

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»

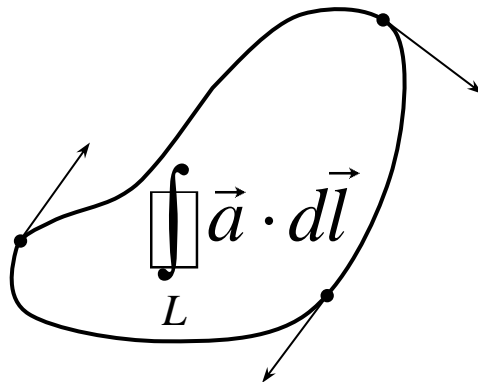
Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

514-2008

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для самостоятельной работы по курсу «Математика»
для студентов специальности 150702 «Физика металлов»
направления 150700 «Физическое материаловедение»
и направления 140400 «Техническая физика»
очной формы обучения



Воронеж 2008

Составители: канд. техн. наук С.А. Кострюков,
канд. техн. наук В.В. Пешков,
канд. физ.-мат. наук Г.Е. Шунин

УДК 517

Векторный анализ и элементы теории поля: методические указания для самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальности 150702 «Физика металлов» направления 150700 «Физическое материаловедение» и направления 140400 «Техническая физика» очной формы обучения / ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: С.А. Кострюков, В.В. Пешков, Г.Е. Шунин. Воронеж, 2008. 59 с.

Настоящие методические указания предназначены в качестве руководства для практических занятий и самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов 1 курса физико-технических специальностей. Приведены темы практических занятий, основные теоретические сведения, большое количество задач и примеры их решения.

Ил. 4. Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой
д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет», 2008

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА

Векторные функции. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля. Производная по направлению и градиент. Векторное поле. Векторные линии. Тензорное поле.

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го родов, их вычисление. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля. Формула Грина.

Ориентированные и неориентированные поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго родов. Поток векторного поля через ориентированную поверхность.

Дивергенция векторного поля и ее вычисление в декартовых координатах. Физический смысл дивергенции. Теорема Остроградского–Гаусса. Ротор векторного поля и его вычисление в декартовых координатах. Теорема Стокса.

Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции 2-го порядка.

Специальные виды векторных полей: Потенциальное векторное поле, его свойства. Способы определения потенциала. Соленоидальное поле и его свойства. Лапласово (гармоническое) поле.

Основные физико-математические модели: Уравнения Ньютона и закон сохранения энергии. Уравнения движения сплошной среды, неразрывности идеальной жидкости и теплопроводности.

ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Вычисление производных по направлению и градиентов скалярного поля.
2. Вычисление криволинейных интегралов.
3. Вычисление поверхностных интегралов.
4. Нахождение дивергенции векторного поля и применение формулы Остроградского–Гаусса.
5. Нахождение ротора векторного поля и применение формулы Стокса.
6. Применение оператора Гамильтона и дифференциальные операции второго порядка.
7. Дифференциальные операции первого и второго порядков в криволинейных координатах.
8. Специальные типы векторных полей

ТЕМЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ

1. Дифференциальные характеристики кривых. Касательная к пространственной кривой и нормальная плоскость. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
2. Дифференциальные операции первого и второго порядков в криволинейных координатах. Основная теорема векторного анализа.

1. СКАЛЯРНЫЕ, ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Основные определения. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей. Пусть D – область в пространстве двух, трех или n измерений. Говорят, что в области D задано скалярное поле, если в D задана скалярная функция точки $u(P) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(\mathbf{r})$, называемая функцией поля (\mathbf{r} – радиус-вектор точки $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$). Если каждой точке $P \in D$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, то говорят, что в области D задано векторное поле, определяемое векторной функцией $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{a}(\mathbf{r})$. Тензорным полем m -го ранга $\hat{T}(P) = T_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_n)$ называется совокупность n^m скалярных функций, образующих в любой точке $P \in D$ тензор m -го ранга. Индексы i_1, \dots, i_m принимают значения от 1 до n . Скалярное и векторное поля являются частными случаями тензорных полей нулевого и первого ранга.

Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются линии уровня $u(x, y) = C$ в пространстве двух измерений, поверхности уровня, или эквипотенциальные поверхности, $u(x, y, z) = C$ в пространстве трех измерений и гиперповерхности уровня $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ в пространстве $n > 3$ измерений. Простейшими геометрическими характеристиками векторных полей являются векторные линии и векторные трубки. Векторной линией называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии для векторного поля $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

(аналогично для плоских и многомерных полей). Векторной трубкой называется поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не совпадающей (даже частично) с какой-либо векторной линией.

Определить вид линий или поверхностей (гиперповерхностей) уровня следующих скалярных полей:

1. $u = y^2 + x$. 2. $u = xy$. 3. $u = y/x$. 4. $u = x + y + z$. 5. $u = x^2 + y^2 - z^2$.
6. $u = x^2 + y^2 - z$. 7. $u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. 8. $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Найти векторные линии следующих полей:

9. $\mathbf{a} = yi - xj$. 10. $\mathbf{a} = xi - yj$. 11. $\mathbf{a} = yi + j$. 12. $\mathbf{a} = \mathbf{r} = xi + yj + zk$.
 13. $\mathbf{u} = [\mathbf{r}, \mathbf{c}]$ (\mathbf{c} —постоянный вектор).

◀ Пусть $\mathbf{c} = ai + bj + ck$. Тогда

$$\mathbf{a} = [\mathbf{r}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (cy - bz)\mathbf{i} + (az - cx)\mathbf{j} + (bx - ay)\mathbf{k}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий поля \mathbf{a} имеют вид:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}.$$

Умножая числитель и знаменатель первой дроби на x , второй – на y и третьей на z , находим

$$\frac{xdx}{cxy - bxz} = \frac{ydy}{ayz - cxy} = \frac{zdz}{bxz - ayz}.$$

Складывая почленно и используя свойство пропорции, окончательно выводим:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Следовательно, $xdx + ydy + zdz = 0$, или $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

Отсюда получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$.

Аналогично, умножая числитель и знаменатель первой дроби на a , второй на b , третьей на c и складывая почленно, находим

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{adx + bdy + cdz}{0}$$

Следовательно, $adx + bdy + cdz = 0$, или $ax + by + cz = C_2$.

Таким образом, уравнения векторных линий имеют вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2, & (C_1 \geq 0), \\ ax + by + cz = C_2. \end{cases}$$

Векторные линии поля \mathbf{a} представляют собой окружности, являющиеся сечениями сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ плоскостями $ax + by + cz = C_2$, перпендикулярными вектору \mathbf{c} . ▶

$$14. \mathbf{a} = \frac{\mathbf{i}}{x} + \frac{\mathbf{j}}{y} + \frac{\mathbf{k}}{z}.$$

$$15. \mathbf{a} = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}.$$

$$16. \mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_4\mathbf{e}_4.$$

17. Найти векторную линию поля $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + b\mathbf{k}$, проходящую через точку $P(1, 0, 0)$.

18. Найти векторную линию поля $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, проходящую через точку $P(1/2, -1/2, 1)$.

19. Определить вид векторных трубок:

а) в задаче 12; б) в задаче 15.

Производная по направлению и градиент скалярного поля.

Дифференцирование тензорного поля. Пусть $s = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$ – единичный вектор данного направления s , $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ – радиус-вектор точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Производная скалярного поля $u(P)$ в точке P_0 по направлению s , обозначаемая через $\frac{\partial u}{\partial s}$, определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{r}_0 + \tau s) - u(\mathbf{r}_0)}{\tau}$$

и характеризует скорость изменения функции $u(P)$ в направлении s .

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ вычисляется по формуле

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \cos \gamma. \quad (1)$$

Градиентом скалярного поля $u(P)$, обозначаемым символом $\text{grad } u$, называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные функции $u(P)$, т. е.

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2)$$

Аналогично определяется производная по направлению и градиент для n -мерных скалярных полей.

Теорема. Если $T_{i_1 \dots i_m}(\mathbf{r})$ – тензорное поле m -го ранга, то его частная производная $\frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \dots i_m}(\mathbf{r})$ есть тензорное поле $(m+1)$ -го ранга $T_{i_1 \dots i_m, i}(\mathbf{r})$.

Следствие. Если $u(\mathbf{r})$ – скалярное поле, то $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ – компоненты вектора ($i = 1, \dots, n$), являющегося градиентом скалярного поля ($\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv [\text{grad } u]_i$).

Исходя из выражения производной по направлению (1) и определения градиента (2), доказать следующие свойства градиента:

20. Производная поля по направлению s равна скалярному произведению градиента поля на единичный вектор данного направления, т.е. равна проекции градиента на данное направление

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\text{grad } u, s) = |\text{grad } u| \cos \varphi,$$

где φ – угол между градиентом и вектором s .

21. Направление градиента есть направление наибоыстрейшего возрастания функции поля.

22. В каждой точке поля градиент направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня в сторону возрастания потенциала поля, т.е.

$$|\text{grad } u| = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

где n – направление нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции поля.

23. Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ – дифференцируемые функции, c – постоянная. Доказать следующие соотношения:

- а) $\text{grad } (u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$;
- б) $\text{grad } (c + u) = \text{grad } u$;

- в) $\text{grad}(cu) = c \text{grad} u$;
 г) $\text{grad}(uv) = v \text{grad} u + u \text{grad} v$;
 д) $\text{grad}(u^n) = nu^{n-1} \text{grad} u$;
 е) $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{grad} u - u \text{grad} v}{v^2}, \quad v \neq 0.$

Найти градиенты следующих скалярных полей:

24. $u = |\mathbf{r}|$. **25.** $u = \ln|\mathbf{r}|$. **26.** $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$; \mathbf{a} – постоянный вектор.

27. $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{b}, \mathbf{r})$; \mathbf{a}, \mathbf{b} – постоянные векторы.

28. $u = |[\mathbf{a}, \mathbf{r}]|^2$; \mathbf{a} – постоянный вектор.

Пусть $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Показать, что:

29. $(\text{grad} u(r), \mathbf{r}) = u'(r) r$. **30.** $[\text{grad} u(r), \mathbf{r}] = 0$.

Найти производные от следующих полей в заданных точках по заданному направлению:

31. $u = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ в точке $P_0(2, -1)$ по направлению вектора $\vec{P_0P_1}$, где $P_1(6, 2)$.

32. Найти производную скалярного поля $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z$ в точке $P(2, 1, 1)$ по направлению прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.

33. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ в точке $P(1, 3, 2, -1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_4$.

34. Найти производную скалярного поля $u = 1/|\mathbf{r}|$ по направлению его градиента.

35. Найти производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в точке $M(a; b; c)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

36. Найти угол между градиентами поля $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $P_1(2, 3, -1)$ и $P_2(1, -1, 2)$.

37. Найти скорость и направление наиболее быстрого возрастания поля $u = xyz$ в точке $P(1, 2, 2)$.

38. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня поля $u = x^2 + 2xy - 4yz$ в точке $P_0(1, 1, -1)$, направленный в сторону возрастания поля.

39. Найти стационарные точки поля $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$.

Убедиться в ортогональности линий уровня полей:

40. $u = x^2 - y^2$, $v = xy$. **41.** $u = 2x^2 + y^2$, $v = y^2/x$.

Убедиться в ортогональности поверхностей уровня следующих полей:

42. $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz + yz$. **43.** $u = x^2 + y^2 - 2z^2$, $v = xyz$.

44. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, $v = x_1x_3 + x_2x_4$, $w = x_1x_4 - x_2x_3$.

Найти семейство линий наиболее быстрого возрастания для следующих полей:

45. Плоского поля $u = x^2 - y^2$. **46.** Трехмерного поля $u = xyz$.

47. Трехмерного поля $u = x^2 + y^2 - z^2$.

2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть $\overset{\smile}{AB}$ – дуга кусочно-гладкой кривой, $u(P)$ – заданное на AB скалярное поле, и $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ – произвольное разбиение дуги AB и P_v ($v = 1, 2, \dots, n$) – произвольные точки на частичных дугах $A_{v-1}A_v$, длины которых обозначим через Δs_v . Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{v=1}^n u(P_v) \Delta s_v$ при $\max_v \Delta s_v \rightarrow 0$ (и

$n \rightarrow \infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги $\overset{\smile}{AB}$ точками A_v , ни от выбора точек P_v в частичных дугах $A_{v-1}A_v$, то этот предел называется *криволинейным интегралом 1-го рода* от функции $u(P)$ по кривой AB и обозначается через

$$\int_{AB} u(P) ds = \int_{AB} u(x, y, z) ds$$

(ds – дифференциал дуги), т. е.

$$\int_{AB} u(P) ds = \lim_{\max \Delta s_v \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n u(P_v) \Delta s_v. \quad (1)$$

Если функция $u(P)$ непрерывна на AE , то интеграл (1) существует.

Физически интеграл (1) можно рассматривать как массу кривой AB . Вычисление интеграла (1) сводится к вычислению определенного интеграла. Например, если уравнение дуги AB задано в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, то

$$\int_{AB} u(P) ds = \int_{t_0}^{t_1} u(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от того, в каком направлении проходится дуга AB , иными словами,

$$\int_{AB} u(P) ds = \int_{BA} u(P) ds.$$

Пример 1. Определить массу M первого витка винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке пропорциональна длине радиус-вектора этой точки.

