

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»**

Кафедра прикладной математики и механики

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к проведению практических занятий
в третьем семестре для студентов
направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело»
(профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта
и хранения нефти, газа и продуктов переработки»)
очно-заочной формы обучения**

Воронеж 2022

УДК 517.9(075)

ББК 22.161(я7)

Составители:

канд. физ.-мат. наук А. П. Бырдин,

канд. техн. наук А. А. Сидоренко

Математика: методические указания к проведению практических занятий в третьем семестре для студентов направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело» (профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта и хранения нефти, газа и продуктов переработки») очно-заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. П. Бырдин, А. А. Сидоренко. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. – 41 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Математика». Подробно разобраны примеры решения задач и приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов второго курса очно-заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле Математика_21.03.01_3 семестр.pdf.

Ил. 12. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.9(075)

ББК 22.161(я7)

Рецензент - О. А. Соколова, канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

1. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Двойные интегралы

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай функций двух переменных.

1. Определение и условия существования двойного интеграла. Пусть G – некоторая замкнутая ограниченная область, а $z = f(x, y)$ – произвольная функция, определенная и ограниченная в этой области.

Предполагается, что граница области G состоит из конечного числа кривых, заданных уравнениями вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – непрерывные функции. Такой областью, например, является замкнутый многоугольник, граница которого состоит из конечного числа отрезков, представляющих собой графики непрерывных функций вида $y = kx + b$ или $x = a$. Другой пример – область, ограниченная эллипсом (здесь граница состоит из двух кривых: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$) и т. д.

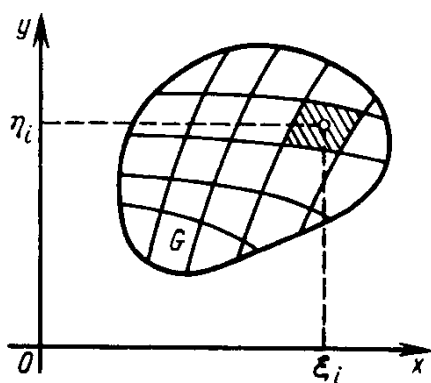


Рис. 1

Разобьем область G произвольно на n частей G_i не имеющих общих внутренних точек, с площадями $\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ (рис. 1). В каждой части G_i выберем произвольную точку (ξ_i, η_i) и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i, \quad (1.1)$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ в области G . Назовем *диаметром* $d(G)$ области G наибольшее расстояние между граничными точками этой области.

Обозначим через λ наибольший из диаметров частичных областей $G_i \left(\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(G_i)\} \right)$.

Определение. Если интегральная сумма (1.1) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , то этот предел называется *двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G* и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint_G f(x, y) ds = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области G , G – *областью интегрирования*, x и y – *переменными интегрирования*, ds (или $dx dy$) – *элементом площади*.

Теорема 1. Функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области G , интегрируема в этой области.

Однако не следует считать, что двойной интеграл существует только для непрерывных функций. Имеет место более общая теорема.

Теорема 2. Функция $f(x, y)$, ограниченная в замкнутой ограниченной области G и непрерывная в ней всюду, кроме точек, лежащих на конечном числе кривых, являющихся графиками непрерывных функций вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, интегрируема в этой области.

Геометрический смысл двойного интеграла. Пусть в пространстве дано тело P (рис. 2), ограниченное сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$,

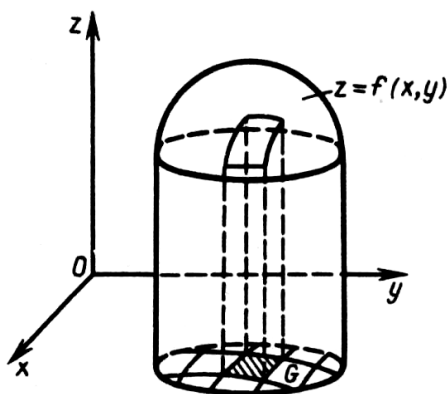


Рис. 2

которая определена в области G , с боков – цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области G , а образующие параллельны оси Oz , и снизу областью G , лежащей в плоскости Oxy . Тело такого вида называют *криволинейным цилиндром*.

Аналогично тому, как задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к установлению геометрического смысла определенного интеграла, так и задача о вычислении объема тела P приводит к геометрическому толкованию двойного интеграла.

Действительно, в данном случае интегральная сумма (1) представляет собой сумму объемов прямых цилиндров с площадями оснований Δs_i и высотами $f(\xi_i, \eta_i)$, которую можно принять за приближенное значение объема тела P :

$$v_p \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем мельче разбиение области G на части. При переходе к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ это приближенное равенство становится точным:

$$v_p = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

Так как функция $f(x, y)$ интегрируема, то предел интегральной суммы существует и равен двойному интегралу от этой функции по области G . Следовательно,

$$v_p = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

Отсюда следует геометрический смысл двойного интеграла: *двойной интеграл от непрерывной, неотрицательной функции равен объему криволинейного цилиндра*.

З а м е ч а н и е . Если положить $f(x, y) = 1$ всюду в области G то непосредственно из определения двойного интеграла получим выражение площади s области G в виде двойного интеграла:

$$\iint_G 1 \cdot dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta s_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = s.$$

Сведение двойного интеграла к повторному

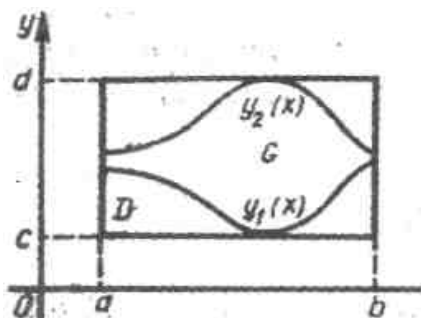


Рис. 3

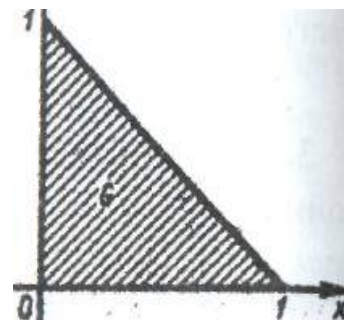


Рис. 4

Теорема 3. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $G = \{x, y \mid a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывные функции, $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $a \leq x \leq b$ (см. рис. 3). Пусть также существует двойной интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$ и для каждого x из отрезка $[a, b]$ существует определенный

интеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$. Тогда существует повторный интеграл

$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ и справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.2)$$

З а м е ч а н и е 1. Если в теореме 3 поменять ролями x и y , то теорема будет утверждать существование повторного интеграла $\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ и равенства

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (1.3)$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_G (x^2 + xy + 2y^2) dx dy$ по области

$$G = \{x, y \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Решение. Область G представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и прямой $y = -x + 1$ (рис.4). Следовательно, $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = 1 - x$. По формуле (1.2) имеем

$$\iint_G (x^2 + xy + 2y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + xy + 2y^2) dy = \int_0^1 \left[x^2(1-x) + \frac{x(1-x)^2}{2} + \frac{2(1-x)^3}{3} \right] dx = \frac{7}{24}.$$

Данный интеграл можно вычислить и по формуле (1.3), если в G поменять x и y ролями. Тогда треугольник определяется неравенствами $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1 - y$, откуда $x_1(y) = 0$, $x_2(y) = 1 - y$, и легко проверить, что интеграл:

$$\iint_G (x^2 + xy + 2y^2) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x^2 + xy + 2y^2) dx$$

имеет тоже самое значение.

Пример. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy$.

Решение. Область интегрирования ограничена прямыми $x=0$, $x=1$, кубической параболой $y=x^3$ и параболой $y=\sqrt{x}$ (рис. 5).

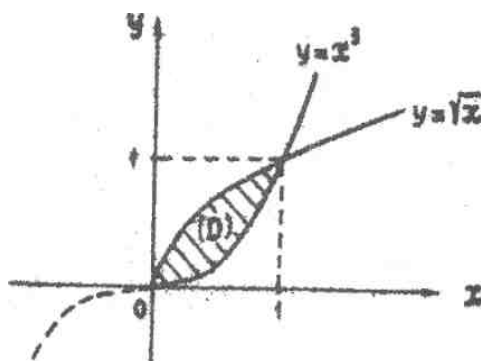


Рис. 5

Определим пределы интегрирования. Решая систему уравнений $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$ получим $y_1=0$ - нижний предел интегрирования по y , $y_2=1$ - верхний предел. Чтобы найти пределы изменения по x во внутреннем интеграле, выразим x через y из уравнения кривой, которая ограничивает область интегрирования слева ($y=\sqrt{x}$) получим $x_1(y)=y^2$, а из уравнения кривой, которая ограничивает область справа, получим $x_2(y)=\sqrt[3]{y}$. Поэтому

$$\text{справедливо равенство} \quad \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) dy.$$

З а м е ч а н и е 1. Если область G не удовлетворяет условиям теоремы 3 (например, вертикальные или горизонтальные прямые пересекают ее границу более чем в двух точках), то необходимо область G разбить на части каждая из которых удовлетворяла бы условиям теоремы 3, и сводить к повторному каждый из соответствующих двойных интегралов отдельно.

З а м е ч а н и е 2. Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержат сумму x^2+y^2 , то во многих случаях упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам, так как данная сумма в полярных координатах ($x=\rho \cos \varphi$, $y=\rho \sin \varphi$) принимает достаточно простой вид $(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = \rho^2$.

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ по области D , ограниченной линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$ и расположенной в первом квадранте (рис. 6).

