdot (1 - t / \tau)$
3	$s_3(t) = A \cdot \sin^2(\pi t / \tau)$
4	
5	
6	$s_6(t) = A \cdot (t / \tau)^2$
7	$s_7(t) = A \cdot \{1 - (t / \tau)^2\}$
8	$s_8(t) = A \cdot (1 - t / \tau)^2$

5.9. Домашнее задание к лабораторной работе

5.9.1. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант исследований.

5.9.2. Для своего индивидуального варианта рассчитайте СПМ шума, на фоне которого будет производиться обнаружение сигналов, энергию полезного сигнала и ожидаемое отношение сигнал-шум на выходе согласованного фильтра. Варианты индивидуальных заданий для бригад заданы в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Номер бригады	Амплитуда сигнала, В	Длительность сигнала τ , мс	Эффективное значение шума $\sigma_{ш}$, В	Частота дискретизации, кГц
1	0,6	1	0,8	20
2	0,4	2	1,2	48
3	0,6	1	0,8	20
4	0,3	2	1,6	48
5	0,3	5	1,2	20
6	0,4	2	0,8	48
7	1,0	1	1,0	20
8	0,2	5	1,2	48

5.9.3. Определите импульсную характеристику фильтра, согласованного с сигналом Вашего индивидуального варианта задания, и сохраните её в текстовом файле с расширением «ini», следующего формата:

Строка заголовка: «[DataList]»

Строки данных: $t1=value1$

$t2=value2$

...

Имя файла должно состоять из одной цифры, совпадающей с номером Вашей бригады. Моменты времени $t1$, $t2$... задают координаты точек излома импульсной характеристики в миллисекундах, а $value1$, $value2$ – её значения в этих точках.

Пример:

Для формирования импульсной характеристики, представленной на рис. 5.13, текстовый «ini»-файл должен содержать строки:

[DataList]
 0.0 = 0.0
 0.00001 = 12.0
 3.0 = 12.0
 3.00001 = -8.0
 4.0 = -8.0
 4.00001 = 0.0

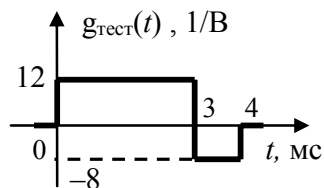


Рис. 5.13. Возможная импульсная характеристика фильтра

5.9.4. Для какого-либо сигнала другой бригады, характеризующегося совпадающей с вашим сигналом по длительности, рассчитайте амплитуду A_3 , гарантирующего совпадение энергии «чужого» сигнала с энергией сигнала из Вашего индивидуального варианта задания. Эта амплитуда будет необходима для проведения завершающего, третьего этапа исследований.

5.10. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Отклик согласованного фильтра на «свой» сигнал

Рекомендации по выполнению:

5.10.1. Установить частоту дискретизации в соответствии с требованиями табл. 5.3. Установить объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов.

5.10.2. Установить тип и параметры модуля № 1 схемы моделирования случайных процессов в соответствии с требованиями табл. 5.3; остальные модули перевести (при необходимости) в выключенное состояние. В блоке анализаторов установить левый анализатор в состояние осциллографа, настроить его на контрольную точку № 6 и убедиться в формировании сигнала нужной формы.

Оба анализатора настроить на контрольную точку № 4, установить правый анализатор в состояние оценки числовых характеристик СП.

5.10.3. Установить модуль № 4 в состояние «Согласованный КИХ-фильтр» и в окне «Параметры модулей» выставить номер сигнала и протяженность импульсной характеристики фильтра из индивидуального варианта задания. Например, для бригады № 3 при необходимости использования фильтра с длительностью импульсной характеристики в 4 мс, настройки параметров фильтра показаны на рис. 5.14.

(При указанных настройках модуль № 4 будет автоматически настроен на согласованную обработку сигнала № 3)

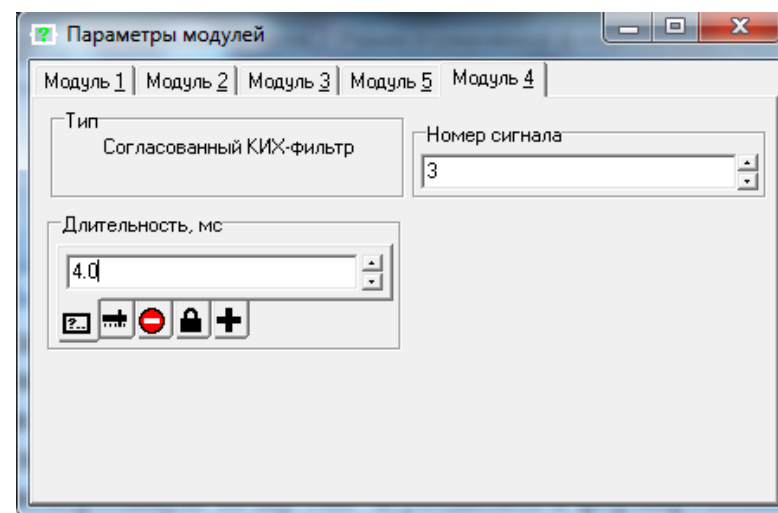


Рис. 5.14. Возможные настройки КИХ-фильтра, согласованного с сигналом № 3 длительностью 4 миллисекунды

Убедиться, что в момент окончания сигнала t_0 наблюдается максимум отклика фильтра на воздействие полезного сигнала. Зафиксировать величину максимума отклика согласованного фильтра $u_{\text{вых}}(t_0)$.

5.10.4. Установить нулевую амплитуду полезного сигнала на модуле № 1. Настроить модуль № 3 моделирующей про-

граммы на излучение широкополосного шума с эффективным значением из табл. 5.3.

5.10.5. По правому анализатору зафиксировать эффективное значение шума, наблюдаемого на выходе согласованного фильтра в отсутствие сигнала $\sigma_{ш\text{ вых}}$.

5.10.6. Переключить правый анализатор в режим отображения гистограммы плотности вероятности наблюдаемого процесса $W_{\xi}^*(\tilde{x})$ и зафиксировать в отчет гистограмму шумового распределения.

5.10.7. Перерисовать в отчете гистограмму, полученную в п. 5.10.6, со смещением вправо на величину $u_{\text{вых}}(t_0)$ из п. 5.10.3. Визуально оценить степень перекрытия гистограмм и соответствующие ей вероятности ошибок при обнаружения сигнала.

Рассчитать реально наблюдаемое на выходе фильтра отношение сигнал-шум

$$q = \frac{u_{\text{вых}}(t_0)}{\sigma_{ш\text{ вых}}} \quad (5.24)$$

и сравнить его с рассчитанным в п. 5.9.2.

5.10.8. Восстановить в модуле №1 амплитуду сигнала, соответствующую индивидуальному варианту задания из табл. 5.3. Провести 25...50 опытов (щелкая по кнопке «Обновить данные») и приближенно оценить частоту возникновения ошибок при обнаружении «своего» сигнала. Сопоставить частоту ошибок с значением, предсказанным в п. 5.10.7.

5.10.9. Если наблюдаемая частота возникновения ошибок пренебрежимо мала – оценить, сколь сильно можно уменьшить амплитуду сигнала в модуле № 1, чтобы повысить вероятность ошибок до 5..10%.