◀ Так как $\mu = kr = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то в точках винтовой линии $\mu = k\sqrt{a^2 + h^2 t^2}$. Первому витку отвечает изменение параметра t от 0 до 2π и

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{a^2 + h^2} dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} k\sqrt{a^2 + h^2} \sqrt{a^2 + h^2 t^2} dt = \\ &= k\sqrt{a^2 + h^2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{a^2 + h^2 t^2} + \frac{a^2}{2h} \ln \left(ht + \sqrt{a^2 + h^2 t^2} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = \end{aligned}$$

$$= k\sqrt{a^2 + h^2} \left(\pi\sqrt{a^2 + 4\pi^2 h^2} + \frac{a^2}{2h} \ln \frac{2\pi h + \sqrt{a^2 + 4\pi^2 h^2}}{a} \right). \blacktriangleright$$

В задачах 48 – 54 вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

48. $\int_C (x + y) ds$, где C – контур треугольника ABO с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ и $O(0, 0)$.

49. $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$.

50. $\int_C xy ds$, где C – контур квадрата $|x| + |y| = a$, ($a > 0$).

51. $\int_C y^2 ds$, где C – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

52. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где C – дуга развертки окружности $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

53. $\int_C \frac{y ds}{x + 3z}$, где C – дуга линии $x = t$, $y = t^2/\sqrt{2}$, $z = t^3/3$ от $O(0, 0, 0)$ до $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}/3)$.

54. $\int_C (x^2 + y^2) ds$, где C – дуга логарифмической спирали $r = ae^{3\varphi}$ от точки $A(a, 0)$ до точки $O(0, 0)$.

55. Найти массу всей астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке P выражается формулой $\mu(P) = k|xy|$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.

58. Найти массу дуги конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$, если плотность в каждой ее точке P выражается формулой $\mu = ke^t$ (где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности), от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(a, 0, a)$.

60. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = r^2$, расположенной в первом квадранте, если плотность ее в каждой точке пропорциональна абсциссе этой точки (коэффициент пропорциональности α).

61. Найти массу полуокружности $x^2 + y^2 = r^2$, расположенной в верхней полуплоскости, если плотность ее в каждой точке пропорциональна кубу ординаты этой точки (коэффициент пропорциональности β).

Криволинейный интеграл 2-го рода. Пусть на дуге $\overset{\smile}{AB}$ кусочно гладкой кривой задано векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$, и пусть $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ – произвольное разбиение дуги $\overset{\smile}{AB}$ на частичные дуги, P_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) – произвольные точки на дугах $A_{\nu-1}A_\nu$, а приращение радиус-вектора $\mathbf{r}(P)$ на концах дуги $A_{\nu-1}A_\nu$. Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{\nu=1}^n \mathbf{a}(P_\nu) \Delta \mathbf{r}_\nu$ при $\max_{\nu} |\Delta \mathbf{r}_\nu| \rightarrow 0$ (и $n \rightarrow \infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги $\overset{\smile}{AB}$ на частичные дуги, ни от выбора точек P_ν в этих частичных дугах, то этот предел называется *криволинейным интегралом 2-го рода по дуге $\overset{\smile}{AB}$* и обозначается через

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

т.е.

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \lim_{\max_{\nu} |\Delta \mathbf{r}_\nu| \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}(P_\nu), \Delta \mathbf{r}_\nu). \quad (2)$$

Здесь $(\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ и $(\mathbf{a}(P_\nu), \Delta \mathbf{r}_\nu)$ – скалярные произведения векторов. Если вектор-функция $\mathbf{a}(P)$ непрерывна на $\overset{\smile}{AB}$, то интеграл (2) существует.

Интеграл (2) называют также *линейным интегралом* вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Аналогично определяются линейные интегралы в плоских и многомерных векторных полях. Если даны параметрические уравнения дуги $\overset{\smile}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, то

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} [a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt$$

$$+ a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt \quad (3)$$

Здесь t_0 и t_1 – значения параметра t , отвечающие точкам A и B . В отличие от криволинейных интегралов 1-го рода, линейные интегралы (2) зависят от направления, по которому производится интегрирование вдоль дуги AB :

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = - \int_{BA} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Простейший физический смысл линейного интеграла – работа силового поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ при перемещении в нем материальной точки по кривой AB из точки A в точку B .

Пример 2. Найти работу силового поля $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ при перемещении материальной точки вдоль первого витка конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ из точки $A(0, 0, 0)$ в точку $B(a, 0, a)$.

◀ Так как $dx = ae^t(\cos t - \sin t)dt$, $dy = ae^t(\cos t + \sin t)dt$, $dz = ae^t dt$ и $(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = xdx + ydy + zdz =$

$$= a^2 e^{2t}((\cos t - \sin t)\cos t + (\cos t + \sin t)\sin t + 1)dt = 2a^2 e^{2t} dt,$$

то, учитывая, что $t = -\infty$ в точке A и $t = 0$ в точке B , имеем

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 2a^2 \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt = a^2. \blacktriangleright$$

Линейный интеграл вектора \mathbf{a} , взятый по замкнутому контуру C , называется *циркуляцией* вектора поля по данному контуру и обозначается символом $\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$. Направление обхода контура указывается

заранее, причем положительным считается обход против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.

Для плоских векторных полей $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$ имеет место следующее утверждение:

Если векторная функция $\mathbf{a} = a_x(x, y)\mathbf{i} + a_y(x, y)\mathbf{j}$ непрерывна вместе с производными $\partial a_x/\partial y$ и $\partial a_y/\partial x$ в замкнутой области $\overline{G} = G \cup C$, то

$$\iint_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C a_x dx + a_y dy \quad (\text{формула Грина}).$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy, \text{ где } C - \text{ окружность } x^2 + y^2 = r^2.$$

◀ Применяя формулу Грина, можем записать:

$$\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy = \iint_K (-1-1)dxdy = -2\pi r^2,$$

так как $\iint_K dxdy$ есть площадь круга $K: x^2 + y^2 \leq r^2$. ▶

62. Вычислить работу силового поля $F = yi - xj$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ из точки $A(a, 0)$ в точку $B(-a, 0)$.

63. Вычислить линейный интеграл $\int_{OB} (a, dr)$, если $a = y^2i + x^2j$, $O(0, 0)$, $B(1, 1)$, по следующим путям: а) отрезок прямой OB ; б) дуга параболы $x^2 = y$; в) дуга параболы $y^2 = x$; г) ломаная OAB , где $A(1, 0)$; д) ломаная OCB , где $C(0, 1)$.

64. Вычислить циркуляцию вектора $a = yi - xj$ вдоль окружности $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ в отрицательном направлении.

65. Вычислить линейный интеграл $\int_{OA} (a, dr)$, если $a = zi + xj + yk$, уравнение дуги OA : $r = ti + t^2j + t^3k$, $0 \leq t \leq 1$.

66. Вычислить линейный интеграл $\int_{OA} (a, dr)$, если $a = -yzi + xzj + xyk$, OA – первый виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

67. Вычислить циркуляцию вектора $a = yi - zj + xk$ вдоль эллипса $\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = a^2$, $y = x$ в положительном направлении относительно орта i .

68. Вычислить работу силового поля $F = 2xyi + y^2j - x^2k$ при перемещении материальной точки вдоль сечения гиперboloида

$x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $(a, a, 0)$ до точки $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

Используя формулу Грина, вычислить интегралы:

69. $\oint_C (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, где C – контур, образованный

полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и осью Ox .

70. $\oint_C (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$, где C – контур, образованный

синусоидой $y = \sin x$ и отрезком оси Ox при $0 \leq x \leq \pi$.

71. $\oint_C x^2 y dx - xy^2 dy$, C – окружность $x^2 + y^2 = r^2$.

72. $\oint_C (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, где C – треугольник с вершинами

$O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

Поверхностный интеграл 1-го рода. Гладкая поверхность G в трехмерном пространстве называется *двусторонней*, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности G и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальное положение. Выбор определенной стороны поверхности, т. е. выбор направления нормали к поверхности, называется *ориентацией* поверхности.

Пусть G – кусочно гладкая поверхность, $u(P)$ – заданное на G скалярное поле, G_1, G_2, \dots, G_n – произвольное разбиение поверхности G на частичные поверхности, площади которых равны $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ и пусть P_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) – произвольные точки на частичных поверхностях G_ν . Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{\nu=1}^n u(P_\nu)\Delta\sigma_\nu$ при $\max_{\nu} \Delta\sigma_\nu \rightarrow 0$ (и $n \rightarrow \infty$), который

не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом 1-го рода* от функции $u(P)$ по поверхности G и обозначается через

$$\iint_G u(P) d\sigma = \iint_G u(x, y, z) d\sigma$$

($d\sigma$ —дифференциал площади поверхности), т. е.

$$\iint_G u(P) d\sigma = \lim_{\max \Delta\sigma_v \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n u(P_v) \Delta\sigma_v. \quad (4)$$

Если $u(P)$ непрерывна на G , то интеграл (4) существует. Вычисление интеграла (4) сводится к вычислению обычного двойного интеграла. Если поверхность G задана параметрически:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad z = z(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in D,$$

или в векторной форме — $\mathbf{r}(\xi, \eta) = x(\xi, \eta)\mathbf{i} + y(\xi, \eta)\mathbf{j} + z(\xi, \eta)\mathbf{k}$, то

$$\iint_G u(x, y, z) d\sigma = \iint_D u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) \cdot |\vec{N}(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \quad (5)$$

где $\vec{N}(\xi, \eta) = [\mathbf{r}_\xi, \mathbf{r}_\eta] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \end{vmatrix}$ — вектор нормали (не единичной

длины) к поверхности G ; $\mathbf{r}_\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}; \frac{\partial y}{\partial \xi}; \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)$, $\mathbf{r}_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}; \frac{\partial y}{\partial \eta}; \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)$;

$$|\vec{N}(\xi, \eta)| = \sqrt{|\mathbf{r}_\xi|^2 \cdot |\mathbf{r}_\eta|^2 - (\mathbf{r}_\xi, \mathbf{r}_\eta)^2}.$$

Допустим, что прямая, параллельная оси Oz , пересекает поверхность G лишь в одной точке, т. е. уравнение поверхности имеет вид $z = f(x, y)$, и пусть G проектируется на плоскость Oxy в область D . Элемент $d\sigma_1$ площади D выражается в виде $d\sigma_1 = d\sigma \cos \gamma$, где γ — острый угол, который нормаль к поверхности G составляет с осью Oz : $\cos \gamma = (1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2)^{-1/2}$.

Таким образом,

$$\iint_G u(x, y, z) d\sigma = \iint_D u(x, y, z) \frac{d\sigma_1}{\cos \gamma} = \iint_D u(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Это же выражение можно получить из более общей формулы (5), положив $x = \xi$, $y = \eta$, $z = f(\xi, \eta)$. Если прямая, параллельная оси Oz , пересекает поверхность G в двух или более точках, то G разбивается

на части, каждая из которых пересекается с прямой, параллельной оси Oz , лишь в одной точке. Интегрирование следует выполнять по каждой из полученных частей.

Вместо плоскости Oxy поверхность G можно проектировать на плоскости Oxz или Oyz .

Для двусторонних поверхностей поверхностный интеграл 1-го рода не зависит от того, по какой стороне поверхности он берется. Физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода зависит от физического характера данного скалярного поля: он может определять массу, распределенную по данной поверхности, электрический заряд и т. д.

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint_G \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где G – часть цилиндрической поверхности $x = R \cos u$, $y = R \sin u$, $z = v$; $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq H$.

◀ В данном случае применима формула (5), причем $|\vec{N}| = R$. Поэтому

$$\iint_G \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{R du dv}{\sqrt{R^2 + v^2}} = 2\pi R \int_0^H \frac{dv}{\sqrt{R^2 + v^2}} = 2\pi R \ln \frac{H + \sqrt{R^2 + H^2}}{R}. \blacktriangleright$$

Пример 5. Определить статический момент относительно плоскости Oxy и положение центра масс однородной полусферы G (плотности 1): $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0$).

◀ Имеем

$$M_{xy} = \iint_G z d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

где D – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z = 0$. Так как на полусфере $xdx + ydy + zdz = 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

откуда

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\text{и } M_{xy} = \iint_G z d\sigma = \iint_D R dx dy = R \iint_D dx dy = R \cdot \pi R^2 = \pi R^3.$$

Определим теперь координаты центра масс полусферы. В силу симметрии $x_0 = y_0 = 0$. Далее, так как площадь Q поверхности полусферы G есть $2\pi R^2$, то

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{Q} = \frac{R}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 6. На всей поверхности конуса с высотой h и радиусом основания a распределены электрические заряды. В каждой точке поверхности плотность заряда пропорциональна аппликате этой точки ($e = kz$). Вершина конуса – в начале координат, его ось направлена по оси Oz . Определить суммарный заряд всей поверхности конуса.