Решение. Уравнение внутренней окружности $x^2+y^2=1$ ($R_1=1$) в полярных координатах примет вид $\rho_1=1$, а внешней окружности ($R_2=2$) $x^2+y^2=4$ - $\rho_2=2$. Поэтому

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7\pi}{6}.$$

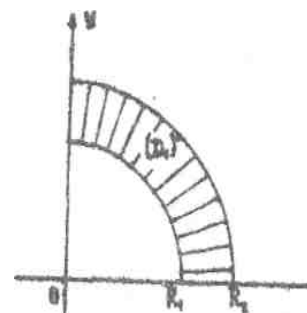


Рис. 6

Вычисление объема. Как известно, объем v криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y) > 0$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боковых сторон цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси OZ , а направляющей служит контур области G , вычисляется по формуле $v_p = \iint_G f(x, y) dx dy$, т.е. с помощью двойных интегралов можно вычислять объемы тел.

Пример. Найти объем v тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$ и $z = 0$ (рис. 7).

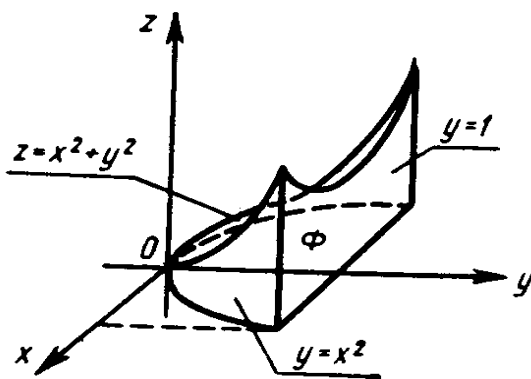


Рис. 7

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} v &= \iint_G (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^1 dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{88}{105}. \end{aligned}$$

1.2. Криволинейные интегралы

Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой кривой, лежащей в плоскости.

Интегралы такого рода называются *криволинейными*. Они имеют широкое применение в различных разделах математики.

Рассмотрим криволинейные интегралы второго рода.

Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть на кривой AB определены две ограниченные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем кривую AB на n частей точками $A = M_0, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B$. Обозначим через Δx_i и Δy_i , проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат (рис. 8), на каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмем произвольную точку M_i^* и составим интегральную сумму для функции $P(x, y) [Q(x, y)]$:

$$\sum_{i=1}^n P(M_i^*) \Delta x_i \left[\sum_{i=1}^n Q(M_i^*) \Delta y_i \right]. \quad (1.4)$$

Определение. Если интегральная сумма (1) при $\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta l_i\}$, Δl_i – длина дуги

$M_{i-1}M_i$) имеет предел, равный I , то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции $P(x, y)[Q(x, y)]$ по кривой AB и обозначается символом

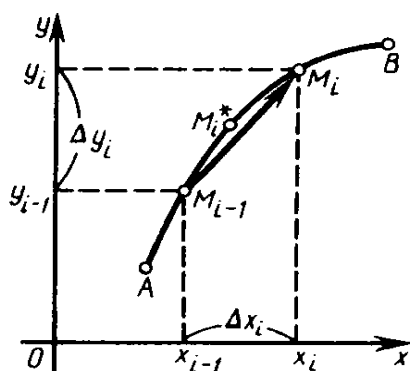


Рис. 8

$$\int_{AB} P(x, y) dx \left[\int_{AB} Q(x, y) dy \right].$$

Сумму

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$

называют общим криволинейным интегралом второго рода и обозначают символом

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Криволинейные интегралы второго рода, как и интегралы первого рода, легко сводятся к определенным интегралам.

Действительно, пусть кривая AB задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ функции, причем точке A кривой соответствует значение $t = \alpha$, точке B — значение $t = \beta$, $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль кривой AB . Тогда справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt; & \int_{AB} Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt; \\ \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)\} dt, \end{aligned} \quad (1.5)$$

сводящие криволинейные интегралы к определенным интегралам. Криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла, что непосредственно вытекает из формул (1.5).

В отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) проходит кривая AB , и меняет знак при изменении направления обхода кривой, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx, \quad \int_{AB} Q(x, y) dy = - \int_{BA} Q(x, y) dy.$$

Действительно, изменив направление обхода кривой, мы соответственно изменим знаки проекций Δx_i и Δy_i в суммах (1.5), и, следовательно, сами суммы и их пределы изменят знак.

Таким образом, при вычислении криволинейных интегралов второго рода необходимо учитывать направление интегрирования.

В случае, когда L замкнутая кривая, т. е. когда точка B совпадает с точкой A , из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L условимся называть *положительным* то направление, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается слева по

отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление обхода контура L условимся называть *отрицательным*.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L , пробегаемому в положительном направлении, часто обозначают символом $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Криволинейные интегралы второго рода вычисляют сведением их к определенным интегралам по формулам (1.5). В частности, если кривая AB задана уравнением вида $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то, принимая x за параметр ($t=x$), из формул (2) получаем

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_a^b P[x, y(x)]dx, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_a^b Q[x, y(x)]y'(x)dx, \quad (1.6)$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\} dx.$$

Аналогичные формулы имеют место, если кривая AB задана уравнением вида $x = x(y)$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{AB} x^2 dx + xy dy$, где AB – четверть окружности $x = \cos t$,

$y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, A соответствует $t = 0$, B соответствует $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Имеем $x^2 = \cos^2 t$, $dx = -\sin t dt$, $xy = \cos t \sin t$, $dy = \cos t dt$. По третьей из формул (1.5) получаем $\int_{AB} x^2 dx + xy dy = \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin t) dt = 0$.

Пример. Вычислить интеграл $\oint_L (x + y)dy$, где L – контур прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ и $y = 1$ (рис. 9).

Решение. На рис. 9 положительное направление обхода контура L обозначено стрелками. Разбивая весь контур интегрирования на части, запишем: $\oint_L = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$.

Легко заметить, что интегралы вдоль участков AB и CD равны нулю, так как на них y является постоянным и, следовательно, $dy = 0$. Поэтому остается вычислить интегралы по участкам BC и DA . По формуле, аналогичной первой из формул (1.6) [заменяя x на y и $y(x)$ на $x(y)$], получаем

$$\int_{BC} (x + y)dy = \int_0^1 (1 + y)dy = \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}, \quad \int_{DA} (x + y)dy = \int_1^0 (0 + y)dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^0 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, окончательно имеем $\oint_L (x + y)dy = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy$, где:

- а) AB —прямая $y = x$, соединяющая точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$;
 б) AB — парабола $y = x^2$, соединяющая те же точки;
 в) AB —ломаная, проходящая через точки $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$ (рис.10).

Решение. По третьей формуле (1.10) имеем:

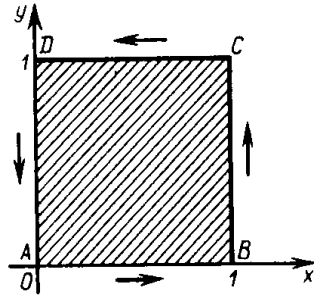


Рис. 9

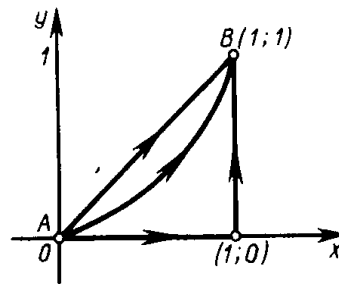


Рис. 10

$$\text{а) } \int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (4x^3 + 1) dx = 2;$$

$$\text{б) } \int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (5x^4 + 2x) dx = 2;$$

$$\text{в) } \int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 3x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 (1 + 1) dy = \int_0^1 2 dy = 2.$$

Пусть гладкая кривая AB задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, причем изменению t от α до β соответствует движение точки по кривой от A до B (не обязательно, чтобы α было меньше β). Тогда

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.$$

Аналогичные формулы имеют место и для интегралов по координатам y и z .

1.3. Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейными и двойными интегралами. Она имеет широкое применение как в самом анализе, так и в его приложениях.

Докажем эту формулу для замкнутой области, граница которой пересекается с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках (см. рис. 11). Для краткости будем называть такие области *простыми*. Предполагается, что контур, ограничивающий область, гладкий или кусочно-гладкий.

Теорема 1. Пусть G — некоторая простая замкнутая область, ограниченная контуром L , и пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в данной области. Тогда имеет место формула

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy, \quad (1.7)$$

называемая формулой Грина.

З а м е ч а н и е. Формула Грина остается справедливой для всякой замкнутой области G , которую можно разбить проведением дополнительных линий на конечное число простых замкнутых областей. Действительно, пусть область G с границей L имеет вид, изображенный на рис. 12. Разобьем ее на две простые области: G_1 и G_2 , для каждой из которых справедлива формула (1.7). Напишем отдельно формулу Грина для G_1 и G_2 и сложим почленно полученные равенства. Слева будем иметь двойной интеграл по всей области G , а справа – криволинейный интеграл по контуру L области G , так как криволинейный интеграл по вспомогательной кривой берется дважды в противоположных направлениях и при суммировании взаимно уничтожается.

