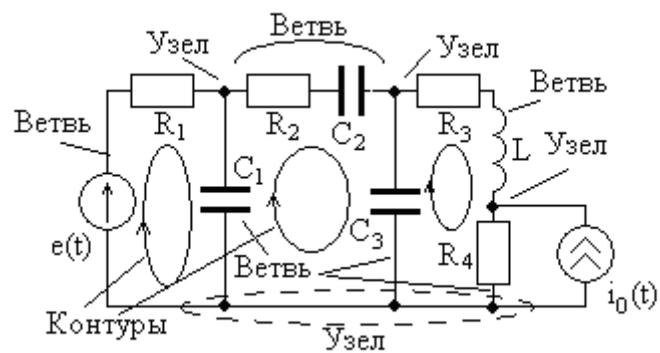


В.П. Литвиненко О.В. Чернояров

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Часть 1

Учебное пособие



Воронеж 2016

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

В.П. Литвиненко О.В. Чернояров

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Часть 1

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2016

УДК 621.3.013

Литвиненко В.П. Основы теории цепей: учеб. пособие /
В.П. Литвиненко, О.В. Чернояров. Воронеж: ФГБОУ ВО
«Воронежский государственный технический университет»,
2016. ч. 1. 230 с.

Учебное пособие содержит материал курса лекций по
дисциплине «Основы теории цепей».

В первой части пособия рассматриваются общие поня-
тия теории цепей, методы расчета цепей при постоянных и
гармонических воздействиях, частотно селективные цепи, ко-
лебательные контуры и частотные фильтры.

Издание соответствует требованиям Федерального гос-
ударственного образовательного стандарта высшего профес-
сионального образования по направлению 11.03.01 «Радио-
техника», профилю «Радиотехнические средства передачи,
приема и обработки сигналов», дисциплине «Основы теории
цепей».

В пособие включены материалы исследований по ГБ
НИР 2013.49 и ГБ НИР №1729.

Табл. 7. Ил. 193. Библиогр.: 9 назв.

Научный редактор профессор Б.В. Матвеев

Рецензенты: кафедра инфокоммуникационных систем
и технологий Воронежского института
МВД России (нач. кафедры д-р техн. наук,
проф. О.И. Бокова);
д-р техн. наук, проф. А.Б. Токарев

© Литвиненко В.П., Чернояров О.В. 2016

© Оформление. ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2016

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Основы теории цепей» является базовой для специальности «Радиотехника», на нее опираются другие профилирующие дисциплины. Она включает в себя материал теории линейных электрических цепей при постоянных, гармонических и произвольных воздействиях, элементы теории четырехполюсников, трехфазных и магнитных цепей [1].

Помимо теоретических знаний при освоении материала необходимо приобрести навыки решения задач по соответствующим разделам [2], овладеть основами техники измерений [3]. Современная вычислительная техника предоставляет широкие возможности по расчету [4] и моделированию [5, 6] электрических цепей (пакеты программ WorkBench, MicroCAP и другие). Это направление подготовки специалистов имеет большое самостоятельное значение и является хорошим вспомогательным средством при изучении электрических цепей и сигналов в ходе аудиторных занятий и самостоятельной работы.

По курсу имеется дополнительная литература [7-9].

Изучение теории электрических цепей базируется на курсах высшей математики, раздела «Электричество и магнетизм» курса физики, дисциплине «Моделирование и вычисления на ЭВМ».

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

1.1. Электрическая цепь

Описание работы и расчет (моделирование) электрических устройств можно проводить на базе теории электромагнитного поля. Этот подход приводит к сложным математическим моделям (системам дифференциальных уравнений в частных производных) и используется в основном при анализе сверхвысокочастотных устройств и антенн.

Значительно проще и удобнее моделировать электрические устройства на основе уравнений электрического равновесия токов и напряжений. На этой основе построена **теория электрических цепей**.

Электрическая цепь – это модель электрического устройства, свойства которого описываются в терминах тока и напряжения на базе уравнений электрического равновесия.

1.2. Заряд, ток, напряжение, мощность, энергия

Электрическим зарядом называют источник электрического поля, через которое заряды взаимодействуют друг с другом [3]. Электрические заряды могут быть положительными (ионы) и отрицательными (электроны и ионы). Разноименные заряды притягиваются, а одноименные – отталкиваются. Величина заряда измеряется в кулонах (К).

Электрический ток – это направленное движение носителей заряда в твердом теле (проводнике, полупроводнике), среде ионизированного газа (лампы дневного света, газоразрядные электронные приборы) и вакууме (электронно-лучевые трубки).

Величина (сила) тока равна отношению бесконечно малого заряда (количества электричества) $q(t)$, переносимого в данный момент времени t через поперечное сечение проводника за бесконечно малый интервал времени dt к величине этого интервала,

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (1.1)$$

Функцию времени $i(t)$ называют **мгновенным значением** тока.

Ток измеряется в амперах (А), в технике широко используют значения в миллиамперах ($1 \text{ мА} = 10^{-3} \text{ А}$), микроамперах ($1 \text{ мкА} = 10^{-6} \text{ А}$) и наноамперах ($1 \text{ нА} = 10^{-9} \text{ А}$), значения дольных приставок приведены в приложении 1.

Электрический потенциал u некоторой точки – это величина, равная отношению потенциальной энергии w , которой обладает заряд q в этой точке, к величине заряда,

$$v = \frac{w}{q}. \quad (1.2)$$

Потенциальная энергия w равна энергии, затрачиваемой на перенос заряда из данной точки с потенциалом u в точку с нулевым потенциалом.

Электрическим напряжением u между двумя точками называют разность потенциалов между ними.

Если v_2 - потенциал точки 2, а v_1 - точки 1, то напряже-

ние между точками 2 и 1 равно

$$u = u_{21} = v_2 - v_1. \quad (1.3)$$

Напряжение измеряется в вольтах (В), используются значения в киловольтах (кВ), милливольтках (мВ) и микровольтах (мкВ).

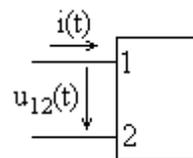


Рис. 1.1

Ток и напряжение характеризуются направлением, которое указывается стрелкой, как показано на рис. 1.1. Они задаются произвольно **до начала расчетов**. Желательно, чтобы ток и напряжение для одного элемента цепи имели бы **одинаковые** положительны направления. Обозначения могут иметь индексы, например, напряжение $u_{12}(t)$ между точками 1 и 2 на рис. 1.1.

Численные значения тока и напряжения характеризуются знаком. Если знак положительный, то это означает, что истинное положительное направление совпадает с заданным, а иначе они противоположны.

Движение зарядов в электрической цепи характеризуется **энергией** и **мощностью**. Для перемещения бесконечно малого заряда dq между точками 1 и 2 с напряжением $u = u_{12}$ в цепи на рис. 1.1 необходимо затратить бесконечно малую энергию dw , равную

$$dw = u \cdot dq, \quad (1.4)$$

тогда энергия цепи в интервале времени от t_0 до t с учетом (1.1) определяется выражением

$$w(t, t_0) = \int_{t_0}^t u \cdot dq = \int_{t_0}^t u(\tau) i(\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

При постоянных токе $i = I$ и напряжении $u = U$ энергия равна $w(t, t_0) = UI(t - t_0)$ и неограниченно растет с течением времени. Это относится и к общему выражению (1.5), что делает энергию цепи достаточно неудобной технической характеристикой.

Мгновенная мощность $p(t)$ в электрической цепи в момент времени t равна

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = u(t)i(t). \quad (1.6)$$

а для постоянного тока мощность не зависит от времени,

$$P = UI. \quad (1.7)$$

Мгновенная мощность $p(t)$ зависит от времени и может быть положительной (цепь потребляет энергию извне) и отрицательной (цепь отдает ранее накопленную энергию).

Средняя мощность для **периодических** тока и напряжения определяется выражением

$$P_{CP} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt \quad (1.8)$$

а для постоянного тока соответственно

$$P_{CP} = P = UI. \quad (1.9)$$

Средняя мощность всегда неотрицательна, если внутри цепи отсутствуют источники электрической энергии.

Энергия измеряется в джоулях (Дж), а мгновенная и средняя мощности – в ваттах (Вт).

1.3. Элементы электрической цепи

Элемент – это неделимая часть электрической цепи. В физической цепи (радиоприемнике) имеются физические элементы (резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, диоды, транзисторы и т.д.). Они имеют сложные свойства и математический аппарат их точного описания на основе теории электромагнитного поля.

При расчете электрической цепи необходимо разработать достаточно точные, простые и удобные с инженерной точки зрения **модели** физических элементов, которые в дальнейшем будем называть **элементами**.

Инженерные модели в электротехнике строятся на основе физических представлений о взаимосвязи в них тока и напряжения. Свойства резистивных двухполюсных (с двумя выводами) элементов описываются **вольтамперными характеристиками (ВАХ)** – зависимостью тока через элемент i от приложенного к нему напряжения u . Эта зависимость может быть прямолинейной (для резистора на рис. 1.2а) или нелинейной (для полупроводникового диода на рис.1.2б).

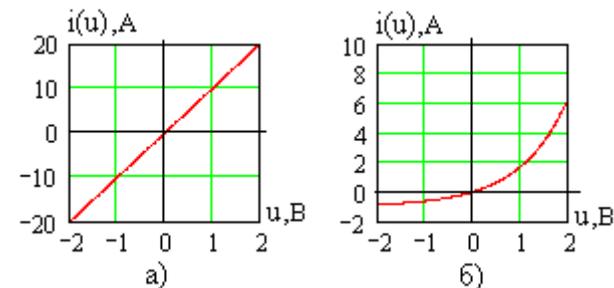


Рис. 1.2

Элементы с прямолинейной ВАХ называют линейными, а иначе – нелинейными. Аналогично рассматриваются емкостные элементы, для которых используют кулон – вольтную характеристику (зависимость накопленного заряда от приложенного напряжения), и индуктивные с использованием вебер – амперной характеристики (зависимости магнитного потока от протекающего через элемент тока).

1.4. Модели основных линейных элементов цепи

Основными линейными элементами электрической цепи являются резистор, конденсатор и катушка индуктивности. Их условно-графические обозначения показаны на рис. 1.3 (сверху указаны названия физических элементов, а внизу – их моделей).



Рис. 1.3

Сопротивление (модель резистора) в соответствии с рис. 1.4 строится на основе закона Ома в классической формулировке,

$$u = Ri \quad \text{или} \quad i = \frac{u}{R} = Gu, \quad (1.10)$$

где R - параметр модели, называемый **сопротивлением**, а G - **проводимостью**,

$$G = \frac{1}{R}. \quad (1.11)$$

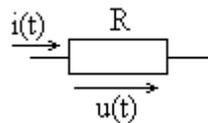


Рис. 1.4

Как видно из (1.10), сопротивление – это линейный элемент (с прямолинейной ВАХ). Его параметр - сопротивление R - измеряется в Омах (Ом) или внесистемных единицах – килоомах (кОм), мегаомах (МОм) или гигаомах (ГОм). Проводимость G определяется выражением (1.11), обратна сопротивлению и измеряется в 1/Ом. Сопротивление и проводимость элемента **не зависят** от величин тока и напряжения.

В сопротивлении ток и напряжение пропорциональны друг другу, имеют одинаковую форму.

Мгновенная мощность электрического тока в сопротивлении равна

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = Gu^2(t). \quad (1.12)$$

Как видно, мгновенная мощность в сопротивлении **не может быть отрицательна**, то есть сопротивление всегда **потребляет** мощность (энергию), преобразуя ее в тепло или другие виды, например, в электромагнитное излучение. Сопротивление – это модель диссипативного элемента, рассеивающего электрическую энергию.

Емкость (модель конденсатора) в соответствии с рис.1.5 формируется исходя из того, что накопленный в ней заряд пропорционален приложенному напряжению,

$$q(t) = Cu(t). \quad (1.13)$$

Рис. 1.5

Параметр модели – **емкость** C - не зависит от тока и напряжения и измеряется в фарадах (Ф). Величина емкости 1 Ф очень велика, на практике широко используются значения в микрофарадах (1 мкФ = 10^{-6} Ф), нанофарадах (1 нФ = 10^{-9} Ф) и пикофарадах (1 пФ = 10^{-12} Ф).

Подставляя (1.13) в (1.1), получим **модель для мгновенных значений тока и напряжения**

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.14)$$

Из (1.14) можно записать обратное выражение для модели,

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

Мгновенная электрическая мощность в емкости равна

$$p_C(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt}. \quad (1.16)$$

Если напряжение положительно и увеличивается с течением времени (его производная больше нуля), то мгновенная мощность **положительна** и емкость **накапливает** в себе энергию электрического поля. Аналогичный процесс имеет место, если напряжение отрицательно и продолжает уменьшаться.

Если же напряжение емкости положительно и падает (отрицательно и растет), то мгновенная мощность **отрицательна**, а емкость **отдает во внешнюю цепь** ранее накопленную энергию.

Таким образом, емкость – это элемент, накапливающий электрическую энергию (подобно банке, в которой накапливается вода, и из которой она может выливаться), **потери энергии в емкости отсутствуют**.

Накопленная в емкости энергия определяется выражением

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau)i(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t Cu(\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{Cu^2(t)}{2}. \quad (1.17)$$

Индуктивность (модель катушки индуктивности) формируется исходя из того, что потокосцепление Ψ , равное произведению магнитного потока B (в веберах) на число витков катушки n , прямо пропорционально протекающему через нее току i (рис. 1.6),

$$\Psi(t) = L \cdot i(t), \quad (1.18)$$

где L - параметр модели, который называется **индуктивностью** и измеряется в генри (Гн).

Рис. 1.6

Величина 1 Гн – это очень большая индуктивность, поэтому используют внесистемные единицы: миллигенри (1 мГн = 10^{-3} Гн), микрогенри (1 мкГн = 10^{-6} Гн) и наногенри (1 нГн = 10^{-9} Гн).

Изменение потокосцепления в индуктивности вызывает электродвижущую силу (ЭДС) самоиндукции $e(t)$, равную

$$e(t) = -L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (1.19)$$

и направленную противоположно току и напряжению, тогда $u(t) = -e(t)$ и модель катушки индуктивности для **мгновенных значений тока и напряжения** принимает вид

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}. \quad (1.20)$$

Можно записать обратное выражение модели,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (1.21)$$

Мгновенная электрическая мощность в индуктивности равна

$$p_L(t) = u(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt}. \quad (1.22)$$

Если ток положителен и растет, или отрицателен и падает, то мгновенная мощность **положительна** и индуктивность **накапливает** в себе энергию магнитного поля. Если же ток индуктивности положителен и падает (отрицателен и растет), то мгновенная мощность **отрицательна**, и индуктивность **отдает во внешнюю цепь** ранее накопленную энергию.

Таким образом, индуктивность (как и емкость) – это элемент, только накапливающий энергию, **потери энергии в индуктивности отсутствуют**.

Накопленная в индуктивности энергия равна

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau)i(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t Li(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{Li^2(t)}{2}. \quad (1.23)$$

1.5. Законы Ома для элементов цепи

Рассмотренные модели элементов электрической цепи, определяющие взаимосвязь между мгновенными значениями токов и напряжений, будем в дальнейшем называть **законами Ома** для элементов цепи, хотя собственно закон Ома относится лишь к сопротивлению.

Эти соотношения сведены в таблицу. Они являются линейными математическими операциями и относятся только к линейным элементам.

В нелинейных элементах связь между током и напряжением существенно сложнее и в целом может быть описана нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями, для которых отсутствуют общие методы решения.

Законы Ома в элементах цепи для мгновенных значений тока и напряжения

Элемент	Зависимость тока от напряжения	Зависимость напряжения от тока
R	$i(t) = \frac{u(t)}{R} = Gu(t)$	$u(t) = Ri(t) = \frac{i(t)}{G}$
L	$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$
C	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

1.6. Расчет тока и напряжения в элементах цепи

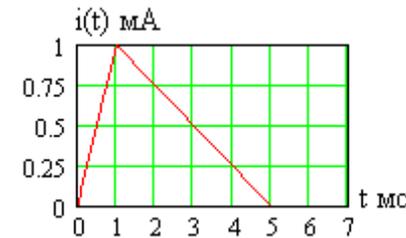


Рис. 1.7

В качестве примера проведем расчет напряжения на элементах цепи при заданной зависимости тока от времени, показанной на рис. 1.7.

Математически эту зависимость можно записать в виде

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ t & \text{при } t \geq 0, \quad t < 1 \text{ мс}, \\ 1,25 - 0,25t & \text{при } t \geq 1 \text{ мс}, \quad t < 5 \text{ мс}, \\ 0 & \text{при } t \geq 5 \text{ мс}. \end{cases} \quad (1.24)$$

Необходимо помнить, что в (1.24) время t измеряется в миллисекундах, а ток i - миллиамперах.

Тогда в показанном на рис. 1.4. сопротивлении при $R = 1$ кОм напряжение равно $u(t) = Ri(t)$ (рис. 1.8а) и мощность $p(t) = u(t)i(t)$ (рис. 1.8б). Формы временных диаграмм тока и напряжения в сопротивлении совпадают, а произведение двух прямолинейных зависимостей $u(t)$ и $i(t)$ дает параболические кривые изменения мощности $p(t)$.

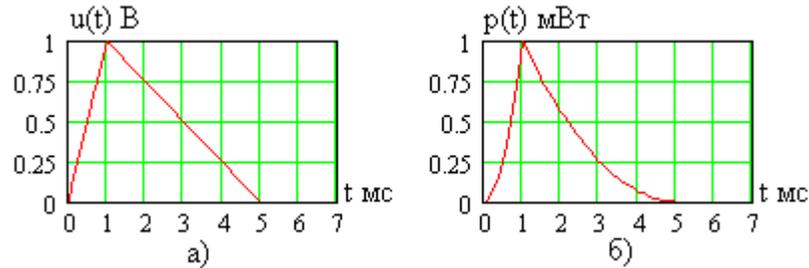


Рис. 1.8

В емкости (рис.1.5) $C = 1$ мкФ мгновенные значения тока и напряжения связаны между собой выражениями (1.14) или (1.15). Для тока (рис.1.7) вида (1.24) из

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (1.25)$$

получим формулу для напряжения на емкости в вольтах

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 0,5t^2 & \text{при } t \geq 0, \quad t < 1\text{мс}, \\ -0,625 + 1,25t - 0,125t^2 & \text{при } t \geq 1\text{мс}, \quad t < 5\text{мс}, \\ 2,5 & \text{при } t \geq 5\text{мс}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Расчет при $t < 1$ мс выполняется очевидно. При $1 \leq t < 5$

интеграл (1.25) записывается в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int_0^1 \tau d\tau + \frac{1}{C} \int_1^t (1,25 - 0,25\tau) d\tau = \\ &= \frac{10^{-6}}{10^{-6}} [0,5 + 1,25t - 1,25 - 0,125t^2 + 0,125] = \\ &= -0,625 + 1,25t - 0,125t^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

На интервале времени $t > 5$ мс интеграл (1.25) имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^1 \tau d\tau + \frac{1}{C} \int_1^5 (1,25 - 0,25\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_5^t 0 d\tau = 2,5 \quad (1.28)$$

и является константой. Временная диаграмма $u(t)$ показана на

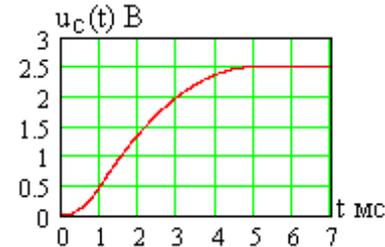


рис. 1.9. Как видно, на интервале времени $t < 5$ мс, пока действует импульс тока, происходит заряд конденсатора, а затем напряжение заряженной емкости не меняется. На рис. 1.10а показана зависимость от времени мгновенной мощности

$p(t)$

Рис. 1.9

(1.16), а на рис. 1.10б – накопленной в емкости энергии $w(t)$

(1.17). Как видно, емкость только накапливает энергию, так как разряд не происходит (ток вида рис. 1.7 принимает только положительные значения).

Для получения формулы мощности $p(t)$ необходимо перемножить выражения (1.24) и (1.26) на соответствующих временных интервалах (получим полином третьей степени t).

Энергия $w(t)$ определяется из (1.17) при подстановке (1.26), что приводит к полиномам четвертой степени t .

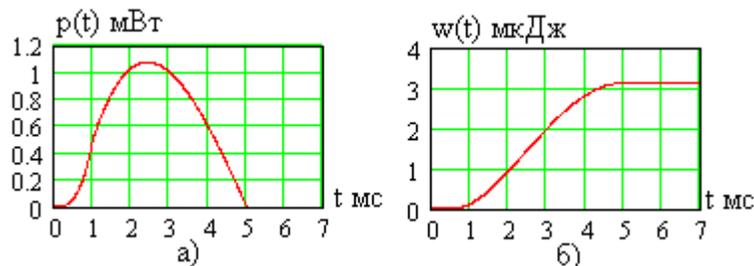


Рис. 1.10

Для индуктивности рис. 1.6 $L = 1$ Гн при токе, показанном на рис. 1.7 напряжение $u(t)$ определяется выражением (1.20)

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}, \quad (1.29)$$

тогда при подстановке (1.24) для $u(t)$ в вольтах получим

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0, \quad t < 1 \text{ мс}, \\ -0.25 & \text{при } t \geq 1 \text{ мс}, \quad t < 5 \text{ мс}, \\ 0 & \text{при } t \geq 5 \text{ мс}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Эта зависимость показана на рис. 1.11. При графическом дифференцировании прямолинейных зависимостей на рис. 1.7 получим на соответствующих интервалах времени константы, что соответствует рис. 1.11.

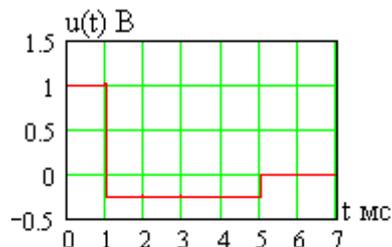


Рис. 1.11

Мощность определяется выражением (1.22), тогда для $p(t)$ в милливаттах получим

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ t & \text{при } t \geq 0, \quad t < 1 \text{ мс}, \\ -0,313 + 0,063t & \text{при } t \geq 1 \text{ мс}, \quad t < 5 \text{ мс}, \\ 0 & \text{при } t \geq 5 \text{ мс}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Зависимость $p(t)$ показана на рис. 1.12а. Накопленная в индуктивности энергия вычисляется по формуле (1.23), тогда график $w(t)$ имеет вид, показанный на рис. 1.12б.

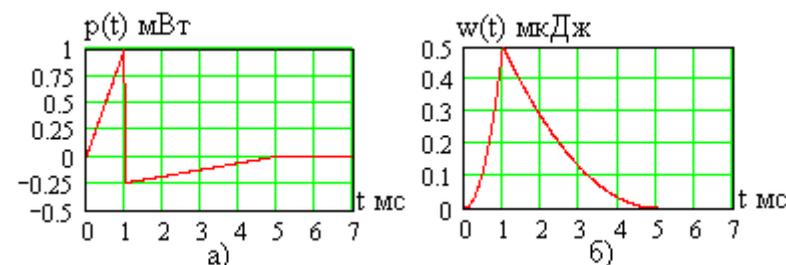


Рис. 1.12

Как видно, мгновенная мощность с ростом тока на интервале времени от 0 до 1 мс прямо пропорционально увеличивается, а накопленная в индуктивности энергия растет по квадратичному закону. Когда ток начинает падать при $1 \text{ мс} < t < 5 \text{ мс}$, то напряжение $u(t)$ и мощность $p(t)$ становятся отрицательными (рис. 1.11 и рис. 1.12а), а это означает, что индуктивность отдает ранее накопленную энергию, которая начинает снижаться по квадратичному закону (рис. 1.12б).

Расчет сигналов и энергетических характеристик в элементах цепи R, L и C можно провести с помощью программы MathCAD.

1.7. Идеальные источники сигнала

Электрические сигналы (токи и напряжения) возникают в цепи при воздействии на нее источников. Физические источники – это батареи и аккумуляторы, формирующие постоянные ток и напряжение, генераторы переменных напряжений различной формы и другие электронные устройства. На их зажимах (полюсах) возникает напряжение (разность потенциалов) и через них протекает ток за счет электрохимических процессов или других сложных физических явлений. В физике их обобщенное действие характеризуют **электродвижущей силой (ЭДС)**.

Для расчета электрических цепей необходимы **модели** источников сигнала. Простейшими из них являются идеальные источники.

Идеальный источник напряжения – это источник, напряжение $u(t)$ на полюсах которого не зависит от протекающего через источник тока $i(t)$.

Графическое изображение (обозначение) идеального источника напряжения показано на рис. 1.13 в виде окружности со стрелкой, указывающей положительное направление ЭДС $e(t)$. На полюсах источника возникает напряжение $u(t)$, которое при указанных положительных направлениях равно ЭДС,

$$u(t) = e(t). \quad (1.32)$$

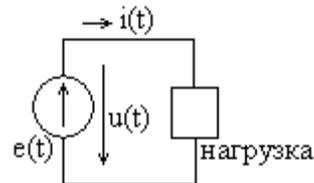
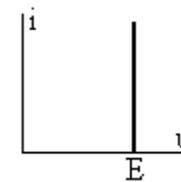


Рис. 1.13

Если изменить положительное направление ЭДС или напряжения (сделать их встречными), в формуле появится знак минус.

К источнику подключается нагрузка и тогда через нее протекает ток $i(t)$. Свойства источника постоянного напряжения или тока описываются его **вольтамперной характеристикой (ВАХ)** – зависимостью тока от напряжения $i(u)$.



его пара-

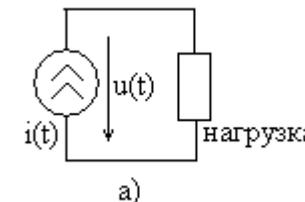
Рис. 1.14

метры. Идеальный источник напряжения с ЭДС, равной E имеет вольтамперную характеристику, показанную на рис. 1.14. Если рассматривается источник переменного сигнала, то от тока не зависят все

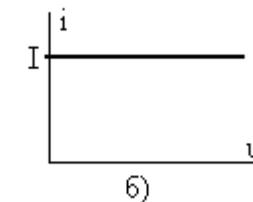
Как видно, с ростом тока при постоянном напряжении мощность, отдаваемая идеальным источником напряжения в нагрузку, стремится к бесконечности. Это является следствием выбранной идеальной модели (формы ВАХ) и ее недостатком, так как любой физический источник не может отдать бесконечную мощность.

Идеальный источник тока – это источник, который вырабатывает ток $i(t)$, не зависящий от напряжения $u(t)$ на его полюсах.

Графическое изображение идеального источника тока $i(t)$ показано на рис. 1.15а в виде окружности, внутри которой указано положительное направление тока. При подключении нагрузки на полюсах источника возникает напряжение $u(t)$ с указанным положительным направлением.



а)



б)

Рис. 1.15
20

На рис. 1.15б показана ВАХ идеального источника постоянного тока I . И для этой модели с ростом напряжения мощность, отдаваемая источником в нагрузку, стремится к бесконечности.

1.8. Основы топологического описания цепи

Электрической цепью называют совокупность соединенных между собой источников, потребителей и преобразователей электрической энергии, процессы в которых описываются в терминах тока и напряжения.