Если же ошибки исходно возникают довольно часто, то определить, при какой амплитуде сигнала вероятность ошибок снижается до пренебрежимо малых величин.

5.10.10. Проанализировать влияние на отношение сигнал-шум и на вероятность возникновения ошибок увеличения (уменьшения) длительности полезного сигнала, формируемого модулем № 1 (без корректировки параметров модуля № 4).

Этап 2. Оценка работоспособности фильтра с расчетной импульсной характеристикой

Рекомендации по выполнению:

5.10.11. Для модулей №1,3 восстановить настройки, соответствующие индивидуальному варианту задания.

5.10.12. Установить модуль № 4 в состояние «Загружаемый КИХ-фильтр» и настроить его на считывание импульсной характеристики из «ini»-файла, указав в окне «Параметры модулей» номер файла, подлежащего загрузке.

5.10.13. Повторно выполнить п.5.10.4-5.10.8 (см. этап 1). Убедиться, что использование фильтра с расчетной импульсной характеристикой обеспечивает соотношение сигнал-шум, близкое к наблюдавшемуся при выполнении этапа 1 (см. (5.24)).

Этап 3. Исследование способности согласованного фильтра обнаруживать присутствие «чужих» сигналов

Рекомендации по выполнению:

5.10.14. Настроить модуль № 1 на формирование «чужого» сигнала из п. 5.9.4 домашнего задания; установить его амплитуду равной расчётному значению A_{Σ} .

5.10.15. Вновь установить модуль № 4 в состояние «Согласованный КИХ-фильтр» и в окне «Параметры модулей» выставить номер сигнала и протяженность импульсной характеристики фильтра из своего индивидуального варианта задания.

5.10.16. Временно установив нулевое эффективное значение шума, определить отклик согласованного фильтра на «чужой» сигнал $s_{\text{вых}}(t_0)$, соответствующий моменту окончания сигнала.

Рассчитать отношение сигнал-шум (5.24), возникающее при попытке обнаружения «чужого» сигнала.

5.10.17. За счет проведения 25...50 опытов оценить изменение частоты возникновения ошибок при попытках обнаруживать «чужой» сигнал в шуме.

5.11. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Разъясните суть отличий при оптимальной линейной фильтрации сигналов в цифровых и аналоговых системах передачи информации.

2. Что такое отношение-сигнал шум на выходе устройства обработки. Чему это отношение равно для согласованного фильтра?

3. Может ли отклик на «чужой» сигнал на выходе согласованного фильтра превышать отклик на «свой» сигнал? Если «да», то при каких условиях?

4. Можно ли снизить вероятность ошибок при обнаружении сигналов за счет увеличения (или уменьшения) их длительности; за счет изменения интенсивности сигналов?

5. Какими характеристиками обладает согласованный фильтр? Разъясните физические причины оптимальности обработки, обеспечиваемой согласованным фильтром.

6. Всегда ли согласованный фильтр является оптимальным устройством для обнаружения сигналов известной формы?

7. Как можно (теоретически и экспериментально) оценить вероятность возникновения ошибок при обнаружении сигнала известной формы? Какие параметры сигнала и фильтра влияют на вероятность возникновения ошибок?

8. Как на вероятность возникновения ошибок влияет коэффициент усиления приёмного тракта? Почему?

6. ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

6.1. Теоретические основы

Пусть распределение некоторой случайной величины ξ зависит от неизвестного скалярного или векторного параметра λ и пусть известно n результатов измерения этой случайной величины (СВ). Тогда по вектору наблюдений $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ можно сформировать оценку $\hat{\lambda}$ неизвестного параметра λ ; при этом, как правило, предполагается, что входящие в вектор наблюдения $\mathbf{x}$ измерения статистически независимы. Способ оценивания параметра зависит от имеющейся априорной информации.

Байесовский подход к оценке параметров предполагает:

- 1) наличие информации об априорном распределении измеряемого параметра λ ;
- 2) принятие к использованию конкретной функции потерь $\Pi(\lambda; \hat{\lambda})$, характеризующей опасность использования оценки $\hat{\lambda}$ при истинном значении измеряемого параметра, равном λ .

Байесовской называется оценка параметра $\hat{\lambda}_\sigma$, минимизирующая средний риск (средние ожидаемые потери)

$$\hat{\lambda}_\sigma = \arg \min m_1 \{ \Pi(\lambda; \hat{\lambda}(\mathbf{x})) \} \quad (6.1)$$

Для непрерывного параметра λ выражение для расчета среднего риска можно представить в виде

$$m_1 \{ \Pi(\lambda; \hat{\lambda}(\mathbf{x})) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\lambda; \hat{\lambda}) \cdot W(\lambda; \hat{\lambda}) d\hat{\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} m_1 \{ \Pi | \hat{\lambda} \} \cdot W(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda} \quad (6.2)$$

$$\text{где } m_1 \{ \Pi | \hat{\lambda} \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\lambda; \hat{\lambda}) \cdot W(\lambda | \hat{\lambda}) \cdot d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\lambda; \hat{\lambda}(\mathbf{x})) \cdot W(\lambda | \mathbf{x}) \cdot d\lambda = m_1 \{ \Pi | \mathbf{x} \} \quad (6.3)$$

– условное математическое ожидание функции потерь, вычисленное для фиксированного вектора наблюдений $\mathbf{x}$ усреднением по всем возможным значениям случайного параметра λ , которое называют также *условным средним риском*. Если оценка $\hat{\lambda}$ минимизирует условный средний риск (6.3) для каждого $\mathbf{x}$, то такая оценка будет соответствовать и (6.1). Отсюда, в частности, следует, что при квадратичной функции потерь

$$P(\lambda; \hat{\lambda}) = (\lambda - \hat{\lambda})^T \cdot B \cdot (\lambda - \hat{\lambda}), \quad (6.4)$$

(B – положительно определённая матрица) байесовской оценкой будет служить апостериорное математическое ожидание параметра λ

$$m_1\{\lambda | \mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \cdot W(\lambda | \mathbf{x}) \cdot d\lambda \quad (6.5)$$

Байесовская оценка i -го параметра в составе λ есть его апостериорное среднее, вычисленное на основе апостериорной ПВ, содержащей всю информацию о λ_i , которая имеется в $\mathbf{x}$ (оценка «по центру тяжести»).

$$\hat{\lambda}_i = \int_{-\infty}^{+\infty} l \cdot W_{\lambda_i}(l | \mathbf{x}) dl \quad (6.6)$$

При прямоугольной функции потерь все малые ошибки считаются неопасными, а значительные – одинаково опасными, а байесовская оценка – максимум апостериорной вероятности

$$\hat{\lambda}_{MAB} = \arg \max W(\lambda | \mathbf{x}). \quad (6.7)$$

Для расчета входящей в (6.5), (6.7) апостериорной плотности вероятности можно использовать соотношение

$$W(\lambda | \mathbf{x}) = W(\mathbf{x} | \lambda) \cdot W_0(\lambda) / \int_{\Lambda} W_0(\lambda) \cdot W(\mathbf{x} | \lambda) d\lambda, \quad (6.8)$$

где $W_0(\lambda)$ – априорная плотность вероятности (ПВ) измеряемого параметра λ , Λ – вся допустимая область изменения параметра λ (при этом интеграл в знаменателе (6.8) даёт значение $W(\mathbf{x})$). Первый же сомножитель часто «читается наоборот», т.е. как функция «условия» λ при фиксированного векторе наблюдений $\mathbf{x}$ и называется *функцией правдоподобия*

$$L_x(\lambda) = W(\mathbf{x} | \lambda). \quad (6.9)$$

Если априорная плотность вероятности постоянна в окрестности максимума $W(\mathbf{x} | \lambda)$, то МАВ-оценка параметра λ , определяемая (6.6), переходит в *оценку максимального правдоподобия*

$$\hat{\lambda}_{МП} = \hat{\lambda}_{ML} = \arg \max L_x(\lambda) = \arg \max \ln \{L_x(\lambda)\}. \quad (6.10)$$

(Здесь индекс ML соответствует «*maximum likelihood*»).