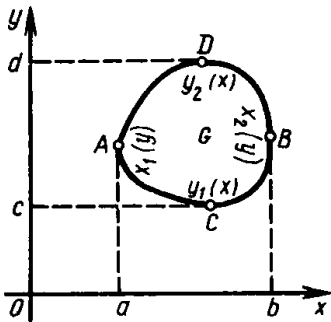


Рис. 11

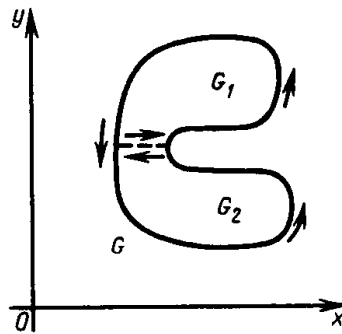


Рис. 12

Пример. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L (x - y) dx + (x + y) dy, \text{ где } L$$

– окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Функции

$$P(x, y) = x - y,$$

$$Q(x, y) = x + y \text{ и } \frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ непрерывны в замкнутом круге $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно, по теореме 1

формула Грина применима к данному интегралу. Имеем

$$\oint_L (x - y) dx + (x + y) dy = \iint_G [1 - (-1)] dx dy = 2 \iint_G dx dy = 2s = 2\pi R^2.$$

Заметим, что полученный результат легко проверить непосредственно вычислением данного интеграла.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить двойные интегралы по областям G , ограниченным указанными линиями:

1. $\iint_G \frac{3y^2 dx dy}{1+x^2}; \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

2. $\iint_G \frac{dx dy}{(x-y)^2}; \quad 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4.$

3. $\iint_G (x-y) dx dy; \quad x=0, y=0, x+y=2.$

4. $\iint_G xy dx dy; \quad y=0, y=x, x=1.$

5. $\iint_G xy dx dy; \quad y=x^2, y^2=x.$

6. $\iint_G x dx dy; \quad y=x^3, x+y=2, x=0.$

7. $\iint_G x dx dy; \quad xy=6, x+y-7=0.$

8. $\iint_G y^2 x dx dy; \quad x^2+y^2=4, x+y-2=0.$

9. $\iint_G (x+y) dx dy$; $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq x \leq \sin y$. 10. $\iint_G \sin(x+y) dx dy$; $x=y$, $x+y=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

11. $\iint_G y dx dy$; G – круг радиуса R с центром в начале координат.

12. $\iint_G e^{-y^2} dx dy$; G – треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $B(0; 1)$, $A(1; 1)$.

13. $\iint_G x dx dy$; G – область, ограниченная осью Ox и аркой циклоиды

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

14. $\iint_G xy dx dy$; G – область, ограниченная осями координат и частью астроида

$x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

Вычислить следующие интегралы, перейдя к полярным координатам:

15. $\iint_G (x^2 + y^2) dx dy$; G – половина круга радиуса R с центром в начале координат,

лежащая в области $y \geq 0$.

16. $\iint_G e^{x^2+y^2} dx dy$; G – четверть круга $x^2 + y^2 = 1$, расположенная в первом квадранте.

17. $\iint_G e^{x^2+y^2} dx dy$; G – круг радиуса R с центром в начале координат.

18. $\iint_G \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$; G – круг $x^2 + y^2 = x$.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

19. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. 20. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, $z=x^2+y^2$.

21. $z^2=xy$, $x=a$, $x=0$, $y=a$, $y=0$. 22. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

23. $az=x^2-y^2$, $z=0$, $x=a$. 24. $z^2=xy$, $x+y=a$.

Вычислить площади областей, ограниченных линиями:

25. $y^2=x+1$, $x+y=1$. 26. $xy=4$, $x=1$, $y=2$.

27. $xy=4$, $y=x$, $x=4$. 28. $y=x^2$, $4y=x^2$, $y=4$.

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигур, ограниченных линиями:

29. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - 2bx = 0$ ($0 < a < b$).

30. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $y=0$. 31. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$.

Вычислить криволинейные интегралы:

32. $\int_{AB} [(x+y)dx - xdy]$ где: 1) AB – прямая, соединяющая точки $(0, 0)$ и $(4, 2)$; 2) AB –

ломаная, проходящая через точки $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 2)$.

33. Решить задачу 32 для интеграла $\int_{AB} ydx + xdy$. Почему здесь величина интеграла не

зависит от пути интегрирования?

34. $\oint_L xdy$, где L – контур треугольника, образованного прямыми $y = x$, $x = 2$, $y = 0$

(интегрирование вести в положительном направлении).

35. $\oint_L (x^2 - y)dx$, где L – контур прямоугольника, образованного прямыми

$x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ (интегрирование вести в положительном направлении).

36. $\int_{AB} xdy - ydx$ по кривой $y = x^3$ от точки $(0,0)$ до точки $(2,8)$.

37. $\int_{AB} \sqrt{x}dx + \sqrt{y}dy$ по кривой $y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

38. $\int_{AB} x^2dx + y^2dy$ по кривой $y = \sqrt{x}$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

39. $\int_{AB} (x^2 + y^2)dx + xydy$ по кривой $y = e^x$ от точки $(0,1)$ до точки $(1,e)$.

Вычислить криволинейный интегралы, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

40. $\int_{AB} xydx + y^2dy$ по кривой $x = t^2$, $y = t$ ($1 \leq t \leq 2$).

41. $\int_{AB} (x+y)dx + (x-y)dy$ по окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

42. $\int_{AB} y^2dx + xydy$ по эллипсу $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

43. $\int_{AB} ydx - xdy$ по астроиде $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

44. $\int_{AB} y^2dx + x^2dy$ по первой арке циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$).

С помощью формулы Грина вычислить криволинейные интегралы:

45. $\oint_L (x-y)dx + (x+y)dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

$$46. \oint_L (x+y)dx - (x-y)dy, \text{ где } L - \text{ эллипс } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$47. \oint_L y^2 dx + (x+y)^2 dy, \text{ по контуру треугольника } ABC \text{ с вершинами } A(a,0), B(a,a),$$

$C(0,a)$.

Ответы

1. $\frac{\pi}{4}$. 2. $\ln \frac{4}{3}$. 3. 0. 4. $\frac{1}{8}$. 5. $\frac{1}{12}$. 6. $\frac{7}{15}$. 7. $20\frac{5}{6}$. 8. $1\frac{3}{5}$. 9. $\frac{5}{4}\pi$. 10. $\frac{1}{2}$. 11. 0.
 12. $-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$. 13. $3\pi^2 a^3$. 14. $\frac{a^4}{80}$. 15. $\frac{\pi R^4}{4}$. 16. $\frac{\pi}{4}(e-1)$. 17. $2\pi(e^{R^2}-1)$. 18. $\frac{1}{4}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.
 19. $\frac{1}{6}$. 20. $\frac{1}{6}$. 21. $\frac{79}{60}a^3$. 22. $\frac{4}{9}a^3$. 23. $\frac{88}{105}$. 24. $\frac{a^2}{3}$. 25. $\frac{9}{2}$. 26. $4\ln 2 - 2$. 27. $6 - 4\ln 2$. 28. $\frac{32}{3}$.
 29. $\pi(b^2 - a^2)$. 30. $\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 31. $\frac{3}{4}\pi a^2$. 32. 1) 8; 2) 4. 33. 8. 34. 2. 35. 2. 36. 8. 37. $4/3$.
 38. $2/3$. 39. $\frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{12}$. 40. $221/15$. 41. $-R^2$. 42. $-\frac{1}{3}ab^2$. 43. $-\frac{3}{16}\pi a^2$. 44. $a^3\pi(5-2\pi)$.
 45. $2\pi R^2$. 46. $-2\pi ab$. 47. $2a^3/3$.

2. РЯДЫ

2.1. Ряды с неотрицательными членами

В настоящей главе будут рассмотрены ряды, являющиеся важным математическим аппаратом, применяемым для вычислений и исследований как в различных разделах самой математики, так и во многих ее приложениях.

Основные определения. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2.1)$$

называется числовым рядом или просто рядом.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются *членами ряда*, член a_n с произвольным номером – *общим членом ряда*.

Суммы конечного числа членов ряда

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$$

называются *частичными суммами ряда* (2.1). Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \quad (2.2)$$

Ряд (2.1) называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм (2.2) сходится к какому-нибудь числу S , которое в этом случае называется *суммой ряда* (2.1). Символически это записывается так:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \text{ или } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же последовательность частичных сумм (2.2) расходится, то ряд (2.1) называется *расходящимся*.

Пример. Покажем, что ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

сходится. Возьмем сумму S_n первых n членов ряда

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Слагаемые этой суммы могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм данного ряда равен единице:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, и его сумма S равна 1.

Пример. Рассмотрим ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0. \quad (2.3)$$

Частичная сумма S_n этого ряда при $q \neq 1$ имеет вид

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Отсюда:

1) если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$, т. е. ряд сходится и его сумма

$S = \frac{a}{1 - q}$. Например, при $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$ имеем:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 2;$$

2) если $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \infty$, т. е. ряд расходится;

3) при $q = 1$ ряд (2.3) принимает вид $a + a + a + \dots + a + \dots$. В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(a + a + a + \dots + a)}_{n \text{ раз}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a = \infty$, т.е. ряд расходится;

4) при $q = -1$ ряд (2.3) принимает вид $a - a + a - a + \dots$. Для него $S_n = \frac{a}{2} - \frac{a(-1)^n}{2}$, т.е. $S_n = 0$ при n четном и $S_n = a$ при n нечетном. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, ряд (2.3) является сходящимся при $|q| < 1$ и расходящимся при $|q| \geq 1$.

Необходимое условие сходимости ряда. При рассмотрении рядов возникают две задачи: 1) исследовать ряд на сходимость и 2) зная, что ряд сходится, найти его сумму. Будем решать в основном первую задачу, имеющую теоретический характер. Приведем необходимое условие сходимости рядов.

Теорема 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда.

Пример. Рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который называют

гармоническим рядом. Очевидно, что для гармонического ряда выполнено необходимое условие сходимости, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Докажем, что этот ряд расходится.