◀ Суммарный заряд основания конуса равен произведению его площади πa^2 на плотность точечного заряда, т. е. kh . Таким образом, $E_{\text{осн}} = k\pi a^2 h$. Заряд боковой поверхности G определяется интегралом

$$E_{\text{бок.нов}} = \iint_G kz d\sigma.$$

Уравнение поверхности конуса $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq h$. Дифференцируя, находим $z dz = \frac{h^2}{a^2}(x dx + y dy)$, откуда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h^2}{a^2} \frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h^2}{a^2} \frac{y}{z}$ и,

следовательно,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{h^4}{a^4} \cdot \frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a}.$$

Поэтому $E_{\text{бок.нов}} = k \iint_G z d\sigma = \frac{kh}{a} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} dx dy,$

где D – круг $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$. Переходя к полярным координатам, получаем:

$$E_{\text{бок.нов}} = \frac{kh\sqrt{a^2 + h^2}}{a^2} \iint_G r^2 dr d\varphi = \frac{kh\sqrt{a^2 + h^2}}{a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{2}{3} k\pi a h \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Находим весь заряд:

$$E = E_{осн} + E_{бок.пов} = k\pi a^2 h + \frac{2}{3} k\pi a h \sqrt{a^2 + h^2} = \frac{k\pi a h}{3} (3a + 2\sqrt{a^2 + h^2}). \blacktriangleright$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

73. $\iint_G x^2 y z d\sigma$, где G – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая

в первом октанте.

74. $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, где G – часть поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$.

75. $\iint_G (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$, где G – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

76. $\iint_G (x + y + z) d\sigma$, где G – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

77. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az = x^2 - y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k|z|$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.

78. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперboloида $z^2 = x^2 + y^2 + a^2$ ($0 \leq z \leq a\sqrt{2}$), если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки ($e = kz$).

79. Определить массу, распределенную по поверхности куба $|x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq a$, если поверхностная плотность в точке $P(x, y, z)$ равна $k \sqrt[3]{|xyz|}$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.

80. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности параболоида $2az = x^2 + y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность заряда в каждой точке равна $k\sqrt{z}$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.

Вычислить интегралы:

C81. $\iint_G z^2 d\sigma$, где G – часть конической поверхности

$$x = \xi \cos \eta \sin \alpha, \quad z = \xi \sin \eta \sin \alpha, \quad z = \xi \cos \alpha, \quad (\alpha = \text{const}, \\ \alpha \in (0; \pi/2)), \quad \xi \in [0; 1], \quad \eta \in [0; 2\pi].$$

C82. $\iint_G z d\sigma$, где G – поверхность $x = \xi \cos \eta, z = \xi \sin \eta, z = \eta$,

$$\xi \in [0; 1], \quad \eta \in [0; 2\pi].$$

Поверхностный интеграл 2-го рода. Пусть G – кусочно гладкая ориентированная поверхность и $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$ – векторное поле. Разобьем поверхность G на частичные поверхности G_1, G_2, \dots, G_n , площади которых обозначим через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ соответственно, а площади частичных поверхностей G_v , снабженных единичными нормальями $\mathbf{n}_v(P_v)$ в точках $P_v \in G_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$), – через $\Delta\sigma_v$ (т. е. считаем каждую такую площадь вектором длины $\Delta\sigma_v$ и направления $\mathbf{n}_v(P_v)$). Тогда, если существует предел последовательно-

сти интегральных сумм $\sum_{v=1}^n (\mathbf{a}(P_v), \Delta\sigma_v)$ при $\max_v \Delta\sigma_v \rightarrow 0$ (и $n \rightarrow \infty$),

который не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_v на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом 2-го рода* по поверхности G и обозначается через

$$\iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \iint_G a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy, \quad (6)$$

т. е.

$$\iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \lim_{\max_v |\Delta\sigma_v| \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n (\mathbf{a}(P_v), \Delta\sigma_v).$$

Если поле $\mathbf{a}(P)$ непрерывно на G , то интеграл (6) существует.

Поверхностный интеграл 2-го рода называют также *потоком* векторного поля $\mathbf{a}(P)$ через поверхность G . Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающего за единицу времени в заданном направлении через поверхность G . Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности, а потому и знак поверхностного интеграла 2-го рода.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вы-

числению поверхностного интеграла 1-го рода

$$\iint_G (\mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_G (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) d\sigma, \quad (7)$$

где $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – единичная нормаль к поверхности, или к вычислению суммы трех двойных интегралов

$$\begin{aligned} \iint_G (\mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = & \pm \iint_{D_1} a_x(x(y, z), y, z) dydz \pm \\ & \pm \iint_{D_2} a_y(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_3} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy, \end{aligned}$$

где D_1, D_2 и D_3 – проекции G соответственно на плоскости Oyz, Oxz и Oxy , а $x(y, z), y(x, z)$ и $z(x, y)$ – выражения, полученные из уравнения поверхности G разрешением относительно соответствующих координат. Знак “+” или “-” зависит от того, острый или тупой угол составляет вектор нормали с положительным направлением соответственно осей Ox, Oy, Oz .

В случае параметрического задания поверхности G $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$, справедлива следующая формула:

$$\iint_G a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy = \iint_D (\mathbf{a}, \vec{N}) dudv = \iint_D \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv. \quad (8)$$

В частном случае $a_x = a_y = 0, a_z = R$ (8) принимает вид

$$\iint_G R dx dy = \iint_D R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv.$$

Аналогично записываются формулы, когда $a_x = a_z = 0, a_y \neq 0$ и $a_y = a_z = 0, a_x \neq 0$.

Пример 7. Найти поток вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

◀ Имеем в силу (7)

$$\iint_G (\mathbf{r}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_G (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) d\sigma.$$

Так как в первом октанте внешняя нормаль эллипсоида со всеми осями координат образует острые углы, то все три направляющих косинуса неотрицательны. Поэтому

$$\iint_G (\mathbf{r}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_{D_1} x dy dz + \iint_{D_2} y dx dz + \iint_{D_3} z dx dy = 3v = 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi abc = \frac{\pi abc}{2}$$

(каждый из интегралов по D_1 , D_2 и D_3 определяет объем v одной восьмой части эллипсоида). ▶

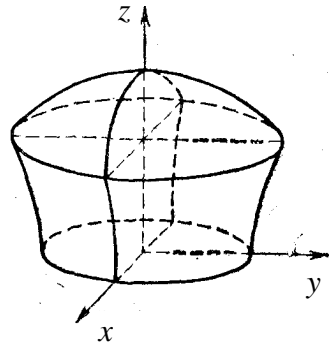
Пример 8. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2 \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ в направлении внешней нормали.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \text{Имеем: } \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma &= \iint_G (x^2 \cos \alpha - y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_G x^2 \cos \alpha d\sigma - \iint_G y^2 \cos \beta d\sigma + \iint_G z^2 \cos \gamma d\sigma. \end{aligned}$$

Заданная поверхность ограничена сверху сегментом сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$, с боков — частью поверхности гиперboloида $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$, снизу кругом $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z = 0$ (см. рис.). На плоскости Oyz и Oxz поверхность G проецируется дважды с разных сторон, поэтому, в силу симметрии поверхности относительно этих плоскостей, первые два интеграла в записи потока равны нулю:

$$\iint_G x^2 \cos \alpha d\sigma = \iint_G y^2 \cos \beta d\sigma = 0.$$

На плоскость Oxy сферический сегмент проецируется в круг (область D_{31}) $x^2 + y^2 \leq 2R^2$, часть поверхности гиперboloида — в кольцо (область D_{32}) $R^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2R^2$, а нижним основанием служит лежащий в этой плоскости круг (область D_{33}) $x^2 + y^2 \leq R^2$. Но для сегмента сферы $\cos \gamma > 0$, для гиперboloида $\cos \gamma < 0$, а на нижнем основании $z = 0$. Поэтому



$$\begin{aligned} \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma &= \iint_G z^2 \cos \gamma d\sigma = \\ &= \iint_{D_{31}} (3R^2 - x^2 - y^2) dx dy - \iint_{D_{32}} (x^2 + y^2 - R^2) dx dy. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{31}} (3R^2 - x^2 - y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sqrt{2}} (3R^2 - r^2) r dr = 4\pi R^4, \\ \iint_{D_{32}} (x^2 + y^2 - R^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{R\sqrt{2}} (r^2 - R^2) r dr = \frac{\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно находим: $\iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \frac{7}{2} \pi R^4$. ▶

Пример 9. Вычислить интеграл $K = \iint_G \frac{dx dy}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z}$,

где G – часть эллипсоида $x = a \cos u \cos v$, $y = b \sin u \cos v$, $z = c \sin v$, $u \in [\pi/4; \pi/3]$, $v \in [\pi/6; \pi/4]$.

◀ Заметим, что функции $1/x$, $1/y$, $1/z$ положительные, а углы, образованные внешней нормалью с осями координат, – острые, поэтому $K > 0$. Воспользуемся формулой (8). Вычислим определитель

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1/x & 1/y & 1/z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a \cos u \cos v} & \frac{1}{b \sin u \cos v} & \frac{1}{c \sin v} \\ -a \sin u \cos v & b \cos u \cos v & 0 \\ -a \cos u \sin v & -b \sin u \sin v & c \cos v \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right) \cos v. \end{aligned}$$

Поэтому

$$K = \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right) \times \int_{\pi/4}^{\pi/3} du \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos v dv = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{24} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right). \blacktriangleright$$

В задачах 83-86 вычислить поверхностные интегралы 2 рода:

83. $\iint_G y dx dz$, где G – верхняя сторона части плоскости $x + y + z = a$, лежащей в первом октанте.

84. $\iint_G \frac{dx dy}{z}$, где G – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

85. $\iint_G x^2 dy dz$, где G – внешняя сторона части поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq H$.

86. $\iint_G z^2 dx dy$, где G – внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

87. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

88. Найти поток вектора $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ через часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

89. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через часть поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $z \leq H$ в направлении внутренней нормали.

90. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, в направлении внешней нормали.

91. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ через всю поверхность куба $|x| \leq a$, $|y| \leq a$, $|z| \leq a$ в направлении внешней нормали.

92. Найти поток вектора $\mathbf{a} = 2x^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ в направлении внешней нормали.

93. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, вырезаемую плоскостями $x = R$, $z = 0$, $x = 0$, ориентированной в соответствии с направлением орта \mathbf{k} .

94. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, вырезаемую цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, ориентированной в соответствии с направлением орта \mathbf{k} .

Используя формулу (8), вычислить интегралы:

C95. $\iint_G x^3 dydz + y^3 dzdx$, где G – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$.

C96. $\iint_G zxdydz + xydzdx + yzdx dy$, G – внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = R^2, x \leq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq H$.

C97. Найти объем V тела, ограниченного гладкой поверхностью G :

1) поверхностью $x = u \cos v, y = u \sin v, z = -u + a \cos v$ ($u \geq 0, a > 0$) и плоскостями $x = 0, z = 0$;

2) поверхностью $x = (b + a \cos u) \cos v, y = (b + a \cos u) \sin v, z = a \sin u, b \geq a > 0$;

3) поверхностью $x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, z = c \sin u$ и плоскостями $z = c, z = -c$.

У к а з а н и е. Воспользоваться формулой (см. задачу **105**)

$$V = \left| \frac{1}{3} \iint_G xdydz + ydzdx + zdx dy \right|$$

(G – кусочно гладкая замкнутая поверхность, охватывающая объем V).

3. ТЕОРЕМЫ ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО И СТОКСА

Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса-Остроградского. Дивергенцией (или расхождением) векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, обозначаемой через $\operatorname{div} \mathbf{a}$, называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность Σ_P к величине V_P объема тела, ограниченного этой

поверхностью, при $V_P \rightarrow 0$, т. е. при условии, что поверхность стягивается в точку P :

$$(\operatorname{div} \mathbf{a})_P = \lim_{V_P \rightarrow 0} \frac{1}{V_P} \iiint_{\Sigma_P} (\mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma}). \quad (1)$$

Дивергенция характеризует отнесенную к единице объема мощность потока векторного поля, “исходящего” из точки P , т. е. мощность источника (при $(\operatorname{div} \mathbf{a})_P > 0$) или стока (при $(\operatorname{div} \mathbf{a})_P < 0$), находящегося в точке P .

В трехмерном евклидовом пространстве дивергенция поля выражается следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса-Остроградского. Поток векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ через замкнутую поверхность Σ , лежащую в этом поле, в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области V , ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля, т. е.

$$\iiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv. \quad (2)$$

Эта теорема справедлива в случае гладкого векторного поля, т. е. поля, каждая компонента которого обладает непрерывными частными производными по всем аргументам.

З а д а н и е . Выпишите соотношение (2) в координатной форме.

Обобщенная теорема Гаусса-Остроградского. Пусть дано гладкое тензорное поле $T_{i_1 \dots i_m}(x_1, x_2, x_3)$. Тогда имеет место равенство

$$\iiint_{\Sigma} \sum_{i_1=1}^3 T_{i_1 \dots i_m} \cdot n_{i_1} d\sigma = \iiint_V \sum_{i_1=1}^3 T_{i_1 \dots i_m, i_1} dv, \quad (3)$$

где n_{i_1} – компоненты внешней нормали \mathbf{n} к поверхности Σ .