6.2. Практические примеры

Задача 6.1. Имеется вектор $\mathbf{x}$ независимых наблюдений нормальной СВ с неизвестным матожиданием a и известным эффективным значением σ . Априорное распределение параметра a нормальное с параметрами (a_0, σ_0) . Необходимо сопоставить оценку параметра a по максимуму апостериорной вероятности (МАВ-оценку) с МП-оценкой максимального правдоподобия.

Решение

а) Для совокупности независимых измерений СВ с законом распределения (1.16) логарифмическую функцию правдоподобия (6.9) можно записать в виде

$$\ln \{L_x(a)\} = \ln \{W(\mathbf{x} | a)\} = -n \cdot \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \quad (6.11)$$

б) Для получения МП-оценки найдём максимум по a выражения (6.11). Из $\frac{d \ln \{L_x(a)\}}{da} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0$ получаем

$$\hat{a}_{МП} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (6.12)$$

Отметим, что дисперсия ошибки для МП-оценки составляет

$$\sigma_{МП}^2 = m_1 \{(\hat{a}_{МП} - a)^2\} = m_1 \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i \right)^2 \right\} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (6.13)$$

(Здесь $n_i = x_i - a$ СВ с нормальным (a, σ) -распределением).

в) В соответствии с (6.8) апостериорная ПВ параметра a может быть представлена в виде

$$W(a | \mathbf{x}) = k_x \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n+1} \sigma^n \sigma_0} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - a)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} (a - a_0)^2 \right\}$$

и, приравняв к нулю производную от $W(a | \mathbf{x})$ можно получить следующее выражение для МАВ-оценки параметра a

$$\hat{a}_{МАВ} = \frac{\sigma_{МП}^2 \cdot a_0 + \sigma_0^2 \cdot \hat{a}_{МП}}{\sigma_{МП}^2 + \sigma_0^2}. \quad (6.14)$$

Таким образом, когда дисперсия σ_0^2 априорного распределения существенно превышает дисперсию $\sigma_{МП}^2$ максимально правдоподобной оценки, то $\hat{a}_{МАВ} \approx \hat{a}_{МП}$. И, напротив, если $\sigma_0^2 \ll \sigma_{МП}^2$, то экспериментальные сведения приобретают очень малый вес и $\hat{a}_{МАВ} \approx \hat{a}_0$.

Задача 6.2. Имеется вектор $\mathbf{x}$ независимых наблюдений нормальной СВ с неизвестными и математическим ожиданием a , и эффективным значением σ . Найти оценку максимального правдоподобия (ОМП) для векторного параметра $\mathbf{\lambda} = (a, \sigma)$.

Решение

а) Как и в задаче 6.1, логарифмическая функция правдоподобия будет иметь вид (6.11), однако теперь её следует рассматривать как функцию двух переменных a и σ . Координаты максимума при этом следует искать из системы уравнений

$$\frac{dL_x(a, \sigma)}{da} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0, \quad \frac{dL_x(a, \sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = 0.$$

При этом для ОМП математического ожидания остаётся справедливым выражение (6.12), а МП-оценка эффективного

значения, исходя из соотношения $\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \Big|_{a=\hat{a}} = n \cdot \hat{\sigma}^2$ оказывается равной

$$\hat{\sigma}_{МП}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \hat{a}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \quad (6.15)$$

Задача 6.3. Имеется n независимых отсчетов x_i стационарного СП с плотностью вероятности $W_\xi(x) = 0,5 \cdot e^{-|x|} / (1 - e^{-\theta})$, при $|x| \leq \theta$. Необходимо предложить оценку максимального правдоподобия (ОМП) параметра $\theta > 0$.

Решение

а) Для выборки из n независимых отсчетов имеем плотность вероятности $W_\xi(\mathbf{x} | \theta) = \{2 \cdot (1 - e^{-\theta})\}^{-n} \cdot \exp \left\{ -\sum |x_i| \right\}$, а логарифм функции правдоподобия (ФП) может быть записан в виде

$$\ln \{L_x(\theta)\} = \ln W(\mathbf{x} | \theta) = -\sum |x_i| - n \cdot \ln \{2 \cdot (1 - e^{-\theta})\}$$

б) Проанализируем производную от ФП по параметру θ :

$$\frac{d \ln W_\xi(\mathbf{x} | \theta)}{d\theta} = -n \cdot \frac{(-1) \cdot (-e^{-\theta})}{2 \cdot (1 - e^{-\theta})} = -const \cdot \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}, \quad \text{при } |x_i| \leq \theta.$$

Итак, производная всегда отрицательная, поэтому чем ближе θ к нулю, тем больше значение ФП, но θ не может меньше абсолютной величины наименьшего $x_{(1)}$ и наибольшего $x_{(n)}$ из полученных в эксперименте значений. Поэтому искомая ОМП

$$\hat{\theta}_{МП} = \max\{|x_{(1)}|, |x_{(n)}|\}. \quad (6.16)$$

Задача 6.4. Предложить ОМП для параметров μ и $\sigma > 0$ двухпараметрического распределения Лапласа с плотностью вероятности $W_{\xi}(x) = e^{-|x-\mu|/\sigma} / (2 \cdot \sigma)$ по результатам n независимых измерений.

Решение

а) Совместная плотность вероятности выборки из n независимых отсчетов имеет вид

$$W_{\xi}(\mathbf{x}|\mu, \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma} \sum |x_i - \mu|\right\}.$$

При этом логарифм функции правдоподобия

$$\ln\{L_x(\mu, \sigma)\} = \ln W(\mathbf{x}|\mu, \sigma) = -\frac{1}{\sigma} \cdot \sum |x_i - \mu| - n \cdot \ln(2\sigma)$$

оказывается функцией не дифференцируемой по μ , однако очевидно, что максимум логарифма ФП достигается при минимизации суммы отклонений x_i от искомого значения параметра μ . Подобный минимум обеспечивается при выборе $\hat{\mu} = x_{0.5}$, т.е. при использовании выборочной медианы.

б) Приравнявая к нулю производную логарифма ФП по σ

$$\frac{\partial \ln\{L_x(\mu, \sigma)\}}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^2} \sum |x_i - \hat{\mu}| - \frac{n}{\sigma}$$

получим ОМП второго параметра распределения $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum |x_i - \hat{\mu}|$.