Действительно, если бы этот ряд сходил, то, обозначая его сумму через S мы бы имели

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0.$$

Но $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, т.е. $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$.

Отсюда следует, что равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ невозможно, т. е. гармонический ряд расходится.

Таким образом, если общий член ряда стремится к нулю, то еще нельзя сделать вывод о сходимости ряда. Необходимо дополнительное исследование, которое может быть проведено с помощью достаточных условий (признаков) сходимости ряда.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых достаточных условий сходимости рядов с неотрицательными членами.

Достаточные условия сходимости ряда. Установим ряд признаков, позволяющих сделать вывод о сходимости (расходимости) рассматриваемого ряда.

Теорема 2 (признак сравнения). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ и для всех } n \text{ выполняется неравенство } a_n \leq b_n. \text{ Тогда из сходимости ряда}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ следует сходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ а из расходимости ряда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ следует}$$

$$\text{расходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ сходится, так как сходится ряд из членов геометрической

прогрессии: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(q = \frac{1}{2} < 1 \right)$, а члены данного ряда не больше соответствующих членов

ряда сходящейся геометрической прогрессии: $\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} (s \leq 1)$ расходится, поскольку его члены не меньше членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^s}$, а гармонический ряд расходится.

Существуют признаки сходимости рядов, позволяющие непосредственно судить о сходимости (или расходимости) данного ряда, не сравнивая его с другим рядом, о котором известно, сходится он или расходится. Рассмотрим два из них.

Теорема 3. (п р и з н а к Д а л а м б е р а). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Тогда а) при $\rho < 1$ ряд сходится; б) при $\rho > 1$ ряд расходится.

З а м е ч а н и е. При $\rho = 1$, как показывают примеры, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью признака сравнения или других признаков.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1.$$

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$. Согласно признаку Даламбера сделать заключение о сходимости или расходимости ряда нельзя. Однако, как было показано ранее (см. пример 2), этот ряд расходится.

Теорема 4 (интегральный признак). Пусть дан ряд

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале $[1, +\infty)$. Тогда, если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то

сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$; если же $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ также расходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

С помощью интегрального признака выясним поведение данного ряда при $\alpha > 0$. Возьмем в качестве функции $f(x)$ функцию $\frac{1}{x^\alpha} (x \geq 1)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 8. Члены ряда равны значениям этой функции при $x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Как известно, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится. Следовательно, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Заметим, что при $\alpha \leq 0$ такие ряды также расходятся, так как их общий член не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. нарушается необходимое условие сходимости ряда.

В частности, при $\alpha = 2$ имеем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; при $\alpha = 1$ – расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; при $\alpha = \frac{1}{2}$ – расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; и т.д.

2.2. Знакопередающие ряды

До сих пор мы рассматривали ряды с неотрицательными членами. Ряды с неположительными членами отличаются от соответствующих рядов с неотрицательными членами только множителем -1 , поэтому вопрос о их сходимости решается аналогично.

Перейдем теперь к рассмотрению знакопередающих рядов, члены которых имеют чередующиеся знаки. Для удобства будем считать, что первый член такого ряда положителен. Тогда знакопередающий ряд можно записать в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, \quad (2.4)$$

где $a_n > 0$.

Для знакопередающих рядов имеет место следующий очень простой достаточный признак сходимости.

Теорема 5 (признак Лейбница). Если абсолютные величины членов знакопередающего ряда (2.4) монотонно убывают: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ сходится, так как

удовлетворяет условиям признака Лейбница: 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Заметим, что этот ряд отличается от гармонического ряда только знаками четных членов.

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим теперь ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются

знакопеременными рядами.

Возьмем какой-нибудь знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (2.5)$$

где числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов в ряде произвольно. Одновременно рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (2.7):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (2.6)$$

Для знакопеременных рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема 6. Если ряд (2.6) сходится, то сходится и ряд (2.7).

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$

согласно доказанному признаку сходится, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$ (см. пример из п. 2.2).

Рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, так как существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. Так, например, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ согласно признаку Лейбница сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ составленный из

абсолютных величин его членов, расходится (гармонический ряд).

Поэтому все сходящиеся ряды можно разделить на *абсолютно* и *условно сходящиеся*.

К абсолютно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, также сходятся.

К условно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$ абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из абсолютных величин $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$, также сходится. (Оба ряда – геометрические прогрессии со знаменателями, соответственно равными $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$).

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ условно сходящийся, так как сам он сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ расходится (см. пример из п. 2.2).

Заметим, что деление сходящихся рядов на абсолютно и условно сходящиеся существенно. Дело в том, что абсолютно сходящиеся ряды обладают рядом важных свойств, тогда как условно сходящиеся ряды некоторыми из этих свойств не обладают. Например, для условно сходящихся рядов сумма ряда не равна сумме положительных и сумме отрицательных членов ряда, как это имеет место для абсолютно сходящихся рядов.

2.3. Степенные ряды

Определение и общие замечания. Ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (2.7)$$

называется *степенным рядом*.

Числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

Придавая x различные числовые значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися. Множество тех значений x , при которых ряд (2.7) сходится, называется *областью его сходимости*. Это множество всегда не пусто, так как любой степенной ряд сходится при $x = 0$. Очевидно, что частичная сумма степенного ряда $S_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ является функцией переменной x . Поэтому и сумма ряда S также является некоторой функцией переменной x , определенной в области сходимости ряда:

$$S = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad \left(\text{или } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \right).$$

Интервал сходимости степенного ряда. Сформулируем теорему, имеющую важное значение в теории степенных рядов и касающуюся области сходимости степенного ряда.

Теорема 7 (теорема Абеля).

1) Если степенной ряд (2.7) сходится при $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$), то он сходится, и притом абсолютно, для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$;

2) если ряд (2.7) расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля утверждает, что если x_0 – точка сходимости степенного ряда, то во

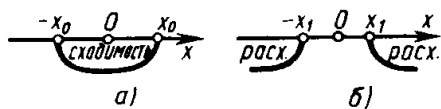


Рис. 1

всех точках, расположенных на интервале $(-|x_0|, |x_0|)$ (рис. 1, а), этот ряд сходится абсолютно, а если x_1 – точка расходимости степенного ряда, то во всех точках, расположенных вне интервала $(-|x_1|, |x_1|)$ (рис. 1, б), ряд расходится. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 8. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ сходится не при всех значениях x и не только при $x = 0$,

то существует число $R > 0$ такое, что ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.

Таким образом, решен вопрос об области сходимости степенного ряда. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости степенного ряда*. Число R называется *радиусом сходимости степенного ряда*.

Отметим, что интервал сходимости некоторых рядов охватывает всю числовую прямую (в этом случае пишут $R = \infty$), у других вырождается в одну точку ($R = 0$). Итак, всякий степенной ряд имеет свой радиус сходимости R . При $x = \pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. Этот вопрос решается для каждого конкретного ряда. Приведем способ определения радиуса сходимости степенного ряда.

Теорема 9. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$, то радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ равен } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на всей числовой прямой, т. е. $R = \infty$, а если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, то ряд сходится только при $x = 0$, т. е. $R = 0$.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Здесь $a_n = \frac{1}{n}$ и $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Поэтому

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Следовательно, по теореме 9 данный ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x = \pm 1$. При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а при $x = -1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится в любой точке полуинтервала $[-1, 1)$ и расходится вне его.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ расходится на всей числовой прямой, кроме точки $x = 0$, так как

$$\text{его радиус сходимости } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0.$$

Разложение функций в степенные ряды. Как показывает следующая теорема, разложение функции в степенной ряд единственно.

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, то этот ряд имеет вид

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (2.8)$$

Ряд (2.8) называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая функция. Для нее можно составить ряд (2.8). Ранее было показано, что для любой бесконечно дифференцируемой функции справедлива формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x),$$

где остаточный член имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1. \quad (2.9)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 10. Для того, чтобы ряд Маклорена (2.8) сходилась на $(-R, R)$ и имел своей суммой функцию $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на $(-R, R)$ остаточный член $R_n(x)$ формулы Маклорена (2.9) стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R, R)$.

Из теоремы вытекает, что вопрос о разложении функции в ряд Маклорена сводится к исследованию поведения остаточного члена $R_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \\
 \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots
 \end{aligned}$$

В заключение отметим, что степенные ряды имеют разнообразные приложения. С их помощью с любой заданной точностью вычисляют значения функций (в частности, значения π и e); находят приближенные значения определенных интегралов, которые или не выражаются через элементарные функции, или сложны для вычислений. Так, например,

интеграл $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ не берется в элементарных функциях, поскольку первообразная

функции $\frac{\sin x}{x}$ не является элементарной. В то же время эта первообразная легко

выражается в виде степенного ряда. Действительно, так как $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, то,

умножая этот ряд на $\frac{1}{x}$, получаем $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$, причем последний ряд сходится при любом x . Интегрируя его почленно от 0 до a , имеем

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots$$

С помощью этого равенства можно при любом a с любой степенью точности вычислить данный интеграл.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1-10 для каждого ряда: 1) найти сумму n первых членов ряда (s_n) , 2) доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и 3) найти сумму ряда (s) .

$$\begin{array}{ll}
1. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots, & 2. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \dots, \\
3. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} + \dots, & 4. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)} + \dots, \\
5. \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+5)} + \dots, & 6. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \cdot (n+2)} + \dots,
\end{array}$$

Исследовать сходимость числовых рядов.