Пример 1. Используя теорему Гаусса-Остроградского, найти поток вектора $\mathbf{a} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + R^2 z \mathbf{k}$ через всю поверхность G тела $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

◀ Имеем $\operatorname{div} \mathbf{a} = 3(x^2 + y^2) + R^2$. Поэтому

$$\oiint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V (3(x^2 + y^2) + R^2) dv.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение поверхности примет вид $z = Hr^2/R^2$,

$$\begin{aligned} \iiint_V (3(x^2 + y^2) + R^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (3r^2 + R^2) r dr \int_{Hr^2/R^2}^H dz = \\ &= 2\pi \int_0^R (3r^2 + R^2) \left(H - \frac{Hr^2}{R^2} \right) r dr = \frac{2\pi H}{R^2} \int_0^R (R^4 + 2R^2 r^2 - 3r^4) r dr = \pi H R^4. \blacktriangleright \end{aligned}$$

98. Найти $\operatorname{div}(xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k})$.

99. Найти $\operatorname{div} \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt[3]{(x + y + z)^2}}$.

100. Найти дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{a} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \text{ в точке } P(1, 2, -1).$$

101. Найти дивергенцию градиента скалярного поля $u = x^3y^2z$ в точке $P(1, -1, 1)$.

102. Магнитное поле, создаваемое электрическим током силы I , текущим по бесконечному проводу, определяется формулой

$$\mathbf{H}(P) = \mathbf{H}(x, y) = 2I \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}. \text{ Вычислить } \operatorname{div} \mathbf{H}(P).$$

103. Найти $\operatorname{div} [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где \mathbf{c} – постоянный вектор.

104. Найти $\operatorname{div} (r[\mathbf{c}, \mathbf{r}])$, где \mathbf{c} – постоянный вектор.

Используя теорему Гаусса-Остроградского, решить следующие задачи:

105. Доказать, что поток радиус-вектора \mathbf{r} через любую кусочно гладкую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

106. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ через всю поверхность куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ в направлении внеш-

ней нормали.

107. Найти поток вектора $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r$ через всю поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в направлении внешней нормали.

108. Распространить понятие потока и дивергенции на случай плоского (двумерного) поля и сформулировать теорему Гаусса-Остроградского для этого случая.

109*. Используя решение предыдущей задачи, преобразовать циркуляцию вектора по замкнутому контуру L в плоском поле в двойной интеграл по площади, ограниченной этим контуром.

110. Найти с помощью теоремы Гаусса-Остроградского поток вектора $\mathbf{a} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ в направлении внешней нормали.

111. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + (x^2 + y^2)z\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

C112. 1) Доказать формулы Грина

$$\iiint_V (\nabla u, \nabla v) d\Omega = \iint_{\Gamma} u(\mathbf{n}, \nabla v) d\sigma - \iiint_V u \Delta v d\Omega, \quad (\text{A})$$

$$\iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = \iint_{\Gamma} (u \nabla v - v \nabla u, \mathbf{n}) d\sigma. \quad (\text{B})$$

Здесь u, v – дважды непрерывно дифференцируемые скалярные поля, V – ограниченная область с кусочно гладкой границей Γ , ориентированной внешней нормалью \mathbf{n} .

2) С помощью (A) и (B) получить соотношения

$$\iiint_V |\nabla u|^2 d\Omega = \iint_{\Gamma} u(\mathbf{n}, \nabla u) d\sigma - \iiint_V u \Delta u d\Omega,$$

$$\iiint_V \Delta u d\Omega = \iint_{\Gamma} (\mathbf{n}, \nabla u) d\sigma.$$

C113. Показать, что в случае тензорного поля 1-го ранга из формулы (3) следует формула (2).

Ротор векторного поля. Теорема Стокса. Ротором (или вихрем) векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, обозначаемым $\text{rot } \mathbf{a}$, называется вектор, который в каждой точке P дифференцируемости поля определя-

ется следующим образом:

$$(np_s \operatorname{rot} \mathbf{a})_P = \lim_{\sigma_P \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_P} \oint_{l_P} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Здесь s – единичный вектор произвольного направления, l_P – малый замкнутый контур, окружающий точку P , лежащий в плоскости, перпендикулярной к вектору s и обходимый в положительном по отношению к вектору s направлении, σ_P – площадь области, ограниченной контуром l_P ; предел ищется при условии, что контур l_P стягивается в точку P . В трехмерном пространстве $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ через декартовы прямоугольные координаты вектора $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ выражается следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Теорема Стокса. Циркуляция дифференцируемого векторного поля \mathbf{a} по произвольному кусочно гладкому замкнутому контуру L равна потоку вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ через поверхность G , ограниченную этим контуром L :

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a}, d\boldsymbol{\sigma}). \quad (4)$$

При этом единичной вектор \mathbf{n} нормали к поверхности G направлен в такую сторону, чтобы обход контура L происходил в положительном по отношению к \mathbf{n} направлении.

З а д а н и е. Выпишите соотношение (4) в координатной форме.

П р и м е р 2. Вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ по окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = R$ в положительном направлении относительно орта \mathbf{k} .

◀ Так как $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, то $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. За поверхность G , ограниченную контуром L , примем сам круг, образованный сечением шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ плоскостью $x + y + z = R$. Центр круга $O'(R/3, R/3, R/3)$; его радиус $R_1 = R\sqrt{2/3}$. Единичный вектор нормали $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) / \sqrt{3}$. Так как $(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$, то находим

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \sqrt{3} \iint_G d\sigma = \sqrt{3} \pi R_1^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}. \blacktriangleright$$

Пример 3. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением гиперboloида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $y = x$, в положительном направлении относительно орта \mathbf{i} . Ответ проверить при помощи теоремы Стокса.

◀ Параметрические уравнения заданного эллипса $x = R \cos t$, $y = R \cos t$, $z = R \sin t$. Для обхода в заданном направлении параметр t надо изменять от 0 до 2π . Следовательно,

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \oint_L ydx - 2zdy + xdz = R^2 \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 2 \sin^2 t + \cos^2 t) dt = 3\pi R^2.$$

Применим теорему Стокса. Имеем $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. За поверхность G , ограниченную контуром L , примем часть секущей плоскости, лежащей внутри эллипса. Единичный вектор нормали, направленный в нужную сторону, имеет вид $\mathbf{n} = (\mathbf{i} - \mathbf{j}) / \sqrt{2}$. Поэтому $(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) = 3 / \sqrt{2}$ и

$$\iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}} \iint_G d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}} \pi ab.$$

Но так как эллипс имеет полуоси $a = R\sqrt{2}$ и $b = R$, то $\iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = 3\pi R^2$. \blacktriangleright

114. Найти $\operatorname{rot} xyz(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

115. Найти $\operatorname{rot}(P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j})$.

116. Показать, что магнитное поле $\mathbf{H}(P)$ (см. задачу 102) в области своего определения является безвихревым.

117. Найти ротор поля $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

118. Найти $\operatorname{rot} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$.

119. Вывести формулу Грина, применяя теорему Стокса к двумерному векторному полю $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$.

120. Пользуясь формулой Грина, убедиться в том, что площадь Q плоской области D , ограниченной кусочно гладким контуром L , можно найти при помощи любого из трех следу-

ющих интегралов:

$$Q = \oint_L x dy, \quad Q = -\oint_L y dx, \quad Q = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

121. При помощи теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y + z = R$ в положительном направлении относительно орта \mathbf{k} .

122. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = z^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$ по сечению гиперboloида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y = 0$ в положительном направлении относительно орта \mathbf{i} . Проверить при помощи теоремы Стокса.

123. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2 + y^2 = Rz$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = R$ в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида. Проверить при помощи теоремы Стокса.

4. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Оператор Гамильтона и его применение. Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона – символического вектора ∇ (читается – набла), определяемого равенством

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя известные операции умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного произведения двух векторов, находим:

$$\text{grad } u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\mathbf{s}, \text{grad } u) = (\mathbf{s}, \nabla u) = (\mathbf{s}, \nabla) u,$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = [\nabla, \mathbf{a}].$$

По аналогии с производной по направлению от скалярной функции $\frac{\partial u}{\partial s}$, вводится понятие производной по направлению единичного вектора s от векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Именно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} &= (s, \nabla) \mathbf{a} = (s, \operatorname{grad} a_x) \mathbf{i} + (s, \operatorname{grad} a_y) \mathbf{j} + (s, \operatorname{grad} a_z) \mathbf{k} = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial a_y}{\partial s} \mathbf{j} + \frac{\partial a_z}{\partial s} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Производные по направлению произвольного (не единичного) вектора \mathbf{c} отличаются от производных по направлению единичного вектора \mathbf{l} только тем, что в них входит дополнительный скалярный множитель $|\mathbf{c}|$:

$$(\mathbf{c}, \nabla) u = (\mathbf{c}, \operatorname{grad} u) = |\mathbf{c}| \frac{\partial u}{\partial l},$$

$$(\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a} = (\mathbf{c}, \operatorname{grad} a_x) \mathbf{i} + (\mathbf{c}, \operatorname{grad} a_y) \mathbf{j} + (\mathbf{c}, \operatorname{grad} a_z) \mathbf{k} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial l},$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{c} / |\mathbf{c}|$.

С помощью оператора Гамильтона удобно выполнять дифференциальные операции векторного анализа над сложными выражениями (произведение двух или более скалярных функций, произведение скалярной функции на вектор, скалярное и векторное произведения векторов и т. п.). Следует лишь помнить, что это оператор дифференцирования произведения.

Пример 4. Найти градиент произведения двух скалярных функций u и v .

◀ Имеем

$$\operatorname{grad}(uv) = \nabla(uv) = \nabla \overset{\downarrow}{(u v)} + \nabla \overset{\downarrow}{(u v)}.$$

(стрелка указывает функцию, на которую “действует” оператор). Но

$$\nabla \overset{\downarrow}{(u v)} = v \nabla u = v \operatorname{grad} u, \quad \nabla \overset{\downarrow}{(u v)} = u \nabla v = u \operatorname{grad} v.$$

Таким образом, $\text{grad } uv = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v$. ▶

Пример 5. Найти $\text{rot } [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, где \mathbf{c} – постоянный вектор.

◀ Так как по известной формуле векторной алгебры

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c},$$

то, учитывая соотношение $[\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] = 0$, имеем:

$$\text{rot } [\mathbf{a}, \mathbf{c}] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] + [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] = (\nabla, \mathbf{c})\mathbf{a} - (\nabla, \mathbf{a})\mathbf{c}.$$

Но $(\nabla, \mathbf{c})\mathbf{a} = (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}$, а это есть производная вектора \mathbf{a} по направлению вектора \mathbf{c} . Далее, $(\nabla, \mathbf{a})\mathbf{c} = \mathbf{c}(\nabla, \mathbf{a}) = \mathbf{c} \text{ div } \mathbf{a}$.

Таким образом, $\text{rot } [\mathbf{a}, \mathbf{r}] = (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{c} \text{ div } \mathbf{a}$. ▶

Выполнить следующие дифференциальные операции (\mathbf{c} – постоянный, \mathbf{a} и \mathbf{b} – переменные векторы):

124. Найти $\text{div}(cu)$ и $\text{div}(au)$.

125*. Найти $\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ и $\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

126. Найти $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ и $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

127*. Найти $\text{rot}(cu)$, $\text{rot}(au)$ и $\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Дифференциальные операции 2-го порядка. Можно образовать пять дифференциальных операций 2-го порядка:

1) $\text{div grad } u = (\nabla, \nabla)u = \nabla^2 u = \Delta u$ (лапласиан функции);

2) $\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla]u$;

3) $\text{grad div } \mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a})$;

4) $\text{div rot } \mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}])$;

5) $\text{rot rot } \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]]$.

Кроме того, операцию ∇^2 можно применять и к векторным полям, т.е. рассматривать операцию $\nabla^2 \mathbf{a}$. Вторая и четвертая операции приводят к нулю:

$$\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla]u = 0, \quad \text{div rot } \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = 0.$$

Это следует из векторного смысла оператора ∇ : в первом случае формально мы имеем векторное произведение двух коллинеарных векторов, а во втором – смешанное произведение компланарных векторов.

128. Получить выражения для:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u,$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}),$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]],$$

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a} = \nabla^2 a_x \mathbf{i} + \nabla^2 a_y \mathbf{j} + \nabla^2 a_z \mathbf{k}$$

через производные скалярного или векторного полей.

129. Найти $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$.

130. Найти $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = xy^2 \mathbf{i} + yz^2 \mathbf{j} + zx^2 \mathbf{k}$.

131. Найти $\Delta \mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)x \mathbf{i} + (x^2 + z^2)y \mathbf{j} + (x^2 + y^2)z \mathbf{k}$.

132. Найти $\operatorname{div} \operatorname{grad}(uv)$.

133. Найти $\operatorname{grad} \operatorname{div}(uc)$ и $\operatorname{grad} \operatorname{div}(ua)$ (c – постоянный, \mathbf{a} – переменный вектор).

134. Найти $\operatorname{rot} \operatorname{rot}(uc)$.

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *потенциальным*, если вектор поля \mathbf{a} является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(P)$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} u(P). \quad (1)$$

Функцию $u(P)$ в этом случае называют *потенциалом* векторного поля. Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ является равенство нулю ротора этого поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \quad (2)$$

Поле в произвольной области Ω , для которого выполняется условие (2), называется *безвихревым*. В односвязной области безвихревое поле потенциально. Для многосвязной области последнее утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Проверить, что ротор трехмерного векторного поля $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$ тождественно равен нулю (функцию $u(P)$ предполагаем дважды дифференцируемой).

◀ Так как $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z)$ и учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \mathbf{i} + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \mathbf{k} = 0. \blacktriangleright$$

В п. 2 предыдущего параграфа это равенство было получено с использованием свойств символического вектора набла.