Физическая электрическая цепь (электронное устройство) состоит из физических элементов – резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности, диодов, транзисторов и большого числа других электронных элементов. Каждый из них имеет условно-графическое обозначение в соответствии со стандартом – единой системой конструкторской документации (ЕСКД). Соединение этих элементов между собой графически представляется **принципиальной схемой** цепи (фильтра, усилителя, телевизора). Пример принципиальной схемы транзисторного усилителя показан на рис. 1.16.

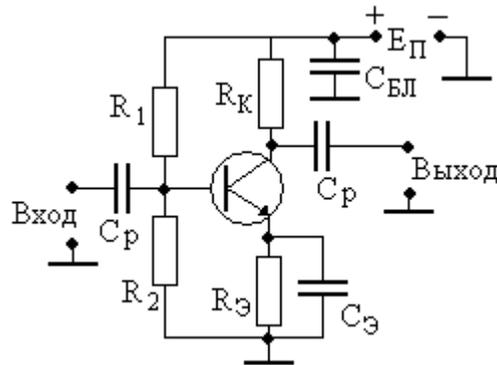


Рис. 1.16

Сейчас мы не будем обсуждать работу усилителя и на-
21

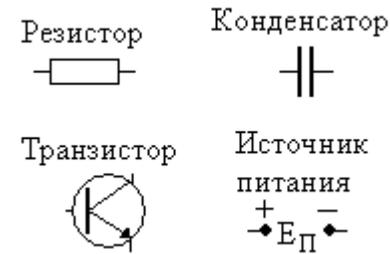


Рис. 1.17

значение его элементов, а лишь отметим условно-графические обозначения использованных элементов, которые отдельно показаны на рис. 1.17. Жирной точкой отмечены электрические соединения элементов.

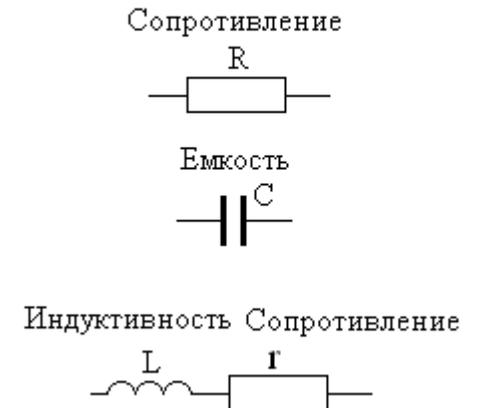
Как видно, графические обозначения резистора и конденсатора совпадают с обозначениями их моделей – сопротивления и емкости, а обозначения других отличаются.

Для расчета цепей используют их **эквивалентные схемы** или **схемы замещения**, которые показывают соединения моделей элементов, образующих электрическую цепь. Каждый физический элемент принципиальной схемы заменяется соответствующей моделью, которая может состоять из одной или нескольких простейших идеальных моделей (сопротивления, емкости, индуктивности или источников сигнала). Примеры моделей физических элементов показаны на рис. 1.18.

Физические элементы



Модели



Резистор и конденсатор чаще всего представляются своими идеальными моделями с теми же условно-графическими обозначениями. Катушка индуктивности может быть представлена идеальной индуктивностью, однако в ряде случаев необходимо учитывать ее сопротивление потерь r . В этом случае модель катушки индуктивности представляется последовательным соединением идеальной индуктивности и сопротивления, как показано на рис. 1.18.

На рис. 1.19 в качестве примера показаны принципиальная схема параллельного соединения катушки индуктивности и конденсатора (такую цепь называют параллельным колебательным контуром) и эквивалентная схема этой цепи (катушка индуктивности заменена последовательным соединением идеальной индуктивности и сопротивления).

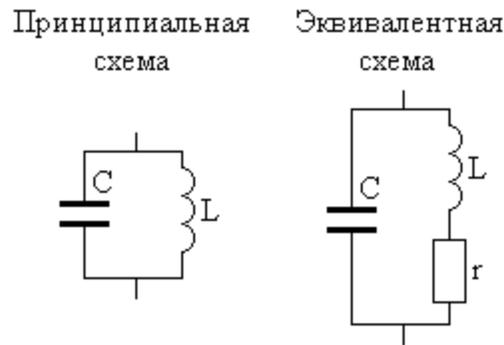


Рис. 1.19

Эквивалентная схема цепи является ее **топологическим описанием**. С геометрической точки зрения в нем можно выделить следующие основные элементы:

- **ветвь** – последовательное соединение нескольких, в том числе и одного, двухполюсных элементов, в том числе и источников сигнала;
- **узел** - точка соединения трех и более ветвей;
- **контур** – замкнутое соединение двух и более ветвей.

На рис. 1.20 показан пример эквивалентной схемы цепи с обозначением ветвей, узлов (жирными точками) и контуров (замкнутыми линиями). Как видно, узел может представлять

собой не одну точку соединения, а несколько (распределенный узел, охваченный пунктирной линией).

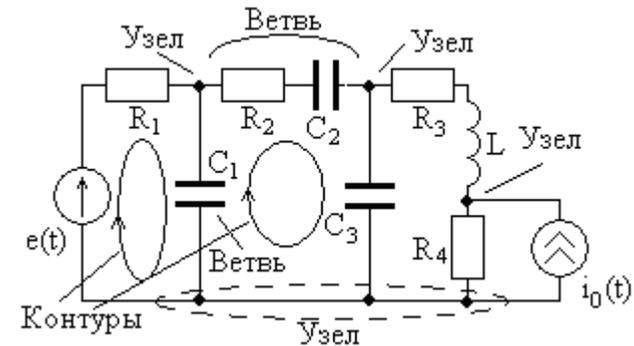


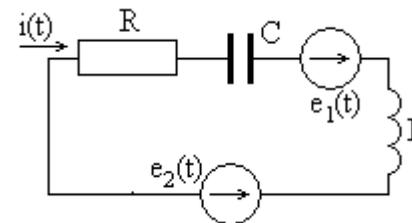
Рис. 1.20

В теории цепей существенное значение имеет число узлов эквивалентной схемы q и число ветвей p . Для цепи на рис. 1.20 имеется $q = 4$ узлов и $p = 7$ ветвей, одна из которых содержит только идеальный источник тока.

1.9. Соединения элементов цепи

Двухполюсные элементы электрической цепи могут соединяться между собой различным образом. Различают два простейших соединения: последовательное и параллельное.

Последовательным называют такое соединение двух-



полюсников, при котором через них протекает одинаковый ток. Его пример показан на рис. 1.21. В состав цепи на рис. 1.21 входят пассивные (R и C) и активные (идеальные источники напряжения $e_1(t)$ и $e_2(t)$)

эле-

Рис. 1.21

менты, через которые протекает один и тот же ток $i(t)$.

В сложной цепи (например, на рис. 1.20) можно выделять простые фрагменты (ветви) с последовательным соединением элементов (ветвь с источником $e(t), R_1$, пассивные ветви R_2C_2 и R_3L).

Не имеет смысла соединять последовательно два идеальных источника тока или идеальный источник напряжения с идеальным источником тока.

Параллельным называют соединение двух и более ветвей с одной и той же парой узлов, при этом напряжения на параллельных ветвях одинаковы. Пример показан на рис. 1.22. Если ветви содержат по одному элементу, то говорят о параллельном соединении элементов. Например, на рис. 1.22 идеальный источник тока $i(t)$ и сопротивление R_1 соединены параллельно.

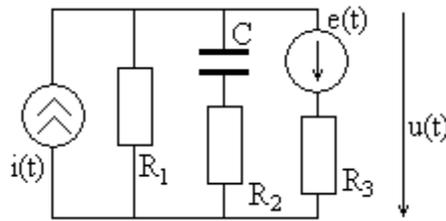


Рис. 1.22

Не имеет смысла соединять параллельно идеальные источники напряжения или идеальный источник напряжения с идеальным источником тока.

Смешанным называют соединение элементов (ветвей) цепи, которое нельзя рассматривать как последовательное или параллельное. Например, схема на рис. 1.21 является последовательным соединением элементов, а на рис. 1.22 – параллельным соединением ветвей, хотя в ветвях R_2C и $e(t)R_3$ элементы соединены последовательно.

Схема на рис. 1.20 является типичным представителем смешанного соединения, и в ней можно выделить лишь от-

дельные фрагменты с простыми соединениями.

1.10. Законы Кирхгофа для мгновенных значений сигналов

Два закона Кирхгофа устанавливают **уравнения электрического равновесия** между токами в узлах и напряжениями в контурах цепи.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных значений сходящихся к узлу токов равна нулю. Количество уравнений равно **числу узлов минус единица**

Под алгебраическим суммированием понимают сложение или вычитание соответствующих величин.

Можно использовать и другую формулировку первого закона Кирхгофа: **сумма мгновенных значений втекающих в узел токов равна сумме мгновенных значений вытекающих токов.**

Пример схемы цепи показан на рис. 1.23, она повторяет схему на рис. 1.20 с указанием положительных направлений и обозначений токов и напряжений во всех элементах, а также номеров узлов (в кружках).

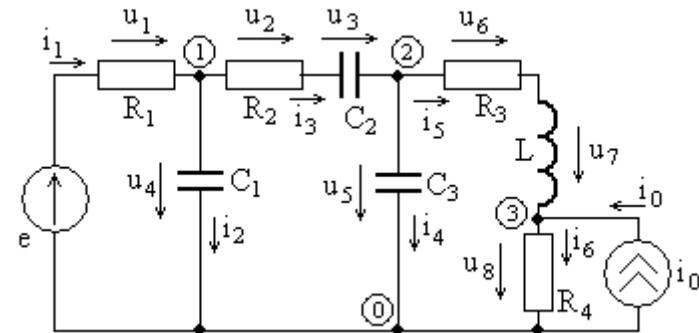


Рис. 1.23

26

В цепи четыре узла и для каждого из них можно записать уравнение первого закона Кирхгофа для мгновенных значений токов ветвей,

$$\text{- узел 0 : } -i_1 + i_2 + i_4 + i_6 - i_0 = 0;$$

$$\text{- узел 1 : } i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$\text{- узел 2 : } i_3 - i_4 - i_5 = 0;$$

$$\text{- узел 3 : } i_5 - i_6 + i_0 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что если просуммировать уравнения для узлов 1 ÷ 3 и умножить результат на -1, то получим уравнение для узла 0. Следовательно, одно из уравнений (любое) линейно зависимо от остальных, и должно быть исключено. Таким образом, система уравнений по первому закону Кирхгофа для цепи рис. 1.23 (исключен узел 0) может быть записана в виде

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ i_3 - i_4 - i_5 = 0, \\ i_5 - i_6 + i_0 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, можно записать и другие варианты этой системы уравнений, но все они будут эквивалентны.

Физическим обоснованием первого закона Кирхгофа является принцип не накопления заряда в узле цепи. В любой момент времени заряд, поступивший в узел от втекающих токов должен быть равен заряду, покидающему узел за счет вытекающих токов.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС идеальных источников напряжения, включенных в этот контур.

27

Для выбора знаков в алгебраических суммах необходимо задать положительное направление обхода контура (чаще всего его выбирают по часовой стрелке). Тогда, если направление напряжения или ЭДС совпадает с направлением обхода, то в алгебраической сумме записывается знак плюс, а иначе – знак минус.

Количество уравнений по второму закону Кирхгофа равно числу независимых контуров цепи, не содержащих идеальные источники тока. Оно определяется выражением

$$n = p' - q + 1, \quad (1.33)$$

где p' - число ветвей без идеальных источников тока, а q - число узлов.

Независимыми называют контуры, которые отличаются друг от друга хотя бы одной ветвью.

В схеме на рис. 1.23 $p = 7$, $p' = 6$ (одна ветвь содержит идеальный источник тока) и $q = 4$. Тогда в ней имеется $n = p' - q + 1 = 3$ независимых контура. Как видно, общее число контуров существенно больше n .

Выберем следующие независимые контуры:

- e, R₁, C₁,

- $C_1, R_2, C_2, C_3,$
- $C_3 R_3, L, R_4,$

с положительным направлением обхода по часовой стрелке и для них запишем уравнения второго закона Кирхгофа в виде

$$\begin{cases} u_1 + u_4 = e, \\ u_2 + u_3 + u_5 - u_4 = 0, \\ u_6 + u_7 + u_8 - u_5 = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Можно выбрать и другие независимые контуры, например,

- $e, R_1, C_1,$
- $C_1, R_2, C_2, C_3,$
- $e, R_1, R_2, C_2, C_3,$

и для них записать уравнения второго закона Кирхгофа, которые будут эквивалентны системе (1.34).

Второй закон Кирхгофа базируется на фундаментальном законе природы – законе сохранения энергии. Сумма напряжений на элементах замкнутого контура равна работе по переносу единичного заряда в пассивных элементах контура, а сумма ЭДС – работе сторонних сил в идеальных источниках напряжения по переносу в них того же единичного заряда. Так как в результате заряд возвратился в исходную точку, то эти работы должны быть одинаковы.

1.11. Реальные источники сигнала

Рассмотренные выше идеальные источники напряжения и тока не всегда пригодны для формирования адекватных моделей электронных устройств. Основная причина этого - возможность передачи ими в нагрузку бесконечной мощности. В

этом случае используют усложненные модели источников сигнала, которые называют реальными.

Эквивалентная схема (модель) реального источника напряжения показана на рис. 1.24. В ее состав входят идеальный источник напряжения $e(t)$ и внутреннее сопротивление реального

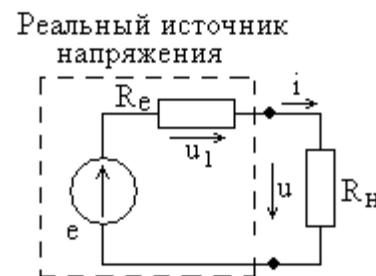


Рис. 1.24

29

ного источника R_e . К источнику подключено сопротивление нагрузки R_H . По второму закону Кирхгофа можно записать

$$u_1 + u = e, \quad (1.35)$$

а по закону Ома для сопротивления R_e

$$u_1 = i \cdot R_e. \quad (1.36)$$

Подставляя (1.36) в (1.35) получим

$$i \cdot R_e + u = e,$$

откуда следует уравнение для вольт-амперной характеристики реального источника напряжения

$$i = \frac{e - u}{R_e}, \quad (1.37)$$

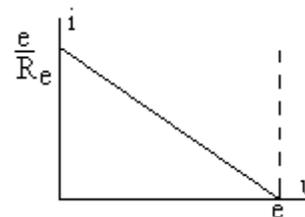


график которой для постоянных значений тока и напряжения приведен на рис. 1.25. Пунктирной линией по-

казана вольтамперная характеристика идеального источника напряжения. Как видно, в реальном источнике максимальный ток ограничен, а

Рис. 1.25 значит отдаваемая им мощность не может быть бесконечной.

30

При постоянном напряжении мощность, отдаваемая реальным источником (рис. 1.24) в нагрузку, равна

$$P = u \frac{e - u}{R_e}. \quad (1.38)$$

Зависимость $P(u)$ при $e = 10\text{В}$ и $R_e = 1000\text{Ом}$ показана на рис. 1.26. Как видно, максимальная мощность реального источника ограничена и равна $e^2/4R_e$ при $u = e/2$.

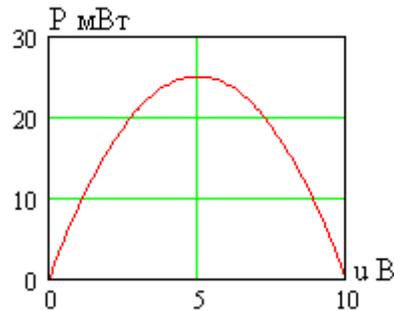


Рис. 1.26

Вольтамперная характеристика реального источника напряжения при $R_e = 0$ стремится к характеристике идеального источника рис. 1.14. Таким образом, можно определить идеальный источник напряжения как реальный источник с нулевым внутренним сопротивлением (внутреннее сопротивление идеального источника напряжения равно нулю).

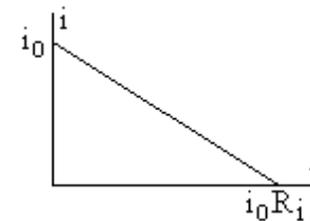
Эквивалентная схема реального источника тока показана на рис. 1.27. В ее состав входит идеальный источник тока i_0 и внутреннее сопротивление R_i , к источнику подключена нагрузка R_H . Уравнение первого закона Кирхгофа для одного из узлов цепи рис. 1.27 имеет вид



$$i + i_1 = i_0. \quad (1.39) \quad \text{Рис. 1.27}$$

По закону Ома $i_1 = u/R_i$, тогда из (1.39) получим выражение для вольт-амперной характеристики реального источника тока

$$i = \frac{i_0 R_i - u}{R_i}. \quad (1.40)$$



янного

Рис. 1.28

Для постоянного тока эта зависимость показана на рис. 1.28. Как видно, максимальное напряжение, выдаваемое источником в нагрузку, ограничено величиной $i_0 R_i$ при бесконечном сопротивлении нагрузки. Мощность постоянного тока, отдаваемая в нагрузку, равна

$$P = u \frac{i_0 R_i - u}{R_i}. \quad (1.41)$$

Она имеет вид, аналогичный рис. 1.26, соответствующий график при $i_0 = 10\text{мА}$ и $R_i = 1000\text{Ом}$ постройте самостоятельно. Максимум мощности достигается при $u = i_0 R_i / 2$ и равен $i_0^2 R_i / 4$.

При стремящемся к бесконечности внутреннем сопротивлении R_i вольтамперная характеристика реального источника тока стремится к характеристике идеального источника (рис. 1.156). Тогда идеальный источник можно рассматривать как реальный с бесконечным внутренним сопротивлением.

Сравнивая вольтамперные характеристики реальных

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ i_3 - i_4 - i_5 = 0, \\ i_5 - i_6 + i_0 = 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

Всего формируется $q-1$ уравнений.

34

- В цепи выбирается $n = p' - q + 1$ независимых контуров, для которых составляются уравнения второго закона Кирхгофа.

В схеме на рис. 1.29 выбранные три независимых контура отмечены круговыми линиями со стрелкой, указывающей положительное направление обхода. Для них уравнения второго закона Кирхгофа имеют вид (1.34)

$$\begin{cases} u_1 + u_4 = e, \\ u_2 + u_3 + u_5 - u_4 = 0, \\ u_6 + u_7 + u_8 - u_5 = 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Общее количество уравнений равно $n = p' - q + 1$.

Уравнения, сформированные по первому и второму законам Кирхгофа, называют **подсистемой топологических уравнений**, так как они определяются схемой (топологией) цепи. Общее количество уравнений в ней равно числу ветвей p' , не содержащих идеальные источники тока.

Совокупность подсистем компонентных и топологических уравнений образуют полную систему уравнений электрической цепи для мгновенных значений токов и напряжений, которая является полной моделью цепи.

Из компонентных уравнений нетрудно выразить все напряжения через токи ветвей, тогда для цепи на рис. 1.29 из (1.43) получим

$$\begin{cases} u_1 = i_1 R_1, \\ u_2 = i_2 R_2, \\ u_3 = \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_3(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (1.46)$$

35

$$\begin{cases} u_4 = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau, \\ u_5 = \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^t i_4(\tau) d\tau, \\ u_6 = i_5 R_3, \\ u_7 = L \frac{di_5}{dt}, \\ u_8 = i_6 R_4. \end{cases} \quad (1.46')$$

Подставляя (1.46) в уравнения второго закона Кирхгофа вида (1.45), получим систему уравнений для токов ветвей

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ i_3 - i_4 - i_5 = 0, \\ i_2 - i_6 + i_0 = 0, \\ i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau = e, \\ i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_3(\tau) d\tau + \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^t i_4(\tau) d\tau - \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau = 0, \\ i_5 R_3 + L \frac{di_5}{dt} + i_6 R_4 - \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^t i_4(\tau) d\tau = 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

Рассмотренный подход к формированию уравнений электрического равновесия цепи называют **методом токов**

ветвей. Количество полученных уравнений равно числу p' ветвей цепи, не содержащих идеальные источники тока.

Как видно, модель линейной цепи для мгновенных значений токов и напряжений вида (1.43), (1.44), (1.45) или (1.47) является **линейной системой интегро-дифференциальных уравнений.**

36

1.13. Задания для самостоятельного решения

Задание 1.1. Напряжение $u_R(t)$ на сопротивлении R изменяется, как показано на рис. 1.30. Получите выражение для напряжения емкости $u_C(t)$, постройте график $u_C(t)$ (через $u_R(t)$ необходимо определить ток $i(t)$, а затем – напряжение $u_C(t)$).

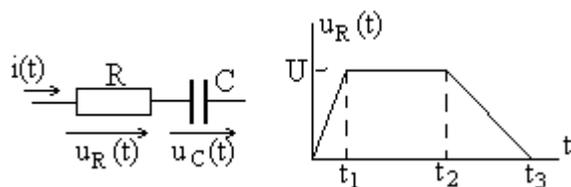


Рис. 1.30

Задание 1.2. В схемах цепей, показанных на рис. 1.31, определите число узлов и ветвей, количество уравнений по первому и второму законам Кирхгофа.

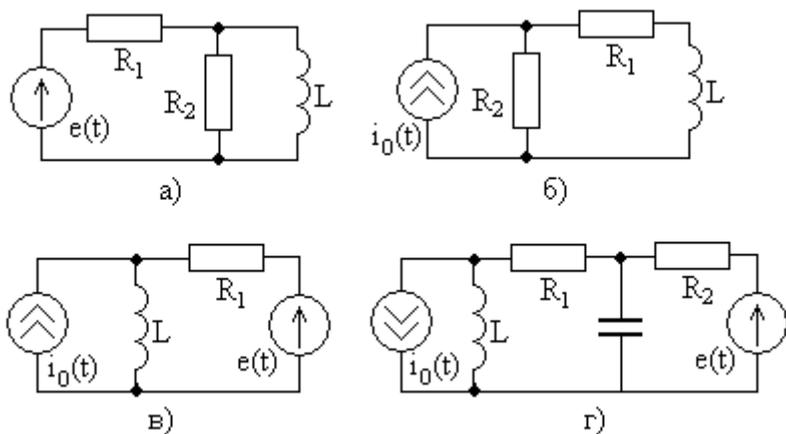


Рис. 1.31

Задание 1.3. Для цепей, эквивалентные схемы которых показаны на рис. 1.31, запишите полные системы уравнений по закону Ома, первому и второму законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений элементов.

37

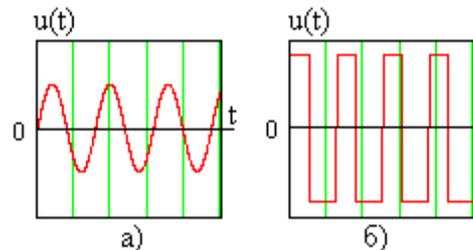
2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

2.1. Информационные сигналы

В информационных системах сигнал является материальным носителем информации. В качестве сигналов могут использоваться различные физические процессы, например, звуковые колебания, световые импульсы, намагниченность ленты в магнитофоне, электромагнитные волны и т.д. В электротехнике в качестве сигналов используются изменяющиеся во времени токи или напряжения.

Сигналы можно разделить на детерминированные и случайные. Детерминированными называют сигналы, для которых заранее известны вид функции времени и ее параметры. Для случайных сигналов либо функция времени, либо ее параметры неизвестны и могут принимать случайные значения, известны лишь распределения их вероятностей. Строго говоря, информационные сигналы всегда являются случайными функциями времени. Их анализ выходит за рамки изучаемого курса.

Детерминированные сигналы различной формы широко используются, например, как управляющие воздействия в различных электронных системах и устройствах, при измерении их характеристик. Промышленность выпускает формирователи (генераторы) таких сигналов и измерители их параметров. В частном случае в качестве сигналов рассматриваются постоянные (не меняющиеся во времени) токи и напряжения.



Примеры вре-

менных диаграмм сигналов (гармонического и последовательности прямоугольных импульсов) показаны на рис. 2.1.

Рис. 2.1

38

Переменные (меняющиеся во времени) сигналы делятся на периодические и непериодические. Периодические сигналы повторяются через промежуток времени T на интервале от $-\infty$ до $+\infty$, математически это можно записать в виде $s(t) = s(t + kT)$, где k - любое целое число. Величину T называют **периодом** сигнала, который измеряется в единицах времени. Примером являются сигналы, показанные на рис. 2.1.

Непериодические сигналы не повторяются во времени. Это могут быть случайные процессы (например, речевой сигнал с выхода микрофона), или одиночные импульсы. Одиночный импульсный сигнал появляется на ограниченном интервале времени, ни до этого, ни после сигнал не возникает. Примером может служить одиночный импульс (рис. 2.2а) или пачка из трех импульсов (рис.2.2б), их форма может быть разнообразной. Одиночные сигналы можно рассматривать как периодические с бесконечно большим периодом.

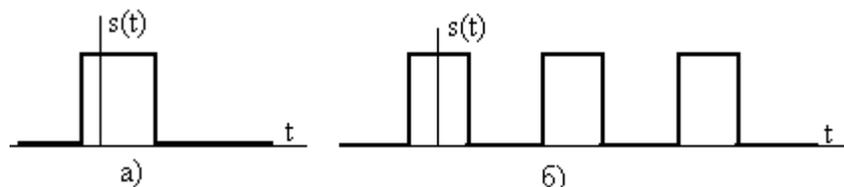


Рис. 2.2

2.2. Гармонический сигнал

Гармонический сигнал $s(t)$ **традиционно** записывают в виде

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \psi), \quad (2.1)$$

где S_m - амплитуда сигнала (индекс m от слова «максимум»), ω - круговая частота, а ψ - начальная фаза.

39

Временная диаграмма гармонического сигнала $s(t)$ показана на рис. 2.3.

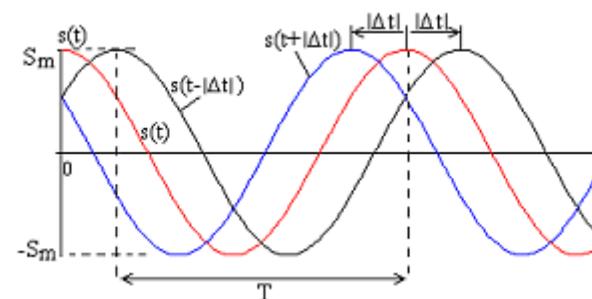


Рис. 2.3

Амплитуда гармонического сигнала – это его максимальное значение, она измеряется в единицах сигнала (вольтах для напряжения и амперах для тока).

Период T определяет **циклическую частоту** f повторения сигнала,

$$f = \frac{1}{T}, \quad (2.2)$$

измеряемую в герцах (Гц). Ее физический смысл – число периодов колебаний в секунду.

Аргумент косинуса в (2.1) вида

$$\xi(t) = \omega t + \psi \quad (2.3)$$

называют **полной фазой** колебания, она пропорциональна текущему времени и измеряется в радианах или градусах.

Круговая частота ω равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2.4)$$

и представляет собой число радиан, на которое изменяется полная фаза колебания в единицу времени (1 с).

При $t = 0$ полная фаза равна $\xi(0) = \psi$, поэтому параметр ψ называют **начальной фазой** гармонического сигнала. Она измеряется в радианах или градусах. Так как период функции $\cos(\xi)$ равен 2π или 360° , то начальная фаза оказывается многозначной величиной. Например, значения начальной фазы 30° и $(30^\circ + 360^\circ) = 390^\circ$, а также $(30^\circ - 360^\circ) = -330^\circ$ оказываются эквивалентными. В общем случае можно записать $\psi = \psi \pm k \cdot 360^\circ$ или $\psi = \psi \pm k \cdot 2\pi$, где k - целое число. Для устранения неоднозначности договариваются, что значения начальной фазы должны находиться, например, в интервале от 0 до 2π , или от $-\pi$ до π (аналогичные границы могут быть заданы в градусах).