Задача 6.5. Найти ОМП параметра p биномиального распределения $P_n\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, если в n_1 независимых испытаниях событие A наблюдалось m_1 раз, а в n_2 независимых испытаниях это событие наблюдалось m_2 раз.

Решение

а) Вероятность наблюдения результата, описанного в условии задачи, составляет

$$P_{n_1}\{\xi = m_1\} \cdot P_{n_2}\{\xi = m_2\} = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} p^{m_1+m_2} (1-p)^{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}$$

поэтому логарифм правдоподобия можно записать в виде

$$\ln\{L(p)\} = \ln\{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2}\} + [m_1 + m_2] \cdot \ln p + [(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)] \cdot \ln(1-p). \quad (6.17)$$

Приравнявая нулю производную от (6.17) по аргументу p

$$\frac{d \ln\{L(p)\}}{dp} = \frac{m_1 + m_2}{p} - \frac{(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)}{1-p} = 0$$

определяем координату максимума и, соответственно, ОМП параметра p , которая может быть записана в виде

$$\hat{p}_{МП} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}. \quad (6.18)$$

Задача 6.6. Для квадратичной функции потерь найти байесовскую оценку параметра θ распределения $W_{\xi}(x) = 2x / \theta^2$, $x \in [0, \theta]$ по совокупности n независимых отсчетов x_i СВ ξ , если априорное распределение θ имеет вид $W_{\theta}(t) = 3t^2$, $t \in [0, 1]$.

Решение

а) Байесовская оценка параметра распределения при квадратичной функции потерь имеет вид (6.5). При этом важно

понимать, что в отличие от МП-оценок, для которых нормировочные сомножители подобные « $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2}$ » из задачи 6.5 роли не играют, при расчетах по (6.5) все нормировочные поправки должны тщательно учитываться.

б) Формально, допустимая область изменения параметра θ включает весь отрезок $[0, 1]$, однако поскольку все измерения x_i должны удовлетворять ограничению $x_i \in [0, \theta]$, то при расчете знаменателя (6.8) диапазон интегрирования следует сократить до $[x_{(n)}, 1]$, где $x_{(n)}$ – наибольшее из наблюдавшихся при измерениях значений. Таким образом,

$$W(\mathbf{x}) = \int_{x_{(n)}}^1 W_0(\theta) \cdot W(\mathbf{x} | \theta) d\theta = \int_{x_{(n)}}^1 3\theta^2 \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{2x_i}{\theta^2} \right) d\theta$$

откуда, упрощая, получаем

$$W(\mathbf{x}) = 3 \cdot 2^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i \cdot \int_{x_{(n)}}^1 \theta^{2-2n} d\theta = 3 \cdot 2^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1 - x_{(n)}^{3-2n}}{3-2n}. \quad (6.19)$$

в) Вычисляя в соответствии с (6.5) апостериорное математическое ожидание параметра θ , имеем

$$\hat{\theta}_\sigma = \frac{1}{W(\mathbf{x})} \cdot \int_{x_{(n)}}^1 \theta \cdot W_0(\theta) \cdot W(\mathbf{x} | \theta) d\theta = \frac{1}{W(\mathbf{x})} \cdot \int_{x_{(n)}}^1 \theta \cdot 3\theta^2 \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{2x_i}{\theta^2} \right) d\theta$$

При вычислении интеграла вновь появляются сомножители, входящие в состав (6.19). Сокращая эти одинаковые сомножители, результат расчета $\hat{\theta}_\sigma$ можно представить в виде

$$\hat{\theta}_\sigma = \frac{3-2n}{4-2n} \cdot \frac{1 - x_{(n)}^{4-2n}}{1 - x_{(n)}^{3-2n}} = \frac{2n-3}{2n-4} \cdot \frac{x_{(n)}^{2n-3} - x_{(n)}}{x_{(n)}^{2n-3} - 1}. \quad (6.20)$$

Задача 6.7. Для совокупности n независимых измерений СВ ξ , распределенной по закону Пуассона $P_\lambda \{ \xi = k \} = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$ ($k \geq 0$), необходимо предложить байесовскую оценку параметра λ , соответствующую квадратичной функции потерь и априорной информации о том, что $P\{\lambda = 1\} = 1/3$, $P\{\lambda = 2\} = 2/3$.

Решение

а) Для последующего использования соотношений (6.8) и (6.5) найдём предварительно полную вероятность наблюдения

$$\begin{aligned} \text{выборки } \mathbf{x}: P\{\mathbf{x}\} &= \frac{1}{3} \cdot \prod_{i=1}^n P_1\{\xi = x_i\} + \frac{2}{3} \cdot \prod_{i=1}^n P_2\{\xi = x_i\} = \\ &= \left[\frac{1}{3} \cdot 1^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (e^{-1})^n + \frac{2}{3} \cdot 2^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (e^{-2})^n \right] / \prod_{i=1}^n (x_i!) , \end{aligned}$$

что для рассматриваемых дискретных распределений является аналогом плотности вероятности $W(\mathbf{x})$.

б) Теперь для апостериорного ряда распределения

λ_j	1	2
$P\{\lambda_j \mathbf{x}\}$	$\frac{1}{3} \cdot \prod_{i=1}^n P_1\{\xi = x_i\} / P\{\mathbf{x}\}$	$\frac{2}{3} \cdot \prod_{i=1}^n P_2\{\xi = x_i\} / P\{\mathbf{x}\}$

рассчитаем математическое ожидание $\hat{\lambda}_\sigma = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \cdot P\{\lambda_j | \mathbf{x}\}$.

Сокращая одинаковые сомножители, результат расчета $\hat{\lambda}_\sigma$ можно представить в виде

$$\hat{\lambda}_\sigma = \frac{1 \cdot 1 \cdot (e^{-1})^n + 2 \cdot 2 \cdot 2^{\sum_{i=1}^n x_i} (e^{-2})^n}{1 \cdot (e^{-1})^n + 2 \cdot 2^{\sum_{i=1}^n x_i} (e^{-2})^n} = \frac{e^n + 2^{2 + \sum_{i=1}^n x_i}}{e^n + 2^{1 + \sum_{i=1}^n x_i}}. \quad (6.21)$$

6.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории

Задача 0. Имеется n независимых отсчетов x_i случайного процесса, характеризуемого плотностью вероятности, указанной в центральной колонке в таблице ниже. Доказать, что оценка максимального правдоподобия (ОМП) для параметра распределения, может рассчитываться в соответствии с выражением из последней колонки таблицы.