Потенциальное поле обладает следующими свойствами.

1. В области непрерывности потенциала поля линейный интеграл от вектора поля, взятый между двумя точками поля, не зависит от пути интегрирования и равен разности значений потенциала поля в конце и начале пути интегрирования

$$\int_A^B (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_A^B (\operatorname{grad} u, d\mathbf{r}) = \int_A^B du = u(B) - u(A) \quad (3)$$

(использована легко проверяемая формула $(\operatorname{grad} u, d\mathbf{r}) = du$).

2. Циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области непрерывности поля, равна нулю.

3. Если поле \mathbf{a} потенциально, то потенциал поля $u(P)$ в произвольной точке P может быть вычислен по формуле (3):

$$u(P) = \int_A^P (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + C, \quad (4)$$

причем $C = u(A)$, что легко получается подстановкой в (4) вместо переменной точки P фиксированной точки A .

Для вычисления интеграла (4) можно выбрать любой путь — проще всего в качестве такого пути выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат, соединяющую точки A и P . За точку A удобно принимать начало координат (если оно лежит в области непрерывности поля).

Пример 2. Найти потенциал поля $\mathbf{a} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$.

◀ Убедимся, что поле потенциально. Вычисляя ротор, получаем: $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$.

За путь интегрирования примем ломаную $OABP$, где $O(0, 0, 0)$, $A(X, 0, 0)$, $B(X, Y, 0)$, $P(X, Y, Z)$. Находим:

$$u(X, Y, Z) = \int_{OABP} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + C = \int_0^A (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_A^B (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_B^P (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + C,$$

$$(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 2xydx + (x^2 - 2yz)dy - y^2dz.$$

Так как на $[OA]$ имеем $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, $0 \leq x \leq X$, то

$$\int_0^A (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0.$$

Аналогично на $[AB]$ имеем $x = X$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, $0 \leq y \leq Y$, поэтому

$$\int_A^B (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_0^Y X^2 dy = X^2 Y.$$

На $[BP]$ имеем $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, $0 \leq z \leq Z$, значит,

$$\int_B^P (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = -\int_0^Z Y^2 dz = -Y^2 Z.$$

Таким образом, $u(X, Y, Z) = X^2 Y - Y^2 Z + C$. Возвращаясь к переменным x, y, z , получаем

$$u(P) = x^2 y - y^2 z + C. \blacktriangleright$$

З а м е ч а н и е . Изложенный метод отыскания потенциала поля применяется также для восстановления функции двух, трех и n переменных по их полным дифференциалам и интегрирования дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

Если в плоском потенциальном поле есть точки, в которых поле теряет свойство непрерывности (так называемые *особые точки*), то циркуляция по замкнутому контуру, окружающему такую точку, может быть отлична от нуля. В этом случае циркуляция по контуру, обходящему данную особую точку один раз в положительном направлении, не зависит от формы контура и называется *циклической постоянной* относительно данной особой точки. Аналогичными свойствами обладают трехмерные поля с особыми линиями, вдоль которых поле теряет свойство непрерывности.

Найти потенциалы следующих плоских и трехмерных полей:

135. $\mathbf{a} = (3x^2y - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - 3xy^2)\mathbf{j}$.

$$136. \mathbf{a} = \frac{\sin 2x \cos 2y \cdot \mathbf{i} + \cos 2x \sin 2y \cdot \mathbf{j}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}.$$

$$137. \mathbf{a} = (yz - xy)\mathbf{i} + \left(xz - \frac{x^2}{2} + yz^2 \right)\mathbf{j} + (xy + y^2 z)\mathbf{k}.$$

$$138*. \mathbf{a} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2} \right)\mathbf{k}.$$

$$139*. \mathbf{a} = \left(\frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} - \frac{2yz}{x^3} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2} - \frac{2xz}{y^3} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{2xy}{z^3} \right)\mathbf{k}.$$

140*. Доказать, что во всюду непрерывном потенциальном векторном поле векторные линии не могут быть замкнутыми.

141. Убедиться в потенциальности поля $\mathbf{a} = \frac{x\mathbf{j} - y\mathbf{i}}{x^2 + y^2}$. Определить его особую точку и ее циклическую постоянную.

Соленоидальное поле. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *соленоидальным*, если дивергенция этого поля равна нулю: $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$. Для трехмерного поля это условие можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv 0.$$

В таком поле в силу теоремы Гаусса-Остроградского равен нулю поток вектора поля через любую замкнутую поверхность. Исключение может быть только в случае наличия в таком поле особых точек (в которых вектор поля не определен и дивергенция поля, если ее определять в такой точке при помощи формулы (1) § 3, отлична от нуля). В этом случае поток через замкнутую поверхность может быть отличен от нуля, но будет иметь одно и то же значение для всех замкнутых поверхностей, окружающих данную группу особых точек.

Векторное поле \mathbf{A} называют *векторным потенциалом* поля \mathbf{a} , если $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Условие $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ необходимо, но, вообще говоря, не достаточно для существования векторного потенциала.

Любое гладкое поле \mathbf{a} в области Ω является суммой потенциального (в общем случае, безвихревого) и соленоидального полей (теорема Гельмгольца).

Пример 3. Доказать, что для любого дважды дифференцируемого трехмерного векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ поле вихрей соленоидально.

$$\blacktriangleleft \text{Имеем } \operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \equiv 0. \blacktriangleright$$

В п. 2 предыдущего параграфа это соотношение доказано с помощью оператора набла.

142. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек, равен нулю.

Проверить соленоидальность следующих полей:

$$\mathbf{143.} \mathbf{a} = (x^2y + y^3)\mathbf{i} + (x^3 - xy^2)\mathbf{j}. \quad \mathbf{144.} \mathbf{a} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - (x^2 + y^2)z\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{145.} \mathbf{a} = \frac{x}{yz}\mathbf{i} + \frac{y}{xz}\mathbf{j} - \frac{(x+y)\ln z}{xy}\mathbf{k}. \quad \mathbf{146.} \mathbf{a} = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{(x^2 - y^2)z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Лапласово (или гармоническое) поле. Векторное поле называется *лапласовым* (или *гармоническим*), если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное, т. е. если

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{a} \equiv 0.$$

Пример 4. Доказать, что потенциал u двумерного или трехмерного лапласова поля является *гармонической функцией* двух или трёх переменных

$$\left(\text{т. е. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \right).$$

\blacktriangleleft Действительно, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

для двух переменных,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

для трех переменных. ▶

Пример 5. Показать, что потенциал поля сил тяготения, возникающего в пространстве, окружающем некоторую точечную массу, равен k/r ($k > 0$ – коэффициент пропорциональности) и что поле сил тяготения лапласово.

◀ Поместим начало координат в центре притяжения. Тогда

$$\mathbf{a} = \text{grad} \frac{k}{r} = k \text{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -k \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3}.$$

Но это – вектор силы притяжения. Действительно, он направлен к центру притяжения, поскольку $-\mathbf{r}/r$ – единичный вектор радиус-вектора точки $P(\mathbf{r})$, направленный к началу координат, а его модуль равен k/r^2 , т.е. обратно пропорционален квадрату расстояния от центра притяжения. Покажем, что $\text{div} \mathbf{a} = -k \text{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$. Имеем:

$$a_x = -\frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial x} = -k \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -k \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{r^5}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = -k \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{r^5}; \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -k \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^5},$$

и потому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = -\frac{k}{r^5} ((y^2 + z^2 - 2x^2) + (x^2 + z^2 - 2y^2) + (x^2 + y^2 - 2z^2)) \equiv 0.$$

Итак, поле сил тяготения лапласово. ▶

147. Доказать, что плоское векторное поле, потенциалом которого служит функция $u = \ln r$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$), лапласово.

148*. Для гармонических в области G функций u и w доказать следующие формулы Грина:

$$\text{а) } \iint_S u \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma = \iiint_G (\text{grad } u, \text{grad } w) dv \quad (\text{первая формула Грина}),$$

$$\text{б) } \oiint_S \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0 \quad (\text{вторая формула Грина}),$$

$$\text{в) } \oiint_S \frac{\partial(uw)}{\partial n} d\sigma = 2 \iiint_G (\text{grad } u, \text{grad } w) dv \quad (\text{третья формула Грина}).$$

Являются ли гармоническими следующие функции:

$$149. u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad 150. u = r - x = \sqrt{x^2 + y^2} - x.$$

$$151. u = Ax + By + C. \quad 152. u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

$$153. u = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3.$$

$$154. u = Ax + By + Cz + D.$$

$$155. u = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

$$156. u = a_{111}x^3 + a_{222}y^3 + a_{333}z^3 + 3a_{112}x^2y + 3a_{113}x^2z + 3a_{122}xy^2 + 3a_{223}y^2z + 3a_{133}xz^2 + 3a_{233}yz^2 + 6a_{123}xyz.$$

C157. Пусть ограниченная область Ω имеет кусочно-гладкую границу Γ , функция u гармонична в Ω и определена на Γ , а $\text{grad } u$ непрерывен в $\Omega + \Gamma$. Доказать, что:

$$1) \oiint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \text{ где } n \text{ – нормаль к поверхности } \Gamma;$$

2) если $u = 0$ на Γ , то $u = 0$ в Ω , т.е. гармоническая функция однозначно определяется своими значениями на границе;

$$3) \text{ если } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \text{ то } u = \text{const в } \Omega, \text{ т.е. гармоническая}$$

функция определяется с точностью до постоянной значениями своей нормальной производной на границе.

C158. Доказать принцип максимума: гармоническая функция достигает максимального и минимального значения на границе области гармоничности.

6. ПРИМЕНЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ В ВЕКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

Криволинейные координаты. Основные соотношения. В пространстве задана система координат, если каждой точке P по-

ставлена в соответствие тройка чисел ξ , η , ζ , причем различным тройкам чисел отвечают различные точки пространства. Числа ξ , η , ζ называются *координатами* (или *криволинейными координатами*) точки $P = P(\xi, \eta, \zeta)$. Наиболее употребительными являются следующие системы координат:

1) Декартова прямоугольная система координат. Здесь $\xi = x$ – абсцисса точки P , $\eta = y$ – ордината и $\zeta = z$ – аппликата.

2) Цилиндрическая система координат. Здесь за ξ принимается расстояние r от точки P до оси z , $\xi = r$ ($0 \leq r < +\infty$), $\eta = \varphi$ – угол, составленный проекцией радиус-вектора OP на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox ($0 \leq \varphi < 2\pi$), а $\zeta = z$ – аппликата точки P .

При этом цилиндрические координаты связаны с декартовыми прямоугольными координатами при помощи формул

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

3) Сферическая система координат. Здесь $\xi = r$ – длина радиус-вектора точки P ($0 \leq r < +\infty$), $\eta = \theta$ – угол между положительным направлением оси Oz и радиус-вектором OP точки P ($0 \leq \theta \leq \pi$), $\zeta = \varphi$ – угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиус-вектора OP на плоскость Oxy ($0 \leq \varphi < 2\pi$). Имеют место формулы:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Иногда за координату η сферической системы принимают угол между радиус-вектором OP и плоскостью Oxy .

Линия, вдоль которой изменяется только одна координата ξ , называется *координатной ξ -линией*, а единичный касательный вектор к этой линии, направленный в сторону возрастания ξ , – *единичным координатным ортом* e_ξ в точке $P(\xi^0, \eta^0, \zeta^0)$. Аналогично определяются η - и ζ -линии и единичные орты e_η , e_ζ .

Если векторы e_ξ , e_η , e_ζ попарно ортогональны в любой точке пространства, то соответствующая система криволинейных координат

нат ξ, η, ζ называется *ортогональной*.

Пусть $P(\xi, \eta, \zeta)$ – произвольная точка пространства, $P_1(\xi + \Delta\xi, \eta, \zeta)$ – точка, лежащая на ξ -линии точки P , и $|\overset{\smile}{PP_1}|$ – длина дуги $\overset{\smile}{PP_1}$. Тогда число

$$L_1 = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{|\overset{\smile}{PP_1}|}{\Delta q_1}$$

называется *коэффициентом Ламе* координаты ξ в точке P . Аналогично определяются коэффициенты Ламе L_2 и L_3 координат η и ζ .

Если точка $P(x, y, z)$ имеет криволинейные координаты $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$, то дифференциалы радиус-векторов dr_q , ($q = \xi, \eta, \zeta$) координатных линий и дифференциалы их дуг ds_q определяются с помощью равенств

$$dr_q = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial q} dq + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial q} dq + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial q} dq = L_q \mathbf{e}_q dq,$$

$$ds_q = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2} dq = L_q dq,$$

где L_q – коэффициенты Ламе.

Множество точек $P(\xi, \eta, \zeta)$, для которых одна из координат постоянна, называется *координатной поверхностью*.

Дифференциалы площадей координатных поверхностей определяются по формулам

$$d\sigma_\xi = L_\eta L_\zeta d\eta d\zeta, \quad d\sigma_\eta = L_\xi L_\zeta d\xi d\zeta, \quad d\sigma_\zeta = L_\xi L_\eta d\xi d\eta,$$

а дифференциал объема

$$dv = L_\xi L_\eta L_\zeta d\xi d\eta d\zeta.$$

Найти вид координатных линий и координатных поверхностей и построить их в произвольной точке для следующих случаев:

159. Для декартовой прямоугольной системы координат.