Начальная фаза связана со смещением гармонического сигнала во времени на величину Δt относительно функции $s(t) = S_m \cos(\omega t)$, как показано на рис. 2.3. Функция $s(t + |\Delta t|)$ смещена влево относительно $s(t)$, а $s(t - |\Delta t|)$ - вправо. Положительные значения Δt отсчитываются в сторону увеличения t , а отрицательные - наоборот.

Из (2.1) можно записать

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \psi) = S_m \cos\left[\omega\left(t + \frac{\psi}{\omega}\right)\right] = S_m \cos[\omega(t - \Delta t)], \quad (2.5)$$

где смещение во времени Δt равно

$$\Delta t = -\frac{\psi}{\omega}. \quad (2.6)$$

Тогда для начальной фазы получим

$$\psi = -\omega \cdot \Delta t. \quad (2.7)$$

Как видно, начальная фаза определяется временным сдвигом Δt гармонического сигнала относительно функции $s(t) = S_m \cos(\omega t)$. При $\Delta t > 0$ сигнал $s(t + \Delta t)$ смещается вправо по оси времени, при этом начальная фаза $\psi < 0$, а если $\Delta t < 0$, то временная диаграмма смещается влево по оси времени, а $\psi > 0$.

Величина начальной фазы зависит от начала отсчета времени (положения точки $t = 0$). При смещении начала отсчета времени изменяется и начальная фаза.

Применительно к двум гармоническим сигналам $s_1(t) = S_m \cos(\omega t + \psi_1)$ и $s_2(t) = S_m \cos(\omega t + \psi_2)$ с разными начальными фазами ψ_1 и ψ_2 вводится в рассмотрение **сдвиг фаз** между первым и вторым сигналами,

$$\varphi = \psi_1 - \psi_2. \quad (2.8)$$

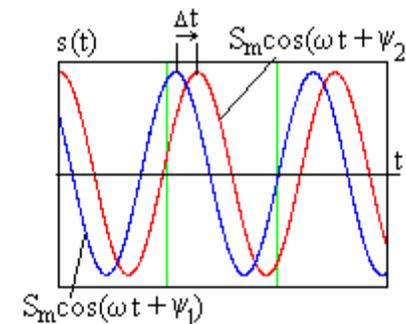


Рис. 2.4

На рис. 2.4 показаны два гармонических сигнала с начальными фазами ψ_1 и ψ_2 , причем $\psi_1 > \psi_2$ и $\varphi = \psi_1 - \psi_2 > 0$. В этом случае говорят, что первый сигнал **опережает по фазе** второй или второй сигнал **отстает по фазе** от первого. Сдвиг фаз $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ связан со смещением Δt

сигналов во времени,

$$\varphi = -\omega\Delta t, \quad (2.9)$$

42

положительные значения временного сдвига отсчитываются в направлении оси времени. Гармоническое колебание может быть задано в нетипичной форме, которую необходимо преобразовать к виду (2.1), иначе начальная фаза оказывается неопределенной. Примеры преобразования показаны в таблице.

Исходный сигнал	Преобразованный сигнал	Начальная фаза
$S_m \sin(\psi t + \psi)$	$S_m \cos(\psi t + \psi - \pi/2)$	$\psi - \pi/2$
$-S_m \sin(\psi t + \psi)$	$S_m \cos(\psi t + \psi + \pi/2)$	$\psi + \pi/2$
$-S_m \cos(\psi t + \psi)$	$S_m \cos(\psi t + \psi \pm \pi)$	$\psi \pm \pi$

2.3. Измерение параметров гармонического сигнала с помощью электронного осциллографа

Параметры гармонического сигнала можно определить экспериментально с помощью электронного осциллографа. На рис. 2.5 показан пример наблюдаемой на экране осциллограммы, на которой отображается временная диаграмма наблюдаемого сигнала и задана координатная сетка.

Шаг сетки по вертикали равен 1 В на деление, а амплитуда составляет 2,7 деления, следовательно, ее величина равна $U=2,7$ В. По горизонтали на оси времени шаг сетки 1 мс на одно деление, период сигнала

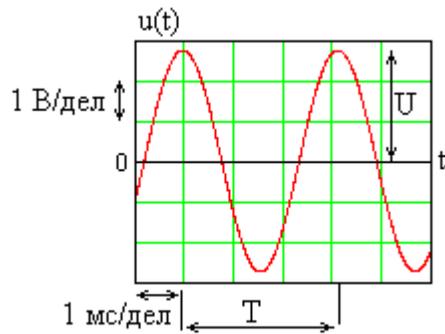


Рис. 2.5

нала равен 3,1 деления, то есть $T=3,1$ мс. При измеренном периоде нетрудно опреде-

лить циклическую частоту сигнала

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,1 \cdot 10^{-3}} = 323 \text{ Гц}$$

и круговую частоту

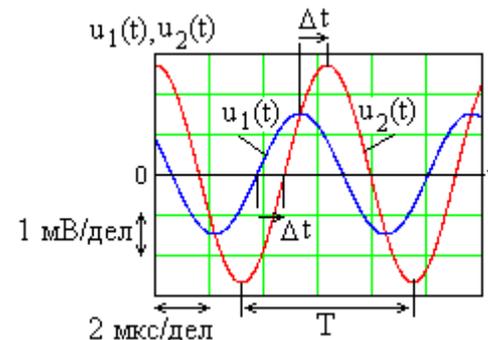
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3,1 \cdot 10^{-3}} = 2,03 \cdot 10^3 \text{ рад/с.}$$

При определении амплитуды необходимо устанавливать нулевой уровень напряжения. Удобнее измерять расстояние по вертикали между максимальным и минимальным значениями сигнала, которое называют **размахом**. Для гармонического сигнала размах равен удвоенной амплитуде.

Начальная фаза сигнала может быть определена только при условии задания начала отсчета времени – точки $t = 0$. Однако это начало отсчета условно (может быть задано в любой момент времени), поэтому осциллографическое измерение начальной фазы гармонического сигнала практически не имеет смысла.

Совершенно иная ситуация возникает при измерении сдвига фаз между двумя гармоническими сигналами с одинаковой частотой. При этом на экране осциллографа должны наблюдаться две временных диаграммы измеряемых гармонических напряжений, как показано на рис. 2.6.

Взаимное смещение Δt сигналов на экране осциллографа не зависит от начала отсчета времени. Это позволяет экспериментально определить фазовый сдвиг φ одного



сигнала относительно

Рис. 2.6

другого, который выбран

44

в качестве опорного.

Если необходимо определить сдвиг фаз напряжения $u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$ относительно выбранного в качестве опорного напряжения $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \psi_2)$, то по временной диаграмме рис. 2.6 получим, что смещение во времени сигнала $u_1(t)$ равно $\Delta t = -0.5$ деления или $\Delta t = -1$ мкс (знак минус означает, что сигнал смещен относительно опорного влево, то есть раньше во времени).

Период T гармонических колебаний на рис. 2.6 равен 6,28 мкс, а круговая частота соответственно

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^6 \text{ рад/с,}$$

тогда из (2.9) получим величину сдвига фаз $\varphi = \psi_1 - \psi_2 = -\omega \Delta t = 1$ рад. Как видно, напряжение $u_1(t)$ опережает по фазе опорное напряжение $u_2(t)$ на 1 рад или 57° .

Если в качестве опорного напряжения выбрать $u_1(t)$, то временной сдвиг от него второго сигнала $u_2(t)$ будет равен $\Delta t = 1$ мкс, а сдвиг фаз $\varphi = \psi_2 - \psi_1 = -1$ рад или -57° . Это означает, что напряжение $u_2(t)$ отстает по фазе от $u_1(t)$ на 1 рад.

Временной сдвиг напряжения $u_1(t)$ относительно $u_2(t)$ на рис. 2.6 можно оценивать и так, как показано на рис. 2.7, при этом $\Delta t = 2,64$ деления или 5,28 мкс. При этом новое значение Δt оказывается больше полученного ранее на величину периода T , а сдвиг фаз равен $\varphi = \psi_1 - \psi_2 = -\omega \Delta t = -5,28$ рад.

В результате оказывается, что напряжение $u_1(t)$ отстает по фазе от опорного сигнала $u_2(t)$ на угол 5,28 рад, что эквивалентно полученному ранее результату, так как отличается от

него на величину 2π .

45

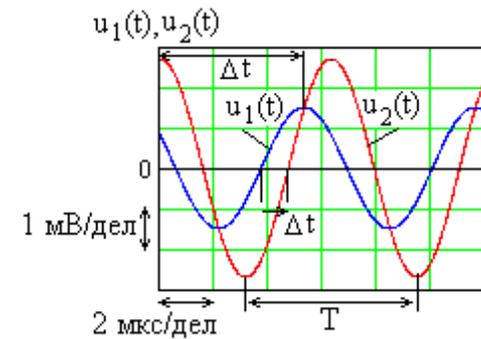


Рис. 2.7

Для обеспечения однозначности фазового сдвига его величину обычно выбирают в интервале от $-\pi$ до π или $\pm 360^\circ$.

2.4. Последовательность прямоугольных импульсов

В электронной технике широкое распространение получили последовательности импульсов прямоугольной формы. На рис.2.8 показаны примеры однополярных (рис. 2.8а) и двухполярных (рис. 2.8б) прямоугольных импульсов.

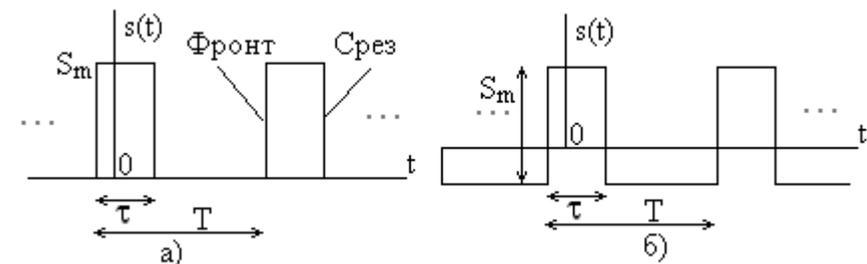


Рис. 2.8

Сигнал в виде последовательности прямоугольных импульсов характеризуется тремя основными параметрами:

- амплитудой S_m , измеряемой в вольтах или амперах;
- длительностью τ ;

- периодом повторения T .

46

На практике часто используется частота повторения импульсов $f = 1/T$, измеряемая в герцах (Гц).

Переход сигнала от нижнего уровня к верхнему называют **фронтом**, а от верхнего уровня к нижнему – **срезом**.

У прямоугольных импульсов длительности фронта $\Delta t_{\text{ФР}}$ и среза $\Delta t_{\text{СР}}$ равны нулю. На практике их длительность конечна, как показано на рис. 2.9.

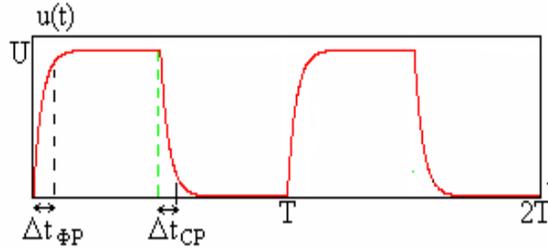


Рис. 2.9

2.5. Числовые характеристики (значения) сигналов

Детерминированный периодический сигнал $s(t)$ - ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$ - полностью описывается соответствующей функцией времени. Значения $s(t)$ называют **мгновенными**. Например, мгновенные значения гармонического тока $i(t) = 5 \cos(10^6 t + 30^\circ)$ мА.

В инженерной практике широко используются различные его числовые характеристики.

Частота повторения (циклическая) $f = 1/T$, измеряется в герцах.

Амплитуда (измеряется в единицах сигнала - вольтах или амперах):

- для гармонического сигнала – его максимальное значение или половина размаха (разности между максимальным и минимальным значениями);
- для импульсного сигнала амплитуда обычно определя-

ется как разность между максимальным и минимальным значениями (амплитуда равна размаху).

47

Среднее значение (постоянная составляющая) сигнала S_{CP} определяется выражением

$$S_{CP} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt. \quad (2.10)$$

Для гармонического сигнала среднее значение равно нулю и не является информативным, а для последовательности прямоугольных импульсов, показанных на рис. 2.8а, из (2.10) получим

$$S_{CP} = \frac{S_m \tau}{T}. \quad (2.11)$$

Среднее значение сигнала характеризует постоянную компоненту, которая может присутствовать в произвольном переменном сигнале.

Действующее значение сигнала равно

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}. \quad (2.12)$$

Оно определяется из энергетических соображений. Если сопротивление цепи активно и равно $R=1$ Ом, то напряжение $u(t) = Ri(t)$ равно току $i(t)$, а средняя мощность P_{CP} периодического сигнала согласно (1.8) определяется выражением

$$P_{CP} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Ri(t)u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt, \quad (2.13)$$

то есть соответствует среднему квадрату сигнала.

48

Согласно (1.9) для постоянных тока I и напряжения $U = R \cdot I$ при $R = 1$ Ом мощность P равна

$$P = I \cdot U = I^2 = U^2 = S^2, \quad (2.14)$$

где S - значение тока или напряжения. Приравнявая (2.13) и (2.14), получим

$$S = S_D = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}. \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что действующее значение переменного сигнала – это такое эквивалентное значение постоянного тока или напряжения, которое выделяет в нагрузке (сопротивлении R) ту же мощность, что и исходный переменный сигнал.

Для гармонического сигнала $s(t) = S_m \cos(\omega t + \psi)$ из (2.15) получим

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} = \frac{S_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot S_m. \quad (2.16)$$

Для последовательности прямоугольных импульсов, показанной на рис. 2.8а нетрудно показать, что

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} = S_m \sqrt{\frac{\tau}{T}}. \quad (2.17)$$

Эти расчеты проведите самостоятельно.

49

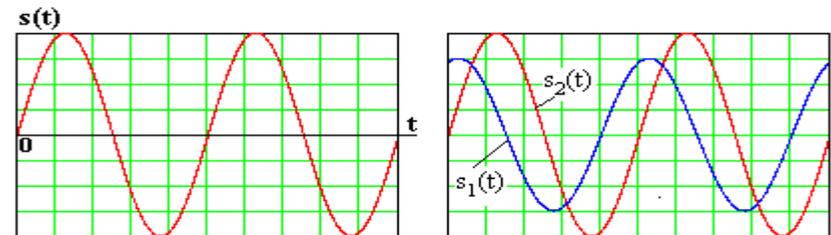
Действующие значения переменных сигналов различной формы являются их энергетическим эквивалентом. Они широко распространены в инженерной практике. Шкалы практически всех амперметров и вольтметров переменного тока градуируются в действующих значениях гармонического сигнала. Напряжение электрической сети дома в розетке или в лаборатории, равное 220 В – это действующее значение гармонического напряжения с частотой 50 Гц, а его амплитуда U_m согласно (2.16) равна $U_m = 220\sqrt{2} = 311$ В.

Необходимо иметь в виду, что если с помощью амперметра или вольтметра переменного тока (например, тестера) измеряется негармонический сигнал (последовательность прямоугольных импульсов), то показание прибора (действующее значение напряжения) будет ошибочным.

2.6. Задания для самостоятельного решения

Задание 2.1. На рис. 2.10а показан гармонический сигнал, масштаб по горизонтали 0,2 мкс/деление, а по вертикали 0,5 В/деление. Определите период, частоту повторения (в герцах и радианах, деленных на секунду) и начальную фазу (в радианах и градусах). Запишите формулу сигнала.

Задание 2.2. На рис. 2.10б показан наблюдаемый на экране осциллографа гармонический сигнал.



а)

б)

Рис. 2.10
50

Определите сдвиг фаз первого колебания относительно второго при тех же значениях цены деления сетки, что и в задании 2.1.

Задание 2.3. На рис. 2.11 показана осциллограмма импульсного сигнала, масштаб по горизонтали 0,2 мкс/деление, а по вертикали 0,2 В/дел. Определите период и частоту повторения сигнала, его длительность. Вычислите среднее и действующее значения сигнала.

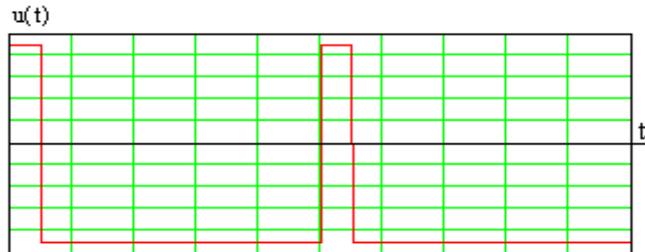


Рис. 2.11

Задание 2.4. Чему равны амплитуда, действующее значение и начальная фаза сигналов:

$$u(t) = 5 \cdot \cos(1000 \cdot t + 1) \text{ В},$$

$$i(t) = 10 \cdot \cos(20000 \cdot t - \pi/2) \text{ А},$$

$$u(t) = -4 \cdot \sin(1000 \cdot t - 10^0) \text{ В}.$$

Задание 2.5. Чему равны сдвиги фаз сигнала $s_1(t)$ относительно $s_2(t)$:

$$1) s_1(t) = 5 \cdot \cos(1000 \cdot t + 30^0), s_2(t) = -10 \cdot \cos(1000 \cdot t + 30^0);$$

$$2) s_1(t) = 5 \cdot \sin(1000 \cdot t + 30^0), s_2(t) = 5 \cdot \cos(1000 \cdot t + 30^0);$$

$$3) s_1(t) = 10 \cdot \cos(1000 \cdot t - \pi/2), s_2(t) = -10 \cdot \cos(1000 \cdot t + \pi/2);$$

$$4) s_1(t) = 5 \cdot \sin(1000 \cdot t + 1), s_2(t) = -10 \cdot \sin(1000 \cdot t + 2).$$

51

3. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

3.1. Модель цепи постоянного тока

Если в электрической цепи действуют постоянные напряжения и протекают постоянные токи, то модели реактивных элементов L и C существенно упрощаются.

Модель сопротивления R остается прежней и связь между напряжением U и током I определяется законом Ома в виде

$$U = RI \quad \text{или} \quad I = U/R. \quad (3.1)$$

В идеальной индуктивности мгновенные значения напряжения и тока связаны соотношением

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (3.2)$$

Для постоянного тока $i(t) = I = const$ его производная по времени равна нулю, следовательно постоянное напряжение на индуктивности равно нулю и ее можно заменить **коротким замыканием** (проводником).

Аналогично в емкости связь между мгновенными значениями напряжения и тока определяется в виде

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Для постоянного напряжения $u(t) = U = const$ его производная по времени равна нулю, следовательно постоянный ток через емкость равен нулю и ее можно заменить холостым ходом (разрывом цепи).

52

Таким образом, в модели цепи постоянного тока присутствуют только сопротивления (модели резисторов) и источники сигнала, а реактивные элементы (индуктивности и емкости) отсутствуют.

3.2. Расчет цепи на основе закона Ома

Этот метод удобен для расчета сравнительно простых цепей с одним источником сигнала. Он предполагает вычисление сопротивлений участков цепи, для которых известна величина тока (или напряжения), с последующим определением неизвестного напряжения (или тока). Рассмотрим пример расчета цепи, схема которой приведена на рис. 3.1, при токе идеального источника $I = 1\text{А}$ и сопротивлениях $R_1 = 5\text{Ом}$, $R_2 = 10\text{Ом}$, $R_3 = 20\text{Ом}$. Необходимо определить токи ветвей I_1 и I_2 , а также напряжения на сопротивлениях U_1 , U_2 и U_3 .

Известен ток источника I_0 , тогда можно вычислить сопротивление цепи $R_{\text{общ}}$ относительно зажимов источника тока (параллельного соединения сопротивления R_2 и последовательно соединенных сопротивлений R_1 и R_3),

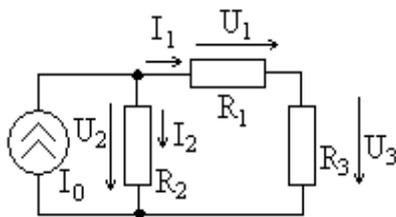


Рис. 3.1

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10(5 + 20)}{5 + 10 + 20} = 7,14\text{Ом}.$$

Тогда напряжение U_2 на источнике тока (на сопротивлении R_2) равно

$$U_2 = R_{\text{общ}} I_0 = 7,143 \cdot 1 = 7,14\text{ В}.$$

53

Затем можно найти токи ветвей

$$I_1 = \frac{U_2}{R_1 + R_3} = \frac{7,143}{5 + 20} = 0,286\text{ А},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{7,143}{10} = 0,714\text{ А}.$$

Полученные результаты можно проверить с помощью первого закона Кирхгофа в виде $I_1 + I_2 = I_0$. Подставляя вычисленные значения, получим $I_1 + I_2 = 0,286 + 0,714 = 1\text{ А}$, что совпадает с величиной тока источника.

Зная токи ветвей, нетрудно найти напряжения на сопротивлениях (величина U_2 уже найдена)

$$U_1 = R_1 I_1 = 5 \cdot 0,286 = 1,43\text{ В},$$

$$U_3 = R_3 I_1 = 20 \cdot 0,286 = 5,72\text{ В}.$$

По второму закону Кирхгофа $U_2 = U_1 + U_3$. Складывая полученные результаты, убеждаемся в его выполнении.

3.3. Общий метод расчета цепи на основе законов Ома и Кирхгофа

Общий метод расчета токов и напряжений в электрической цепи на основе законов Ома и Кирхгофа пригоден для расчета сложных цепей с несколькими источниками сигнала.

Расчет начинается с задания обозначений и положи-

тельных направлений токов и напряжений для каждого элемента (сопротивления) цепи.

Система уравнений включает в себя подсистему компонентных уравнений, связывающих по закону Ома токи и напряжения в каждом элементе (сопротивлении) и подсистему

54

топологических уравнений, построенную на основе первого и второго законов Кирхгофа.

Рассмотрим расчет простой цепи из предыдущего примера, показанной на рис. 3.1, при тех же исходных данных.

Подсистема компонентных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I_1, \\ U_2 &= R_2 I_2, \\ U_3 &= R_3 I_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В цепи имеется два узла ($q = 2$) и две ветви, не содержащие идеальных источников тока ($p' = 2$). Следовательно, необходимо записать одно уравнение ($q - 1 = 1$) по первому закону Кирхгофа,

$$I_1 + I_2 = I_0, \quad (3.5)$$

и одно уравнение второго закона Кирхгофа ($p' - q + 1 = 1$),

$$U_1 + U_3 - U_2 = 0, \quad (3.6)$$

которые и образуют подсистему топологических уравнений.

Уравнения (3.4)-(3.6) являются полной системой уравнений цепи. Подставляя (3.4) в (3.6), получим

$$R_1 I_1 + R_3 I_1 - R_2 I_2 = 0, \quad (3.7)$$

а, объединив (3.5) и (3.7), получим два уравнения с двумя неизвестными токами ветвей,

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_0, \\ R_1 I_1 + R_3 I_1 - R_2 I_2 = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

55

Выражая из первого уравнения (3.8) ток $I_2 = I_0 - I_1$ и подставляя его во второе, найдем значение тока I_1 ,

$$I_1 = \frac{R_2 I_0}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 1}{5 + 10 + 20} = 0,286 \text{ А},$$

а затем найдем $I_2 = I_0 - I_1 = 1 - 0,286 = 0,714 \text{ А}$. По вычисленным токам ветвей из компонентных уравнений (3.4) определим напряжения. Результаты расчета совпадают с полученными ранее в подразделе 3.2.

Общий метод расчета цепи по уравнениям Кирхгофа приводит к необходимости решения p' линейных алгебраических уравнений. При большом числе ветвей p' возникают математические и вычислительные трудности. Это означает, что целесообразно искать методы расчета, требующие составления и решения меньшего числа уравнений.

3.4. Метод контурных токов

Метод контурных токов базируется на уравнениях второго закона Кирхгофа и приводит к необходимости решения $p - q + 1$ уравнений, p - число всех ветвей, в том числе и содержащих идеальные источники тока.

В цепи выбираются $p - q + 1$ независимых контуров и для каждого k -го из них вводится кольцевой (замкнутый) контурный ток I_{kk} (двойная индексация позволяет отличать кон-

турные токи от токов ветвей). Через контурные токи можно выразить все токи ветвей и для каждого независимого контура записать уравнения второго закона Кирхгофа. Система уравнений содержит $p - q + 1$ уравнений, из которых определяются все контурные токи. По найденным контурным токам находят токи или напряжения ветвей (элементов).

56

Рассмотрим пример цепи на рис. 3.1. На рис. 3.2 приведена схема с указанием обозначений и положительных направлений двух контурных токов I_{11} и I_{22} ($p = 3, q = 2, p - q + 1 = 2$). Через ветвь R_1, R_3 протекает только контурный ток I_{22} и его направление совпадает с I_1 , поэтому ток ветви I_1 равен

$$I_1 = I_{22}. \quad (3.9)$$

В ветви R_2 протекают два контурных тока, ток I_{11} совпадает по направлению с I_2 , а ток I_{22} имеет противоположное направление, следовательно

$$I_2 = I_{11} - I_{22}. \quad (3.10)$$

Для контуров, не содержащих идеальные источники тока, составляем уравнения второго закона Кирхгофа с использованием закона Ома, в данном примере записывается одно уравнение

$$(R_1 + R_3)I_{22} - R_2(I_{11} - I_{22}) = 0. \quad (3.11)$$

Если в контур включен идеальный источник тока, то для него

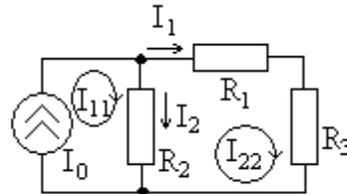


Рис. 3.2

уравнение второго закона Кирхгофа не составляется, а его контурный ток равен току источника с учетом их положительных направлений, в рассматриваемом случае

$$I_{11} = I_0. \quad (3.12)$$

57

Тогда система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_{22} - R_2(I_{11} - I_{22}) = 0 \\ I_{11} = I_0 \end{cases}. \quad (3.13)$$

В результате подстановки второго уравнения в первое получим

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_{22} = R_2I_0, \quad (3.14)$$

тогда ток I_{22} равен

$$I_{22} = \frac{R_2I_0}{(R_1 + R_2 + R_3)} = 0,286 \text{ А}, \quad (3.15)$$

а ток $I_{11} = I_0 = 1 \text{ А}$. Из (3.21) $I_1 = I_{22} = 0,286 \text{ А}$, а из (3.22) соответственно $I_2 = I_{11} - I_{22} = 0,714 \text{ А}$, что полностью совпадает с полученными ранее результатами. При необходимости по найденным значениям токов ветвей по закону Ома можно вычислить напряжения на элементах цепи.

3.5. Метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений базируется на первом законе Кирхгофа, при этом число уравнений равно $q - 1$.

В цепи выделяются все q узлов и один из них выбирается в качестве **базисного**, которому присваивается нулевой потенциал. Потенциалы (напряжения) $U_{11}, U_{22} \dots U_{(q-1)(q-1)}$

остальных $q-1$ узлов отсчитываются от базисного, их положительные направления обычно выбираются стрелкой в базисный узел. Через узловые напряжения с использованием закона Ома и второго закона Кирхгофа выражаются токи ветвей и для $q-1$ узлов записываются уравнения первого закона Кирхгофа.