$$\begin{array}{lllll}
7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n+4}}, & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 2^n}, & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}, & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^n}, & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}, \\
12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n \cdot 2^n}}, & 13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n, & 14. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, & 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, & 16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{n/2}, \\
17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{\ln n}}, & 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!}, & 19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}, & 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4^n}, & 21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+n)}.
\end{array}$$

Выяснить какие из заданных рядов сходятся абсолютно, какие не абсолютно, какие расходятся.

$$\begin{array}{llll}
22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)^2}, & 23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}, & 24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}, & 25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n}}, \\
26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}, & 27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, & 28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}, & 29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.
\end{array}$$

Найти интервал сходимости степенного ряда.

$$\begin{array}{lllll}
30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} \sqrt{n}} x^n, & 31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n, & 32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-2} x^n, & 33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} x^n, & 34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n, \\
35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} x^n, & 36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^n, & 37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(2n-1) \cdot 3^n}} x^n, & 38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n}} x^n, \\
39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n, & 40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^n, & 41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)n} x^n, & 42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n, & 43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+3) \cdot 3^n} x^n.
\end{array}$$

Ответы

$$\begin{array}{ll}
1. s_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad s = 1. & 2. s_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \quad s = \frac{1}{2}. \\
3. s_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right), \quad s = \frac{1}{3}. & 4. s_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right), \quad s = \frac{11}{18}. \\
5. s_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right), &
\end{array}$$

$$s = \frac{23}{90}. \quad 6. \quad s_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right], \quad s = \frac{1}{4}. \quad 7. \text{ Расходится. } 8. \text{ Расходится. } 9. \text{ Расходится.}$$

10. Расходится. 11. Сходится. 12. Сходится. 13. Сходится. 14. Расходится. 15. Сходится.
 16. Сходится. 17. Расходится. 18. Сходится. 19. Сходится. 20. Сходится. 21. Сходится.
 22. Сходится абсолютно. 23. Сходится абсолютно. 24. Сходится условно. 25. Сходится условно.
 26. Расходится. 27. Сходится условно. 28. Сходится абсолютно. 29. Расходится.
 30. $[-3;3]$. 31. $[-1;1]$. 32. $(-1;1)$. 33. $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$. 34. $(-\infty; \infty)$. 35. $(-\infty; \infty)$. 36. $(-\infty; \infty)$. 37.
 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 38. $[-1;1]$. 39. $(-1;1)$. 40. $[-3;3]$. 41. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. 42. $(-\infty; \infty)$. 43. $(-3;3)$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Литература /2, гл.1, §4/

3.1. Правила сложения и умножения в комбинаторике

Комбинаторика - раздел дискретной математики, использующийся в теории вероятностей, математической логике, вычислительной технике, кибернетике и других науках. Центральной задачей комбинаторики является задача о размещении объектов по специальным правилам и нахождение числа способов, которыми это можно осуществить.

Часто удается разбить изучаемые комбинации элементов некоторого множества на несколько классов, причем каждая комбинация входит только в один класс. В этом случае число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах. Это утверждение называют правилом сложения.

Иными словами: если некоторый объект A можно выбрать m способами, объект B можно выбрать n способами, то выбор "либо A , либо B " можно осуществить $m+n$ способами.

Пример. Лекции по физике посещают 20 студентов, а лекции по математике - 30. Сколько студентов посещают лекции по физике или математике, если эти лекции происходят в одно и то же время.

Решение. В соответствии с правилом сложения, имеем $20+30=50$.

Иногда при составлении комбинаций из двух элементов известно число способов выбора первого m и второго n элементов, причем число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый. Тогда пару элементов можно выбрать $m \cdot n$ способами. Это правило называют правилом произведения.

Иными словами: если объект A можно выбрать m , способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A,B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Пример. Сколько 4-х значных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если: 1) ни одна из цифр не повторяется; 2) цифры могут повторяться.

Решение. 1) первая цифра числа может быть выбрана пятью способами из цифр 1, 2, 3, 4, 5. Вторая также пятью способами (одна цифра "ушла", но появилась цифра 0). Третья цифра - четырьмя способами, а четвертая - тремя.

Согласно правилу умножения число способов $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

2) первой цифрой может быть одна из 1, 2, 3, 4, 5 (5 возможностей). Для каждой из следующих цифр - 6 возможностей. Число искомых чисел равно $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

Пример. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было бы приложить друг к другу?

Решение. Выберем одну кость. Число способов выбора - 28. При этом в 7 случаях окажется дубль, то есть кость вида (i,i) , где $i=0, 1, \dots, 6$, а в 21 случае кость вида (i,j) , $i \neq j$, $i,j=0, 1, \dots, 6$.

В первом случае, если выбран дубль, вторая кость должна быть вида (i,n) , где i - фиксировано, а $n=0, 1, \dots, 6$, $n \neq i$. Следовательно, вторую кость можно выбрать шестью способами.

Во втором случае, если выбрана кость вида (i, j) , вторая кость должна быть вида (i,n) , $n \neq i$, или (k, j) , $k \neq j$, где $k,n=0,1,\dots,6$. Таким образом, n и k могут принимать по 6 значений.

В соответствии с правилом сложения, число способов выбора второй кости во втором случае $6+6=12$. По правилу произведения в первом случае число способов сопряжения двух выбранных костей $7 \cdot 6=42$, а во втором случае $21 \cdot 12=252$. По правилу сложения получаем $42+252=294$ способов выбора пары костей.

3.2. Перестановки

Пусть некоторое множество состоит из n различных элементов $a, b, c, \dots$. Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число - номер элемента, от 1 до n , так, что различным элементам соответствуют различные числа.

Всякое конечное множество можно упорядочить, если переписать все элементы в некоторый список $(a, b, c, \dots)$ и поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо самими элементами, либо их порядком.

Упорядоченные множества, отличающиеся лишь порядком элементов (то есть полученные из одного и того же множества) называются перестановками этого множества.

Число перестановок множества, состоящего из n элементов (то есть число способов, которыми может быть упорядочено это множество) равно

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n. \quad (3.1)$$

Если множество состоит из n элементов, в числе которых n_1 элементов первого типа, n_2 - второго, ..., n_k элементов k -го типа, то число различных перестановок определяется формулой

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, \quad n_1 + \dots + n_k = n. \quad (3.2)$$

Пример. Сколько перестановок можно составить из букв слова "Миссисипи"?

Решение. Всего букв 9. Буква "М" - одна, буквы "И" - четыре, буквы "С" - три, буква "П" - одна. Число перестановок в формуле (3.2) равно

$$P(4,3,1,1) = \frac{9!}{4!3!1!1!} = 2520.$$

3.3. Размещения

Пусть имеется множество, содержащее n различных элементов. Составим из элементов этого множества упорядоченные подмножества, содержащие $k < n$ элементов. Такие подмножества будут отличаться друг от друга хотя бы одним элементом или их порядком. Такие подмножества называются размещениями из n элементов по k без повторений.

Число упорядоченных k - элементных подмножеств (размещений) множества, состоящего из n элементов, равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1). \quad (3.3)$$

Пример. Студенту необходимо сдать 4 экзамена. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Искомое число способов равно числу 4-х элементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из 8 элементов, то есть $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ способов.

3.4. Сочетания

Пусть множество состоит из n различных элементов. Составим его подмножества из $k < n$ элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом (порядок расположения элементов в подмножествах безразличен). Такие подмножества называются сочетаниями из n элементов по k . Число всех таких подмножеств, то есть число сочетания из n по k , равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!} = C_n^{n-k}. \quad (3.4)$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать три из пяти различных карт?

Решение. Множество состоит из пяти элементов (различных карт). Количество всех возможных подмножеств, содержащих три элемента, и отличающихся только самими элементами, равно числу сочетаний

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Пусть имеется множество, содержащее элементы n различных типов. Подмножества этого множества, содержащие до k элементов и отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом (порядок элементов не принимается во внимание) называются сочетаниями из n по k с повторениями.

Число различных сочетаний с повторениями из n по k

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = P(k, n-1), \quad (3.5)$$

где $P(k, n-1)$ - число перестановок с повторениями из k элементов первого типа и $n-1$ элементов второго типа.

Пример. Сколькими способами можно выбрать 13 из 52 карт, различая их только по масти?

Решение. Имеется 4-е вида карт, различных по масти ($n=4$). Выбираем из них 13 карт. Считаем различными те наборы из 13 карт, которые отличаются друг от друга количеством карт какой-либо масти. По формуле (3.5) получим $\bar{C}_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13} = \frac{16!}{13!3!} = 560$.

Таких способов намного меньше, чем при различении карт и по масти, и по назначению.

4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1. Случайные события. Алгебра событий

Литература (I,гл.20.§§1.3,4; 4,гл.5.§2; 2,гл.2.§§1-3).

Теория вероятностей изучает модели экспериментов со случайными исходами. Всякий случайный эксперимент состоит в осуществлении вполне определенных условий и наблюдении результата. Рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять при неизменных условиях произвольное число раз по крайней мере теоретически.

Событие - это любой наблюдаемый результат опыта или наблюдения.

Случайные события - это такие события, которые при выполнении определенных условий могут произойти или не произойти.

Пусть A – событие, которое может произойти при выполнении определенного комплекса условий. Обозначим через $\bar{A}$ событие, состоящее в том, что при выполнении данных условий событие A не произойдет. Событие $\bar{A}$ называется событием, противоположным A .

Если A и B - события, которые могут произойти при выполнении определенных условий, то под суммой событий $A+B$ понимается событие, состоящее в том, что случилось хотя бы одно из событий A и B (то есть случилось либо A , либо B , либо и A и B).