160. Для цилиндрической системы координат.

161. Для сферической системы координат.

Получить выражения для коэффициентов Ламе (162–164):

162. В декартовой прямоугольной системе координат

163. В цилиндрической системе координат r, φ, z .

164. В сферической системе координат r, θ, φ .

Получить формулы для дифференциалов дуг координатных линий, дифференциалов площадей координатных поверхностей и дифференциалов объема (165–167).

165. В декартовой прямоугольной системе координат.

166. В цилиндрической системе координат.

167. В сферической системе координат.

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах. Указанные операции определяются следующими формулами:

$$\text{grad } u = \frac{1}{L_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \mathbf{e}_\xi + \frac{1}{L_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta + \frac{1}{L_\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \mathbf{e}_\zeta,$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{L_\xi L_\eta L_\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (L_\eta L_\zeta a_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (L_\xi L_\zeta a_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (L_\xi L_\eta a_\zeta) \right)$$

(здесь $\mathbf{a} = a_\xi \mathbf{e}_\xi + a_\eta \mathbf{e}_\eta + a_\zeta \mathbf{e}_\zeta$),

$$\text{rot } \mathbf{a} = \frac{1}{L_\xi L_\eta L_\zeta} \begin{vmatrix} L_\xi \mathbf{e}_\xi & L_\eta \mathbf{e}_\eta & L_\zeta \mathbf{e}_\zeta \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ L_\xi a_\xi & L_\eta a_\eta & L_\zeta a_\zeta \end{vmatrix} = \frac{1}{L_\eta L_\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (L_\zeta a_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (L_\eta a_\eta) \right) \mathbf{e}_\xi +$$

$$+ \frac{1}{L_\xi L_\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} (L_\xi a_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (L_\zeta a_\zeta) \right) \mathbf{e}_\eta + \frac{1}{L_\xi L_\eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (L_\eta a_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (L_\xi a_\xi) \right) \mathbf{e}_\zeta,$$

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{1}{L_\xi L_\eta L_\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{L_\eta L_\zeta}{L_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{L_\xi L_\zeta}{L_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{L_\xi L_\eta}{L_\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right)$$

Для цилиндрических координат r, φ, z вывести следующие выражения:

$$168. \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

$$169. \Delta u = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

$$170. \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right).$$

$$171. \operatorname{rot} \mathbf{a} = (\operatorname{rot} \mathbf{a})_r \mathbf{e}_r + (\operatorname{rot} \mathbf{a})_\varphi \mathbf{e}_\varphi + (\operatorname{rot} \mathbf{a})_z \mathbf{e}_z, \text{ где}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{a})_\varphi = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right).$$

$$\text{C172. } \Delta \mathbf{a} = (\Delta \mathbf{a})_r \mathbf{e}_r + (\Delta \mathbf{a})_\varphi \mathbf{e}_\varphi + (\Delta \mathbf{a})_z \mathbf{e}_z, \text{ где}$$

$$(\Delta \mathbf{a})_r = \Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (\Delta \mathbf{a})_\varphi = \Delta a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}, \quad (\Delta \mathbf{a})_z = \Delta a_z.$$

Получить формулы для сферических координат r, θ, φ :

$$173. \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

$$174. \Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

$$175. \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

$$176. \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi.$$

$$\text{C177. } \Delta \mathbf{a} = (\Delta \mathbf{a})_r \mathbf{e}_r + (\Delta \mathbf{a})_\theta \mathbf{e}_\theta + (\Delta \mathbf{a})_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \text{ где}$$

$$(\Delta \mathbf{a})_r = \Delta a_r - \frac{2}{r^2} \left[a_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right],$$

$$(\Delta \mathbf{a})_\theta = \Delta a_\theta + \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial a_r}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right],$$

$$(\Delta \mathbf{a})_\varphi = \Delta a_\varphi - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} - \frac{a_\varphi}{2 \sin \theta} \right].$$

Пример 1. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\mathbf{a} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и найти $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$.

◀ Так как в данном случае $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{r}$, то $\mathbf{a} = \frac{r\mathbf{e}_r - z\mathbf{e}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$.

По формулам, полученным при решении задач 170 и 171, находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{2r(r^2 + z^2) - r^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - r \frac{(r^2 + z^2) - z^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{2z^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= -\frac{2rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\varphi. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

178. Вывести формулы:

а) $\operatorname{div} \mathbf{e}_\xi = \frac{1}{L_\xi L_\eta L_\zeta} \frac{\partial(L_\eta L_\zeta)}{\partial \xi}$ и аналогичные для $\operatorname{div} \mathbf{e}_\eta$ и $\operatorname{div} \mathbf{e}_\zeta$;

б) $\operatorname{rot} \mathbf{e}_v = \frac{1}{L_v} [\operatorname{grad} L_v, \mathbf{e}_v]$.

179. Используя формулы, выведенные при решении задачи 178, найти $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ для единичных координатных векторов

цилиндрической системы координат:

а) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_r$; б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\varphi$; в) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z$.

180. Решить задачу, аналогичную 179, для сферической системы координат:

а) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_r$; б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\theta$; в) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\varphi$.

181. Найти все гармонические функции вида:

а) $u = f(r)$; б) $u = f(\varphi)$; в) $u = f(z)$

(r, φ, z – цилиндрические координаты).

182. Найти все гармонические функции вида:

а) $u = f(r)$; б) $u = f(\theta)$; в) $u = f(\varphi)$

(r, θ, φ – сферические координаты).

183. Перейти к сферическим координатам в выражении скалярного поля $u = \frac{2xy(z^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ и найти u , $\text{grad } u$, и $\nabla^2 u$.

184. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении скалярного поля $u = \frac{2xyz + (x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и найти u , $\text{grad } u$ и $\nabla^2 u$.

185. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля $\mathbf{a} = \frac{x\mathbf{j} - y\mathbf{i}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и найти \mathbf{a} , $\text{div } \mathbf{a}$ и $\text{rot } \mathbf{a}$.

186. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - z\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$ и найти \mathbf{a} , $\text{div } \mathbf{a}$ и $\text{rot } \mathbf{a}$.

Центральные, осевые и осесимметрические скалярные поля.

Скалярное поле называется *центральным*, если функция поля $u = u(P)$ зависит только от расстояния точки P поля от некоторой постоянной точки – его центра. Если начало координат поместить в центр поля, то функция u примет вид

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться

сферическими координатами. Поверхностями уровня такого поля будут сферы с центром в центре поля, и потому эти поля часто называют *сферическими*.

Скалярное поле называют *осевым*, если функция поля $u(P)$ зависит только от расстояния точки поля P от некоторой оси. Если принять эту ось за ось Oz и обозначить расстояние от точки P до нее через r , то функция u примет вид

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться цилиндрическими координатами. Поверхностями уровня таких полей являются круговые цилиндры, оси которых совпадают с осью поля. Эти поля называют также *цилиндрическими*.

Если функция $u(P)$ скалярного поля принимает одни и те же значения в соответствующих точках всех полуплоскостей, проходящих через одну и ту же прямую (ось поля), то такое поле называют *осесимметрическим*. Поверхности уровня такого поля – поверхности вращения, оси которых совпадают с осью поля. Если ось поля принять за ось Oz , то при исследовании таких полей целесообразно пользоваться либо сферическими, либо цилиндрическими координатами. Функцию $u = u(P)$ можно в этом случае представить либо в виде $u = u(r, \theta)$ (в сферических координатах), либо в виде $u = u(r, z)$ (в цилиндрических координатах).

Замечание. Градиенты центральных, осевых и осесимметрических полей образуют векторные поля того же характера – центральные, осевые и осесимметрические.

Найти градиенты и лапласианы следующих полей:

187. $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

188. $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

189. $u = F(r, \theta)$ (r, θ – сферические координаты).

190. $u = F(r, z)$ (r, z – цилиндрические координаты).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

(из книги Кузнецова Л.А. «Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)», раздел «Векторный анализ», вариант № 31)

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$ в точке $M(2, 1, 1)$ по направлению вектора $\mathbf{I} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

◀ Находим градиент

$$\nabla u = 2x\mathbf{i} - \frac{\mathbf{j} + \mathbf{k}}{1 + (y^2 + z^2)^2}; \quad \nabla u(M) = 4\mathbf{i} - \frac{1}{5}\mathbf{j} - \frac{1}{5}\mathbf{k}.$$

Искомая производная есть

$$(\nabla u, \mathbf{I})|_M = 4 \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot 3 - \frac{1}{5} \cdot (-4) = \frac{1}{5}. \quad \blacktriangleright$$

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $v = x^2 - y^2 + z^2$ и $u = \frac{x}{yz^2}$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\right)$.

◀ Угол определим из формулы скалярного произведения двух векторов: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$.

Имеем $\nabla v = (2x; -2y; -6z)$, $\nabla v(M) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$,

$$\nabla u = \left(\frac{1}{yz^2}; -\frac{x}{y^2z^2}; -\frac{2x}{yz^3} \right), \quad \nabla u(M) = \left(3\sqrt{2}; -\frac{6}{\sqrt{2}}; -6\sqrt{3} \right),$$

$$|\nabla v(M)| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4, \quad |\nabla u(M)| = \sqrt{144} = 12.$$

Таким образом,

$$\cos \varphi = \frac{(\nabla u, \nabla v)}{|\nabla u| \cdot |\nabla v|} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + (-6/\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) + (-6\sqrt{3}) \cdot (-2\sqrt{3})}{4 \cdot 12} = \frac{48}{48} = 1,$$

или $\varphi = 0^\circ$. \blacktriangleright

Задача 3. Найти векторные линии в векторном поле $\mathbf{a} = 9x\mathbf{j} - 4y\mathbf{k}$.

◀ Для плоского поля векторные линии определяются дифференциальным уравнением $\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y}$. Так как $a_x = 9x$, $a_y = -4y$, то $\frac{dx}{9x} = -\frac{dy}{4y}$.

Имеем уравнение с разделяющимися переменными; интегрируя левую и правую части, последовательно получаем:

$$\int \frac{dx}{9x} = -\int \frac{dy}{4y}; \quad \frac{1}{9} \ln x = -\frac{1}{4} \ln y + C_1; \quad 4 \ln x = -9 \ln y + 36C_1;$$

$$\ln x^4 = \ln y^{-9} + \ln C; \quad x^4 = \frac{C}{y^9}.$$

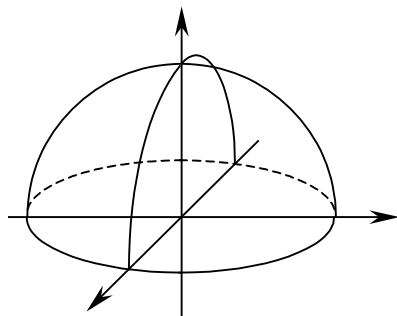
Итак, уравнение векторных линий имеет вид $x^4 y^9 = C$. ►

Задача 4. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = xi + (y+z)j + (z-y)k$ через часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вырезаемую плоскостью $z=0$, ($z \geq 0$) (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

◀ *Первый способ.* Поверхность интегрирования G представляет собой полусферу радиуса 3 с центром в начале координат при $z \geq 0$. Имеем

$$\Pi = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_{D_1} x dy dz + \iint_{D_2} (y+z) dx dz + \iint_{D_3} (z-y) dx dy.$$

D_1 – это проекция полусферы на плоскость Oyz , т.е. полукруг $y^2 + z^2 \leq 9, x=0, z \geq 0$. Заметим, что полусфера проецируется на эту плоскость дважды, причем знаки перед интегралами для этих проекций разные (т.к. в одном случае соответствующий направляющий косинус ($\cos \alpha$) нормали больше нуля, а в другом случае – меньше нуля).



Однако и подынтегральная функция для данных проекций различается лишь знаком, так что первый интеграл равен удвоенной величине двойного интеграла, взятого по проекции только с одной стороны:

$$\iint_{D_1} x dy dz = 2 \iint_{y^2+z^2 \leq 9} \sqrt{9-y^2-z^2} dy dz = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 \sqrt{9-\rho^2} \rho d\rho = 2 \int_0^\pi \left[-\frac{1}{3} (9-\rho^2)^{3/2} \right]_0^3 d\varphi = 18\pi.$$

Второй интеграл вычисляется по D_2 – проекции G на плоскость Oxz – полукругу $x^2 + z^2 \leq 9, y=0, z \geq 0$. Как и в предыдущем случае, проецирование осуществляется с двух сторон плоскости, и в силу симметрии области заключаем, что часть этого интеграла (от функции z)

равна нулю, а оставшаяся часть вычисляется аналогично интегралу по D_1 . Таким образом,

$$\iint_{D_2} (y+z) dx dz = \iint_{D_2} y dx dz + \iint_{D_2} z dx dz = 2 \iint_{x^2+z^2 \leq 9} \sqrt{9-x^2-z^2} dx dz + 0 = 18\pi.$$

И, наконец, последний интеграл – по кругу D_3 : $x^2+y^2 \leq 9$, $z=0$ (проецирование только с одной стороны, $\cos \gamma > 0$). Переходя к полярным координатам, находим

$$\begin{aligned} \iint_{D_3} (z-y) dx dy &= \iint_{D_3} (\sqrt{9-x^2-y^2} - y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (\sqrt{9-\rho^2} - \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \\ &= 9\varphi + 9 \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} = 18\pi. \end{aligned}$$

Окончательный результат: $\Pi = 18\pi + 18\pi + 18\pi = 54\pi$.