58

Рассмотрим пример цепи, показанной на рис. 3.1, для метода узловых напряжений ее схема показана на рис. 3.3. Нижний узел обозначен как базисный (для этого используется символ «земля» - точка нулевого потенциала), напряжение верхнего узла относительно базисного обозначено как U_{11} . Выразим через него токи ветвей

$$\begin{cases} I_1 = \frac{U_{11}}{R_1 + R_3}, \\ I_2 = \frac{U_{11}}{R_2}. \end{cases} \quad (3.16)$$

По первому закону Кирхгофа с учетом (3.16) запишем единственное уравнение метода узловых напряжений ($q-1=1$),

$$\frac{U_{11}}{R_1 + R_3} + \frac{U_{11}}{R_2} = I_0. \quad (3.17)$$

Решая уравнение, получим

$$U_{11} = \frac{I_0 R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (3.18)$$

а из (3.16) определим токи ветвей

$$\begin{cases} I_1 = \frac{I_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ I_2 = \frac{I_0 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}. \end{cases} \quad (3.19)$$

59

Результаты совпадают с полученными ранее.

3.6. Метод наложения

Метод наложения заключается в следующем: реакция цепи (ток или напряжение) на воздействие нескольких источников равна сумме реакций на действие каждого из них в отдельности, при этом остальные источники должны быть выключены

Выключение идеальных источников означает замену:

- идеального источника напряжения коротким замыканием, так как его внутреннее сопротивление равно нулю;
- идеального источника тока холостым ходом (разрывом цепи) так как его внутреннее сопротивление стремится к бесконечности.

Расчет проводится следующим образом. В цепи, содержащей несколько источников, поочередно выбирается каждый из них, а остальные отключаются. При этом образуются цепи с одним источником, число которых равно количеству источников в исходной цепи. В каждой из них проводится расчет искомого сигнала, а результирующий сигнал определяется их суммой. В качестве примера рассмотрим расчет тока I_6 в цепи, показанной на рис. 3.4а.

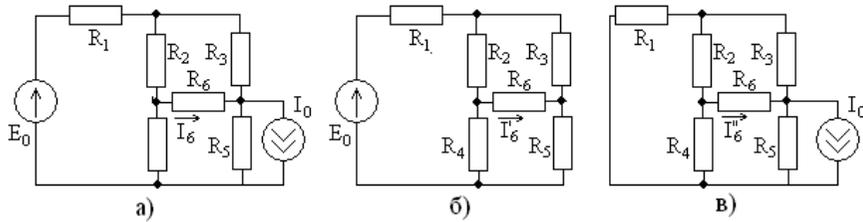


Рис. 3.4

При выключении идеального источника тока (его цепь разрывается) получается цепь, показанная на рис. 3.4б, в кото-

рой любым из рассмотренных методов определяется ток I'_6 . Затем выключается идеальный источник напряжения (он заменяется коротким замыканием) и получается цепь, показанная на рис. 3.4в, в которой находится ток I''_6 . Искомый ток I_6 равен

$$I_6 = I'_6 + I''_6.$$

Проведите аналитические и численные расчеты самостоятельно, сравните с полученными ранее результатами.

3.7. Сравнительный анализ методов расчета

Метод расчета, основанный на законе Ома, пригоден для сравнительно простых цепей с одним источником. Его нельзя использовать для анализа цепей сложной структуры с несколькими источниками.

Общий метод расчета цепи на основе уравнений законов Ома и Кирхгофа универсален, но требует составления и решения системы из $2p$ уравнений, которая легко преобразуется в систему из p уравнений. При большом числе ветвей резко возрастают вычислительные затраты, особенно при необходимости аналитических расчетов.

Методы контурных токов и узловых напряжений более

эффективны, так как приводят к системам с меньшим числом уравнений, равным соответственно $p'-q+1$ и $q-1$. При условии

$$p'-q+1 < q-1 \text{ или } p' < 2(q-1) \quad (3.20)$$

метод контурных токов эффективнее, а иначе целесообразно применять метод узловых напряжений.

Метод наложения удобен, когда при отключении источников происходит резкое упрощение цепи.

61

В системах схемотехнического моделирования цепей, например, MicroCAP или OrCAD в основном применяют метод узловых напряжений.

3.8. Задания для самостоятельного решения

Задание 3.1. С помощью закона Ома определите напряжение U в цепях, схемы которых показаны на рис. 3.5 при $E_0 = 1\text{В}$, $I_0 = 5\text{мА}$, $R_1 = 1\text{кОм}$, $R_2 = 5\text{кОм}$, $R_3 = 10\text{кОм}$.

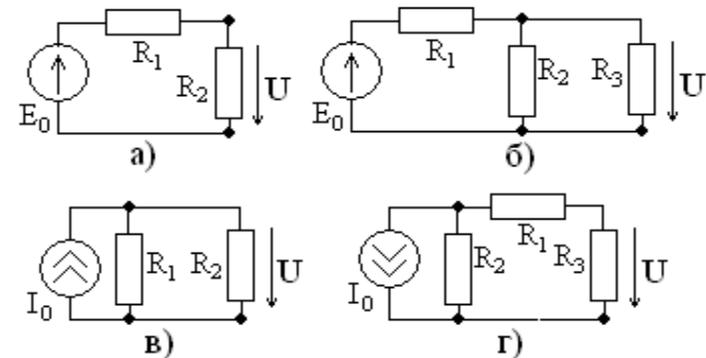


Рис. 3.5

Задание 3.2. Общим методом расчета на основе законов Ома и Кирхгофа определите ток I в цепях, схемы которых показаны на рис. 3.5 при $E_0 = 1\text{В}$, $E_1 = 4\text{В}$, $I_0 = 5\text{мА}$, $I_1 = 10\text{мА}$,

$R_1 = 1 \text{ кОм}, R_2 = 5 \text{ кОм}, R_3 = 10 \text{ кОм}.$

Задание 3.3. Методами контурных токов, узловых напряжений и наложения определите ток I в цепи, схема которой показана на рис. 3.6, параметры цепи возьмите из задания 3.1, сравните полученные результаты.

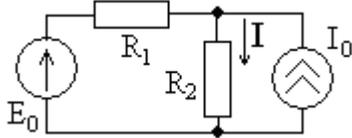


Рис. 3.6

62

4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТОКИ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

4.1. Гармонические ток и напряжение в элементах цепи

В элементах цепи $R, L,$ и C взаимосвязь произвольных мгновенных значений тока и напряжения определяется законом Ома, необходимые соотношения приведены в табл. 1.1.

Рассмотрим **гармонические** ток и напряжение на элементе Ξ (рис. 4.1) в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= U \cos(\omega t + \psi_u), \\ i(t) &= I \cos(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (4.1)$$

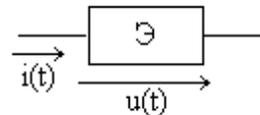


Рис. 4.1

Для **сопротивления R** можно записать

$$u(t) = Ri(t) = RI \cos(\omega t + \psi_i). \quad (4.2)$$

Сравнивая полученный результат с выражением для напряжения из (4.1), получим выражение закона Ома для амплитуд тока и напряжения.

$$U = R \cdot I, \quad (4.3)$$

и соотношение для начальных фаз

$$\psi_u = \psi_i. \quad (4.4)$$

Как видно из (4.3), амплитуды (и действующие значения) гармонических тока и напряжения в сопротивлении связаны **законом Ома** в классической формулировке прямой пропорциональности.

63

Начальные фазы тока ψ_i и напряжения ψ_u в сопротивлении **одинаковы**, сдвиг фаз φ между напряжением и током равен нулю,

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0. \quad (4.5)$$

Мгновенная мощность (1.6) гармонических сигналов в сопротивлении равна

$$p(t) = u(t)i(t) = UI \cos^2(\omega t + \psi) = \frac{UI}{2} + \frac{UI}{2} \cos(2\omega t + \psi), \quad (4.6)$$

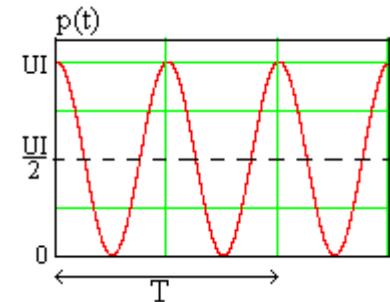


Рис. 4.2

где $\psi = \psi_i = \psi_u$. Ее зависимость от времени показана на рис. 4.2. Величина $p(t)$ **всегда положительна**, то есть сопротивление только **потребляет мощность** от источника сигнала. Это гармоническая функция времени с периодом повторения в два раза меньше периода сигнала.

Средняя мощность (1.8) гармонических сигналов в сопротивлении определяется выражением

$$P_{CP} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)dt = \frac{UI}{2} = U_D I_D, \quad (4.7)$$

где I_D и U_D - действующие значения тока и напряжения,

$$I_D = \frac{I}{\sqrt{2}}, \quad U_D = \frac{U}{\sqrt{2}}. \quad (4.8)$$

64

Это значение показано пунктирной линией на временной диаграмме рис. 4.2.

В емкости C мгновенные значения тока и напряжения связаны соотношением (табл.1.1)

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -\omega CU \sin(\omega t + \psi_u). \quad (4.9)$$

После преобразования тригонометрической функции к канонической форме гармонического сигнала получим

$$i(t) = \omega CU \cos(\omega t + \psi_u + \pi/2). \quad (4.10)$$

Сравнивая (4.10) с формулой тока из (4.1), можно записать

$$I = \omega CU, \quad (4.11)$$

$$\psi_i = \psi_u + \pi/2. \quad (4.12)$$

Введем обозначения

$$|x_C| = \frac{1}{\omega C}, \quad (4.13)$$

$$b_C = \omega C, \quad (4.14)$$

где $|x_C|$ - модуль реактивного сопротивления емкости (Ом), а b_C - реактивная проводимость емкости (См=1/Ом). Позднее увидим, что реактивное сопротивление емкости отрицательно.

Из (4.11) получим уравнения связи амплитуд (и действующих значений) гармонических тока и напряжения в емкости

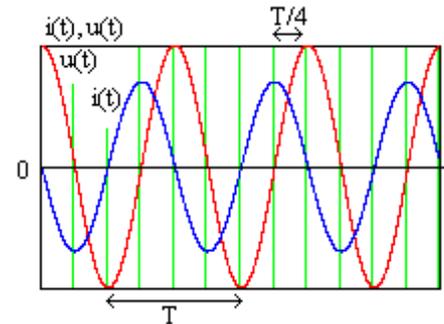
65

$$I = \omega CU = b_C U \quad \text{или} \quad U = \frac{1}{\omega C} I = |x_C| I, \quad (4.15)$$

которые представляют собой выражение закона Ома для емкости в классической формулировке прямой пропорциональности.

Из (4.12) следует, что гармонический ток в емкости опережает по фазе приложенное к ней напряжение (напряжение отстает по фазе от тока) на угол $\pi/2$ радиан или 90° . Сдвиг фаз между напряжением и током в емкости равен

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2. \quad (4.16)$$



смещением кривой тока

Рис. 4.3

емкости из (4.1) и (4.9) равна

На рис. 4.3 показаны временные диаграммы тока и напряжения в емкости. Ток $i(t)$ опережает по фазе напряжение на 90° , что отражается на временной диаграмме

влево на четверть периода. Мгновенная мощность в

$$p(t) = u(t)i(t) = -\omega CU^2 \cos(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_u),$$

а после тригонометрических преобразований получим

$$p(t) = -\frac{\omega CU^2}{2} \sin[2(\omega t + \psi_u)]. \quad (4.17)$$

Временная диаграмма мгновенной мощности показана на рис. 4.4

66

Мгновенная мощность электрических сигналов в емкости может быть положительной (емкость накапливает энергию электрического поля) и отрицательной (емкость отдает во внешнюю цепь ранее накопленную энергию). Средняя мощность гармонических сигналов в емкости равна нулю, то есть емкость не потребляет мощность от гармонического источника.

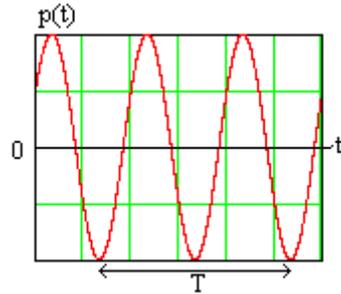


Рис. 4.4

Для индуктивности L мгновенные значения тока и напряжения связаны соотношением закона Ома из табл.1.1, тогда с учетом выражения для тока из (4.1) получим

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\omega LI \sin(\omega t + \psi_i),$$

а после преобразований

$$u(t) = \omega LI \cos(\omega t + \psi_i + \pi/2). \quad (4.18)$$

Сравнивая (4.18) с выражением для напряжения (4.1), получим уравнения связи для амплитуд (действующих значе-

ний) тока и напряжения

$$U = \omega LI \quad \text{или} \quad I = \frac{U}{\omega L} \quad (4.19)$$

и их начальных фаз

$$\psi_u = \psi_i + \pi/2. \quad (4.20)$$

Введем обозначения

67

$$x_L = \omega L, \quad (4.21)$$

$$|b_L| = \frac{1}{\omega L}, \quad (4.22)$$

где x_L - реактивное сопротивление индуктивности (Ом), а $|b_L|$ - модуль реактивной проводимости индуктивности (См=1/Ом). Позднее увидим, что реактивная проводимость индуктивности отрицательна.

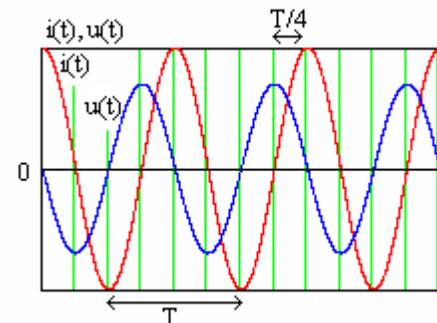
Тогда получим выражения закона Ома для амплитуд (действующих значений) тока и напряжения в индуктивности

$$I = \frac{1}{\omega L} U = |b_L| U \quad \text{или} \quad U = \omega LI = x_L I. \quad (4.23)$$

Согласно (4.20) гармонический ток в индуктивности отстает по фазе от напряжения (напряжение опережает по фазе ток) на угол $\pi/2$ радиан или 90° . Сдвиг фаз между напряжением и током в индуктивности равен

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/2. \quad (4.24)$$

Временные диа-



граммы тока и напряжения в индуктивности показаны на рис. 4.5. В отличие от аналогичных графиков для емкости на рис. 4.3 ток и напряжение

Рис. 4.5

меняются местами, кривая напряжения смещена вправо относительно тока на четверть периода, что соответствует опережению по фазе на 90° .

68

Мгновенная мощность гармонических сигналов в индуктивности равна

$$p(t) = u(t)i(t) = -\omega LI^2 \cos(\omega t + \psi_i) \sin(\omega t + \psi_i), \quad (4.25)$$

а после тригонометрических преобразований получим

$$p(t) = -\frac{\omega LI^2}{2} \sin[2(\omega t + \psi_i)]. \quad (4.26)$$

Временная диаграмма мгновенной мощности в индуктивности совпадает с показанной на рис. 4.4 для емкости.

Средняя мощность гармонических сигналов в индуктивности (как и в емкости) равна нулю, то есть индуктивность не потребляет мощность от гармонического источника.

В таблице приведены сводные результаты для гармонических сигналов в элементах цепи.

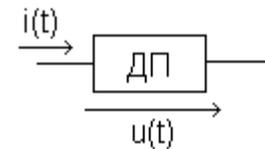
Элемент	Ток	Напряжение	Средняя мощность
R	$I = GU$	$U = RI$	$P_{CP} = \frac{UI}{2} = I_d U_d$
C	$I = \omega CU$	$U = \frac{1}{\omega C} I$	$P_{CP} = 0$
L	$I = \frac{1}{\omega L} U$	$U = \omega LI$	$P_{CP} = 0$

4.2. Средняя мощность гармонических сигналов в линейном двухполюснике

Рассмотрим двухполюсник (ДП) на рис. 4.6, через который протекает гармонический ток $i(t)$ и к которому приложено напряжение $u(t)$ вила (4.1).

69

Мгновенная мощность равна



$$p(t) = i(t)u(t) = IU \cos(\omega t + \psi_i) \cos(\omega t + \psi_u), \quad (4.27)$$

Рис.4.6

а после тригонометрических преобразований получим

$$p(t) = \frac{IU}{2} \cos(\psi_u - \psi_i) + \frac{IU}{2} \cos(2\omega t + \psi_i + \psi_u). \quad (4.28)$$

Как видно, мгновенная мощность изменяется по гармоническому закону с частотой 2ω и содержит постоянную составляющую.

Средняя мощность равна

$$P_{CP} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{UI}{2} \cos(\psi_u - \psi_i) = \frac{UI}{2} \cos(\varphi) = U_d I_d \cos(\varphi), \quad (4.29)$$

где $\varphi = \psi_u - \psi_i$ - сдвиг фаз между напряжением и током. Величину $\cos(\varphi)$ называют **коэффициентом мощности**.

Как видно, потребляемая двухполюсником мощность определяется амплитудами (действующими значениями) тока и напряжения и коэффициентом мощности. Для максимизации потребляемой мощности (например, электродвигателем) необ-

ходимо обеспечить условие $\cos(\varphi) = 1$, то есть нулевой сдвиг фаз между напряжением и током ($\varphi = 0$). Это означает, что двухполюсник должен вести себя как сопротивление R .

В чисто реактивной цепи, содержащей только индуктивности и емкости, сдвиг фаз $\varphi = \pm\pi/2$, при этом потребляемая мощность будет равна нулю при любых амплитудах тока и

70

напряжения. Полученное выражение (4.29) для средней мощности полностью согласуется со значениями P_{CP} в элементах цепи R , L и C (таблица), так как в сопротивлении $\varphi = 0$, а в индуктивности и емкости $\varphi = \pm\pi/2$.

Для расчета потребляемой двухполюсником мощности необходимо определить **амплитуды** (действующие значения) тока и напряжения и **сдвиг фаз** между ними, а затем воспользоваться выражением (4.29).

4.3. Векторная диаграмма цепи

Гармонический сигнал $s(t) = S \cos(\omega t + \psi)$ можно представить проекцией на горизонтальную ось вектора, вращающегося против часовой стрелки вокруг начала координат с круговой (угловой) частотой ω , как показано на рис. 4.7. Длина (модуль) вектора равна амплитуде гармонического сигнала S и в момент начала вращения (при $t = 0$) угол его наклона к горизонтальной оси равен начальной фазе сигнала ψ (отсчет положительных

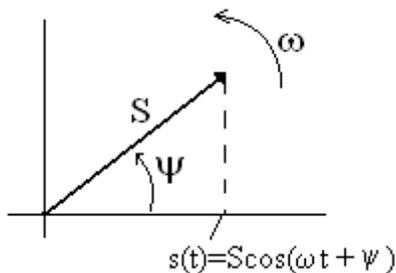


Рис. 4.7

(отсчет положительных

значений проводится против часовой стрелки).

Все гармонические токи и напряжения в цепи с одинаковой частотой, равной частоте источников сигнала, можно представить совокупностью синхронно вращающихся векторов вида рис. 4.7. Так как все векторы вращаются синхронно и между ними сохраняются амплитудные и угловые соотношения, то вращение можно остановить и рассматривать непод-

71

вижную совокупность векторов. Если вращение остановлено в момент времени $t = 0$, то угол наклона каждого вектора к горизонтальной оси равен начальной фазе соответствующего вектору гармонического сигнала.

Векторная диаграмма электрической цепи – это совокупность векторов, соответствующих гармоническим токам и напряжениям цепи, длина каждого вектора равна амплитуде (или действующему значению) сигнала, а угол наклона вектора к горизонтальной оси – начальной фазе сигнала.

Для векторного представления гармонических сигналов выполняются **законы Кирхгофа** в классической формулировке.

Рассмотрим пример RC цепи, показанной на рис. 4.8, в которой заданы положительные направления и условные обозначения всех токов и напряжений.

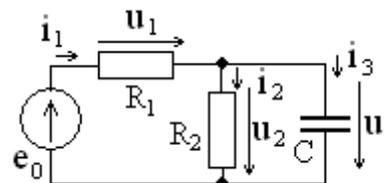


Рис. 4.8

Прежде всего, необходимо **проанализировать** структуру цепи. В ней присутствует параллельный фрагмент (соединение элементов C и R_2), который соединен последовательно с сопротивлением R_1 и источником напряжения e . Тогда построение необходимо начать с напряжения на парал-

тельном фрагменте, при этом $u_2 = u_3$, этот вектор проведем произвольно по модулю и направлению, например, горизонтально, векторная диаграмма показана на рис. 4.9.

Ток i_2 совпадает по фазе с напряжениями $u_2 = u_3$, а ток i_3 опережает их по фазе на 90° . Соответствующие векторы изображены на диаграмме рис. 4.9 с произвольной длиной и

указанными угловыми соотношениями относительно вектора $u_2 = u_3$. Векторная сумма этих токов по первому закону Кирхгофа равна току i_1 , то есть этот вектор строится исходя из векторов i_2 и i_3 . Век-

тор напряжения u_1 на сопротивлении R_1 совпадает по направлению с вектором тока i_1 и имеет произвольную длину, а вектор ЭДС e по второму закону Кирхгофа

равен сумме векторов u_1 и $u_2 = u_3$. На этом

построение «качественной» векторной диаграммы цепи заканчивается.

Если цепь содержит последовательный фрагмент, входящий в смешанное соединение, то построение целесообразно начинать с вектора тока этого фрагмента.

Векторная диаграмма электрической цепи может использоваться для иллюстрации амплитудных и фазовых соотношений между токами и напряжениями, и для формирования аналитических выражений, связывающих их амплитуды (действующие значения) и начальные фазы.

Например, для диаграммы рис. 4.9 амплитуды (дей-

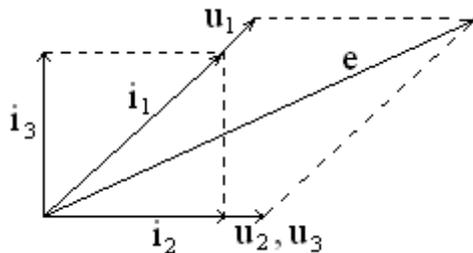


Рис. 4.9

ствующие значения) токов I_1 , I_2 и I_3 по теореме Пифагора связаны выражением $I_1 = \sqrt{I_2^2 + I_3^2}$. Для других соотношений можно использовать теорему косинусов (пример приведите самостоятельно).

Для сложной цепи построение «качественной» векторной диаграммы требует вдумчивого подхода при выборе начального вектора и способов построения остальных векторов.

73

4.4. Особенности расчета цепи с гармоническими сигналами

Мгновенные значения токов и напряжений в электрической цепи связаны между собой уравнениями законов Ома и Кирхгофа. Последние предполагают суммирование гармонических функций времени с неизвестными амплитудами и начальными фазами, например, с помощью теоремы косинусов, а это приводит к громоздким расчетам даже в относительно простых цепях. Существенно упростить расчеты можно, отказавшись от описания сигналов с помощью тригонометрических функций времени и заменив его числами, на зависящими от времени. На эту возможность указывает векторная диаграмма цепи, которая полностью отражает свойства гармонических сигналов и не зависит от времени.

Известно, что вектор, выходящий из начала координат, можно представить комплексным числом. Таким образом, в теории электрических цепей при расчете гармонических процессов возникает **метод комплексных амплитуд**.

4.5. Задания для самостоятельного решения

Задание 4.1. Постройте «качественные» векторные диаграммы цепей, показанных на рис. 4.10.

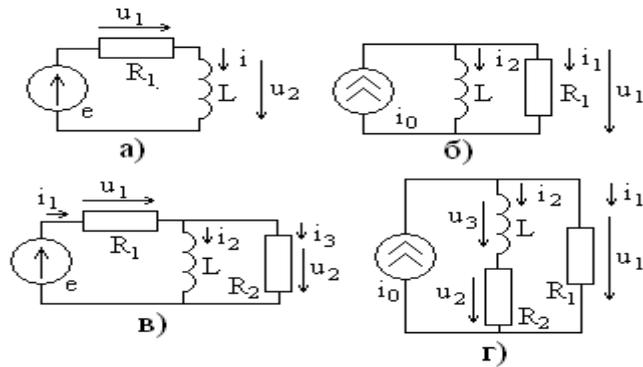


Рис. 4.10
74

5. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

5.1. Комплексная амплитуда гармонического сигнала

Для гармонического сигнала (тока или напряжения) $s(t) = S \cos(\omega t + \psi)$ **комплексная амплитуда** равна

$$\dot{S} = S \cdot e^{j\psi}, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Комплексная амплитуда является комплексным числом ($j = \sqrt{-1}$ - **мнимая единица**), определяется только амплитудой и начальной фазой сигнала и не зависит от его частоты.

Комплексная амплитуда обозначается тем же символом, что и амплитуда сигнала, но **с точкой сверху** (в литературе используются и другие маркирующие отметки, например, горизонтальная черта сверху символа).

Например, если мгновенное значение гармонического напряжения равно $u(t) = 10 \cos(\omega t + \pi/3)$ В, то его комплексная амплитуда имеет вид $\dot{U} = 10e^{j\pi/3}$ В или $\dot{U} = 10e^{j60^\circ}$ В.

Для определения комплексной амплитуды гармонического сигнала должен быть записан в **канонической форме**

$$s(t) = S \cos(\omega t + \psi). \quad (5.1)$$

Если запись сигнала отличается от формы (5.1) то необходимо провести соответствующие тригонометрические преобразования, представленные в табл. 5.1.

Таблица 5.1

$-\cos(\alpha) = \cos(\alpha \pm \pi)$	$-\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi/2)$	$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$
--	--	---------------------------------------

75

Если гармоническое напряжение имеет вид $u(t) = -5 \sin(\omega t - 40^\circ)$ мВ, то после преобразования получим $u(t) = 5 \cos(\omega t + 50^\circ)$ мВ, а комплексная амплитуда будет равна $\dot{U} = 5e^{j50^\circ}$ мВ.

5.2. Операции с комплексными числами

Комплексные числа могут быть записаны в двух формах: алгебраической и показательной.

В **алгебраической форме** комплексное число \dot{S} записывается в виде

$$\dot{S} = a + jb, \quad (5.2)$$

где a - **действительная**, а b - **мнимая** части комплексного числа, $j = \sqrt{-1}$.

В **показательной форме** комплексное число представляется выражением

$$\dot{S} = S e^{j\psi}, \quad (5.3)$$

величину $S = |\dot{S}|$ называют **модулем**, а ψ - **аргументом** комплексного числа.

От алгебраической формы можно перейти к показательной, модуль комплексного числа равен

$$S = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (5.4)$$

а аргумент

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{при } a \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Аргумент комплексного числа, как и начальная фаза гармонического сигнала (подраздел 2.2), величина многозначная, к ней можно добавить (или вычесть) 2π любое число раз. Для обеспечения однозначности аргумента комплексного числа его значения выбирают в диапазоне, например, от $-\pi$ до π или от 0 до 2π .