Произведением событий AB называется событие, состоящее в том, что при выполнении данных условий случилось и A , и B .

Пример. Пусть событие A - случайное извлечение из колоды карт валета событие B - появление карты масти трэф. Событие $A+B$ случилось, если извлеченная карта оказалась одной из масти трэф или одним из валетов, в том числе и валетом трэф. Событие AB случается при извлечении трефового валета.

Выполняются следующие правила для сложения и умножения событий

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= A+(B+C) = A+B+C; & (AB)C &= A(BC) = ABC \\ (A+B)C &= AC+BC; & (AC)(BC) &= ABC. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Событие называется невозможным, если при выполнении данных условий оно не может произойти.

Событие называется достоверным, если при выполнении данных условий оно обязательно произойдет.

Пример. Событие $A\bar{A} = V$ - невозможное. Событие $A + \bar{A} = U$ - достоверное.

События A и B называются несовместимыми, если при выполнении данных условий появление события A делает невозможным появление события B , то есть $AB=V$.

События A и B называются совместимыми, если появление события A не исключает появления события B .

Система событий $A_1, \dots, A_n$ называется полной группой событий, если при выполнении определенных условий хотя бы одно из событий этой системы обязательно произойдет, то есть $A_1 + \dots + A_n = U$.

4.2. Классическое определение вероятности. Относительная частота события.

Статистическая вероятность.

Литература: /I, гл.20. §§1,2,4. гл. 5, §§1,2, гл.1, §§1-3, 6.7/.

Классическое определение вероятности события, данное в начале 19 века П.Лапласом, сводит это понятие к более элементарному понятию равновозможных событий, которое предполагается интуитивно ясным.

Пусть событие A представляет собой реализацию одного из m равновозможных случаев, входящих в состав полной группы n равновозможных, попарно несовместимых событий, то есть

$$A = B_1 + B_2 + \dots + B_m, \quad U = B_1 + B_2 + \dots + B_m + \dots + B_n.$$

События $B_1, B_2, \dots, B_m$ называют благоприятными для события A , так как появление одного из них обеспечивает появление события A . Тогда вероятность события A равна отношению числа благоприятных случаев к общему числу равновозможных случаев

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (4.2)$$

Согласно этому определению вероятности события, имеем

$$P(B_1) = P(B_2) = \dots = P(B_n) = \frac{1}{n}.$$

Из определения вытекает: наибольшую вероятность имеет достоверное событие, т.к. $P(U) = 1$, наименьшую - невозможное событие, т.к. $P(V) = 0$. Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую наудачу взятую кость можно приставить к первой.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выбранную вторую кость домино можно приставить к первой. Введем элементарные события – случаи. Обозначим через (i, j) - событие, состоящее в том, что выбрана кость домино, на одном поле которой i очков, а на другом j очков, где $0 \leq i, j \leq 6$. Эти случаи равновозможны, так как ни у одной из костей домино нет предпочтения перед другими быть выбранной. Число таких равновозможных исходов равно 27, так как из 28 костей уже выбрана одна кость (a, b) , $a \neq b$. Выбранную вторую кость можно приставить к первой, если произойдут события вида (a, k) или (b, n) , где $0 < k, n < 6$, $k \neq a$, $n \neq b$. Таким образом, событие A можно представить в виде суммы равновозможных несовместимых исходов

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq a}}^6 (a, k) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq b}}^6 (b, n).$$

Число членов и в первой, и во второй суммах равно 6. Следовательно, число благоприятных для A событий равно $6+6=12$. По классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}.$$

Пример. Десять человек случайным образом садятся за круглый стол. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

Решение. Общее число возможных случаев равно числу перестановок из 10 человек, то есть $10!$. Два выбранных лица могут сесть рядом 20 способами - один из них может выбрать место 10 способами, а второй может сесть слева или справа от первого. Оставшиеся 8 мест могут быть распределены среди оставшихся лиц числом способов, равным $8!$. Поэтому число благоприятствующих случаев равно $20 \cdot 8!$. Вероятность интересующего события

$$P = \frac{m}{n} = \frac{20 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{9}.$$

Пример. В урне 4 белых и 8 черных шаров. Вынуто 3 шара. Найти вероятность того, что 1) два из них черных; 2) хотя бы один из них белый.

Решение. 1) Пусть событие A состоит в том, что из 3-х случайно вынутых шаров два черных. Общее число всех возможных исходов равно $n = C_{12}^3$. Число способов вынуть два черных и один белый шар равно $m = m_1 m_2$, где $m_1 = C_8^2$ - число способов вынуть два черных из восьми имеющихся, $m_2 = 3$ - число способов взять один белый из имеющихся трех шаров. По определению вероятности

$$P = \frac{m_1 m_2}{n} = \frac{C_8^2 \cdot 3}{C_{12}^3} = \frac{21}{55}.$$

2) Пусть B – событие состоящее в том, что из 3-х шаров хотя бы один белый. Тогда $\bar{B}$ - состоит в том, что все шары черные. Общее число возможных случаев $n = C_{12}^3$. Число благоприятствующих $\bar{B}$ случаев $m = C_8^3$. Тогда

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{41}{55}.$$

Другой способ оценки вероятности случайного события – оценка при помощи опыта. Пусть комплекс условий, при реализации которого может происходить рассматриваемое событие может быть многократно воспроизведен. В этом случае говорят, что производятся испытания. Если при выполнении N испытаний событие A случилось M раз, то говорят, что относительная частота события A в этой серии испытаний равна

$$W(A) = \frac{M}{N}. \quad (4.3)$$

Числом M называется частотой появления этого события.

Пусть в первой серии испытаний относительная частота события A равна $W_1 = \frac{M_1}{N_1}$, во второй $W_2 = \frac{M_2}{N_2}$ и так далее. Опыт показывает, что если число испытаний в каждой серии достаточно велико, то относительные частоты события A мало отличаются друг от друга.

Статистической вероятностью события называется величина, около которой группируются относительные частоты этого события.

Пример. В 1943 году число рождений мальчиков, девочек и общее число рождений в США соответственно были: 1506959; 1427901; 2934860.

Относительная частота рождения мальчиков $\frac{1506959}{2934860} = 0,5135$, а относительная частота рождения девочек $\frac{1427901}{2934860} = 0,4865$.

4.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Литература: /1, гл.20, §§ 3,4; 4, гл.5, §2; гл.2, §§ 1-3, гл.3, §§ 1-5. гл. 4, §1/.

Вероятность события, состоящего в том, что осуществляется событие A или несовместимое с ним событие B (то есть одно из двух событий, безразлично какое) равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (4.4)$$

Справедливо и обратное утверждение: если справедливо это равенство, то события A и B несовместимы.

Теорема сложения для любого числа n несовместимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеет вид

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k). \quad (4.5)$$

Вероятность события, состоящего в том, что осуществляется хотя бы одно из двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (4.6)$$

Формула обобщается на любое конечное число совместимых событий. Для трех совместимых событий формула имеет вид

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \quad (4.7)$$

Вероятность совместного появления двух событий A и B равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило

$$P(AB) = P(A)P(B/A), \quad (4.8)$$

где $P(B/A)$ - условная вероятность события B , то есть вероятность события B при условии, что событие A произошло.

Для независимых событий A и B теорема умножения принимает следующий вид: вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (4.9)$$

Теорема умножения для трех зависимых событий A, B, C принимает вид

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB), \quad (4.10)$$

что следует из формулы (4.8).

В случае трех независимых в совокупности событий теорема умножения (4.9) принимает вид

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \quad (4.11)$$

Пример. В урне 6 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение. Событие A - появились шары разных цветов, может произойти в двух случаях: появился белый и черный шар - событие B и появился черный и белый шар - событие C . В соответствии с определением суммы событий в п. 3.1, имеем $A = B + C$, причем события B и C - несовместны. По теореме сложения вероятностей (4.4), имеем:

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Событие B можно записать как произведение двух событий $B_1 \cdot B_2$, где B_1 - первым вынут белый шар, B_2 - вторым вынут черный шар. Событие C - как произведение $C_1 \cdot C_2$, где C_1 - первым вынут черный шар, C_2 - вторым вынут белый шар. События B_1 и B_2 , C_1 и C_2 - зависимы. В соответствии с теоремой вероятностей в форме (4.8), имеем

$$P(B) = P(B_1)P(B_2/B_1); \quad P(C) = P(C_1)P(C_2/C_1).$$

Вычислим вероятности событий B_1 , B_2/B_1 и C_1 , C_2/C_1 . Всего шаров в урне 11, из которых 6 – белых. Следовательно, $P(B_1) = \frac{6}{11}$. После извлечения белого шара в урне

осталось 10 шаров, из которых 5 черных. Следовательно $P(B_2/B_1) = \frac{5}{10}$. Аналогично:

$P(C_1) = \frac{5}{11}$, $P(C_2/C_1) = \frac{6}{10}$. Имеем:

$$P(A) = P(B_1)P(B_2/B_1) + P(C_1)P(C_2/C_1) = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{11}.$$

Пример. Ведется стрельба по самолету, уязвимыми местами которого является два двигателя и кабина пилота. Для того, чтобы поразить самолет, достаточно поразить оба двигателя или кабину пилота. При данных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя $p_1 = 0,4$, второго двигателя $p_2 = 0,2$, кабины пилота $p_3 = 0,3$. Уязвимые места самолета поражаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

Решение. Событие A - поражение самолета - есть сумма двух совместных событий: B - поражение обоих двигателей, C - поражение кабины. По теореме сложения (4.6) имеем

$$P(A) = P(B) + P(C) - P(BC) = P(B) + P(C) - P(B)P(C),$$

так как события B и C являются независимыми по условию. В свою очередь, событие B является произведением независимых событий B_1 - поражение первого двигателя и B_2 - поражение второго двигателя. По теореме (3.9) имеем

$$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2) = p_1 \cdot p_2 = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08.$$

Таким образом, $P(A) = p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3 = 0,356$.