Следует отметить, что каждый из интегралов $\iint_{D_1} x(y,z) dy dz$,

$\iint_{D_2} y(x,z) dx dz$, $\iint_{D_3} z(x,y) dx dy$ определяет объем полушара $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $z \geq 0$.

Второй способ.

$$\Pi = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_D (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \iint_D (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) \frac{dx dy}{\cos \gamma}.$$

Здесь D – проекция поверхности G на плоскость Oxy – круг $x^2+y^2 \leq 9$, $z=0$. Направляющие косинусы найдем с учетом того, что вектор нормали направлен в сторону градиента функции $u(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (т.е. считаем G поверхностью уровня). Итак,

$$\nabla u = (2x, 2y, 2z); \quad \mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3} \right)$$

(ввиду того, что $\cos \gamma = z/3 \geq 0$, то при таком задании нормаль составляет острый угол с осью Oz);

$$\mathbf{a} = (x, z+y, z-y); \quad z = \sqrt{9-x^2-y^2} \text{ (знак “+” перед радикалом, т.к. } z \geq 0);$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) &= (1/3)[x^2 + y(z+y) + z(z-y)] = (1/3)[x^2 + y^2 + z^2] = \\ &= (1/3)[x^2 + y^2 + (9-x^2-y^2)] = 3. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$\Pi = \iint_D 3 \cdot \frac{3}{z} dx dy = 9 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{9-\rho^2}} = 9 \int_0^{2\pi} -\sqrt{9-\rho^2} \Big|_0^3 d\varphi = 54\pi.$$

Третий способ. Область интегрирования G зададим в параметрическом виде

$x = 3\cos u \cos v$, $y = 3\cos u \sin v$, $z = 3\sin u$; $\Omega: \{0 \leq v \leq 2\pi, 0 \leq u \leq \pi/2\}$
(фактически это означает переход к сферической системе координат). Найдем нормаль:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin u \cos v & -3\sin u \sin v & 3\cos u \\ -3\cos u \sin v & 3\cos u \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -9\cos^2 u (\cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j}) - 9\sin u \cos u \mathbf{k}.$$

При таком задании нормаль не составляет острого угла с осью Oz , в чем легко убедиться, взяв какую-либо точку на поверхности сферы, например $(0, 0, 3)$. Эта точка соответствует параметрам $u = \pi/2$, $v = 0$ и, тем самым, единичный вектор $\vec{N}/|\vec{N}| = -\mathbf{k}$. Поэтому вектор \vec{N} необходимо взять со знаком “минус”. Итак,

$$\Pi = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = - \iint_{\Omega} (\mathbf{a}, \vec{N}) dudv = -27 \int_0^{\pi/2} du \int_0^{2\pi} [-\cos^3 u \cos^2 v -$$

$$-\cos^2 u \sin v (\sin u + \cos u \sin v) - \sin u \cos v (\sin u - \cos u \sin v)] dv =$$

$$= 27 \int_0^{\pi/2} du \int_0^{2\pi} \cos u dv = 54\pi. \blacktriangleright$$

Задача 5. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = -xi + 2yj + zk$ через часть плоскости $x + 2y + 3z = 1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

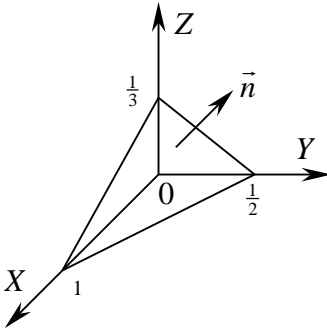
◀ Очевидно, все направляющие косинусы нормали положительны. Имеем

$$\Pi = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = - \iint_{D_1} x dy dz + \iint_{D_2} 2y dx dz + \iint_{D_3} z dx dy.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Это двойной интеграл по треугольнику D_1 в плоскости Oyz , ограниченному линиями $2y + 3z = 1$, $y = 0$, $z = 0$. Поэтому

$$\iint_{D_1} x dy dz = \iint_{D_1} (1 - 2y - 3z) dy dz = \int_0^{1/2} dy \int_0^{\frac{1}{3}(1-2y)} (1 - 2y - 3z) dz = \frac{1}{36}.$$

Этот интеграл можно посчитать проще, если учесть, что по определению двойного интеграла он равен объему тетраэдра $x + 2y + 3z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, который можно найти как одну шестую объема параллелепипеда, построенного на трех ребрах, исходящих из одной вершины. Если в качестве такой вершины взять начало координат, то



$$\iint_{D_1} x dy dz = \frac{1}{6} \left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{36}. \quad (\text{Объем}$$

тетраэдра можно также вычислить как произведение одной трети площади основания на высоту). Аналогично, второе слагаемое из выражения для потока равно удвоенному объему, а третье слагаемое – просто объему того же тетраэдра. Таким образом,

$$\Pi = -\frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}. \quad \blacktriangleright$$

Задача 6. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = -5\pi x \mathbf{i} + (1 - 2y) \mathbf{j} + 4\pi z \mathbf{k}$ через часть плоскости $x/2 + 4y + z/3 = 1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

◀ Задача в значительной степени схожа с предыдущей. Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = -5\pi \iint_{D_1} x dy dz + \iint_{D_2} dx dz - 2 \iint_{D_2} y dx dz + 4\pi \iint_{D_3} z dx dy = \\ &= \iint_{D_2} dx dz - V(\pi + 2) = S_2 - V(\pi + 2), \end{aligned}$$

где V – объем тетраэдра $x/2 + 4y + z/3 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; S_2 – площадь поверхности D_2 – треугольника $x/2 + z/3 = 1$, $x = 0$, $z = 0$, лежащего в плоскости $y = 0$. Ввиду того что заданная плоскость отсекает

на осях координат отрезки $a=2$, $b=1/4$, $c=3$, находим $V = abc/6 = 1/4$;
 $S_2 = (ac)/2 = 3$. Итак, $\Pi = 3 - \frac{1}{4}(\pi + 2) = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}$. ▶

Задача 7. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (2y - 5x)\mathbf{i} + (x - 1)\mathbf{j} + (2\sqrt{xy} + 2z)\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность S : $2x + 2y - z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (нормаль внешняя).

◀ Здесь применима теорема Гаусса-Остроградского:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv = \iiint_V (-5 + 0 + 2) dv = -3 \iiint_V dx dy dz = \\ &= -3V_{\text{тетр}} = -3 \cdot 16 = -48. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

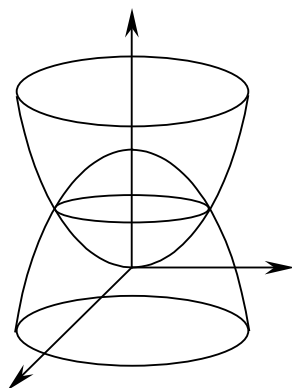
Задача 8. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x - z)\mathbf{i} + y\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность S : $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$ (нормаль внешняя).

◀ Данная поверхность состоит из двух частей – сверху она ограничена параболоидом $z = 8 - x^2 - y^2$, снизу – параболоидом $z = x^2 + y^2$. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv = \iiint_V (1 + 0 + 0) dv = \\ &= \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz = \iint_D (8 - 2x^2 - 2y^2) dx dy, \end{aligned}$$

где D – проекция тела объема V на плоскость Oxy . Область D представляет собой круг, радиус которого найдем, исключая переменную z из уравнений параболоидов: $8 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$, следовательно, $x^2 + y^2 = 4$ и радиус равен 2. Переходя к полярным координатам, получаем

$$\Pi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - \rho^2) \rho d\rho = 16\pi. \quad \blacktriangleright$$



Задача 9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (xy + y^2)\mathbf{j} + (xz + z)\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность S : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$ (нормаль внешняя).

◀ S представляет собой поверхность круглого цилиндра с осью Oz

радиуса 1; снизу и сверху ограничена плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

$$\begin{aligned} \Pi &= \oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dv = \iiint_V (2x + 2y + 1) dv = \\ &= \iint_D dx dy \int_0^1 (2x + 2y + 1) dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (2x + 2y + 1) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2\rho \cos \varphi + 2\rho \sin \varphi + 1) \rho d\rho = \pi. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Задача 10. Найти работу силы $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + \mathbf{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) от точки $M(2, 0)$ к точке $N(-2, 0)$.

◀ Линия L – полуокружность с центром в начале координат радиуса 2, лежащая в верхней полуплоскости. При вычислении криволинейного интеграла 2-го рода используем параметрическое уравнение окружности: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Точке M соответствует значение параметра $t_0 = 0$, а точке N – значение $t_1 = \pi$.

$$\begin{aligned} A &= \int_L F_x dx + F_y dy = \int_{t_0}^{t_1} (F_x(t)x'_t + F_y(t)y'_t) dt = \\ &= \int_0^\pi [(2\cos t - 2\sin t) \cdot (-2\sin t) + 1 \cdot 2\cos t] dt = \\ &= 2 \int_0^\pi (-\sin 2t + 2\sin^2 t + \cos t) dt = \cos 2t \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt + 2 \sin t \Big|_0^\pi = 2\pi. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Задача 11. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i}/3 - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ вдоль контура $\Gamma: x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 1 - 2\cos t - 2\sin t$ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

◀ По определению, циркуляция есть линейный интеграл вектора \mathbf{a} , взятый по замкнутому контуру. Полному обходу контура Γ соответствует изменение параметра от 0 до 2π . Поэтому можем записать

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) &= \oint_\Gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{t_0}^{t_1} (a_x(t)x'_t + a_y(t)y'_t + a_z(t)z'_t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2\sin t}{3} \right) (-2\sin t) - 3 \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t + 2\cos t (2\sin t - 2\cos t) \right] dt = -\frac{52\pi}{3}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим этот интеграл, используя формулу Стокса. Легко видеть, что контур Γ получается пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ и плоскости $z = 1 - x - y$. Это эллипс. В качестве поверхности G , ограничиваемой этим контуром, удобно взять часть упомянутой плоскости. Из уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяем вектор единичной нормали $\mathbf{n} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, причем его

направление соответствует положительному направлению обхода контура Γ . Находим ротор $\text{rot } \mathbf{a} = -\mathbf{j} - (10/3)\mathbf{k}$. Имеем

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_G \left(-1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) d\sigma = -\frac{13}{3\sqrt{3}} \iint_G d\sigma = -\frac{13}{3\sqrt{3}} \iint_D \frac{dx dy}{\cos \gamma}.$$

Здесь D – проекция поверхности G на плоскость Oxy – круг $x^2 + y^2 \leq 4$, $\cos \gamma$ – один из направляющих косинусов нормали $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Очевидно, $\cos \gamma = 1/\sqrt{3}$ и окончательно получаем:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = -\frac{13}{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \iint_D dx dy = -\frac{13}{3} \cdot S_{\text{круг}} = -\frac{13}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = -\frac{52}{3} \pi. \blacktriangleright$$

Задача 12. Найти модуль циркуляции векторного поля \mathbf{a} вдоль контура Γ :

$$\mathbf{a} = yz \mathbf{i} - xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 9.$$

◀ Имеем сферу радиуса 3, вписанную в круглый цилиндр с осью Oz . Контур Γ представляет собой окружность, лежащую в плоскости $z = 0$. Используя формулу Стокса, находим

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_G (2x \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 2z \cdot 1) d\sigma = -2 \iint_G z d\sigma = -2 \iint_G 0 \cdot d\sigma \equiv 0. \blacktriangleright$$

ОТВЕТЫ

1. Линии уровня – параболы $y^2 = C - x$. **2.** Линии уровня – гиперболы $xy = C$ (при $C = 0$ – совокупность координатных осей). **3.** Линии уровня – прямые $y = Cx$. **4.** Поверхности уровня – параллельные плоскости $x + y + z = C$. **5.** Поверхности уровня – одно- и двуполостные гиперboloиды $x^2 + y^2 - z^2 = \pm C^2$ (при $C = 0$ – конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$). **6.** Поверхности уровня – параболоиды вращения $x^2 + y^2 = z + C$. **7.** Гиперповерхности уровня – четырехмерные параллельные плоскости $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = C$. **8.** Гиперповерхности уровня – четырехмерные сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = C^2$. **9.** Окружности $x^2 + y^2 = C^2$. **10.** Гиперболы $xy = C$ (при $C = 0$ – совокупность координатных осей). **11.** Параболы

$y^2 = 2(x + C)$. **12.** Прямые $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$. **14.** Линии пересечения гиперболических цилиндров $y^2 - x^2 = C_1$ с такими же цилиндрами $z^2 - x^2 = C_2$.

15. Окружности, являющиеся линиями пересечения сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ с плоскостями $x + y + z = C_2$. **16.** Прямые четырехмерного пространства, перпендикулярные к оси Ox_3 и её пересекающие: $x_3 = C$;

$\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \frac{x_4}{l_4}$. **17.** $x = \cos t, y = \sin t, z = bt$. **18.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 1, \frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2} = 4$.

19. а) Конические поверхности с вершинами в начале координат, направляющими которых служат заданные замкнутые кривые; б) тороидальные поверхности, образованные окружностями с центрами на прямой $x = y = z$, лежащими в плоскостях $x + y + z = C$, сечениями которых служат заданные замкнутые кривые.