Показательную форму комплексного числа можно заменить алгебраической с помощью соотношений

$$\begin{aligned} a &= S \cos(\psi), \\ b &= S \sin(\psi). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Они вытекают из известной в математике **формулы Эйлера**,

$$e^{j\psi} = \cos(\psi) + j \sin(\psi). \quad (5.7)$$

Например, если комплексное число в алгебраической форме равно $\dot{S} = 2 - j4$, то в показательной форме его можно записать в виде

$$\dot{S} = 2 - j4 = \sqrt{2^2 + 4^2} e^{i \operatorname{arctg}\left(\frac{-4}{2}\right)} = 4,472 e^{-j1,107}.$$

Если комплексное число равно $\dot{S} = -2 + j4$, то в показательной форме получим

$$\dot{S} = -2 + j4 = \sqrt{2^2 + 4^2} e^{i \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{-2}\right) + \pi \right]} = 4,472 e^{j2,034}.$$

Для комплексного числа в показательной форме в виде $\dot{S} = 5e^{j30^\circ}$ его алгебраическая форма имеет вид

$$\dot{S} = 5e^{j30^\circ} = 5 \cos(30^\circ) + j5 \sin(30^\circ) = 4,33 + j2,5.$$

С комплексными числами проводятся все четыре арифметические действия.

При сложении и вычитании комплексных чисел $\dot{S}_1 = a_1 + jb_1$ и $\dot{S}_2 = a_2 + jb_2$ в алгебраической форме получим

$$\dot{S} = \dot{S}_1 \pm \dot{S}_2 = a_1 \pm a_2 + j(b_1 \pm b_2). \quad (5.8)$$

Если числа заданы в показательной форме, то перед сложением или вычитанием их необходимо преобразовать в алгебраическую форму.

Операции умножения и деления удобнее выполнять в показательной форме, когда $\dot{S}_1 = S_1 e^{j\psi_1}$ и $\dot{S}_2 = S_2 e^{j\psi_2}$, при этом при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются,

$$\dot{S}_1 \dot{S}_2 = S_1 S_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}, \quad (5.9)$$

а при делении делятся модули и вычитаются аргументы,

$$\frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} = \frac{S_1}{S_2} e^{j(\psi_1 - \psi_2)}. \quad (5.10)$$

Умножение можно провести и с алгебраической формой сомножителей по известным правилам с учетом того, что $j^2 = -1$,

$$\dot{S}_1 \dot{S}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad (5.11)$$

При делении комплексных чисел в алгебраической форме используется операция **устранения комплексности в знаменателе** путем умножения числителя и знаменателя дроби на число, **комплексно сопряженное** знаменателю. Для заданного числа $\dot{S} = a + jb$ комплексно сопряженное число \dot{S}^*

78

равно $\dot{S}^* = a - jb$, то есть отличается от \dot{S} противоположным знаком при **мнимой части**. Произведение двух комплексно сопряженных чисел всегда равно квадрату их модуля,

$$\dot{S} \cdot \dot{S}^* = a^2 + b^2. \quad (5.12)$$

Тогда при делении в алгебраической форме получим

$$\begin{aligned} \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} + j \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Рассмотрим пример $\dot{S}_1 = 2 - j3$ и $\dot{S}_2 = 4 + j2$, тогда

$$\dot{S}_1 \cdot \dot{S}_2 = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 2) + j(2 \cdot 2 - 3 \cdot 4) = 14 - j8,$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} &= \frac{2 - j3}{4 + j2} = \frac{(2 - j3)(4 - j2)}{4^2 + 2^2} = \frac{(2 \cdot 4 - 3 \cdot 2) - j(3 \cdot 4 + 2 \cdot 2)}{20} \\ &= \frac{2}{20} - j \frac{16}{20} = 0,1 - j0,8. \end{aligned}$$

Эти операции можно провести и в показательной форме, тогда

$$\dot{S}_1 = 2 - j3 = \sqrt{13} \cdot e^{-j \arctg\left(\frac{3}{2}\right)},$$

$$\dot{S}_2 = 4 + j2 = \sqrt{20} \cdot e^{j \arctg\left(\frac{2}{4}\right)}, \quad 79$$

$$\dot{S}_1 \cdot \dot{S}_2 = \sqrt{13} \sqrt{20} \cdot e^{j\left(-\arctg\left(\frac{3}{2}\right) + \arctg\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = 16,125 e^{-j0,519} = 14 - j8,$$

$$\frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{20}} \cdot e^{j\left(-\arctg\left(\frac{3}{2}\right) - \arctg\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = 0,806 e^{-j1,446} = 0,1 - j0,8.$$

Как видно, полученные результаты совпадают.

Полезно **запомнить** следующие равенства, вытекающие из формулы Эйлера (5.7),

$j = e^{j\pi/2}$	$-j = e^{-j\pi/2}$	$1 = e^{j0}$	$-1 = e^{\pm j\pi}$
------------------	--------------------	--------------	---------------------

Вычисления с комплексными числами удобно проводить на персональной ЭВМ с помощью пакета программ MathCAD.

5.3. Законы Ома и Кирхгофа для комплексных амплитуд токов и напряжений

Законы Ома и Кирхгофа применимы в своих классических формулировках для комплексных амплитуд токов и напряжений.

Закон Ома: комплексная амплитуда напряжения на участке цепи прямо пропорционально комплексной амплитуде протекающего через него тока. Для двухполюсного участка цепи его можно записать в виде

$$\dot{U} = Z\dot{I} \text{ или } \dot{I} = Y\dot{U}, \quad (5.14)$$

где Z - полное комплексное сопротивление, а Y - полная комплексная проводимость участка цепи.

80

Первый закон Кирхгофа; алгебраическая сумма комплексных амплитуд сходящихся в узле токов равна нулю,

$$\sum_{i=1}^K \dot{I}_k = 0. \quad (5.15)$$

Второй закон Кирхгофа; алгебраическая сумма комплексных амплитуд падений напряжения на элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме комплексных амплитуд ЭДС идеальных источников напряжения, включенных в этот контур,

$$\sum_{i=1}^K \dot{U}_k = \sum_{j=1}^N \dot{E}_j. \quad (5.16)$$

Знаки в алгебраических суммах определяются выбранными положительными направлениями токов и напряжений и

направлением обхода контура.

5.4. Комплексные сопротивления и проводимости элементов цепи

Значения комплексных сопротивлений Z и проводимостей Y элементов цепи R , L и C приведены в табл. 5.2 (**запомните эти формулы**).

Таблица 5.2

	R	L	C
Комплексное сопротивление Z	R	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$
Комплексная проводимость Y	$G = \frac{1}{R}$	$\frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$	$j\omega C$

81

Комплексные сопротивление и проводимость сопротивления R всегда **действительны** (мнимая часть равна нулю), а индуктивности и емкости – **мнимые** (действительная часть равна нулю).

Для комплексного сопротивления Z из закона Ома (5.14) можно записать

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} e^{j\varphi}, \quad (5.17)$$

где $\varphi = \psi_u - \psi_i$ - сдвиг фаз между напряжением и током в элементе. Для сопротивления R напряжение и ток совпадают по фазе, то есть $\varphi = 0$ и из (5.17) величина Z действительна.

В индуктивности напряжение опережает по фазе ток на 90° (на $\pi/2$ радиан), следовательно $\varphi = \pi/2$, тогда $e^{j\pi/2} = j$ и величина комплексного сопротивления индуктивности Z оказывается с **нулевой** действительной и **положительной**

мнимой частями. В емкости $\varphi = -\pi/2$, $e^{-j\pi/2} = -j$ и ее комплексное сопротивление имеет **нулевую действительную и отрицательную мнимую** части.

Аналогичный анализ проводимости элементов цепи проведите самостоятельно.

5.5. Комплексные сопротивление и проводимость участка цепи

Полные комплексные сопротивления (и проводимости) двухполюсного участка цепи с произвольным соединением элементов определяются по тем же правилам, что и для цепи постоянного тока:

- комплексное сопротивление последовательного соединения двухполюсников равно сумме их комплексных сопротивлений;

82

- комплексная проводимость параллельного соединения двухполюсников равна сумме их комплексных проводимостей.

Например, сопротивление последовательной цепи, показанной на рис. 5.1а при $R = 10 \text{ кОм}$ и $C = 100 \text{ пФ}$ на частоте $f = 80 \text{ кГц}$ равно

$$Z = R + \frac{1}{j2\pi f C} = 10 - j19,89 \text{ кОм},$$

а проводимость параллельной цепи на рис 5.1б

$$Y = \frac{1}{R} + j2\pi f C = 1 \cdot 10^{-4} + j5,027 \cdot 10^{-5} \text{ Сим.}$$

Зная комплексное сопротивление цепи, можно определить ее комплексную проводимость и наоборот,

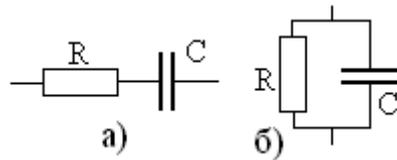


Рис. 5.1

$$Y = \frac{1}{Z}, \quad Z = \frac{1}{Y}. \quad (5.18)$$

Например, для последовательной цепи на рис. 5.1а ее проводимость равна

$$Y = \frac{1}{R + \frac{1}{j2\pi f C}} = \frac{j2\pi f C}{1 + j2\pi f C R} = \frac{j2\pi f C [1 - j2\pi f C R]}{[1 + j2\pi f C R][1 - j2\pi f C R]} = \frac{j2\pi f C [1 - j2\pi f C R]}{[1 + (2\pi f C R)^2]} = 2,017 \cdot 10^{-5} + 4,013 \cdot 10^{-5} \text{ Сим.}$$

Расчет проведен методом устранения комплексности знаменателя путем умножения числителя и знаменателя дроби на множитель, комплексно-сопряженный знаменателю.

83

Можно провести вычисление проводимости путем преобразования комплексного сопротивления из алгебраической формы в показательную,

$$Z = R - j \frac{1}{2\pi f C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2} \cdot e^{-\arctg\left(\frac{1}{2\pi f C R}\right)} = 2,227 \cdot 10^4 e^{-j1,105} \text{ Ом.}$$

Тогда для проводимости получим

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2,227 \cdot 10^4 \cdot e^{-j1,105}} = 4,491 \cdot 10^{-5} \cdot e^{j1,105} \text{ Сим.}$$

$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

Сопротивление **параллельного** соединения двух элементов с сопротивлениями Z_1 и Z_2 определяется выражением

Комплексное сопротивление цепи со смешанным соединением элементов определяется следующим образом:

- в цепи выделяется фрагмент с простым (последовательным или параллельным) соединением элементов и определяется его сопротивление или проводимость;

- фрагмент заменяется эквивалентным элементом, в полученной цепи вновь выделяется простой фрагмент и повторяется предыдущее действие;

- эти действия повторяются до тех пор, пока цепь не трансформируется в один элемент с соответствующим сопротивлением или проводимостью.

84

Рассмотрим цепь, схема которой показана на рис. 5.2 при $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$, $C = 1 \text{ нФ}$,

$\omega = 10^6 \text{ рад/с}$ и определим ее комплексное сопротивление Z . В цепи выделяется простой параллельный фрагмент из элементов $R_2 C$ и определяется его сопротивление Z_2 , равное

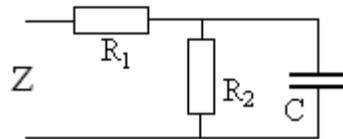


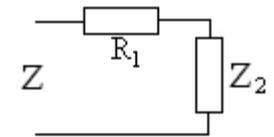
Рис. 5.2

$$Z_2 = \frac{R_2}{j\omega C \left[R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right]} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}.$$

Тогда параллельный фрагмент $R_2 C$ заменяется эквивалентным элементом с сопротивлением Z_2 и схема цепи принимает вид, показанный на рис. 5.3.

Для полученной последовательной цепи ее сопротивление Z равно

$$Z = R_1 + Z_2 = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}.$$



Подставляя исходные данные, получим

Рис. 5.3

$$Z = 10^3 + \frac{10^3}{1 + j \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}} = 10^3 + \frac{10^3}{1 + j} = 1500 - j500 \text{ Ом}.$$

5.6. Характеристики комплексного сопротивления и проводимости

Полное комплексное сопротивление Z в показательной форме можно записать в виде

85

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} e^{j\varphi}. \quad (5.19)$$

Модуль комплексного сопротивления равен отношению амплитуд (действующих значений) напряжения и тока,

$$|Z| = \frac{U}{I}. \quad (5.20)$$

Аргумент комплексного сопротивления равен **сдвигу фаз между напряжением и током**,

$$\varphi = \psi_u - \psi_i, \quad (5.21)$$

Комплексная проводимость в показательной форме имеет вид

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} e^{j(\psi_i - \psi_u)} = \frac{I}{U} e^{j\varphi}, \quad (5.22)$$

ее **модуль** равен отношению амплитуд (действующих значений) тока и напряжения,

$$|Y| = \frac{I}{U}, \quad (5.23)$$

а **аргумент** – сдвигу фаз **между током и напряжением**,

$$\varphi = \psi_i - \psi_u. \quad (5.24)$$

Таким образом, комплексное сопротивление и проводимость характеризуют взаимосвязь амплитуд и начальных фаз напряжения и тока.

86

Представим комплексное сопротивление в алгебраической форме,

$$Z = R + jX, \quad (5.25)$$

где R - **активная** а, X - **реактивная** составляющие комплексного сопротивления. Все величины в (5.25) измеряются в Омах.

Рассмотрим в качестве примера сопротивление цепи, показанной на рис. 5.2.

$$Z = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega R_2 C)^2} - j \frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega R_2 C)^2}. \quad (5.26)$$

Как видно, активная R составляющая сопротивления Z равна

$$R = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega R_2 C)^2}, \quad (5.27)$$

а реактивная X -

$$X = - \frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega R_2 C)^2}, \quad (5.28)$$

и обе зависят от частоты сигнала.

Зависимости от частоты ω активной R и реактивной X составляющих сопротивления для цепи рис. 5.2 показаны на рис. 5.4. На низких частотах $\omega \rightarrow 0$ емкость является разрывом цепи и сопротивление $Z = R_1 + R_2 = 2000$ Ом. На высоких частотах $\omega \rightarrow \infty$ емкость представляет собой короткое замыкание (ее сопротивление стремится к нулю) и сопротивление цепи равно $Z = R_1 = 1000$ Ом. И в том и другом случаях реактивное сопротивление стремится к нулю.

87

При $\omega = 10^6$ рад/с получается ранее вычисленное значение $Z = 1500 - j500$ Ом.

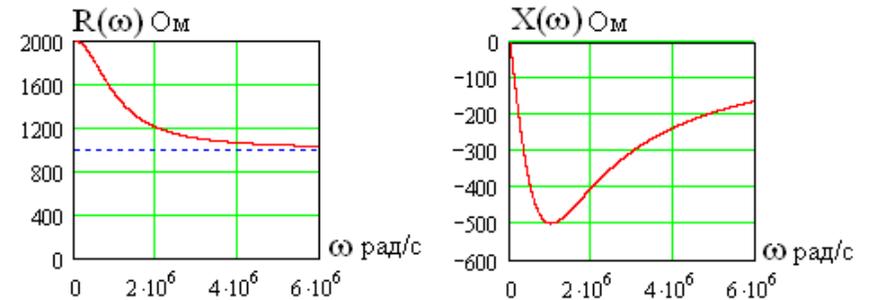


Рис. 5.4

Аналогичный анализ проводимости цепи, показанной на рис. 5.2, проведите самостоятельно.

5.7. Комплексная мощность

Полная комплексная мощность \dot{S} определяется выражением

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U} \cdot \dot{I}^*, \quad (5.29)$$

где \dot{U} - комплексная амплитуда напряжения, а $\dot{I}^* = I e^{-j\psi_i}$ - **комплексно-сопряженная амплитуда тока**.

Это комплексная величина с действительной и мнимой частями,

$$\dot{S} = \frac{1}{2} U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = \frac{1}{2} UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{1}{2} UI \cos(\varphi) + j \frac{1}{2} UI \sin(\varphi). \quad (5.30)$$

Комплексная мощность измеряется в **ВА (вольт-амперах)**.

88

Как видно, **действительная** (активная) составляющая комплексной мощности представляет собой среднюю мощность P , **потребляемую** двухполюсником,

$$P = \frac{1}{2} UI \cos(\varphi). \quad (5.31)$$

Как уже отмечалось, активная мощность измеряется в **ваттах**.

Мнимая (реактивная) составляющая Q комплексной мощности равна

$$Q = \frac{1}{2} UI \sin(\varphi) \quad (5.32)$$

и характеризует процессы накопления и обмена энергией с источником в реактивных элементах цепи. Эта мощность не рас-

ходуется цепью и измеряется в **ВАр (вольт-амперы реактивные)**, она численно равна максимальной скорости запасания энергии в цепи. Реактивная мощность может быть положительной (при $\varphi > 0$), при этом энергия запасается в магнитном поле индуктивностей, или отрицательной (при $\varphi < 0$) при накоплении энергии в электрическом поле емкостных элементов.

Модуль комплексной мощности равен

$$S = \frac{1}{2} UI \quad (5.33)$$

и измеряется в ВА. Величину S называют **полной мощностью**, она определяется активной и реактивной мощностями,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (5.34)$$

Можно записать

89

$$P = S \cos(\varphi), \quad (5.35)$$

величину $\cos(\varphi)$ называют **коэффициентом мощности**. При $\varphi = 0$ потребляемая мощность P **максимальна** и равна полной мощности S , а реактивная мощность Q **равна нулю**.

Если для вычисления мощности используются **действующие значения** напряжения и тока, то в приведенных соотношениях удаляется множитель $1/2$.

5.8. Расчет мощности, потребляемой двухполюсником

Зная комплексные амплитуды напряжения и тока, согласно (5.29), можно определить комплексную мощность, например, при $\dot{U} = 5e^{-j30^\circ}$ В и $\dot{I} = 10e^{j20^\circ}$ А получим, что сдвиг фаз между напряжением и током равен

$\varphi = \psi_u - \psi_i = -30 - 20 = -50^\circ$. Тогда комплексная мощность равна

$$\dot{S} = \frac{1}{2} 5e^{-j30^\circ} 10e^{-j20^\circ} = 25e^{-j50^\circ} \text{ ВА},$$

активная составляющая (потребляемая мощность) -

$$P = \operatorname{Re}\{\dot{S}\} = 25 \cos(-50^\circ) = 16,07 \text{ Вт},$$

реактивная мощность -

$$Q = \operatorname{Im}\{\dot{S}\} = 25 \sin(-50^\circ) = -19,151 \text{ ВАр},$$

а полная мощность -

$$S = \frac{1}{2} UI = 25 \text{ ВА}.$$

90

Отрицательная реактивная мощность свидетельствует о том, что цепь накапливает энергию в емкостном элементе. Так как коэффициент мощности равен $\cos(\varphi) = \cos(-50^\circ) = 0,643$, то потребляемая мощность существенно меньше полной.

Мощности можно определить, зная комплексную амплитуду напряжения (или тока) и комплексное сопротивление (проводимость) цепи.

Рассмотрим цепь на рис. 5.2 с подключенным к ней идеальным источником гармонического напряжения $e(t)$, показанную на рис. 5.5. при $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$, $C = 1 \text{ нФ}$, $e(t) = 5 \cos(10^6 t - 30^\circ) \text{ В}$. Комплексная амплитуда \dot{E} ЭДС источника равна $\dot{E} = 5e^{-j30^\circ} \text{ В}$,

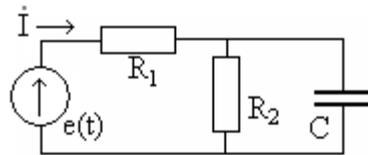


Рис. 5.5

а комплексное сопротивление цепи было определено ранее,

$$Z = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} = 1500 - j500 \text{ Ом}.$$

По закону Ома найдем комплексную амплитуду тока \dot{I} ,

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{5e^{-j30^\circ}}{1500 - j500} = \frac{5e^{-j30^\circ}}{1,581 \cdot 10^3 e^{-j18,4^\circ}} = 3,162e^{-j11,56^\circ} \text{ мА},$$

а полная комплексная мощность равна

$$\dot{S} = \frac{\dot{E}\dot{I}^*}{2} = \frac{5e^{-j30^\circ} 3,162e^{j11,56^\circ}}{2} = 7,906 \cdot 10^{-3} e^{-j18,44^\circ} \text{ ВА},$$

или в алгебраической форме

$$\dot{S} = 0,0075 - j0,0025 \text{ ВА}.$$

Таким образом, потребляемая цепью мощность равна $P = 0,0075 \text{ Вт}$, реактивная мощность $Q = 0,0025 \text{ ВАр}$, а полная мощность $S = 0,0079 \text{ ВА}$.

На практике наибольший интерес представляет определение мощности, которую потребляет цепь от одного или нескольких источников. Необходимо помнить, что в электрической цепи мощность потребляется только активными элементами - сопротивлениями.

Потребляемую мощность в цепи, содержащей несколько сопротивлений, можно определить, если известны амплитуды (действующие значения) токов или напряжений на этих элементах.

Мощность, потребляемая цепью, содержащей несколько сопротивлений, **равна сумме мощностей**, потребляемой каждым из этих элементов в отдельности.

Расчет токов и напряжений на элементах цепи будет рассмотрен в дальнейшем.

В цепи с комплексным сопротивлением $Z = R + jX$ при протекании через нее тока с амплитудой I потребляемая мощность равна

$$P = \frac{1}{2} I^2 R. \quad (5.36)$$

Аналогично в цепи с комплексной проводимостью $Y = G + jB$ при наличии на ней напряжения с амплитудой U потребляемая мощность будет равна

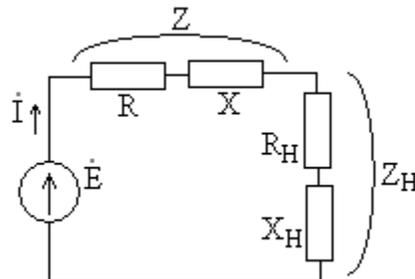
$$P = \frac{1}{2} U^2 G. \quad (5.37)$$

5.9. Максимизация потребляемой мощности

В инженерной практике часто возникает необходимость обеспечить **максимум активной мощности**, передаваемой от источника сигнала в нагрузку.

В качестве примеров можно выделить задачу максимизации мощности на валу электродвигателя при питании его от силовой сети. Аналогичная проблема возникает при передаче высокочастотной мощности от выходного усилителя радиопередатчика в антенну для излучения электромагнитных волн (высокочастотная мощность стоит очень дорого как с экономической, так и с технической точки зрения).

Схема электрической цепи показана на рис. 5.6. В цепь включен реальный источник напряжения с комплексной амплитудой ЭДС



\dot{E} и внутренним комплексным сопротивлением $Z = R + jX$, к которому подключена нагрузка с комплексным сопротивлением $Z_H = R_H + jX_H$.

Необходимо подобрать такое сопротивление нагрузки, при котором она потребляла бы от источника максимальную мощность.

Комплексная амплитуда тока в цепи \dot{I} равна

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z + Z_H} = \frac{\dot{E}}{R + R_H + j(X + X_H)},$$

тогда для амплитуды тока получим

$$I = |\dot{I}| = \frac{E}{\sqrt{(R + R_H)^2 + (X + X_H)^2}}, \quad (5.38)$$

в выражение для потребляемой мощности примет вид

$$P = \frac{1}{2} I^2 R_H = \frac{1}{2} \left[\frac{E^2 R_H}{(R + R_H)^2 + (X + X_H)^2} \right], \quad (5.39)$$

так как мощность потребляется только в активном сопротивлении R_H .

Необходимо определить максимум (5.39) по двум независимым переменным – активному R_H и реактивному X_H сопротивлениям нагрузки. Как видно, величина X_H присутствует только в знаменателе дроби и сумма $X + X_H$ возводится в квадрат. Минимум знаменателя будет иметь место при условии

$$X + X_H = 0 \text{ или } X_H = -X. \quad (5.40)$$

Таким образом, реактивное сопротивление нагрузки должно быть по модулю равно реактивному сопротивлению источника и иметь противоположный характер (если у источника сопротивление индуктивно, то у нагрузки оно должно быть емкостным и наоборот). В результате получим

$$\max_{R_H} \{P\} = \frac{1}{2} \frac{E^2 R_H}{(R + R_H)^2}. \quad (5.41)$$

Максимум (5.41) по R_H можно найти, вычислив производную этой функции и приравняв ее нулю. В результате получим (проделайте это самостоятельно) условия, при которых

94

потребляемая нагрузкой мощность максимальна,

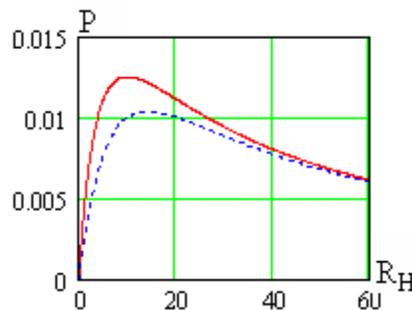
$$\begin{cases} X_H = -X, \\ R_H = R, \end{cases} \quad (5.42)$$

и соответствующую величину мощности

$$P_{\max} = \frac{E^2}{8R}. \quad (5.43)$$

Зависимости мощности в нагрузке P от R_H при $X + X_H = 0$ (сплошная линия) и $X + X_H = 10 \text{ Ом}$ (пунктирная линия) показаны на рис. 5.7 при $R = 10 \text{ Ом}$ и $E = 1 \text{ В}$.

Как видно, при отклонении от оптимальных



условий (5.42) потребляемая нагрузкой мощность заметно снижается.

Рис. 5.7

Рассмотрим коэффициент полезного действия (КПД) – отношение мощности в нагрузке к мощности, потребляемой от источника сигнала, при условии (5.40) равной

$$P_{\text{ИСТ}} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{R + R_H}. \quad (5.44)$$

тогда КПД η равен

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{ИСТ}}} = \frac{R_H}{R + R_H}. \quad (5.45)$$

95

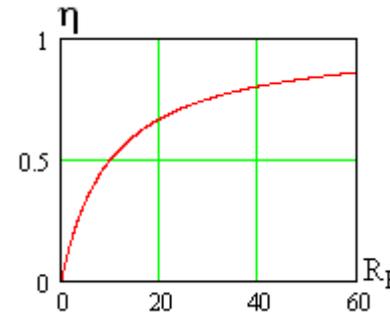


Рис. 5.8

Зависимость КПД от активной составляющей сопротивления нагрузки показана на рис. 5.8. Как видно, при условии передачи максимума мощности в нагрузку КПД равен 0,5 (50%), то есть половина мощности источника потребляется его же внутренним сопротивлением (происходит нагрев источника). При повышении R_H КПД увеличивается, однако при этом снижается мощность, передаваемая в нагрузку.

5.10. Задания для самостоятельного решения

Задание 5.1. Определите комплексные амплитуды гармонических сигналов

$$u(t) = 3 \cos(100t + 45^\circ) \text{ В}, \quad u(t) = -10 \cos(10^3 t - \pi/3) \text{ мВ}$$

$$i(t) = 5 \sin(3 \cdot 10^5 t + 30^\circ) \text{ мА}, \quad i(t) = -0,4 \sin(10^6 t + \pi) \text{ А}.$$

Задание 5.2. По заданной комплексной амплитуде определите мгновенные значения сигналов, их амплитуды и начальные фазы

$$\dot{U} = 2 - j4 \text{ В}, \quad \dot{U} = -2 - j4 \text{ мВ}, \quad \dot{U} = 2e^{i40^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U} = -8e^{-j\pi/3} \text{ мВ},$$

$$\dot{I} = -7 + j4 \text{ мА}, \quad \dot{I} = -j4 \text{ А}, \quad \dot{I} = 2je^{-i40^\circ} \text{ мА}, \quad \dot{I} = -25 \text{ мкА}.$$

Задание 5.3. Вычислите сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел \dot{S}_1 и \dot{S}_2 , результаты запишите в алгебраической и показательной формах.