4.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Литература: /1, гл. 20, §§ 5, 6; 2, гл.4. §§ 2,3/.

Вероятность появления события A , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$ образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n), \quad (4.12)$$

где $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$.

Равенство (4.12) называют формулой полной вероятности.

Если известно, что событие A произошло и оно может наступить лишь при условии появления несовместных событий, образующих полную группу (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса

$$P(A/H_k) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \quad (4.13)$$

где $P(A)$ - полная вероятность события A .

Пример. Среди наблюдаемых спиральных галактик 23 % принадлежат подтипу 1, 31% - подтипу 2 и 46% - подтипу 3. Вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в галактике 1-го подтипа составляет 0,002, в галактике 2-го подтипа - 0,0035 и в галактике 3-го подтипа - 0,0055. Найти вероятность вспышки в течение года сверхновой в далекой спиральной галактике, подтип которой определить не удалось.

Решение. Введем события (гипотезы) H_n - данная галактика принадлежит к подтипу n ($n=1,2,3$). Согласно опытным данным о доле каждого подтипа спиральных галактик среди всех наблюдаемых галактик, имеем

$$P(H_1) = 0,23; \quad P(H_2) = 0,31; \quad P(H_3) = 0,46.$$

Условные вероятности событий A/H_n , - вспышка сверхновой звезды в галактике подтипа n , согласно данным задачи, равны

$$P(A/H_1) = 0,002; \quad P(A/H_2) = 0,0035; \quad P(A/H_3) = 0,0055.$$

По формуле полной вероятности (4.12) имеем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = 0,0041.$$

Пример. В соответствии с условиями предыдущей задачи выяснилось, что в течение года наблюдений далекой спиральной галактики в ней обнаружена вспышка одной сверхновой звезды. Найти вероятность того, что галактика принадлежит к подтипу 3.

Решение. Известно, что событие A - вспыхнула сверхновая звезда в спиральной галактике, произошло. События H_1, H_2, H_3 такие же, как в предыдущем примере. Вероятность события H_3/A - галактика принадлежит к подтипу 3, при условии, что за время наблюдения в ней вспыхнула сверхновая, найдем по формуле Байеса (4.13)

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0,46 \cdot 0,0055}{0,0041} = 0,62.$$

4.5. Вероятностная модель Бернулли. Формула Бернулли.

Литература: /1, гл.20, §8; 2, гл.5, §1/.

Повторные независимые испытания называются испытаниями Бернулли, если каждое испытание имеет только два возможных исхода и вероятности исходов остаются неизменными для всех испытаний.

Обычно эти вероятности обозначают через p и q , причем $p + q = 1$. Простейшим примером испытаний Бернулли является бросание монеты даже неправильной!). Для правильной монеты $p = q = 0,5$. Повторные случайные извлечения из урны с одним и тем же набором шаров также представляют собой испытания Бернулли. Вероятность $P_n(m)$ того, что n испытаний Бернулли приведут m раз к успеху (событие наступит ровно m раз безразлично в какой последовательности) равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-q)^{n-m}, \quad (4.14)$$

где p и $q=1-p$ соответственно вероятности "успеха" - наступления события A , и "неуспеха" - не наступления события A , в каждом испытании. Вероятности $P_n(m)$ называют биномиальными вероятностями. Формула (4.14) называется формулой Бернулли и была опубликована в 1713 году.

Пример. Расход электроэнергии на протяжении суток не превышает установленной нормы с вероятностью $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход энергии не будет превышать нормы в течение 4 суток.

Решение. Расход электроэнергии в течение суток считаем испытанием. "успех" в этом испытании - отсутствие перерасхода энергии $P(Y) = p = 0,75$; $P(H) = q = 0,25$, где H - "неуспех" - перерасход энергии. По формуле (3.14) имеем

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = 15 \cdot \frac{3^4}{4^6} \approx 0,3.$$

Пример. Прибор имеет 6 ламп, вероятность каждой из которых перегореть при повышении напряжения равна 0,3. При перегорании 3-х ламп или менее прибор работает. При сгорании 4-х ламп вероятность выхода прибора из строя равна 0,3 при сгорании 5-ти ламп - 0,7, при сгорании 6-ти ламп - 1. Определить вероятность выхода прибора из строя при повышении напряжения.

Решение. Событие A состоит в том, что прибор вышел из строя при повышении напряжения. Введем события $B_k, (k=4,5,6)$ - сгорели k ламп. Тогда событие A можно представить в виде

$$A = B_4 A + B_5 A + B_6 A,$$

где события $B_k A$ состоят в том, что прибор вышел из строя при сгорании k ламп. Причем события B_k и A зависимые, а события $B_k A$ при разных k несовместны.

Используя теорему сложения вероятностей (4.5) и теорему умножения (4.8), получим

$$P(A) = P(B_4)P(A/B_4) + P(B_5)P(A/B_5) + P(B_6)P(A/B_6).$$

Условные вероятности $P(A/B_k)$ заданы в задаче и равны 0,3 при $k=4$, 0,7 при $k=5$ и 1 при $k=6$. Вероятности $P(B_k)$ найдем по формуле Бернулли (4.14)

$$P(B_4) = P_6(4) = \frac{6!}{4!2!} (0,3)^4 (0,7)^2 \approx 0,0595; \quad P(B_5) = P_6(5) = \frac{6!}{5!1!} (0,3)^5 0,7 \approx 0,0102;$$

$$P(B_6) = P_6(6) = \frac{6!}{6!} (0,3)^6 (0,7)^0 \approx 0,0007.$$

Подставив числовые данные в формулу для $P(A)$, получим

$$P(A) \approx 0,3 \cdot 0,0595 + 0,7 \cdot 0,0102 + 1 \cdot 0,0007 \approx 0,0257.$$

4.6. Формула Пуассона – приближение для формулы Бернулли

Литература: /2, гл. 6, §§ 5, 6; 4, гл. 5, § 9/.

Во многих приложениях формула Бернулли число испытаний n относительно велико и p относительно мало, но $\lambda = np$ не мало, и не велико. В таких случаях удобно использовать для формулы Бернулли (4.14) предложенное Пуассоном приближение, опубликованное в 1837 году. Итак: - если число испытаний n велико, а вероятность появления события p в каждом испытании мала, то вероятность появления события m раз в n независимых испытаниях определяется приближенной формулой Пуассона

$$P(m, \lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \text{где} \quad \left(\sum_{m=0}^{\infty} P(m, \lambda) \right) = 1. \quad (4.15)$$

Здесь $\lambda = np$ - среднее число появления события в n испытаниях.

Пример. Какова вероятность того, что среди 500 человек m человек родились 1-го января?

Решение. Если эти лица выбраны случайно, то можно применить формулу Бернулли (4.14) для $n=500$ испытаний с вероятностью успеха $p = \frac{3}{365}$ или пуассоновское приближение (4.15) для $\lambda = np = 1,3699$.

В таблице для сравнения приведены вероятности, вычисленные по формуле Бернулли и их пуассоновские приближения

m	0	1	2	4
Биномиальные вероятности	0,2537	0,3484	0,2388	0,0372
Пуассоновские вероятности	0,2541	0,3481	0,2385	0,0373

Опыт показывает, что в числе яиц, откладываемых домашними птицами за час, числа рождений в в день в родильном доме, доля булочек, содержащих m изюминок приближенно описываются формулой Пуассона.

Эта формула описывает и распределение результатов в эксперименте, когда задается счет событий, происходящих случайно, но в определенном среднем темпе.

Пример. В течении часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что за 30 сек. отсутствия телефонистки не будет ни одного вызова.

Решение. По условию в среднем в 1 мин. случается 1 вызов. Следовательно, за 30 сек. – 0,5 вызова, то есть $\lambda = \frac{60}{60 \cdot 2} = 0,5$. Поэтому,

$$P(0; 0,5) = e^{-0,5} \approx \sqrt{0,368} \approx 0,61.$$

4.7. Случайные величины и законы распределения

Литература /1, гл. 20, §§ 7, 8; 4 гл. 5, § 5/.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестное заранее, какое именно.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, принимающая отдельные друг от друга значения, которые можно перенумеровать.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины X закон распределения часто задается в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i , а вторая – вероятности p_i :

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1		$\dots$	p_n

При этом $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Пример. Производится испытание 3 изделий при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытания равны 0,7 и не зависимы. Написать ряд распределения числа изделий не выдержавших испытания.

Решение. Дискретная случайная величина X (число изделий, не выдержавших испытания) имеет следующие возможные значения:

$x_1=0$ (все изделия выдержали испытания), $x_2=1$ (одно изделие не выдержало испытания), $x_3=2$ (два изделия не выдержали испытания), $x_4=3$ (три изделия не выдержали испытания). $p=1-0,7=0,3$ - вероятность изделия не пройти испытание. Вероятности не пройти испытание для каждого изделия равны между собой и независимы, поэтому применима формула Бернулли.

Учитывая, что $n=3$, $p=0,3$, получим:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^3 = 0,343; \quad P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,3 \cdot 0,7^2 = 0,441;$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7 = 0,189; \quad P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^0 = 0,027.$$

Контроль: $0,343+0,441+0,189+0,027=1$.