24. $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **25.** $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$. **26.** a . **27.** $a(b, \mathbf{r}) + b(a, \mathbf{r})$.

28. $2|\mathbf{a}|^2 \mathbf{r} - 2(\mathbf{a}, \mathbf{r})\mathbf{a}$. **31.** $13/5$. **32.** $4/\sqrt{5}$. **33.** $14/3$. **34.** $1/|\mathbf{r}|^2$.

35. $6/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **36.** $\cos \varphi = -4/\sqrt{41}$. **37.** $\frac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{6}$,

$n = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. **38.** $\frac{1}{\sqrt{17}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$. **39.** $P(3, 3, -3)$. **45.** $xy = C$.

46. $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x^2 - z^2 = C_2. \end{cases}$ 47. $\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2 / x. \end{cases}$ 48. $\sqrt{2}+1$. 49. $\ln \frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 50. 0.
51. $\frac{256}{15} a^3$. 52. $\frac{a^2}{3} [(1+4\pi^2)^{3/2} - 1]$. 53. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 54. $\frac{a^5 \sqrt{10}}{15}$. 55. $\frac{9}{64} k\pi a^3$.
58. $\frac{ka\sqrt{3}}{2}$. 60. αr^2 . 61. $\frac{4}{3} \beta r^4$. 62. πab . 63. а) $\frac{2}{3}$; б) 0.7; в) 0.7; г) 1;
- д) 1. 64. $2\pi R^2$. 65. $\frac{91}{60}$. 66. $2\pi^2 a^2 h$. 67. $2\pi a^2$. 68. $\left(2\sqrt{2} - \frac{7}{3}\right) a^3$. 69. $2r^2$.
70. -4π . 71. $-\frac{\pi r^4}{2}$. 72. $-\frac{1}{3}$. 73. $\frac{\sqrt{3}}{360}$. 74. $2\sqrt{2} \frac{\pi}{3}$. 75. 4π . 76. $\frac{3}{2} \pi a^3$.
77. $\frac{8ka^3}{15} (\sqrt{2} + 1)$. 78. $\frac{k\pi a^3}{3} (3\sqrt{3} - 1)$. 79. $\frac{27}{2} ka^3$. 80. $\frac{\pi ka^2 \sqrt{a}}{4} \times$
 $\times (3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$. C81. $\frac{\pi}{2} (\sin \alpha \cos^2 \alpha)$. C82. $\pi^2 (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.
83. $a^3/6$. 84. $2\pi a$. 85. $4HR^3/15$. 86. $\pi R^4/2$. 87. $\pi R^2 H/3$. 88. $\pi R^2 H/4$.
89. $\pi R^2 H^2/3$. 90. $\pi R^4/8$. 91. 0. 92. πR^4 . 93. $-R^2 H/3$. 94. 0.
C95. $2\pi(a^2 + b^2) abc/5$. C96. $\left(\frac{\pi H}{8} - \frac{r}{3}\right) r^2 H$. C97. 1) $2a^3/9$. 2) $2\pi^2 a^2 b$.
3) $2\pi(2a^2 + b^2) |c|/3$. 98. $x + y + z$. 99. $-2/(x + y + z)^{5/3}$. 100. 14. 101. 1.
102. 0. 103. 0. 104. 0. 106. a^5 . 107. $4\pi R^2$. 108. Если $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$, то
поток вектора \mathbf{a} через дугу $\overset{\curvearrowright}{AB}$ определится формулой
 $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} a_x dx - a_y dy$. Теорема Гаусса-Остроградского для
плоского поля: $\int_L (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds = \int_L a_x dy - a_y dx = \iint_Q \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \right) dx dy$.
109. $\oint_L a_x dx + a_y dy = \iint_Q \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy$ (формула Грина). • Поло-
жить в предыдущей формуле (задача 108) $a_x = a_y$, $a_y = -a_x$. 110. $R^5/3$.

111. $\pi R^4 H/2$. 114. $x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k}$. 115. $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$.

117. $-2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - 2(3x + 2y)\mathbf{k}$. 118. 0. 121. $\frac{4}{3}\pi R^3$. 122. $\frac{3}{2}\pi R^4$. 123. $\frac{R^3}{3}$.

124. $\operatorname{div}(c\mathbf{u}) = (\mathbf{c}, \operatorname{grad} u)$, $\operatorname{div}(\mathbf{a}u) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u)$. 125. $\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) =$
 $= [\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a}$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}] + (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}$.

◀ Найдем предварительно $[\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a}]$. Имеем: $[\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, [\nabla, \mathbf{a}]] =$
 $= (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \nabla - (\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a} = \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - (\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a}$. Отсюда $\nabla(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = [\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a}$;

далее, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и используем предыдущий ре-

зультат. ▶ 126. $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$, $\operatorname{div}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b})$.

127. $\operatorname{rot}(c\mathbf{u}) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{c}]$, $\operatorname{rot}(\mathbf{a}u) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}]$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} -$
 $- (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}$. • См. решение примера 5. 128. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u =$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{a})}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{a})}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{a})}{\partial z} \mathbf{k},$$

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$, $\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla^2 a_x \mathbf{i} +$
 $+ \nabla^2 a_y \mathbf{j} + \nabla^2 a_z \mathbf{k}$. 129. $6\mathbf{r} = 6(xi + yj + zk)$. 130. 0. 131. $4\mathbf{r} = 4(xi + yj + zk)$.

132. $u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + 2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + v \operatorname{div} \operatorname{grad} u$. 133. $\operatorname{grad} \operatorname{div}(u\mathbf{c}) =$
 $= (\mathbf{c}, \nabla) \operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad} \operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{a} \operatorname{grad} u + [\operatorname{grad} u, \operatorname{rot} \mathbf{a}]$

$+ (\operatorname{grad} u, \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \operatorname{grad} u$. 134. $\operatorname{rot} \operatorname{rot}(u\mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \nabla) \operatorname{grad} u - \mathbf{c} \nabla^2 u$. 135. $x^3 y -$

$-xy^3 + C$. 136. $2\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} + C$. 137. $xyz - \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 z^2}{2} + C$.

138. $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + C$. • За начальную точку A принять точку $(1, 1, 1)$ или

любую другую точку, не лежащую на осях координат.

139. $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} - \frac{xy}{z^2} + C$. • См. указание к предыдущей задаче.

140. ◀ Если бы во всюду непрерывном потенциальном поле могли существовать замкнутые векторные линии, то циркуляция по такой линии не могла бы быть равной нулю, так как произведение $(\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ вдоль всей линии сохраняло бы постоянный знак, и поэтому

$\oint (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) \neq 0$. ▶ 141. Особая точка $O(0, 0)$, циклическая постоянная

равна 2π . 148. • Применить теорему Гаусса-Остроградского и учесть,

что для гармонических функций $\nabla^2 u = 0$. **149.** Нет. **150.** Нет. **151.** Да. **152.** Только при $A + C = 0$. **153.** Только если $A + C = B + D = 0$. **154.** Да. **155.** Только при $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$. **156.** Только если $a_{111} + a_{122} + a_{133} = a_{112} + a_{222} + a_{233} = a_{113} + a_{223} + a_{333} = 0$. **159.** Линии x : $\frac{x}{1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{0}$; линии y : $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-z_0}{0}$; линии z : $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z}{1}$.

160. Линии r : $\varphi = \varphi_0$, $z = z_0$ (лучи, исходящие из точек оси Oz , лежащие в горизонтальных плоскостях); линии φ : $r = r_0$, $z = z_0$ (окружности с центрами на оси Oz радиуса r_0 , лежащие в плоскостях $z = z_0$); линии z : $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (прямые, параллельные оси Oz). **161.** Линии r : $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ (лучи, исходящие из начала координат); линии θ : $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (полуокружности радиуса r_0 с центром в начале координат, лежащие в полуплоскостях $\varphi = \varphi_0$, проходящих через ось Oz , т.е. меридианы); линии φ : $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ (окружности радиуса $r_0 \sin \theta_0$ с центром на оси Oz , лежащие в горизонтальных плоскостях, т.е. параллели). **162.** $L_x = L_y = L_z = 1$. **163.** $L_r = L_z = 1$, $L_\varphi = r$. **164.** $L_r = 1$, $L_\theta = r$, $L_\varphi = r \sin \theta$. **165.** $ds_x = dx$, $ds_y = dy$, $ds_z = dz$; $d\sigma_x = dydz$, $d\sigma_y = dx dz$, $d\sigma_z = dx dy$; $dv = dx dy dz$. **166.** $ds_r = dr$, $ds_\varphi = r d\varphi$, $ds_z = dz$; $d\sigma_r = r d\varphi dz$, $d\sigma_\varphi = r dr dz$, $d\sigma_z = r dr d\varphi$; $dv = r dr d\varphi dz$. **167.** $ds_r = dr$, $ds_\theta = r d\theta$, $ds_\varphi = r \sin \theta d\varphi$, $d\sigma_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, $d\sigma_\theta = r \sin \theta dr d\varphi$, $d\sigma_\varphi = r dr d\theta$; $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. **179.** а) $\operatorname{div} \mathbf{e}_r = \frac{1}{r}$, $\operatorname{rot} \mathbf{e}_r = 0$; б) $\operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi = 0$,

$\operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{e}_z}{r}$; в) $\operatorname{div} \mathbf{e}_z = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{e}_z = 0$. **180.** а) $\operatorname{div} \mathbf{e}_r = \frac{2}{r}$, $\operatorname{rot} \mathbf{e}_r = 0$;

б) $\operatorname{div} \mathbf{e}_\theta = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r}$, $\operatorname{rot} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}$; в) $\operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta$.

181. а) $u = C_1 \ln r + C_2$; б) $u = C_1 \varphi + C_2$; в) $u = C_1 z + C_2$. **182.** а) $u = \frac{C_1}{r} + C_2$;

б) $u = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2$; в) $u = C_1 z + C_2$. **183.** $u = r^2 \sin 2\varphi \cos 2\theta$, $\operatorname{grad} u =$

$= 2r \left(\sin 2\varphi \cos 2\theta \mathbf{e}_r - \sin 2\varphi \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{\cos 2\varphi \cos 2\theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right)$, $\nabla^2 u = 2 \sin 2\varphi \times$
 $\times (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \theta)$. **184.** $u = rz \sin 2\varphi + r \cos 2\varphi$, $\operatorname{grad} u = (z \sin 2\varphi + \cos 2\varphi) \mathbf{e}_r +$

$$+2(z \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \mathbf{e}_\theta + r \sin 2\varphi \mathbf{e}_z, \quad \nabla^2 u = -\frac{3u}{r^2}. \quad \mathbf{185.} \quad \mathbf{a} = \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{r} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta). \quad \mathbf{186.} \quad \mathbf{a} = rz(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z), \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 2z - r,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = (r+z) \mathbf{e}_\varphi. \quad \mathbf{187.} \quad \operatorname{grad} u = f'(r) \mathbf{e}_r = f''(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla^2 u = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}.$$

$$\mathbf{188.} \quad \operatorname{grad} u = f'(r) \mathbf{e}_r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla^2 u = f''(r) + \frac{f'(r)}{r}. \quad \mathbf{189.} \quad \operatorname{grad} u =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}. \quad \mathbf{190.} \quad \operatorname{grad} u =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шипачев В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

2. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1997.—512 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2: Специальные разделы математического анализа: учеб. пособие для втузов / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. – 368 с.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Л.А. Кузнецов. М.: Высш. шк., 1997.

5. Акивис М.А. Тензорное исчисление / М.А. Акивис, В.В. Гольдберг. М.: Наука, 1972. – 351 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Скалярные, векторные и тензорные поля	2
Основные определения. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей	2
Производная по направлению и градиент скалярного поля. Дифференцирование тензорного поля	4
2. Криволинейные и поверхностные интегралы	7
Криволинейный интеграл 1-го рода	7
Криволинейный интеграл 2-го рода	10
Поверхностный интеграл 1-го рода	13
Поверхностный интеграл 2-го рода	18
3. Теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса	23
Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса-Остроградского	23
Ротор векторного поля. Теорема Стокса	26
4. Оператор Гамильтона и дифференциальные операции второго порядка	29
Оператор Гамильтона и его применение	29
Дифференциальные операции 2-го порядка	31
5. Специальные виды векторных полей	32
Потенциальное векторное поле	32
Соленоидальное поле	35
Лапласово (или гармоническое) поле	36
6. Применение криволинейных координат в векторном анализе	38
Криволинейные координаты. Основные соотношения	38
Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах	41
Центральные, осевые и осесимметрические скалярные поля	44
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТИПОВОГО РАСЧЕТА	46
ОТВЕТЫ	54
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	58

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для самостоятельной работы по курсу «Математика»
для студентов специальности 150702 «Физика металлов»
направления 150700 «Физическое материаловедение»
и направления 140400 «Техническая физика»
очной формы обучения

Составители:

Кострюков Сергей Александрович
Пешков Вадим Вячеславович
Шунин Геннадий Евгеньевич

В авторской редакции
Компьютерный набор С.А. Кострюкова

Подписано в печать 23.12.2008.

Формат 60×84/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. 3,8. Уч.-изд. л. 3,6. Тираж 75 экз. “С” 465

Зак. №

ГОУВПО «Воронежский государственный технический
университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14