\dot{S}_1	4-j3	7-j4	-j	2	$6e^{-j30^\circ}$	20+j3	$8e^{-j\pi/4}$
\dot{S}_2	-8+j2	-j5	j	-1-j	5+j2	$10e^{j\pi/2}$	$3e^{-j60^\circ}$

96

Задание 5.4. Для чисел из задания 5.3 вычислите их модуль и аргумент, а также обратную величину $1/\dot{S}$.

Задание 5.5. Найдите полное комплексное сопротивление Z и проводимость Y показанных на рис. 5.9 цепей при $R_1 = R_2 = 10 \text{ кОм}$, $L = 10 \text{ мГн}$ и $C = 20 \text{ пФ}$ на частоте $\omega = 10^7 \text{ рад/с}$.

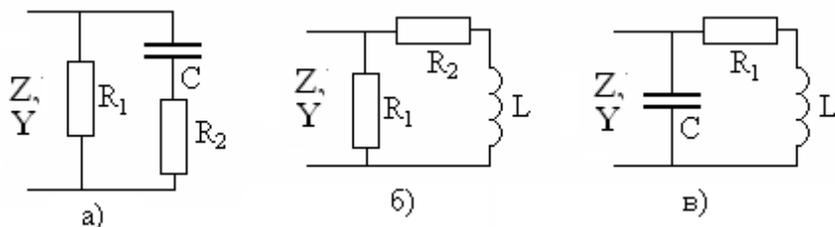


Рис. 5.9

Задание 5.6. Получите общие формулы для полного комплексного сопротивления цепей из задания 5.5. Найдите формулы его модуля, аргумента, активной и реактивной составляющих, постройте их графики в зависимости от частоты сигнала.

Задание 5.7. Вычислите мощность, потребляемую показанной на рис.5.10 цепью при ЭДС источника $e(t) = 5 \sin(10^6 t - 30^\circ) \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 10 \text{ кОм}$ и $C = 2 \text{ нФ}$.

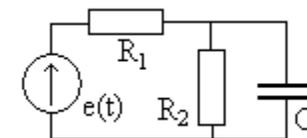


Рис. 5.10

Задание 5.8. Определите мощность, потребляемую показанной на рисунке цепью от источника тока $i_0(t) = 10 \cos(10^6 t + \pi/3) \text{ мА}$ при $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$ и $C = 1 \text{ нФ}$.

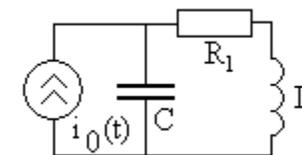


Рис. 5.11

97

6. РАСЧЕТ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

6.1. Общие замечания

В третьем разделе рассмотрены методы расчета цепей постоянного тока (повторите соответствующий материал). В этом случае цепи были резистивными, индуктивности и емкости отсутствовали.

В цепях с гармоническими сигналами токи и напряжения определяются **методом комплексных амплитуд**, в рамках которого реализуются различные методы расчета. Все они используют **комплексные амплитуды сигналов** и **комплексные сопротивления (проводимости)** элементов цепи.

При расчетах **не забывайте** обозначать **прописными буквами** и отмечать **точкой сверху** комплексные амплитуды токов и напряжений, и **записывать мнимую единицу** перед реактивными сопротивлениями или проводимостями.

6.2. Расчет токов и напряжений на основе закона Ома

С помощью закона Ома можно определять токи и напряжения в сравнительно простых цепях с одним источником сигнала.

Расчет проводится следующим образом. Прежде всего, определяется комплексное входное сопротивление (или проводимость) цепи относительно точек ее подключения к источнику. Затем при известной ЭДС источника напряжения по закону Ома находится общий ток цепи, а при заданном источнике тока - общее напряжение на ее зажимах.

Далее цепь представляется как последовательное или параллельное соединение двухполюсников, и вычисляются ли-

98

бо напряжения на них, либо протекающие через них токи. Эти расчеты продолжаются до тех пор, пока не будут определены искомые токи или напряжения.

В качестве примера рассмотрим расчет токов и напряжений в цепи, показанной на рис. 6.1 при ЭДС источника

$$e(t) = 5 \cos(10^6 t - 30^\circ) \text{ В,}$$

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм и } C = 1 \text{ нФ.}$$

Определим общее сопротивление цепи относительно полюсов источника (этот расчет проведен для цепи на рис. 5.5),

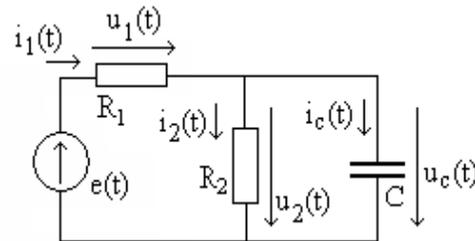


Рис. 6.1

$$Z = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} = 1500 - j500 \text{ Ом}$$

и комплексную амплитуду ЭДС источника напряжения

$$\dot{E} = 5e^{-j30^\circ} \text{ В,}$$

тогда комплексная амплитуда общего тока цепи \dot{I}_1 равна

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{5e^{-j30^\circ}}{1500 - j500} = \frac{5e^{-j30^\circ}}{1,581 \cdot 10^3 e^{-j18,4^\circ}} = 3,162e^{-j11,56^\circ} \text{ мА.}$$

По закону Ома комплексная амплитуда \dot{U}_1 напряжения на сопротивлении R_1 запишется в виде

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 R_1 = 3,162e^{-j11,56^\circ} 10^3 = 3,162e^{-j11,56^\circ} \text{ В.}$$

Напряжения на параллельно соединенных элементах R_2 и C

99

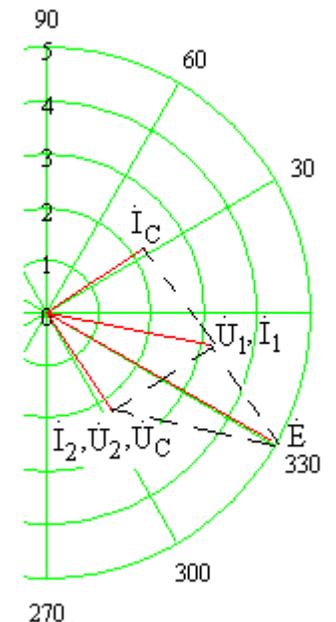
одинаковы и их комплексные амплитуды равны

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = \dot{U}_C &= \dot{I} \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \dot{I} \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} = \\ &= 3,162 \cdot 10^{-3} e^{-j11,56^\circ} \frac{10^3}{1 + j} = 1,232 - j1,8 \end{aligned}$$

По найденным напряжениям токи в элементах R_2 и C равны

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{R_2} = \frac{2,236e^{-j56,56^\circ}}{10^3} = 2,236 \cdot 10^{-3}$$

$$\dot{I}_C = j\omega C \dot{U}_C = j10^6 10^{-9} 2,236e^{-j56,56^\circ} = 2,236$$



На рис. 6.2 показана векторная диаграмма токов и напряжений в цепи на рис. 6.1, постро-

енная в пакете программ MathCAD (символические обозначения векторов и пунктирные линии их суммирования добавлены в с помощью программы Paint). Как видно из проведенных расчетов, численные значения напряжений \dot{U}_1 и $\dot{U}_2 = \dot{U}_C$ (в вольтах) и токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 (в миллиамперах) соответственно одинаковы, поэтому отображающие их векторы на диаграмме совпадают.

Суммирование векторов (в соответствии с показанными на

Рис.6.2

рис. 6.2 пунктирными линиями) подтверждает первый и второй законы Кирхгофа.

100

6.3. Общий метод расчета по уравнениям Кирхгофа

В исследуемой цепи вводятся обозначения и задаются положительные направления всех токов и напряжений всех ветвей (элементов) цепи. Определяется число узлов q , число ветвей p' , не содержащих идеальные источники тока, и количество уравнений, которые необходимо составить по первому ($q-1$) и второму ($p'-q+1$) законам Кирхгофа.

Затем для каждого элемента и ветви цепи по закону Ома записываются **компонентные уравнения** связи токов и напряжений, всего p' уравнений. Для ($q-1$) узлов формируются уравнения первого закона Кирхгофа, а для ($p'-q+1$) независимых контуров – уравнения второго закона Кирхгофа, всего p' **топологических уравнений**.

Выражая токи ветвей через напряжения из компонентных уравнений, и подставляя их в уравнения первого закона Кирхгофа, получим систему из p' уравнений для напряжений ветвей (**метод напряжений ветвей**). Если же выразить из компонентных уравнений напряжения ветвей через их токи и подставить их в уравнения второго закона Кирхгофа, то полу-

чим p' уравнений для токов ветвей (**метод токов ветвей**).

Решение системы уравнений электрического равновесия цепи позволяет определить комплексные амплитуды всех токов и напряжений. Рассмотрим пример цепи показанной на рис. 6.3 при $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$,

$e(t) = 5 \sin(10^6 t - 20^\circ) \text{ В}$ и $i_0(t) = 10 \cos(10^6 t + 10^\circ) \text{ мА}$.

В ней введены обозначения и заданы положительные направления всех токов и напряжений. Определим комплексные амплитуды сигналов источников, при этом ЭДС источника напряже-

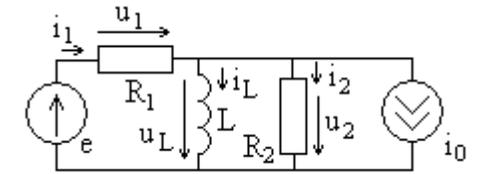


Рис. 6.3

туды сигналов источников, при этом ЭДС источника напряже-

101

ния необходимо преобразовать к виду

$$e(t) = 5 \sin(10^6 t - 20^\circ) = 5 \cos(10^6 t - 110^\circ) \text{ мА},$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{E} &= 5e^{-j110^\circ} \text{ В}, \\ \dot{I}_0 &= 10e^{j10^\circ} \text{ мА}. \end{aligned}$$

Запишем подсистему компонентных уравнений цепи,

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1, \quad \dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2, \quad \dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L.$$

В цепи на рис. 6.3 два узла ($q = 2$), поэтому по первому закону Кирхгофа необходимо составить ($q-1$) = 1 уравнение

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_L - \dot{I}_0 = 0.$$

Имеется три ветви p' , не содержащих идеальные источники тока, тогда по второму закону Кирхгофа необходимо составить

$(p' - q + 1) = 2$ уравнений для контуров R_1, R_2, \dot{E} и R_2L соответственно (обход контура по часовой стрелке),

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 + \dot{U}_L &= \dot{E}, \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_L &= 0.\end{aligned}$$

В результате получим систему уравнений цепи рис. 6.3,

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= R_1 \dot{I}_1, & \dot{U}_2 &= R_2 \dot{I}_2, & \dot{U}_L &= j\omega L \dot{I}_L, \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_L - \dot{I}_0 &= 0, \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_L &= \dot{E}, \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_L &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя в уравнения законов Кирхгофа компонентные уравнения, получим

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_L - \dot{I}_0 &= 0, \\ R_1 \dot{I}_1 + j\omega L \dot{I}_L &= \dot{E}, \\ R_2 \dot{I}_2 - j\omega L \dot{I}_L &= 0.\end{aligned}$$

Из третьего уравнения получим

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega L}{R_2} \dot{I}_L,$$

а из первого

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 + \dot{I}_2 + \dot{I}_L = \dot{I}_0 + \left(1 + \frac{j\omega L}{R_2}\right) \dot{I}_L.$$

Подставляя полученные токи во второе уравнение, можно записать соотношение

$$R_1 \left[\frac{j\omega L}{R_2} \dot{I}_L + \dot{I}_L + \dot{I}_0 \right] + j\omega L \dot{I}_L = \dot{E},$$

из которого определяется ток индуктивности

$$\dot{I}_L = \frac{R_2 (\dot{E} - R_1 \dot{I}_0)}{R_1 R_2 + j\omega L (R_1 + R_2)}.$$

Остальные токи равны

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega L (\dot{E} - R_1 \dot{I}_0)}{R_1 R_2 + j\omega L (R_1 + R_2)},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 + \frac{(R_2 + j\omega L) (\dot{E} - R_1 \dot{I}_0)}{R_1 R_2 + j\omega L (R_1 + R_2)}.$$

В результате вычислений (проделайте их самостоятельно) получим

$$\begin{aligned}\dot{I}_L &= -4,886 + j \cdot 3,336 = 5,916 e^{j145,672^\circ} \text{ мА}, \\ \dot{I}_1 &= 1,626 + j \cdot 0,187 = 1,637 e^{j6,565^\circ} \text{ мА}, \\ \dot{I}_2 &= -3,336 - j \cdot 4,886 = 5,916 e^{-j124,328^\circ} \text{ мА}.\end{aligned}$$

По закону Ома (из компонентных уравнений) нетрудно вычислить напряжения на элементах цепи,

$$\begin{aligned}\dot{U}_L &= -3,336 - j \cdot 4,886 = 5,916 e^{-j124,328^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_1 &= 1,626 + j \cdot 0,187 = 1,637 e^{j6,565^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_2 &= -3,336 - j \cdot 4,886 = 5,916 e^{-j124,328^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Как видно напряжения на индуктивности L и сопротивлении R_2 одинаковы, так как они соединены параллельно. Кроме того, начальные фазы токов и напряжений в сопротивлениях совпадают, а разность фаз между напряжением и током индуктивности равна $\varphi_L = \psi_{u_L} - \psi_{i_L} = -124,328 - 145,672 = -270^0$ или, прибавив 360^0 , получим $\varphi_L + 360 = 90^0$, то есть напряжение на индуктивности опережает ток через нее на 90^0 .

Подставьте полученные результаты в уравнения первого и второго законов Кирхгофа и убедитесь, что они выполняются. Постройте векторную диаграмму токов и напряжений в цепи рис. 6.3.

6.4. Метод контурных токов

Как уже отмечалось в подразделе 3.4, метод контурных токов базируется на уравнениях второго закона Кирхгофа для $p - q + 1$ независимых контуров, где p - общее число ветвей цепи. Для выбранных независимых контуров вводятся обозначения и задаются положительные направления $p - q + 1$ **комплексных амплитуд кольцевых контурных токов** \dot{I}_{kk} , k - номер контура (используется двойная индексация, чтобы не путать контурные токи с токами ветвей).

Через контурные токи выражаются токи всех ветвей цепи и по закону Ома определяются напряжения ветвей, а затем записываются уравнения второго закона Кирхгофа для контуров, не содержащих идеальные источники тока. Для контуров с идеальными источниками тока записываются уравнения связи контурных токов и тока источника.

Система содержит $p - q + 1$ уравнений для комплексных амплитуд контурных токов. По найденным контурным токам определяются искомые токи или напряжения ветвей.

В качестве примера рассмотрим цепь на рис. 6.3 при тех же исходных данных. В ней имеется $p = 4$ ветви и $q = 2$ узлов. Схема цепи с обозначенными контурными токами показана на рис. 6.4.

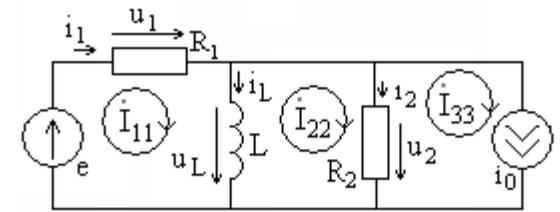


Рис. 6.4

Выразим токи ветвей через контурные токи.

Ток ветви \dot{I}_1 образуется одним контурным током \dot{I}_{11} , ток \dot{I}_L - разностью контурных токов $\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}$ (он совпадает по направлению с \dot{I}_{11} и противоположен \dot{I}_{22}), аналогично ток \dot{I}_2

создается разностью контурных токов $\dot{I}_{22} - \dot{I}_{33}$, а контурный ток \dot{I}_{33} совпадает с током источника \dot{I}_0 ,

$$\dot{I}_{33} = \dot{I}_0,$$

тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_{11}, \\ \dot{I}_L &= \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}, \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33} = \dot{I}_{22} - \dot{I}_0. \end{aligned}$$

По закону Ома можно записать

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= R_1 \dot{I}_1 = R_1 \dot{I}_{11}, \\ \dot{U}_L &= j\omega L \dot{I}_L = j\omega L (\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}), \\ \dot{U}_2 &= R_2 \dot{I}_2 = R_2 (\dot{I}_{22} - \dot{I}_0). \end{aligned}$$

тогда по второму закону Кирхгофа для первого и второго кон-

туров получим

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 + \dot{U}_L &= \dot{E}, \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_L &= 0.\end{aligned}$$

Для третьего контура с идеальным источником тока уравнение второго закона Кирхгофа не составляется.

В результате **система уравнений метода контурных токов** примет вид

$$\begin{aligned}R_1 \dot{I}_{11} + j\omega L(\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}) &= \dot{E}, \\ R_2(\dot{I}_{22} - \dot{I}_0) - j\omega L(\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}) &= 0.\end{aligned}$$

106

Преобразуя, получим

$$\begin{aligned}(R_1 + j\omega L)\dot{I}_{11} - j\omega L\dot{I}_{22} &= \dot{E}, \\ (R_2 + j\omega L)\dot{I}_{22} - j\omega L\dot{I}_{11} &= R_2\dot{I}_0.\end{aligned}$$

Выразим из первого уравнения ток \dot{I}_{11} и подставим его во второе уравнение, из которого определим ток \dot{I}_{22} , в результате найдем контурные токи

$$\dot{I}_{22} = \frac{(R_1 + j\omega L)R_2\dot{I}_0 + j\omega L\dot{E}}{R_1R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)},$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{11} &= \frac{\dot{E} + j\omega L \frac{(R_1 + j\omega L)R_2\dot{I}_0 + j\omega L\dot{E}}{R_1R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}}{(R_1 + j\omega L)} = \\ &= \frac{(R_2 + j\omega L)\dot{E} + j\omega LR_2\dot{I}_0 \pm (R_2 + j\omega L)R_1\dot{I}_0}{R_1R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)} = \\ &= \dot{I}_0 + \frac{(R_2 + j\omega L)(\dot{E} - R_1\dot{I}_0)}{R_1R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}\end{aligned}$$

Как видно, выражение для тока \dot{I}_{11} совпадает с полученной ранее формулой для тока ветви \dot{I}_1 , для которого получаем

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = \dot{I}_0 + \frac{(R_2 + j\omega L)(\dot{E} - R_1\dot{I}_0)}{R_1R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)},$$

а для остальных токов ветвей можно записать

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_0 = \frac{j\omega L(\dot{E} - R_1\dot{I}_0)}{R_1R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)},$$

$$\dot{I}_L = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = \frac{R_2(\dot{E} - R_1\dot{I}_0)}{R_1R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}.$$

Полученные токи ветвей совпадают с токами, полученными ранее общим методом расчета по уравнениям Кирхгофа. Вычислив их, можно найти напряжения на элементах цепи. Проведите самостоятельно все необходимые вычисления.

Метод контурных токов приводит к системе из $p' - q + 1$ уравнений, число которых всегда меньше числа вет-

вей p . Таким образом, метод контурных токов эффективнее общего метода расчета цепи по уравнениям Кирхгофа.

6.5. Метод узловых напряжений (потенциалов)

Как уже отмечалось в подразделе 3.5 (повторите этот материал), метод узловых напряжений базируется на первом законе Кирхгофа. В цепи выделяются $q-1$ **потенциальных** узлов, последний q -й узел объявляется **базисным** (ему присваивается нулевой потенциал, он отмечается символом «земля»), а для остальных задаются **узловые напряжения** (потенциалы) с положительным направлением в базисный узел.

Через узловые напряжения с помощью закона Ома и второго закона Кирхгофа выражаются токи всех ветвей цепи, которые подставляются в $q-1$ уравнений первого закона Кирхгофа, в результате получается система уравнений метода узловых напряжений.

Рассмотрим цепь, показанную на рис. 6.3 при тех же исходных данных и зададим в ней узловые напряжения, как показано на рис. 6.5. Из имеющихся двух узлов нижний объявляется базисным, а верхний – потенциальным (он отмечен

108

номером 1 в кружке), и задано узловое напряжение u_{11} .

Для расчета цепи методом узловых напряжений необходимо определить комплексные амплитуды источников и комплексные сопротивления элементов.

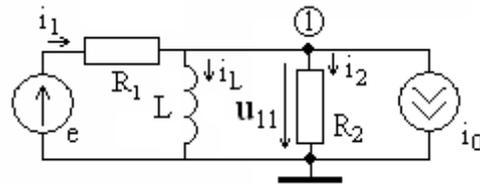


Рис. 6.5

Найдем ток \dot{I}_1

через сопротивление R_1 . По второму закону Кирхгофа напряжение на этом сопротивлении равно $\dot{E} - \dot{U}_{11}$, тогда ток через

него равен

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E} - U_{11}}{R_1}.$$

По закону Ома для комплексных амплитуд токов \dot{I}_L и \dot{I}_2 можно записать

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_{11}}{j\omega L},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{11}}{R_2}.$$

По первому закону Кирхгофа для узла 1 получим

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_L + \dot{I}_2 + \dot{I}_0.$$

Подставляя в это уравнения токи ветвей, выраженные через узловое напряжение, получим **уравнение метода узловых напряжений** в виде

$$\frac{\dot{E} - U_{11}}{R_1} = \frac{\dot{U}_{11}}{j\omega L} + \frac{\dot{U}_{11}}{R_2} + \dot{I}_0.$$

Решая уравнение, получим

$$\dot{U}_{11} = \frac{\frac{\dot{E}}{R_1} - \dot{I}_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega L R_2 (\dot{E} - R_1 \dot{I}_0)}{R_1 R_2 + j\omega L (R_1 + R_2)}.$$

Подставляя численные значения параметров и частоты, получим численное значение узлового напряжения

$$\dot{U}_{11} = -3,336 - j4,886 = 5,916e^{-j124,328^\circ} \text{ В.}$$

С помощью найденной величины \dot{U}_{11} нетрудно вычислить токи ветвей и напряжения на элементах цепи. Проведите эти расчеты самостоятельно, сравните результаты с полученными ранее значениями.

Метод узловых напряжений требует составления и решения $q-1$ уравнений, тогда он будет эффективней метода контурных токов, если

$$p' - q + 1 > q - 1,$$

то есть при условии

$$p' > 2(q - 1).$$

В рассмотренных примерах (рис. 6.4 и рис. 6.5) $p' = 3$, $q = 2$, следовательно

$$p' = 3 > 2(q - 1) = 2$$

и целесообразнее использовать метод узловых напряжений.

110

6.6. Метод (принцип) наложения

Метод (принцип) наложения можно сформулировать следующим образом.

Реакция цепи (ток или напряжение) на воздействии нескольких источников сигнала равна сумме реакций цепи на воздействие каждого источника в отдельности, при этом остальные источники должны быть выключены – заменены своими внутренними сопротивлениями. Выключенный идеальный источник напряжения заменяется коротким замыканием, а идеальный источник тока – разрывом (холостым ходом) содержащей источ-

Метод наложения применим только к **линейной** цепи. Исходная цепь с несколькими источниками представляется несколькими более простыми цепями с одним источником, что упрощает расчеты.

Рассмотрим цепь, показанную на рис. 6.3. В ней два источника сигнала, тогда в соответствии с методом наложения, последовательно отключая источники, получим две цепи, показанные на рис. 6.6а и рис. 6.6б соответственно.

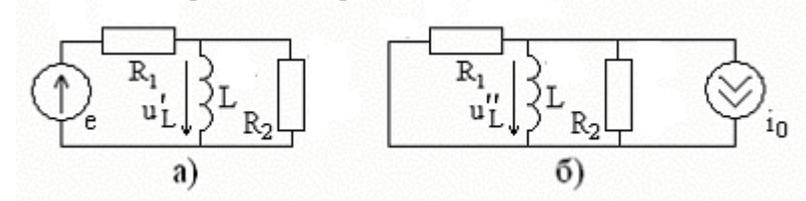


Рис. 6.6

Определим напряжение на индуктивности \dot{U}_L в исходной цепи. По принципу наложения можно записать

$$\dot{U}_L = \dot{U}_L' + \dot{U}_L'',$$

111

где \dot{U}_L' – комплексная амплитуда напряжения на индуктивности в схеме на рис. 6.6а, а \dot{U}_L'' – в схеме на рис. 6.6б. Их можно определить с помощью закона Ома в виде

$$\dot{U}_L' = \dot{E} \frac{\frac{j\omega LR_2}{R_2 + j\omega L}}{R_1 + \frac{j\omega LR_2}{R_2 + j\omega L}} = \dot{E} \frac{j\omega LR_2}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)},$$

$$\dot{U}'_L = -\frac{\dot{I}_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L}} = -\frac{j\omega LR_1 R_2 \dot{I}_0}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}.$$

Складывая полученные реакции цепи на действие каждого источника в отдельности, получим

$$\dot{U}_L = \frac{j\omega LR_2(\dot{E} - R_1 \dot{I}_0)}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)},$$

что соответствует результатам, полученным ранее по методам контурных токов и узловых напряжений (убедитесь в этом самостоятельно).

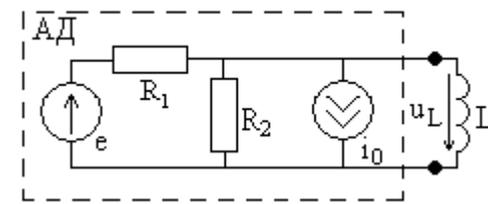
6.7. Теорема об эквивалентном источнике

Теорема об эквивалентном источнике (теорема Гевенена) формулируется в двух вариантах применительно к источникам напряжения и тока и справедлива только к **линейному активному двухполюснику** (двухполюсной цепи, содержащей пассивные элементы R, L, C и источники сигнала).

112

Любой линейный активный двухполюсник можно заменить **эквивалентным реальным источником напряжения** с ЭДС, равной напряжению холостого хода (на разомкнутых выводах) активного двухполюсника, и с внутренним сопротивлением, равным сопротивлению пассивной части активного двухполюсника (его сопротивлению при выключенных источниках, когда идеальный источник напряжения заменяется коротким замыканием, а идеальный источник тока – разрывом цепи).

Любой линейный активный двухполюсник можно заменить **эквивалентным реальным источником тока**, ток которого равен току короткого замыкания (при за-



Теорема об эквивалентном источнике является мощным **методом расчета** линейных цепей. Методика ее применения заключается в следующем. В исходной цепи выделяется ветвь (элемент), в которой определяется ток или напряжение. Вся остальная часть цепи рассматривается как активный двухполюсник, который в соответствии с теоремой заменяется эквивалентным источником тока или напряжения. Для этого любым из рассмотренных методов определяются напряжение холостого хода (или ток короткого замыкания) двухполюсника и его внутреннее сопротивление, затем двухполюсник заменяется эквивалентным источником и проводится расчет упрощенной цепи.

Рассмотрим цепь, показанную на рис. 6.3, в которой требуется найти напряжение на индуктивности. Выделяя индуктивность, из оставшейся части образуем активный двухполюсник (АД), как показано на рис. 6.7 (как видно, полученная схема не отличается от исходной).

113

Схема активного двухполюсника АД показана на рис. 6.8а, а ее пассивная часть (пассивный двухполюсник

Рис. 6.7

ПД) – на рис. 6.8б.