Но- мер	Одномерная плотность вероятности наблюдаемого СП, $W_\xi(x)$	Формула оценки параметра
1	Биномиальное распределение $P\{\xi = k\} = C_m^k p^k \cdot (1-p)^{1-k}$, где m – известная константа	$\hat{p} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k_i$
2	Распределение Кэптейна $W_\xi(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\theta - g(x))^2}{2}\right\}$, где $g(x)$ – неубывающая дифференцируемая функция	$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g(x_i)$
3	$W_\xi(x) = \frac{2x}{\theta^2}$, при $x \in [0, \theta]$	$\hat{\theta} = x_{(n)}$
4	$W_\xi(x) = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi} \cdot x^3} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2x}\right\}$, $x \geq 0$	$\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^{-0,5}$
5	Распределение Парето $W_\xi(x) = \beta \cdot \theta^\beta \cdot x^{-(\beta+1)}$, $x \geq \theta$, $\theta > 0$ где $\beta > 0$ - известная константа	$\hat{\theta} = x_{(1)}$

6	Распределение Бернулли $P\{\xi = 1\} = p$, $P\{\xi = 0\} = 1 - p$	$\hat{p} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$
7	$W_\xi(x) = \frac{\theta}{x} \cdot [\ln x]^{\theta-1}$, при $x \in [1, e]$	$\hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln\{\ln x_i\}}$
8	$W_\xi(x) = \theta \cdot x^{\theta-1}$, при $x \in [0, 1]$	$\hat{\theta} = -n / \sum_{i=1}^n \ln x_i$
9	$W_\xi(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$ где $\beta > 0$ - известная константа	$\hat{\alpha} = \beta \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right)^{-1}$
10	Распределение Парето $W_\xi(x) = \beta \cdot \theta^\beta \cdot x^{-(\beta+1)}$, $x \geq \theta$, $\beta > 0$ где $\theta > 0$ - известная константа	$\hat{\beta} = (\overline{\ln x} - \ln \hat{\theta})^{-1}$, где $\overline{\ln x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i$

Задача 1. Имеется n независимых отсчетов x_i случайного процесса, характеризуемого плотностью вероятности, указанной в центральной колонке в таблице ниже. Доказать, что байесовская оценка параметра распределения при квадратичной функции потерь может рассчитываться в соответствии с выражением из последней колонки той же таблицы.

Но- мер	Сведения о наблюдаемых значениях и об априорном распределении параметра	Формула оценки параметра
1	Распределение равномерное на отрезке $[0, \theta]$, при плотности вероятности параметра θ : $W_\theta(t) = t^{-2}$, $t \geq 1$	$\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} \cdot \max\{1, x_{(n)}\}$

2	Распределение равномерное на отрезке $[0, \theta]$, при равномерном распределении параметра θ на отрезке $[0, 1]$	$\hat{\theta} = \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{x_{(n)} - x_{(n)}^{n-1}}{1 - x_{(n)}^{n-1}}$
3	Нормальное $(a, 1)$ -распределение, где параметр a априори равновероятно может быть равен 0 или 1	$\hat{a} = [1 + E]^{-1}, \text{ где } E = \exp\left(\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^n x_i\right)$
4	Распределение равномерное на отрезке $[0, \theta]$, где θ априори равновероятно может быть равен 1 или 2	$\hat{\theta} = \begin{cases} 1 + (1 + 2^n)^{-1}, & x_{(n)} \leq 1 \\ 2, & x_{(n)} > 1 \end{cases}$
5*	$P\{\xi = 1\} = p, P\{\xi = 0\} = 1 - p$. При этом $W_p(t) = \lambda \cdot t^{\lambda-1}, 0 \leq t \leq 1$	$\hat{p} = \frac{\lambda + \sum_{i=1}^n x_i}{\lambda + n + 1}$
6*	$P\{\xi = 1\} = p, P\{\xi = 0\} = 1 - p$. При этом сам параметр p распределён равновероятно на отрезке $[0, 1]$.	$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + 1}{n + 2}$
7	$P\{\xi = 1\} = p, P\{\xi = 0\} = 1 - p$. Сам параметр p равновероятно принимает одно из значений $1/2$ и $1/3$.	$\hat{p} = \frac{3^{n+1} + 2 \cdot E}{6 \cdot (3^n + E)},$ где $E = 2^{2n - \sum_{i=1}^n x_i}$
8	$W_{\xi}(x) = 2x / \theta^2$, при $x \in [0, \theta]$. Априорное распределение θ равномерное на $[0, 1]$	$\hat{\theta} = \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{x_{(n)}^{2n-1} - x_{(n)}}{x_{(n)}^{2n-1} - 1}$
9	$W_{\xi}(x) = 2x / \theta^2$, при $x \in [0, \theta]$, если априорное распределение θ равно $W_{\theta}(t) = 5t^4, t \in [0, 1]$	$\hat{\theta} = \frac{2n-5}{2n-6} \cdot \frac{x_{(n)}^{2n-5} - x_{(n)}}{x_{(n)}^{2n-5} - 1}$

10	$W_{\xi}(x) = 2x / \theta^2$, при $x \in [0, \theta]$, где $W_{\theta}(t) = \beta \cdot t^{-(\beta+1)}, \beta > 0, t \geq 1$	$\hat{\theta} = \frac{(2n + \beta) \cdot \max\{1, x_{(n)}\}}{2n + \beta - 1}$
----	---	---

Примечание: при анализе подвариантов 5-6 полезно иметь в виду, что $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ и что $\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$.

Задача 2. Имеется n независимых отсчетов x_i случайного процесса, характеризуемого плотностью вероятности, указанной в центральной колонке в таблице ниже. Доказать, что оценка максимального правдоподобия (ОМП) для параметра распределения, может рассчитываться в соответствии с выражением из последней колонки таблицы.

Но- мер	Одномерная плотность вероятности наблюдаемого СП, $W_{\xi}(x)$	Формула оценки параметра
1	$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$, где a – известная константа	$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}$
2	$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{\exp\{(\beta - x) / \alpha\}}{\alpha}, & \text{при } x \geq \beta \\ 0, & \text{при } x < \beta \end{cases}$	$\hat{\beta} = x_{(1)}$ $\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - x_{(1)}$
3	Распределение равномерное на отрезке $[-\theta, \theta]$, где $\theta > 0$	$\hat{\theta} = \max\{-x_{(1)}, x_{(n)}\}$
4	Распределение Вейбулла $W_{\xi}(x) = \theta \alpha \cdot x^{\alpha-1} \exp\{-\theta \cdot x^{\alpha}\}$, $x \geq \theta$, $\theta > 0$ где $\alpha > 1$ – известная константа	$\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha}\right)^{-1}$

5	$W_{\xi}(x) = \alpha \cdot \exp\{-\alpha \cdot x\}$, при $x \geq 0$	$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right)^{-1}$
6	$W_{\xi}(x) = \frac{3x^2}{\alpha^3} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3\right\}$, $x \geq 0$	$\hat{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3}$
7	Распределение Пуассона $P\{\xi = k\} = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$, $k \geq 0, \lambda > 0$	$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k_i$
8	$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp\{\beta - x\}, & \text{при } x \geq \beta \\ 0, & \text{при } x < \beta \end{cases}$	$\hat{\beta} = x_{(1)}$
9	Распределение равномерное на отрезке $[-\theta, 0]$, где $\theta > 0$	$\hat{\theta} = -x_{(1)}$
10	Распределение равномерное на отрезке $[\theta, 2\theta]$, где $\theta > 0$	$\hat{\theta} = \frac{x_{(n)}}{2}$

Задача 3. Имеется n независимых отсчетов x_i случайного процесса, характеризуемого плотностью вероятности, указанной в центральной колонке в таблице ниже. Доказать, что байесовская оценка параметра распределения при квадратичной функции потерь может рассчитываться в соответствии с выражением из последней колонки той же таблицы.