Напишем искомый закон распределения X :

X	0	1	2	3
p	0,343	0,441	0,189	0,027

4.8. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Литература: /1, гл. 20, §§ 9, 10; 2, гл. 7, §§ 1-4, гл. 8, §§ 1-5; 4, гл. 5, § 6/.

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат дисперсия и среднеквадратичное отклонение.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (4.16)$$

Среднеквадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4.17)$$

Пример. В результате испытаний двух приборов (A и B) установлена вероятность появления помех, оцениваемых по трехбалльной системе (табл. 1). В случае отсутствия помех их уровень принимается равным нулю.

Таблица 1

Уровень помех		1	2	3
Вероятность появления помех данного уровня	Прибор A	0,20	0,06	0,04
	Прибор B	0,06	0,04	0,10

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если лучшим является тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

Решение. Обозначим через X случайный уровень помех. Средний уровень помех для прибора A :

$$M_A(X) = 0,20 \cdot 1 + 0,06 \cdot 2 + 0,04 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Для прибора B :

$$M_B(X) = 0,06 \cdot 1 + 0,04 \cdot 2 + 0,10 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

По среднему баллу оба прибора равноценны. В качестве дополнительного критерия сравнения используем среднеквадратичное отклонение уровня помех:

$$\sigma_A = \sqrt{D_A(X)} = \sqrt{M_A(X^2) - [M_A(X)]^2} = \sqrt{0,80 - 0,44^2} \approx 0,78 \text{ балла.}$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B(X)} = \sqrt{M_B(X^2) - [M_B(X)]^2} = \sqrt{1,12 - 0,44^2} \approx 0,96 \text{ балла.}$$

Таким образом, прибор A дает более устойчивые показания относительно средних, следовательно, он лучше прибора B .

4.9. Функция распределения вероятностей случайной величины

Литература: /2, гл.10 §§1-3; 4, гл.5, §5/.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, выражающую вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем x : $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$, если $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2. Функция распределения есть неубывающая функция: $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Свойство 3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b) , то $F(x)=0$ при $x \leq a$; $F(x)=1$ при $x \geq b$.

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a,b) выражается формулой

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

4.10. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Литература: /1, гл.20, §§12,13; 2, гл.11, §§1-5; 4, гл.5 §5/.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называется производная функции распределения

$$f(x) = F'(x). \quad (4.18)$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Плотность распределения неотрицательна $f(x) \geq 0$.

Свойство 2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Если все возможные значения случайной величины

принадлежат интервалу (a, b) , то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \quad (4.19)$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , выражается формулой

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (4.20)$$

Пример. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$ ($t \geq 0$). Найти плотность вероятности $f(t)$; вероятность безотказной работы радиоаппаратуры в течение времени T .

Решение. Найдем плотность вероятности $f(t) = F'(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$. Для вычисления вероятности безотказной работы радиоаппаратуры в течение времени T воспользуемся формулой (4.20)

$$P = \int_0^T f(t)dt = \int_0^T \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \cdot (-T) e^{-\frac{t}{T}} \Big|_0^T = 1 - e^{-1}.$$

4.11. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Литература: /1, гл.20, §14; 2, гл.12, §1; 4, гл.5, §6/.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат всей оси OX , определяется равенством $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, где $f(x)$ - плотность распределения.

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b) , то

$$M(x) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат всей оси OX , определяется равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2 f(x)dx.$$

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b) , то

$$D(X) = \int_a^b [x - M(x)]^2 f(x) dx$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{если } x < 0; \\ \lambda(4x - x^3) & , \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ 0 & , \text{если } x > 2. \end{cases}$$

При каком значении λ функция $f(x)$ может быть принята за плотность вероятности случайной величины X ? Определить это значение λ , найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответствующей случайной величины X .

Решение. Для определения значения λ , воспользуемся свойством 2 функции плотности

$$\int_0^2 \lambda(4x - x^3) dx = 1. \quad \lambda \int_0^2 (4x - x^3) dx = \lambda \left[4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 \right] = 4\lambda; \quad 4\lambda = 1; \quad \lambda = \frac{1}{4}.$$

Найдем математическое ожидание

$$M(x) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x(4x - x^3) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left[4 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 \right] = \frac{16}{15}.$$

Найдем дисперсию

$$D(X) = \int_a^b [x - M(x)]^2 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \left(x - \frac{16}{15} \right)^2 \cdot (4x - x^3) dx = \frac{44}{225}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Бросается две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 3; б) произведение числа очков не превосходит 3; в) произведение числа очков делится на 3.

2. Имеются изделия 4-х сортов, причем число изделий 1-го сорта $n_1 = 1$; 2-го сорта $n_2 = 2$; 3-го сорта $n_3 = 3$; 4-го сорта $n_4 = 1$. Наудачу для контроля берется 7 изделий. Определить вероятность того, что среди них $m_1 = 1$ изделие первосортное; $m_2 = 1$, $m_3 = 2$, $m_4 = 3$ второго, третьего и четвертого сортов соответственно.

3. Среди 10 лотерейных билетов 6 выигрышных. Наудачу взяли 4 билета. Определить вероятность того, что среди них 2 выигрышных.

4. Подойдя к подъезду дома, жилец обнаружил, что забыл трехзначный код, открывающий дверь. Он вспомнил. Что первая цифра кода – или 3, или 8, а последняя – точно не ноль. Какова вероятность того, что он угадает код с первого раза?

5. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных “в одну линию” кубиков можно прочесть слово “спорт”.

6. В лифт 6-этажного дома сели 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, двое сошли на одном этаже.

7. Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответы только на два вопроса из трех его экзаменационного билета.

8. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дуплем; б) не есть дупль.

9. По цели проведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

10. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

11. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго 0,8, для третьего - 0,9. Найти вероятность того, что: а) в цель попадут все стрелки; б) в цель попадет хотя бы один стрелок.

12. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, а из второго – 0,91. Найти вероятность поражения цели.

13. По танку производится два одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом равна 0,6; при втором – 0,8. Для вывода танка из строя заведомо достаточно двух попаданий. При одном попадании танк выходит из строя с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что в результате двух выстрелов танк будет выведен из строя.

14. По самолёту производится три одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,5, при третьем – 0,7. Для выхода самолёта из строя заведомо достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6.

Найти вероятность того, что в результате трёх выстрелов самолёт будет выведен из строя.

15. Рабочий обслуживает два станка. Вероятность того, что в течение смены станок не потребует ремонта, для 1-го станка равна 0,9; для 2-го – 0,8. Найти вероятность того, что только один станок потребует ремонта в течение смены.

16. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: 40 с первого завода, 35 со второго, 25 с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0,9, на втором 0,7, на третьем – 0,9. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

17. Имеются две урны: в первой – 3 белых и 2 черных шара; во второй – 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

18. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

19. На двух станках производятся одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго. Первый станок дает в среднем 80% деталей отличного качества, а второй – 90%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

20. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,5 и 0,4.

21. Монета подбрасывается 5 раз. Какова вероятность того, что герб появится не менее двух раз?

22. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; с) не более 74 раз.

23. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

24. Найдите математическое ожидание случайной величины X , зная закон ее распределения:

X	2	3	5
p	0,3	0,1	0,6

25. Два стрелка производят выстрелы по мишени, делая по два выстрела каждый. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Построить ряд распределения случайной величины X – общего числа попаданий в мишень. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

26. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{3}{32}(4x - x^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ; в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

27. Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X . Требуется:

1) определить коэффициент A ; 2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) найти математическое ожидание и дисперсию X ; 3) вычислить $P\left(X > \frac{\pi}{4}\right)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\pi/2; \\ A \cos^2 x & \text{при } -\pi/2 \leq x < \pi/2; \\ 0 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов - М.: Наука, 1978. Т.2. 575 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман М.: Высшая школа, 1979. 400 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман – М.: Наука, 1977. 383 с.
4. Штеренгас С.С. Задачи по теории вероятностей / С.С. Штеренгас, К.Д.Соков - Воронеж: Изд-во ВГУ. 1972. 80 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова - М.: Высшая школа. 1986. Ч. 2.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты / Л.А. Кузнецов. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. 240 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Кратные и криволинейные интегралы	3
1.1. Двойные интегралы.	3
1.2. Криволинейные интегралы	7
1.3. Формула Грина	10
Задачи для самостоятельного решения	11
2. Ряды	14
2.1. Ряды с неотрицательными членами.	14
2.2. Знакопередающиеся ряды.	18
2.3. Степенные ряды	20
Задачи для самостоятельного решения	22
3. Элементы комбинаторики	24
3.1. Правила сложения и умножения в комбинаторике	24
3.2. Перестановки	25
3.3. Размещения	25
3.4. Сочетания	26
4. Теория вероятностей.	26
4.1. Случайные события. Алгебра событий.	26
4.2. Классическое определение вероятности. Относительная частота события. Статистическая вероятность.	27
4.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей	29
4.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса	31
4.5. Вероятностная модель Бернулли. Формула Бернулли	32
4.6. Формула Пуассона – приближение для формулы Бернулли	33
4.7. Случайные величины и законы распределения	33
4.8. Числовые характеристики дискретных случайных величин.	34
4.9. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины	35
4.10. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины.	35
4.11. Числовые характеристики непрерывных случайных величин	36
Задачи для самостоятельного решения	37
Библиографический список	39

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
в третьем семестре для студентов
направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело»
(профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта
и хранения нефти, газа и продуктов переработки»)
очно-заочной формы обучения

Составители:

Бырдин Аркадий Петрович
Сидоренко Александр Алексеевич

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 09.06.2022.
Уч.-изд. л. 2,2.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84