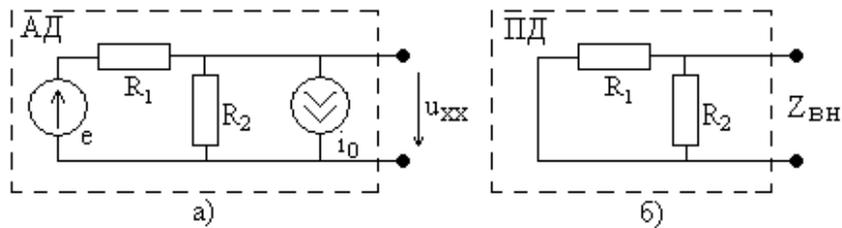


Рис. 6.8

Для цепи на рис. 6.8а нетрудно найти комплексную амплитуду напряжения холостого хода \dot{U}_{xx} , используя для этого метод наложения (проделайте расчеты самостоятельно), тогда получим

$$\dot{U}_{xx} = \dot{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \dot{i}_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 (\dot{E} - R_1 \dot{i}_0)}{R_1 + R_2}.$$

В соответствии с теоремой комплексная амплитуда ЭДС эквивалентного источника напряжения равна $\dot{E}_3 = \dot{U}_{xx}$.

Внутренне сопротивление Z_{BH} пассивной части активного двухполюсника определяем в соответствии со схемой на рис. 6.9б, в результате получим

$$Z_{BH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

114

Заменяя активный двухполюсник в схеме на рис. 6.7 реальным эквивалентным источником напряжения, получим цепь, показанную на рис. 6.9. По закону Ома определим комплексную амплитуду напряжения на индуктивности,

$$\dot{U}_L = \dot{U}_{xx} \frac{j\omega L}{Z_{BH} + j\omega L}$$

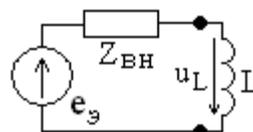


Рис. 6.9

Подставляя параметры эквивалентного источника, можно записать

$$\dot{U}_L = \frac{R_2 (\dot{E} - R_1 \dot{i}_0)}{R_1 + R_2} \cdot \frac{j\omega L}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + j\omega L} = \frac{j\omega L R_2 (\dot{E} - R_1 \dot{i}_0)}{R_1 R_2 + j\omega L (R_1 + R_2)}.$$

Результат совпадает с полученным ранее другими методами. Приведенный пример свидетельствует о высокой эффективности рассмотренного метода.

6.8. Задания для самостоятельного решения

Задание 6.1. Рассчитайте все гармонические токи и напряжения в показанных на рисунках цепях, используя

- общий метод расчета по уравнениям Кирхгофа;
- метод контурных токов;
- метод узловых напряжений;
- метод наложения;
- теорему об эквивалентном источнике.

При вычислениях примите равными все сопротивления 1 кОм, индуктивности 1 мГн, емкости 1 нФ, ЭДС источника напряжения $e(t) = 10 \cos(10^6 t - 20^\circ)$ В, ток источника тока $i_0(t) = 10 \cos(10^6 t + 45^\circ)$ мА. Сравните результаты расчетов

115

различными методами, оцените их эффективность.

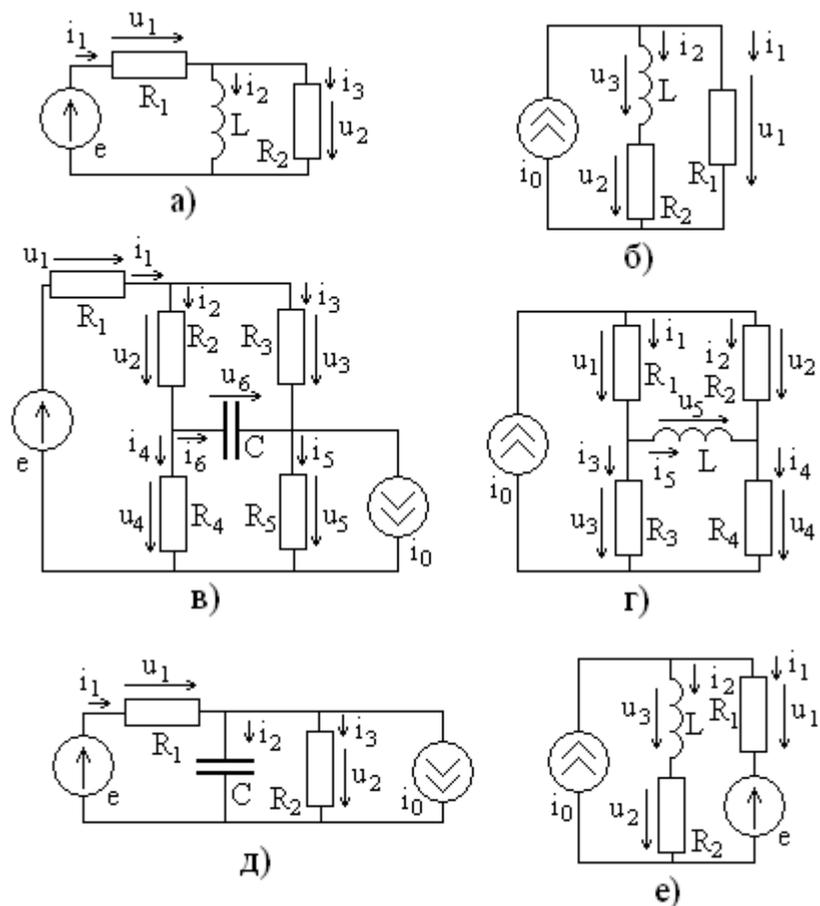


Рис. 6.10

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

7.1. Четырехполюсник

Полюсом называют вывод (контакт, клемму, зажим) электрической цепи, к которому что-либо подключается (источник сигнала, нагрузка, другая цепь). Электрические цепи классифицируют по числу полюсов на:

- двухполюсники (сопротивление, индуктивность, емкость, идеальные и реальные источники сигнала, полупроводниковый диод);

- трехполюсники (например, трехфазный источник напряжения без нейтрали, трехфазная нагрузка при соединении «треугольником» на рис. 7.1, биполярный транзистор);

- четырехполюсники (усилители сигналов, фильтры).

Значительно реже возникают цепи с большим числом полюсов.

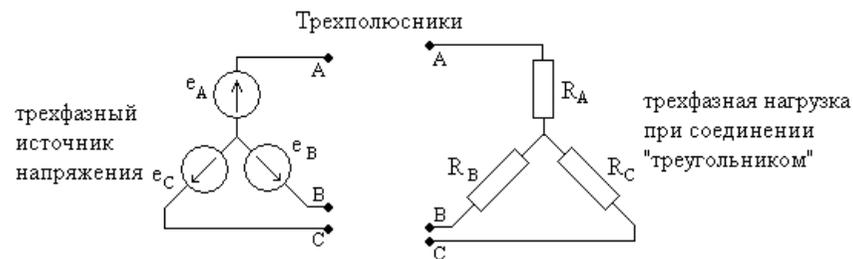


Рис. 7.1

Четырехполюсником называют электрическую цепь с

четырьмя полюсами, разделенными на пару входных и пару выходных полюсов, как показано на рис. 7.2. Входные полюсы обычно изображаются слева и имеют индекс 1, а вы-

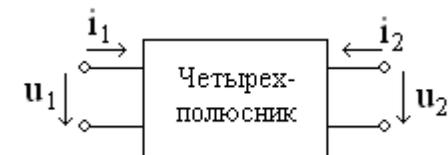


Рис. 7.2

ходные – справа с индексом 2. Входной и выходной токи чаще всего обозначают **втекающими** в четырехполюсник.

Различают линейные (содержащие только линейные элементы) и нелинейные (в состав которых входит хотя бы один нелинейный элемент) четырехполюсники (рис.7.3).

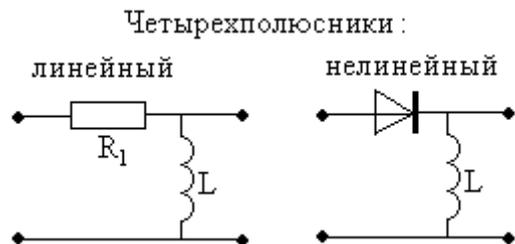


Рис. 7.3

Свойства линейных четырехполюсников рассматривают при **гармонических** воздействиях (это простые сигналы, расчет которых удобно проводить методом комплексных амплитуд).

В линейном четырехполюснике при гармоническом воздействии все токи и напряжения являются также гармоническими с той же частотой, а их амплитуды и начальные фазы зависят от частоты воздействия. В этом случае свойства цепи описываются **частотными характеристиками** – зависимостями от частоты входного сигнала различных характеристик, например:

- входного и выходного сопротивлений или проводимостей;
- коэффициентов передачи или обратной связи по току или напряжению;
- коэффициента передачи мощности;
- сопротивлений (проводимостей) прямой передачи или обратной связи.

7.2. Входное и выходное сопротивления четырехполюсника

В качестве частотных характеристик рассматриваются входное $Z_{ВХ}(\omega)$ и выходное $Z_{ВЫХ}(\omega)$ сопротивления как функция частоты сигнала. По определению при заданном сопротивлении нагрузки четырехполюсника Z_H , подключенной к его выходу,

$$Z_{ВХ} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}. \quad (7.1)$$

Выходное сопротивление определяется при известном внутреннем сопротивлении источника входного сигнала Z_C ,

$$Z_{ВЫХ} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}. \quad (7.2)$$

Знание этих характеристик необходимо при анализе возможностей подключения к четырехполюснику реального источника сигнала и нагрузки.

Рассмотрим четырехполюсник с подключенными к нему реальным источником напряжения \dot{E}_C с внутренним сопротивлением Z_C и нагрузкой Z_H , как показано на рис. 7.4.

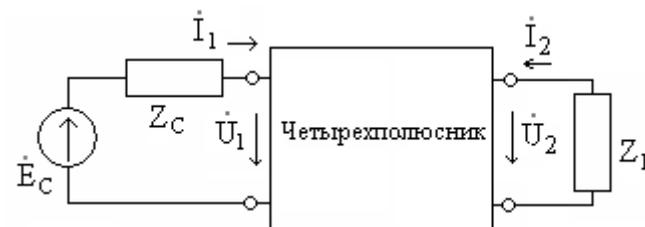
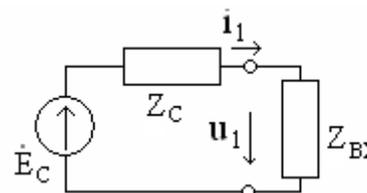


Рис. 7.4

Эквивалентная схема входной цепи четырехполюсника по-



казана на рис. 7.5, где Z_{BX} - входное сопротивление четырехполосника. Для обеспечения **максимума мощности** P , потребляемой четырехполосником от источника сигнала, из общего выражения

Рис. 7.5

потребляемой четырехполосником от источника сигнала, из общего выражения

щего выражения

$$P = \frac{1}{2} U_1 I_1 \cos(\varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \dot{U}_1 \dot{I}_1^* \right\}, \quad (7.3)$$

где \dot{I}_1^* - **комплексно сопряженная** амплитуда входного тока, можно записать

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{E}(R_{BX} + jX_{BX})}{(R_C + R_{BX}) + j(X_C + X_{BX})} \cdot \frac{\dot{E}^*}{(R_C + R_{BX}) - j(X_C + X_{BX})} \right\}, \quad (7.4)$$

где \dot{E}^* - комплексно-сопряженная ЭДС источника, а $\operatorname{Re}\{ \}$ - оператор вычисления реальной части числа. С учетом того, что произведение комплексно-сопряженных чисел равно квадрату их модуля,

$$P = \frac{E^2}{2} \frac{\operatorname{Re}\{R_{BX} + jX_{BX}\}}{(R_C + R_{BX})^2 + (X_C + X_{BX})^2}, \quad (7.5)$$

в результате получим

$$P = \frac{E^2}{2} \frac{R_{BX}}{(R_C + R_{BX})^2 + (X_C + X_{BX})^2}. \quad (7.6)$$

Из полученного выражения нетрудно получить условие

120

максимума потребляемой четырехполосником (рис. 7.4) мощности (**условие согласования источника сигнала с четырехполосником**),

$$\begin{cases} R_C = R_{BX}, \\ X_C = -X_{BX}. \end{cases} \quad (7.7)$$

Аналогичный анализ можно провести и для выходной цепи четырехполосника. В соответствии с теоремой об эквивалентном источнике напряжения (повторите этот материал) эквивалентная схема выходной цепи схемы рис. 7.4 имеет вид, показанный на рис. 7.6а, где \dot{E}_\ominus и Z_\ominus - эквивалентные ЭДС и внутреннее сопротивление активного двухполосника, показанного на рис. 7.6б, а $\dot{I}'_2 = -\dot{I}_2$.

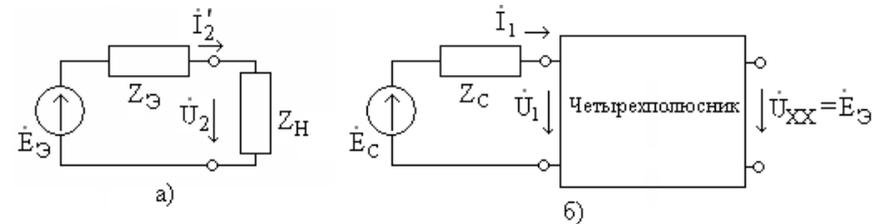


Рис. 7.6

Мощность в нагрузке аналогично (7.6) равна

$$P_H = \frac{E_\ominus^2}{2} \frac{R_H}{(R_\ominus + R_H)^2 + (X_\ominus + X_H)^2}, \quad (7.8)$$

где $Z_\ominus = R_\ominus + jX_\ominus$ и $Z_H = R_H + jX_H$. В результате нетрудно получить условие передачи максимума мощности от источника сигнала через четырехполосник в нагрузку (**условие согласования четырехполосника с нагрузкой**),

121

$$\begin{cases} R_\ominus = R_H, \\ X_\ominus = -X_H. \end{cases} \quad (7.9)$$

В качестве примера рассмотрим цепь на рис. 7.7, в состав которой входят источник входного сигнала (реальный источник гармонического напряжения с комплексной амплитудой \dot{E}_c , внутренним сопротивлением Z_c и частотой ω), RC - четырехполюсник и нагрузка Z_H .

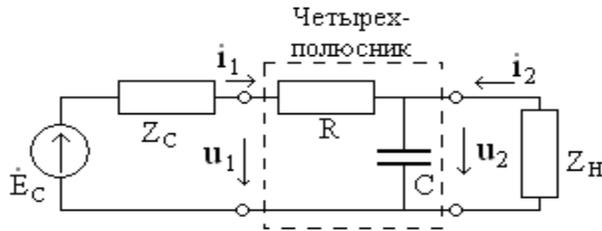


Рис. 7.7

Схема цепи для определения входного сопротивления нагруженного четырехполюсника показана на рис. 7.8. Величина Z_{BX} определяется выражением

$$\underline{Z}_{BX} = R + \frac{Z_H \frac{1}{j\omega C}}{Z_H + \frac{1}{j\omega C}} = R + \frac{Z_H}{1 + j\omega C Z_H}.$$

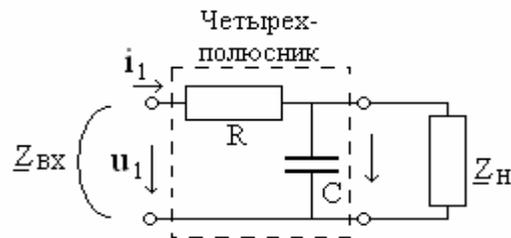


Рис. 7.8

122

При активной нагрузке $Z_H = R_H$ получим

$$\underline{Z}_{BX} = R + \frac{R_H}{1 + j\omega C R_H} = R + \frac{R_H}{1 + (\omega C R_H)^2} - j \frac{\omega C R_H^2}{1 + (\omega C R_H)^2},$$

модуль входного сопротивления равен

$$|Z_{BX}| = \sqrt{\left[R + \frac{R_H}{1 + (\omega C R_H)^2} \right]^2 + \left[\frac{\omega C R_H^2}{1 + (\omega C R_H)^2} \right]^2},$$

а активную R_{BX} и реактивную X_{BX} составляющие можно записать в виде

$$R_{BX} = R + \frac{R_H}{1 + (\omega C R_H)^2},$$

$$X_{BX} = - \frac{\omega C R_H^2}{1 + (\omega C R_H)^2}.$$

На рис. 7.9 приведены зависимости от частоты модуля $|Z_{BX}|$ и активной составляющей R_{BX} входного сопротивления четырехполюсника при $R = R_H = 1$ кОм и $C = 1$ нФ.

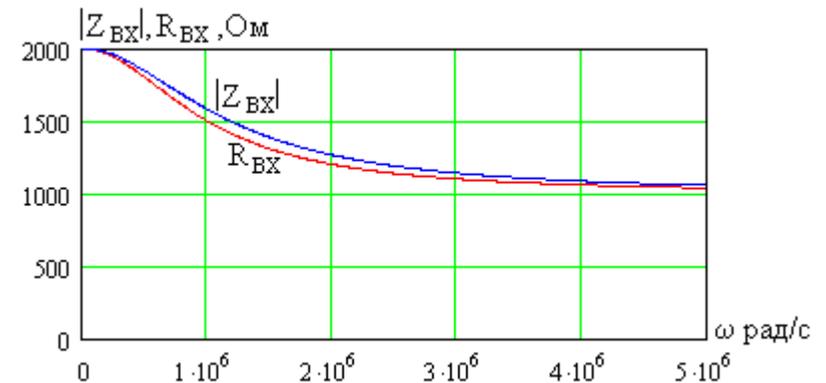


Рис. 7.9

123

На рис. 7.10 показана зависимость от частоты реактивной составляющей входного сопротивления четырехполюсника.

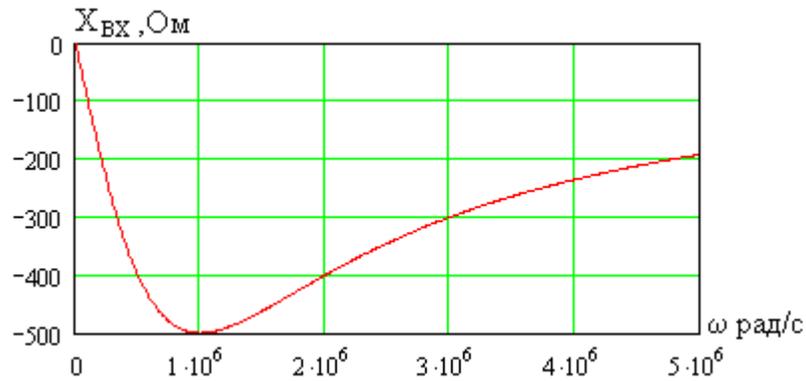


Рис. 7.10

Как видно, входное сопротивление четырехполюсника существенно изменяется в выбранном диапазоне частот и имеет емкостный характер. Модуль и активная составляющая сопротивления уменьшаются с ростом частоты от значения $R + R_H$ при $\omega = 0$ до R на бесконечной частоте (на высоких частотах емкость шунтирует нагрузку).

Определим, каким должно быть внутреннее сопротивление источника сигнала, чтобы обеспечить передачу максимума мощность в четырехполюсник на частоте $\omega = 10^6$ рад/с. В этом случае входное сопротивление четырехполюсника равно $Z_{BX} = 1500 - j500$ Ом. Тогда в соответствии с (7.7) источник сигнала должен иметь внутреннее сопротивление равным $Z_C = 1500 + j500$ Ом.

Рассмотрим выходное сопротивление четырехполюсника рис. 7.7, для этого рассмотрим цепь на рис. 7.11а. В соответствии с теоремой об эквивалентном источнике ее можно заменить эквивалентным реальным источником напряжения, показанным на рис. 7.11б. Эквивалентная ЭДС \dot{E}_∂ равна напряже-

124

нию холостого хода цепи рис. 7.11а, $\dot{E}_\partial = \dot{U}_{XX}$, а эквивалентное сопротивление Z_∂ равно сопротивлению цепи рис. 7.11а

при выключенном источнике, как показано на рис. 7.11в. Сопротивление Z_∂ и есть внутреннее сопротивление четырехполюсника.

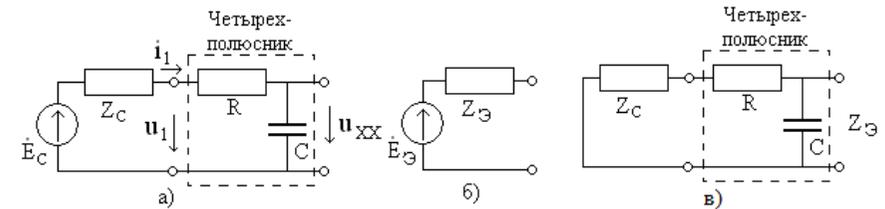


Рис. 7.11

Для цепей на рис. 7.11а и рис. 7.11в нетрудно получить параметры эквивалентного источника рис. 7.13б. Его ЭДС и внутреннее сопротивление $Z_\partial = Z_{BIX}$ равны

$$\dot{E}_\partial = \dot{E}_c \frac{1}{1 + j\omega C(Z_c + R)},$$

$$Z_\partial = Z_{BIX} = \frac{Z_c + R}{1 + j\omega C(Z_c + R)}.$$

На рис. 7.12 приведены зависимости от частоты модуля и аргумента Z_{BIX} , а на рис. 7.13 – его активной R_{BIX} и реактивной X_{BIX} составляющих при $Z_c = 1$ кОм, $R = 1$ кОм и $C = 1$ нФ.

Как видно, модуль выходного сопротивления максимален на постоянном токе и быстро падает с ростом частоты. Выходное сопротивление всегда имеет емкостный характер. На частоте $\omega = 10^6$ рад/с $R_{BIX} = 400$ Ом и $X_{BIX} = -800$ Ом.

Для обеспечения максимальной мощности в нагрузку ее сопротивление должно удовлетворять условию (7.9). Проведите самостоятельно расчет передаваемой в нагрузку мощности.

125

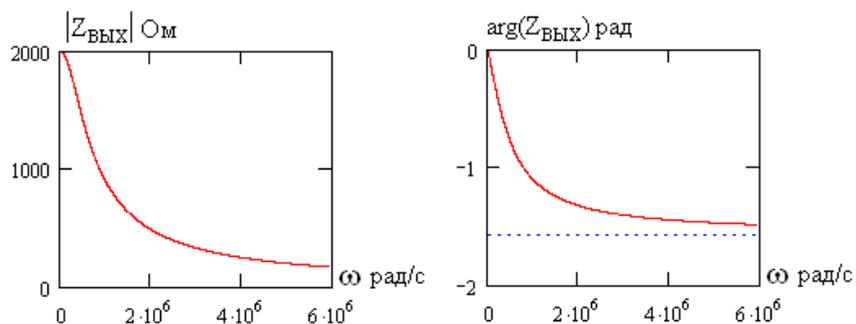


Рис. 7.12

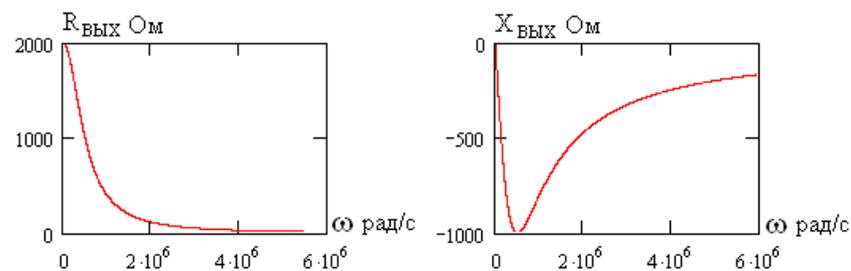


Рис. 7.13

Входное и выходное сопротивления (проводимости) четырехполюсника являются важными его характеристиками, необходимыми для анализа передачи сигнала от источника в четырехполюсник и далее в нагрузку.

7.3. Комплексный коэффициент передачи

Комплексный коэффициент передачи по напряжению определяется выражением

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}, \quad (7.10)$$

126

аналогично вводятся в рассмотрение **комплексный коэффи-**

циент передачи тока

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \quad (7.11)$$

и коэффициент (не комплексный) передачи мощности

$$K_p = \frac{P_2}{P_1}, \quad (7.12)$$

где P_1 - мощность, потребляемая четырехполюсником, а P_2 - мощность, передаваемая в нагрузку. Для расчета коэффициентов передачи необходимо при заданном источнике входного сигнала определить комплексные амплитуды входного и выходного напряжений, токов или мощностей.

В качестве примера рассмотрим четырехполюсник, схема которого показана на рис. 7.14, и определим его комплексный коэффициент передачи напряжения вида (7.10).

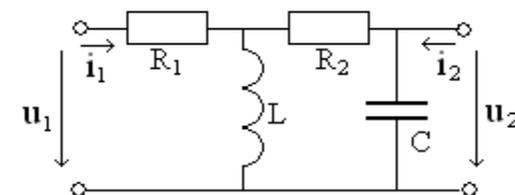


Рис. 7.14

Подключим на вход четырехполюсника идеальный

источник напряжения с ЭДС $\dot{E} = \dot{U}_1$, как показано на рис. 7.15, и воспользуемся методом узловых напряжений. В цепи имеется два узла и необходимо определить единственное узловое напряжение \dot{U}_{11} . Выражая через \dot{U}_{11} токи ветвей и используя первый закон Кирхгофа, получим уравнение метода узловых напряжений:

$$\frac{\dot{U}_{11} - \dot{E}}{R_1} + \frac{\dot{U}_{11}}{j\omega L} + \frac{\dot{U}_{11}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = 0$$

127

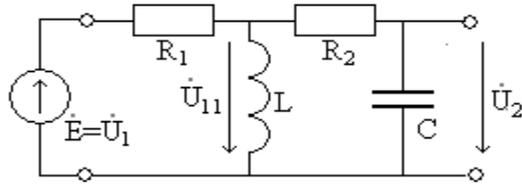


Рис. 7.15

После алгебраических преобразований получим

$$\dot{U}_{11} = \dot{E} \frac{j\omega L(1 + j\omega CR_2)}{R_1 - \omega^2 LC(R_1 + R_2) + j\omega(L + CR_1R_2)}.$$

Тогда по Закону Ома можно определить выходное напряжение

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{11} \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \dot{U}_{11} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}.$$

Подставляя выражение для \dot{U}_{11} , с учетом $\dot{U}_1 = \dot{E}$ получим

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \frac{j\omega L}{R_1 - \omega^2 LC(R_1 + R_2) + j\omega(L + CR_1R_2)}.$$

В результате комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению равен

$$\dot{K}_u = \frac{j\omega L}{R_1 - \omega^2 LC(R_1 + R_2) + j\omega(L + CR_1R_2)}.$$

Как видно, \dot{K}_u - комплексная функция частоты сигнала,

ее называют **комплексной частотной характеристикой (КЧХ)**. Графически она отображается линией в трехмерном пространстве (ось ω и две оси для отображения комплексного числа), что неудобно практически.

На плоскости КЧХ изображается в виде **годографа**. Для его построения заданный интервал частот разбивается с равномерным шагом, для каждого значения частоты вычисляются и отображаются на комплексной плоскости по осям абсцисс и ординат соответственно действительная $\text{Re}\{\dot{K}\}$ и мнимая $\text{Im}\{\dot{K}\}$ составляющие комплексного коэффициента передачи.