Но- мер	Сведения о наблюдаемых значениях и об априорном распределении параметра	Формула оценки параметра
1	$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(\beta - x), & x \geq \beta \\ 0, & x < \beta \end{cases}$, где параметр β распределен равномерно на отрезке $[0, 1]$	$\hat{\beta} = \min(x_{(1)}, 1)$

2	$W_{\xi}(x) = \lambda \cdot \exp^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, причем априорное распределение параметра λ также показательное с параметром β	$\hat{\lambda} = \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n x_i}$
3	СВ ξ распределена по закону Пуассона $P\{\xi = k\} = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$ для $k \geq 0$, причем $W_{\lambda}(l) = \exp(-l)$, $l \geq 0$	$\hat{p} = \frac{1 + \sum_{i=1}^n x_i}{1 + n}$
4	СВ ξ распределена по закону Пуассона $P\{\xi = k\} = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$ для $k \geq 0$, причем $P\{\lambda = 2\} = 2/3$, $P\{\lambda = 4\} = 1/3$	$\hat{\lambda} = \frac{2 \cdot (e^{2n} + E)}{e^{2n} + E/2}$ где $E = \sum_{i=1}^n x_i$
5	СВ ξ имеет геометрическое распределение $P\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^k$, причем $P\{p = 1/4\} = P\{p = 1/2\} = P\{p = 3/4\}$	$\frac{3^E + 4 \cdot 2^E + 9}{4 \cdot (3^E + 2 \cdot 2^E + 3)}$ где $E = \sum_{i=1}^n x_i$
6	СВ ξ имеет геометрическое распределение $P\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^k$, причем $P\{p = 1/4\} = P\{p = 3/4\} = 1/2$	$\hat{p} = \frac{3^E + 9}{4 \cdot (3^E + 3)}$ где $E = \sum_{i=1}^n x_i$
7*	СВ ξ имеет геометрическое распределение $P\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^k$, причем распределение p : $W_p(t) = 3t^2$, $t \in [0, 1]$	$\hat{p} = \frac{n+4}{n+5 + \sum_{i=1}^n x_i}$
8*	СВ ξ имеет геометрическое распределение $P\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^k$, причем p распределён равномерно на $[0, 1]$.	$\hat{p} = \frac{n+2}{n+3 + \sum_{i=1}^n x_i}$
9*	$P\{\xi = 1\} = p$, $P\{\xi = 0\} = 1-p$. При этом $W_p(t) = \alpha \cdot t^{\alpha-1}$, $0 \leq t \leq 1$	$\hat{\theta} = \frac{1 + \alpha + \sum_{i=1}^n x_i}{2 + \alpha + n}$

10*	$W_{\xi}(x) = 2x / \theta^2, \text{ при } x \in [0, \theta], \text{ если}$ $W_{\theta}(t) = \beta \cdot t^{-(\beta+1)}, \beta > 0, t \geq 1$	$\hat{\theta} = \frac{x_{(n)} \cdot (2n + \beta)}{2n + \beta - 1}$
-----	---	--

Примечание: при анализе подвариантов 7-10 полезно иметь в виду, что $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ и что $\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$.

Лабораторная работа № 6.1 «Практическое исследование точечных оценок параметров распределений СВ»

Цель работы – исследовать отличия в свойствах МП-оценок, МАВ-оценок и байесовских оценок параметров распределений случайных величин.

Внимание! Данная работа является факультативной и выполняется по индивидуальным заданиям, согласованным с преподавателем. Выполнение лабораторной работы подразумевает составление собственной программы моделирования процессов измерения значений СВ, в ходе которого рассчитываются и сопоставляются по точности (обеспечиваемому среднему риску) несколько оценок параметров СВ. Моделирование может осуществляться в любой подходящей программной или математической среде по личному выбору студента.

Лабораторная работа № 6.2 «Калмановская фильтрация скалярного параметра сигнала»

Цель работы – экспериментальное исследование особенностей функционирования фильтров Калмана.

При подготовке к лабораторной работе рекомендуется изучить теоретические основы разработки и функционирования фильтров Калмана, приведенные в [8, с. 109-118].

6.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

6.4.1. В лабораторной работе объектом фильтрации является «полезное сообщение» - марковский случайный процесс $\lambda(t)$, отсчеты которого формируются в соответствии с уравнением авторегрессии первого порядка:

$$\lambda_i = r \cdot \lambda_{i-1} + v_i, \quad (6.22)$$

где r (const) – коэффициент корреляции отсчетов, v_i ($1 \leq i \leq N$) – отсчеты шума сообщения: независимые центрированные (т.е. с $M_v = 0$) нормально распределенные СВ. Оно связано с с.к.о. сообщения σ_{λ} соотношением

$$\sigma_v = \sigma_{\lambda} \cdot \sqrt{1-r^2}. \quad (6.23)$$

Примечание: из независимости v_i действительно следует, что

$$D\{\lambda\} = r^2 \cdot \sigma_{\lambda}^2 + \left(\sigma_{\lambda} \cdot \sqrt{1-r^2}\right)^2 = \sigma_{\lambda}^2.$$

6.4.2. Наблюдению отсчеты сообщения $\lambda(t)$ доступны лишь в смеси с широкополосным нормальным шумом $n(t)$. Отсчеты y_i наблюдаемого СП в работе формируются по правилу:

$$x_i = \lambda_i + n_i, \quad (6.24)$$

где n_i – последовательность независимых центрированных нормально распределенных СВ с эффективным значением σ_n , определяемым индивидуальным вариантом исследований.

6.4.3. Правило фильтрации отсчетов процесса $y(t)$ для получения очищенных от шума отсчетов сообщения λ_i можно получить из соотношений (4.85), (4.86) [8, с. 118], если подставить в них коэффициенты $b_i = r$ и $h_i = 1$ (см. [8, с. 116]). Это правило имеет вид:

$$\hat{\lambda}_i = r \cdot \hat{\lambda}_{i-1} + \frac{\hat{\sigma}_{\lambda i}^2}{\sigma_n^2} \cdot (y_i - r \hat{\lambda}_{i-1}), \quad (6.25)$$

$$\hat{\sigma}_{\lambda i}^2 = \left(\frac{1}{r^2 \cdot \hat{\sigma}_{\lambda(i-1)}^2 + \sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_n^2} \right)^{-1}. \quad (6.26)$$

6.4.4. Особенность случая, анализируемого в лабораторной работе, состоит в стационарности всех наблюдаемых СП, из-за которой в (6.26) нет элементов, зависящих от i . Как следствие, и дисперсия оценки $\hat{\sigma}_{\lambda i}^2$ является реально константой $\hat{\sigma}_{\lambda}^2$, кото-

рую можно получить из уравнения $\frac{1}{\hat{\sigma}_{\lambda}^2} = \frac{1}{r^2 \cdot \hat{\sigma}_{\lambda}^2 + \sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_n^2}$

$$\text{или} \quad r^2 \cdot (\hat{\sigma}_{\lambda}^2)^2 + \hat{\sigma}_{\lambda}^2 \cdot (\sigma_v^2 + (1-r^2) \cdot \sigma_n^2) - \sigma_v^2 \cdot \sigma_n^2 = 0$$

Откуда

$$\hat{\sigma}_{\lambda}^2 = \frac{1}{2r^2} \left\{ \sqrt{(\sigma_v^2 + (1-r^2) \cdot \sigma_n^2)^2 + 4 \cdot r^2 \cdot \sigma_v^2 \cdot \sigma_n^2} - (\sigma_v^2 + (1-r^2) \cdot \sigma_n^2) \right\} \quad (6.27)$$

6.4.5. Итак, фильтр Калмана, оптимально «выфильтровывающий» сообщение (6.22) из смеси с аддитивным нормальным белым шумом, должен представлять собой рекурсивный фильтр первого порядка

$$\hat{\lambda}_i = a_0 \cdot y_i + b_1 \cdot \hat{\lambda}_{i-1} \quad (6.28)$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{\hat{\sigma}_{\lambda}^2}{\sigma_n^2}, \quad b_1 = r \cdot \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_{\lambda}^2}{\sigma_n^2} \right). \quad (6.29)$$

где $\hat{\sigma}_{\lambda}^2$ - дисперсия оценки, определяемая (6.27). По сравнению с прочими линейными оценками, опирающимися на те же наблюдаемые данные y и готовые к формированию непосредственно в момент получения отсчета y_i , эта дисперсия оказывается минимально возможной.

6.5. Домашнее задание к лабораторной работе

6.5.1 Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий вариант лабораторных исследований.

6.5.2. Применительно к параметрам сообщения и добавляемого к нему шума из табл. 6.1, рассчитайте по формуле (6.27) ожидаемую при использовании фильтра Калмана дисперсию оценки $\hat{\sigma}_{\lambda}^2$.

Таблица 6.1

Номер бригады	Коэффициент корреляции r	С.к.о. сообщения σ_{λ} , В	С.к.о. шума наблюдения σ_n , В
1	0,80	0,7	0,25
2	0,87	0,7	0,30
3	0,955	0,8	0,40
4	0,955	0,8	0,45
5	0,96	0,7	0,59
6	0,72	0,7	0,40
7	0,88	0,9	0,45
8	0,945	0,9	0,60

6.5.3. Рассчитайте масштабирующие коэффициенты (6.29) и постройте АЧХ рекурсивного фильтра Калмана (6.28), комплексный коэффициент передачи которого определяется формулой

$$\dot{K}_{Calm}(\omega) = \frac{a_0}{1 - b_1 \cdot e^{-j\omega T_n}} = \frac{D_{\lambda}}{\sigma_n^2 - r \cdot (\sigma_n^2 - D_{\lambda}) \cdot e^{-j\omega T_n}}. \quad (6.30)$$

По графику оцените приближенно ширину полосы пропускания этого фильтра $Ш_{\text{ф}}$.

6.6. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Исследование погрешности фильтрации сигналов при использовании чебышевского цифрового ФНЧ

Рекомендации по выполнению:

6.6.1. Установить частоту дискретизации $F_s = 48$ кГц, а объем формируемой выборки не менее $N = 4096$ отсчетов.

6.6.2. Настроить модуль № 1 на формирование широкополосного шума $n(t)$ с эффективным значением σ_n из табл. 6.1. Подключить левый анализатор к контрольной точке №1 и по осциллографу убедиться в формировании процесса нужной формы.

6.6.3. Настроить модуль № 3 на формирование авторегрессионной последовательности (6.22) и, переключив левый анализатор на контрольную точку №3, убедиться в наличии низкочастотного шумоподобного сигнала.

6.6.4. Подключить правый анализатор к контрольной точке № 5 и по осциллографу убедиться, что полезное сообщение практически неразличимо на фоне аддитивного шума.

6.6.5. Настроить модуль №4 на фильтрацию сигналов с помощью низкочастотного фильтра Чебышева с полосой пропускания $Ш_f$, полученной при выполнении п. 6.5.3.

6.6.6. Переключить левый анализатор, подключенный к модулю, формирующему полезный сигнал, в состояние «Оценка с.к.ошибки»; в указанном состоянии анализатор рассчитывает среднеквадратическую погрешность между сигналами в точке, к которой он подключен, и выходом всей схемы моделирования – сигналом в контрольной точке № 5.

Варьируя параметры НЧ-фильтра Чебышева, подобрать их комбинацию, минимизирующую среднеквадратическую погрешность выделения полезного сообщения из шума. Зафиксировать в отчете зависимость от частоты среза фильтра наблюдаемой в экспериментах погрешности, её наименьшее значение, а также осциллограммы исходного и отфильтрованного от шума сообщений.

Этап 2. Исследование погрешности фильтрации сигналов при использовании фильтра Калмана

Рекомендации по выполнению:

6.6.7. Переключить модуль № 4 в состояние «Фильтр Калмана» и в окне «Параметры модулей» выставить характеристики формируемого полезного сообщения и шума.

6.6.8. С помощью правого анализатора, настроенного на расчет среднеквадратической погрешности фильтрации сигнала, сравнить реально наблюдаемую величину этой погрешности с результатами домашних расчетов (см. п. 6.5.2) и с результатом, полученным в п. 6.6.6. При значительных расхождениях с (6.27), либо если при использовании фильтра Калмана погрешность увеличилась сделать перепроверку и обсудить её результаты с преподавателем.

6.6.9. Зафиксировать в отчете значение погрешности, соответствующей использованию фильтра Калмана, и осциллограммы исходного и отфильтрованного от шума сообщений.

Этап 3. Исследование погрешности фильтрации сигналов при использовании ИФНЧ

Рекомендации по выполнению:

6.6.10. Переключить модуль № 4 в состояние «Идеальный ФНЧ» и, варьируя параметры ИФНЧ, по анализатору среднеквадратической ошибки подобрать частоту среза фильтра, минимизирующую среднеквадратическую погрешность выделения полезного сообщения из шума.

6.6.11. Зафиксировать в отчете зависимость от частоты среза фильтра наблюдаемой в экспериментах погрешности, её наименьшее значение, а также осциллограммы исходного и отфильтрованного от шума сообщений.

6.6.12. Обсудить с преподавателем причины, позволяющие идеальному ФНЧ обеспечивать погрешность выделения полезного сообщения из шума, меньшую чем у фильтра Калмана.

6.7. Контрольные вопросы для защиты работы

1. На решение каких задач нацелен фильтр Калмана? На основе каких априорных сведений осуществляется разработка этого фильтра? При каких предположениях относительно шума измерений и шума системы строится теория фильтра Калмана?

2. В чем состоит оптимальность функционирования фильтра Калмана?

3. Запишите и поясните уравнения фильтрации, описывающие функционирование фильтра Калмана.

4. При каких условиях в задаче фильтрации может наблюдаться установившийся режим? Сопоставьте работу фильтра Калмана и фильтра Колмогорова-Винера.

5. Запишите выражение для вычисления дисперсии ошибки оценивания сообщения. Как влияет величина дисперсии шума наблюдений на качество фильтрации сообщений?

6. Какие фильтры называются рекуррентными? Проанализируйте применимость подобных фильтров для решения задачи фильтрации сообщений.

7. Может ли какой-либо иной фильтр обеспечивать меньшую чем фильтр Калмана среднеквадратическую погрешность оценивания сообщения? Если «да», то при каких условиях и за счет чего может быть достигнуто подобное преимущество?

8. Можно ли применять фильтр Калмана для решения задач нелинейной фильтрации? Если «да», то каким образом?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в данном учебном пособии теоретические сведения и лабораторно-практические задания составляют, по мнению автора, минимальный законченный объем материала, необходимый для ознакомления с курсом “Статистическая радиотехнике”. Студентам, заинтересованным в углубленном изучении данной дисциплины, будет очень полезно рассмотреть и иные примеры и задачи, приведенные в других изданиях. Некоторые из подобных рекомендуемых книг приведены ниже в библиографическом списке литературы.

Автор будет благодарен за любую информацию о найденных неточностях и опечатках, а также за идеи по расширению и дополнению данного учебного пособия.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Стандартная нормальная случайная величина характеризуется

плотностью вероятности
$$W_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

при значениях параметров распределения $a = 0, \sigma = 1$

и функцией распределения
$$F_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Распределение стандартной нормальной случайной величины

y	$F_{\text{ст}}(y)$	$W_{\text{ст}}(y)$	y	$F_{\text{ст}}(y)$	$W_{\text{ст}}(y)$
0,0	0,5000	0,3989	2,0	0,9773	0,0540
0,1	0,5398	0,3970	2,1	0,9821	0,0440
0,2	0,5793	0,3910	2,2	0,9861	0,0355
0,3	0,6179	0,3814	2,3	0,9893	0,0283
0,4	0,6554	0,3683	2,4	0,9918	0,0224
0,5	0,6915	0,3521	2,5	0,9938	0,0175
0,6	0,7258	0,3332	2,6	0,9953	0,0136
0,7	0,7580	0,3123	2,7	0,9965	0,0104
0,8	0,7881	0,2897	2,8	0,9974	0,0079
0,9	0,8159	0,2661	2,9	0,9981	0,0060
1,0	0,8413	0,2420	3,0	0,9987	0,0044
1,1	0,8643	0,2179	3,1	0,9990	0,0033
1,2	0,8849	0,1942	3,2	0,9993	0,0024
1,3	0,9032	0,1714	3,3	0,9995	0,0017
1,4	0,9192	0,1497	3,4	0,9997	0,0012

1,5	0,9331	0,1295	3,5	0,9998	0,0009
1,6	0,9452	0,1109	3,6	0,9998	0,0006
1,7	0,9554	0,0940	3,7	0,9999	0,0004
1,8	0,9641	0,0790	3,8	0,9999	0,0003
1,9	0,9713	0,0656	3,9	0,9999	0,0002

Для отрицательных аргументов x значения можно получить из соотношения $F_{\text{ст}}(x)|_{x<0} = 1 - F_{\text{ст}}(-x)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Некоторые неопределенные и определенные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(a), \quad \text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad (\text{П1})$$

$$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}, \quad (\text{П2})$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax) dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \sin(ax), \quad (\text{П3})$$

$$\int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}, \quad (\text{П4})$$

$$\int x^2 \cdot \sin(ax) dx = \frac{2x \cdot \sin(ax)}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \cos(ax). \quad (\text{П5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Модифицированные функции Бесселя

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (\text{П6})$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \cdot \left[1 + \frac{z^2/4}{(1!) \cdot (2!)} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!) \cdot (3!)} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!) \cdot (4!)} + \dots \right] \quad (\text{П7})$$

x	$\exp(-x) \cdot I_0(x)$	$\exp(-x) \cdot I_1(x)$	x	$\exp(-x) \cdot I_0(x)$	$\exp(-x) \cdot I_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	2,0	0,3085	0,2153
0,2	0,8269	0,0823	2,2	0,2913	0,2121
0,4	0,6974	0,1367	2,4	0,2766	0,2085
0,6	0,5883	0,1722	2,6	0,2639	0,2047
0,8	0,5241	0,1945	2,8	0,2528	0,2007
1,0	0,4658	0,2079	3,0	0,2430	0,1968
1,2	0,4198	0,2153	3,2	0,2343	0,1930
1,4	0,3831	0,2185	3,4	0,2264	0,1892
1,6	0,3533	0,2190	3,6	0,2193	0,1856
1,8	0,3289	0,2177	3,8	0,2129	0,1821

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лебедько, Е.Г. Теоретические основы передачи информации [Электронный ресурс] / Е.Г. Лебедько. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 352 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/1543/>
2. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский - М.: Дрофа, 2006. - 512 с.
3. Филиппский, Ю.К. Случайные сигналы в радиотехнике / Ю.К. Филиппский - Киев: Вища школа, 1986. - 126 с.
4. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов - М.: Радио и связь, 1982. - 678 с.
5. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд., перераб. и дополн. - М.: Радио и связь, 1989. - 656 с.
6. Быков, В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков - М.: Сов. радио, 1971. - 328 с.
7. Зюко, А.Г. Теория передачи сигналов: Учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, М.В. Назаров, Л.М. Финк – М., Радио и связь, 1980. – 288 с.
8. Радиотехнические системы: Учебник для вузов по спец. «Радиотехника» / Ю.П. Гришин и др.; Под ред. Ю.М. Казаринова – М., Высш. школа, 1990. – 496 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	5
1.1. Теоретические основы	5
1.2. Практические примеры.....	9
1.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории .	14
1.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	21
1.5. Домашнее задание к лабораторной работе	29
1.6. Возможности моделирующей программы и рекомендации по работе с ней	31
1.7. Выполнение лабораторных исследований.....	38
1.8. Рекомендации к написанию отчета	41
1.9. Контрольные вопросы для защиты работы	42
2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	43
2.1. Теоретические основы	43
2.2. Практические примеры.....	50
2.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории .	54
2.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	63
2.5. Домашнее задание к лабораторной работе	70
2.6. Выполнение лабораторных исследований.....	71
2.7. Контрольные вопросы для защиты работы	75
3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ	77
3.1. Теоретические основы	77

3.2. Практические примеры.....	79
3.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории	89
3.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	101
3.5. Домашнее задание к лабораторной работе	105
3.6. Выполнение лабораторных исследований.....	106
3.7. Контрольные вопросы для защиты работы	110
4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	111
4.1. Теоретические основы	111
4.2. Практические примеры.....	115
4.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории ..	129
4.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	137
4.5. Домашнее задание к лабораторной работе	139
4.6. Выполнение лабораторных исследований.....	139
4.7. Контрольные вопросы для защиты работы	141
5. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ	143
5.1. Теоретические основы	143
5.2. Практические примеры.....	145
5.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории ..	156
5.4. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	165
5.5. Домашнее задание к лабораторной работе	167
5.6. Выполнение лабораторных исследований.....	170
5.7. Контрольные вопросы для защиты работы	172
5.8. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	173

5.9. Домашнее задание к лабораторной работе	174
5.10. Выполнение лабораторных исследований	176
5.11. Контрольные вопросы для защиты работы	180
6. ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ	
ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ.....	181
6.1. Теоретические основы	181
6.2. Практические примеры.....	183
6.3. Задачи для проверки правильности усвоения теории ..	190
6.4 Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	197
6.5. Домашнее задание к лабораторной работе	199
6.6. Выполнение лабораторных исследований.....	200
6.7. Контрольные вопросы для защиты работы	202
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	203
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	204
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	205
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	206
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	207

Учебное издание

Токарев Антон Борисович

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА: ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Компьютерный набор А.Б. Токарева

Подписано в печать 20.11.2015.

Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. 13,3. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 250 экз.

Зак. № _____

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14