Пример годографа КЧХ цепи на рис. 7.14 при $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$ и $C = 1 \text{ нФ}$ показан на рис. 7.16. Стрелка показывает направление увеличения частоты входного сигнала. На частоте

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1}{LC(R_1 + R_2)}}$$

величина \dot{K} действительна, а точка годографа расположена на оси абсцисс.

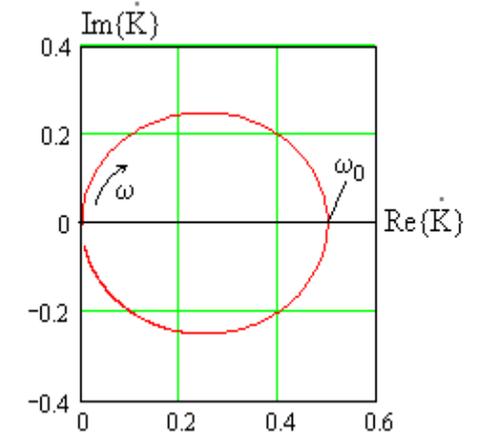


Рис. 7.16

7.4. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики четырехполюсника

Комплексный коэффициент передачи четырехполюсника можно представить в показательной форме,

$$\dot{K} = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (7.13)$$

где $K(\omega) = |\dot{K}|$ - его модуль, а $\varphi(\omega) = \arg(\dot{K})$ - аргумент.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) $K(\omega)$ представляет собой зависимость **модуля** комплексного коэффициента передачи от частоты. Она представляет собой отношение **амплитуд** или **действующих значений** выходного сигнала к входному.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) $\varphi(\omega)$ - это зависимость от частоты **аргумента** комплексного коэффициента передачи. Она представляет собой **сдвиг фаз между выходным и входным сигналами**.

Обычно выражение для \dot{K} представляет собой дробь с комплексными числителем и знаменателем, которую необходимо представить в виде

$$\dot{K} = \frac{a + jb}{c + jd}. \quad (7.14)$$

Тогда модуль частного (дроби) равен частному модулей числителя и знаменателя,

$$|\dot{K}| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad (7.15)$$

а ее аргумент - разности аргументов числителя и знаменателя,

$$\varphi = \arg(a + jb) - \arg(c + jd). \quad (7.16)$$

Аргумент комплексного числа $\dot{A} = a + jb$ определяется выражением

$$\arg(a + jb) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b}{a}\right) & \text{при } a \geq 0, \\ \pm \pi + \arctg\left(\frac{b}{a}\right) & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (7.17)$$

Численные значения АЧХ **безразмерны**, а ФЧХ измеряется в **угловых единицах** (радианах или градусах).

В инженерной практике широко используется измерение АЧХ в **децибелах (дБ)**. Если рассматриваются модули коэффициентов K передачи напряжения или тока, то их значение в децибелах равно

$$K_{u,i \text{ дБ}} = 20 \cdot \lg(K). \quad (7.18)$$

Если же речь идет о коэффициенте передачи мощности K_p , то

$$K_{p \text{ дБ}} = 10 \cdot \lg(K_p). \quad (7.19)$$

Логарифмическая мера АЧХ весьма удобна при анализе четырехполосников. Если $K = 1$, то получим, что $K_{\text{дБ}} = 0$ дБ и амплитуда сигнала не меняется при прохождении через четырехполосник. Если $K > 1$, то $K_{\text{дБ}} > 0$ и происходит **усиление** сигнала, а если наоборот, то $K_{\text{дБ}} < 0$ и наблюдается **ослабление (затухание)** сигнала. Основным достоинством логарифмической меры является возможность отображать графически широкий диапазон изменения АЧХ от маленьких величин ($10^{-3} \div 10^{-6}$) или $-60 \div -120$ дБ до больших значений ($10^3 \div 10^6$) или $60 \div 120$ дБ.

Измерение коэффициентов передачи в децибелах удобно при их перемножении, например, при каскадном соединении согласованно нагруженных четырехполосников (эти вопросы рассматриваются в дальнейшем), при этом значения в децибелах будут **складываться**.

Определим АЧХ и ФЧХ цепи, показанной на рис. 7.14. Для найденного комплексного коэффициента передачи по напряжению модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ) соответственно равны

$$K(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{[R_1 - \omega^2 LC(R_1 + R_2)]^2 + \omega^2(L + CR_1R_2)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left[\frac{\omega(L + CR_1R_2)}{R_1 - \omega^2 LC(R_1 + R_2)} \right] & \text{при } \omega \leq \omega_0, \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left[\frac{\omega(L + CR_1R_2)}{R_1 - \omega^2 LC(R_1 + R_2)} \right] & \text{при } \omega > \omega_0, \end{cases}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1}{LC(R_1 + R_2)}}.$$

На рис. 7.17 показан график АЧХ четырехполюсника, показанного на рис. 7.14 при $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$ и $C = 1 \text{ нФ}$. Максимум АЧХ имеет место на частоте ω_0 , в чем нетрудно убедиться, взяв производную $K(\omega)$ и приравняв ее нулю. На рис. 7.18 приведен график ФЧХ четырехполюсника.

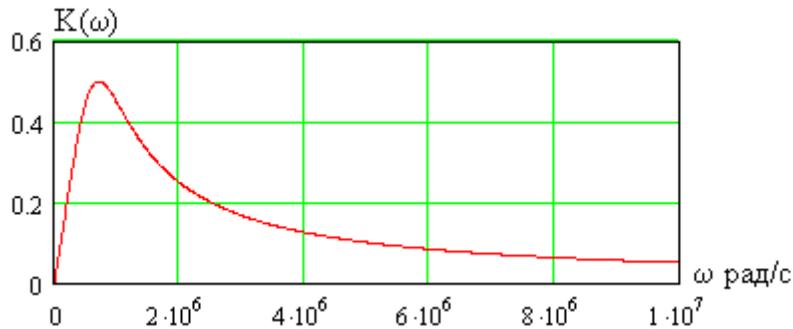


Рис. 7.17

На частотах $\omega < \omega_0$ ФЧХ $\varphi(\omega) > 0$, то есть выходное

напряжение опережает по фазе входное, а если $\omega > \omega_0$, то наоборот. На частоте $\omega = \omega_0$ сдвиг фаз между этими напряжениями равен нулю (они синфазны).

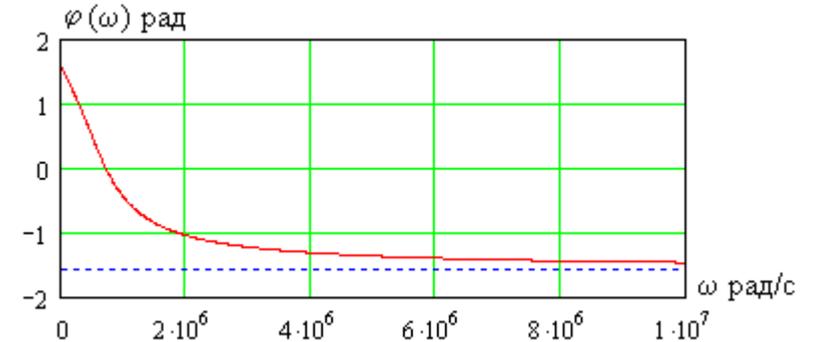


Рис. 7.18

На рис. 7.19а показана та же АЧХ, что и на рис. 7.17, но в децибелах, а на рис. 7.19б – еще и в логарифмическом масштабе по оси частот. Как видно, переход к логарифмическим масштабам по оси ординат (дБ) и оси частот позволяет разборчиво представить АЧХ в широком диапазоне значений. Недостатком подобных графиков является искажение формы кривых по сравнению с равномерным масштабом на рис. 7.17.

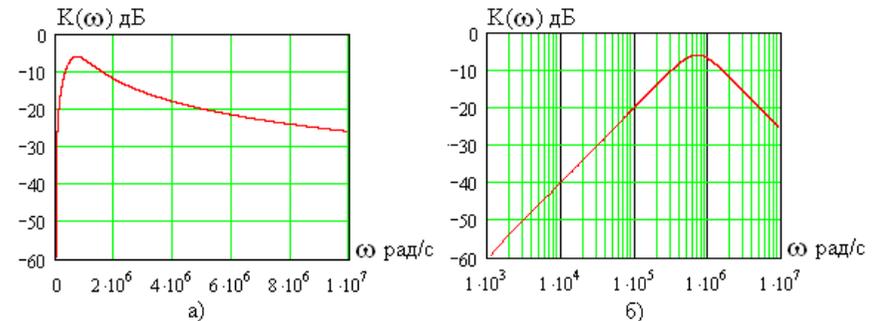


Рис. 7.19

7.5. Задания для самостоятельного решения

Задание 7.1. Определите входное сопротивление четырехполюсников, показанных на рис. 7.20. Получите формулы для модуля и аргумента, активной и реактивной составляющих. С помощью пакета программ MathCAD постройте графики для $R_1 = 1 \text{ кОм}$ и $L = 1 \text{ мГн}$ при отсутствии нагрузки ($R_H \rightarrow \infty$) и при ее наличии ($R_H = 1 \text{ кОм}$).

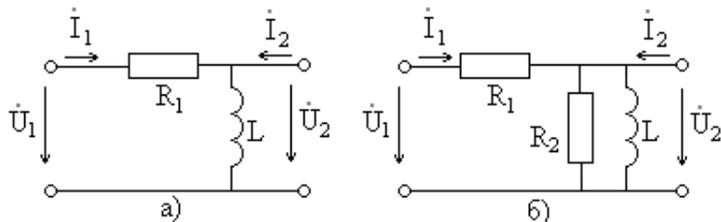


Рис. 7.20

Рассчитайте комплексный коэффициент передачи и постройте годографы КЧХ четырехполюсников, схемы которых показаны на рис. 7.24. Определите АЧХ и ФЧХ, постройте их графики.

Задание 7.2. Для цепи рис. 7.21 при $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГн}$

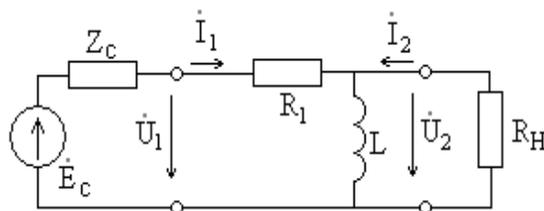


Рис. 7.21

и $R_H = 1 \text{ кОм}$ на частоте $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$ определите, при каком комплексном сопротивлении Z_c реального источника сигнала в нагру-

женный четырехполюсник будет передана максимальная мощность. Вычислите величину этой мощности при ЭДС источника напряжения $\dot{E}_C = 10e^{-j30^\circ} \text{ В}$.

8. СИСТЕМЫ ПАРАМЕТРОВ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

8.1. Системы параметров четырехполюсника

В ряде случаев необходимо не описать свойства четырехполюсника в виде частотных характеристик, а сформировать его **модель, связывающую между собой входные и выходные токи и напряжения**. Аналогичные модели уже использовались при описании двухполюсных элементов, которые характеризуются **двумя переменными** – протекающим током и приложенным к элементу напряжением. Например, модель «сопротивление» имеет вид $\dot{U} = R\dot{I}$.

У четырехполюсника вида рис. 1.2 **четыре переменных** – входной \dot{I}_1 и выходной \dot{I}_2 токи, входное \dot{U}_1 и выходное \dot{U}_2 напряжения. Любые **две** из них можно выбрать в качестве независимых, тогда **две** оставшихся будут зависимыми. В результате модель будет представлять собой систему из двух линейных алгебраических уравнений.

Всего возможно построить

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

моделей, где $\binom{4}{2}$ – число сочетаний из четырех переменных по две.

Если в качестве независимых переменных выбрать входное \dot{U}_1 и выходное \dot{U}_2 напряжения, то модель можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \quad (8.1)$$

Модель полностью характеризуется четырьмя коэффициентами ($Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$) и поэтому ее называют **системой Y-параметров**. Все Y-параметры являются **комплексными проводимостями, зависят от схемы и параметров элементов четырехполюсника, а также частоты сигнала**. Систему уравнений (2.1) можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

В этом случае модель полностью определяется **матрицей Y-параметров**:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

Выбрав независимыми переменными входной ток \dot{I}_1 и выходное напряжение \dot{U}_2 , получим модель четырехполюсника в виде **системы H-параметров**:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}, \quad (8.4)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (8.5)$$

где **матрица H-параметров** имеет вид

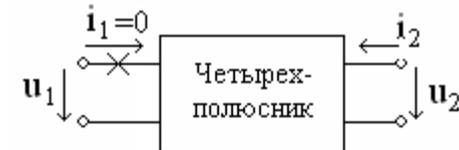
$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Параметр H_{11} имеет размерность сопротивления, H_{12} и H_{21} - безразмерны, а H_{22} является проводимостью. В общем случае это **комплексные величины, зависящие от схемы и параметров элементов четырехполюсника, а также от частоты сигнала**. Используются и другие системы параметров, которые представлены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Система параметров	Система уравнений	Матричная форма
Z	$\begin{cases} \dot{I}_1 = Z_{11}\dot{U}_1 + Z_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Z_{21}\dot{U}_1 + Z_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$
A	$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}'_2 \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}'_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$
B	$\begin{cases} \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}'_1 \\ \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}'_1 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$
F	$\begin{cases} \dot{U}_2 = F_{11}\dot{U}_1 + F_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = F_{21}\dot{U}_1 + F_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$

Штрих в обозначении токов указывает на их противоположное направление по сравнению с указанным на рис. 1.8. Все **шесть** рассмотренных моделей описывают свойства одной и той же цепи, следовательно, они эквивалентны и одна система параметров может быть определена через другую. В литературе [2, приложение 15] имеются соответствующие формулы пересчета параметров из одной системы в другую.



8.2. Физический смысл параметров четырехполюсника

Проведем анализ системы Н-параметров четырехполюсника. Уравнения имеют вид (8.4) и применимы для любых

137

значений независимых переменных (\dot{I}_1 и \dot{U}_2).

Допустим, что выходное напряжение \dot{U}_2 равно нулю. Фи-

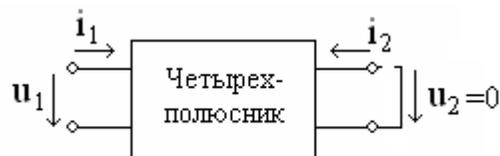


Рис. 8.1

зически это условие можно обеспечить при **коротком замыкании** выхода четырехполюсника, как показано на рис. 8.1. При этом из первого уравнения системы (8.4) получим

$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_2 = 0} \quad (8.7)$$

Как видно, параметр H_{11} , равный отношению входного напряжения к входному току, является **комплексным входным сопротивлением четырехполюсника при коротком замыкании выхода и измеряется в Омах**.

Из второго уравнения системы (8.4) можно записать

$$H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_2 = 0} \quad (8.8)$$

то есть H_{21} представляет собой **безразмерный комплексный коэффициент передачи тока при коротком замыкании выхода**.

Допустим, что входной ток четырехполюсника \dot{I}_1 равен нулю, что соответствует **холостому ходу (разрыву) входной**

цепи, как показано на рис. 8.2.

Рис. 8.2

138

Из первого уравнения системы (8.4) получим

$$H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1 = 0} \quad (8.9)$$

Как видно, параметр H_{12} равен отношению комплексных амплитуд входного и выходного напряжений. Его целесообразно назвать **комплексным коэффициентом обратной передачи напряжения при холостом ходе входной цепи**.

Из второго уравнения (8.4) следует

$$H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1 = 0} \quad (8.10)$$

то есть H_{22} является **комплексной выходной проводимостью четырехполюсника при холостом ходе входной цепи**.

Рассмотрим систему Y-параметров на основе уравнений (8.1). Допустим, что $\dot{U}_2 = 0$ (обеспечен **режим короткого замыкания выхода**), тогда параметр

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2 = 0} \quad (8.11)$$

представляет собой **комплексную входную проводимость**, а

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2 = 0} \quad (8.12)$$

- **комплексную проходную проводимость четырехполюс-**

ника при коротком замыкании выхода. Аналогично при $\dot{U}_1 = 0$ (обеспечен режим короткого замыкания входа)

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1 = 0} \quad (8.13)$$

является комплексной проводимостью обратной передачи,

$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1 = 0} \quad (8.14)$$

- комплексной выходной проводимостью при коротком замыкании входа четырехполюсника.

Как уже отмечалось, системы параметры зависят от схемы и параметров элементов четырехполюсника и от частоты входного сигнала.

Полученные выражения (8.7) - (8.10) не только выявляют физический смысл параметров, но позволяют сформировать методики их расчета и измерения.

Проанализируйте самостоятельно физический смысл остальных систем параметров из табл. 8.1.

8.3. Методика расчета параметров четырехполюсников

В качестве примера рассмотрим расчет H-параметров четырехполюсника, схема которого показана на рис. 8.3а.

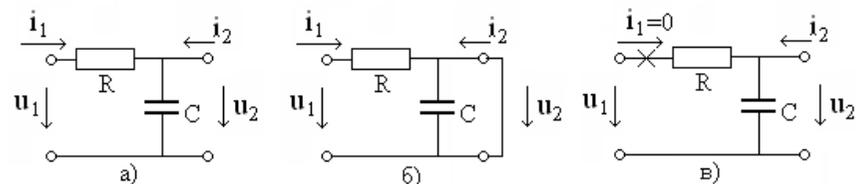


Рис. 8.3
140

Обеспечим режим короткого замыкания выхода, как показано на рис. 8.3б, и, полагая известным входное напряжение \dot{U}_1 , любым методом расчета найдем входной ток \dot{I}_1 .

В цепи рис. 8.3б емкость C замкнута, схема принимает вид, показанный на рис. 8.4, тогда по закону Ома

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R},$$

а из (8.7) получим

$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R.$$

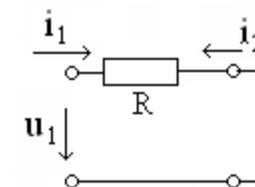


Рис. 8.4

Затем, полагая известным входной ток \dot{I}_1 , любым методом определим выходной ток \dot{I}_2 . В цепи на рис. 8.4 очевидно, что $\dot{I}_2 = -\dot{I}_1$, тогда из (8.8) следует $H_{21} = -1$.

Далее обеспечиваем режим холостого хода входной цепи, как показано на рис. 8.3в. При $\dot{I}_1 = 0$ напряжение на сопротивлении R равно нулю. Полагая известным выходное напряжение \dot{U}_2 , любым методом определим входное напряжение \dot{U}_1 . Для цепи рис. 8.3в получим $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$, тогда из (8.9)

$$H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = 1.$$

Затем при заданном выходном напряжении \dot{U}_2 любым методом определим выходной ток \dot{I}_2 . В рассматриваемом случае в выходной цепи включена только емкость C (сопротивление R отключено), тогда $\dot{I}_2 = j\omega C \dot{U}_2$ и из (8.10) получим

$$H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = j\omega C.$$

В результате матрица Н-параметров равна

$$[H] = \begin{bmatrix} R & 1 \\ -1 & j\omega C \end{bmatrix},$$

а система уравнений (модель) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = R\dot{I}_1 + \dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = -\dot{I}_1 + j\omega C \dot{U}_2. \end{cases}$$

Как видно, первое уравнение модели соответствует уравнению **второго закона Кирхгофа**, а второе уравнение – уравнению **первого закона Кирхгофа** для цепи рис. 8.3а. Этот результат является частным случаем, и обусловлен простотой цепи, показанной на рис. 8.3а.

Определим систему Y-параметров того же четырехполюсника на рис. 8.3а. В режиме короткого замыкания выхода (рис. 8.3б и рис. 8.4) получим

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{R},$$

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = -\frac{1}{R}.$$

Обеспечим режим короткого замыкания входной цепи, как показано на рис. 8.5, при этом

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = -\frac{1}{R},$$

$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{1}{R} + j\omega C.$$

В результате получим матрицу Y-параметров

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + j\omega C \end{bmatrix},$$

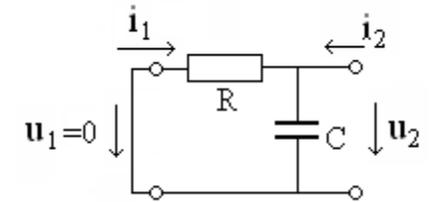


Рис. 8.5

систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{1}{R} \dot{U}_1 - \frac{1}{R} \dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = -\frac{1}{R} \dot{U}_1 + \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right) \dot{U}_2. \end{cases}$$

Проанализируйте проявление законов Ома и Кирхгофа в модели цепи рис. 8.3а на базе Y-параметров.

8.4. Измерение параметров четырехполюсников

На практике часто приходится иметь дело с электронными

устройствами, которые можно рассматривать как **линейные четырехполюсники**. Прежде всего, это пассивные *RLC* цепи, например, частотные фильтры. Однако и устройства, содержащие **нелинейные** элементы (например, транзисторные усилители) можно рассматривать как линейные четырехполюсники, если воздействующие на них переменные сигналы **достаточно малы** (режим малого сигнала в усилителе).

Если устройство работает в линейном режиме, то, измерив

143

его систему параметров, можно построить простую и удобную в использовании **экспериментальную модель**.

Параметры линейного четырехполюсника могут быть измерены с использованием соотношений, подобных (8.7)-(8.10) для *H*-параметров. В этом случае необходимо реализовать эксперименты (опыты) короткого замыкания выхода и холостого хода входа, как показано на рис. 8.6 применительно к **модулям** *H*-параметров.

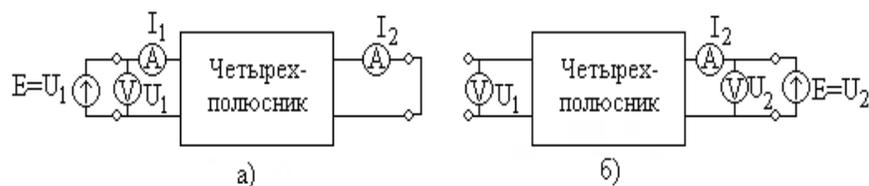


Рис. 8.6

При коротком замыкании выхода (рис. 8.6а) к нему вместо нагрузки подключается перемычка, а к входу – генератор гармонического сигнала с заданной частотой и ЭДС E . По показаниям вольтметра и амперметров в цепи рис. 8.6а измеряются действующие значения входного напряжения U_1 , входного I_1 и выходного I_2 токов, тогда получим

$$|H_{11}| = \frac{U_1}{I_1}, \quad |H_{21}| = \frac{I_2}{I_1}. \quad (8.15)$$

В режиме холостого хода входной цепи (рис. 8.6б) генератор подключается к выходу четырехполюсника и измеряются действующие значения выходного тока I_2 , входного U_1 и выходного U_2 напряжений, тогда

$$|H_{12}| = \frac{U_1}{U_2}, \quad |H_{22}| = \frac{I_2}{U_2}. \quad (8.16)$$

144

Если необходимо определить комплексные значения *H*-параметров, то потребуется измерение их аргументов, которое можно осуществить с помощью двухлучевого осциллографа (рис. 8.7). Для этого в ветви с измеряемым током вместо амперметров включаются резисторы с малым сопротивлением R_0 и падения напряжения на них (u' или u'') при необходимости подаются на осциллограф. По смещению во времени двух сравниваемых гармонических сигналов измеряется сдвиг фаз между ними (например, при измерении аргумента \dot{H}_{11} в схеме на рис. 8.7а на осциллограф подаются напряжения u_1 и u').

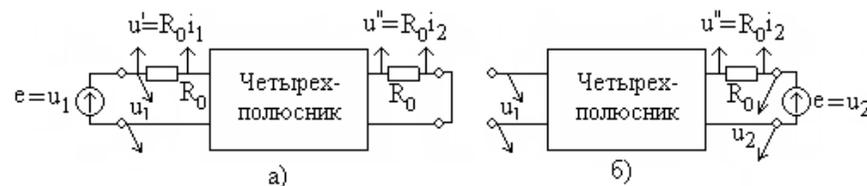


Рис. 8.7

Промышленность выпускает измерительные приборы, позволяющие экспериментально определять, например, *H*-параметры биполярных транзисторов. Эта возможность предусматривается даже в некоторых бытовых мультиметрах (малогабаритных простых приборах для измерения токов, напряжений и сопротивлений).

Разработайте самостоятельно методики измерения не рассмотренных систем параметров.

При измерении параметров четырехполосников эксперименты короткого замыкания и холостого хода, особенно выходной цепи, необходимо проводить **инженерно грамотно**. В противном случае можно вывести измеряемое устройство (усилитель) из строя.

145

8.5. Соединения четырехполосников

Для двухполосников имеется два простых варианта их соединения – последовательное и параллельное. У четырехполосников таких простых вариантов соединения уже **пять**, как показано на рис. 8.8:

- последовательное по входу и выходу (рис. 8.8а);
- параллельное по входу и выходу (рис. 8.8б);
- последовательное по входу и параллельное по выходу (рис. 8.8в);
- параллельное по входу и последовательное по выходу (рис. 8.8г);
- каскадное (рис. 8.8д).

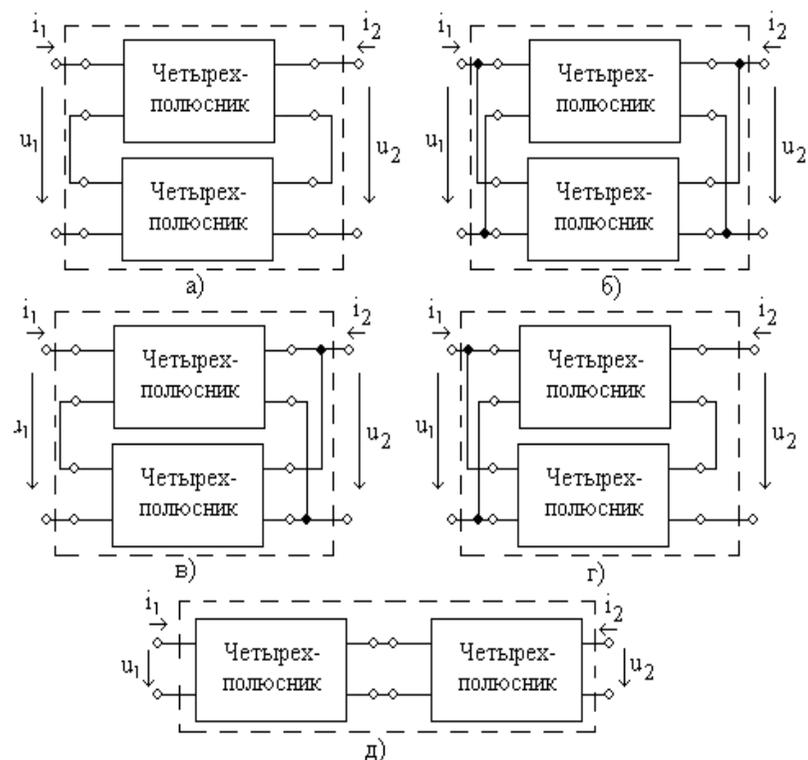


Рис. 8.8

146

Каждое соединение можно представить одним эквивалентным четырехполосником, что дает возможность преобразовывать сложные соединения четырехполосников, представляя их простыми моделями.

Матрицу параметров эквивалентного четырехполосника можно выразить через матрицы параметров двух входящих в соединение четырехполосников в соответствии с табл. 8.2.

Простые выражения (табл. 8.2) имеют место при определенном выборе системы параметров в зависимости от характера соединения четырехполосников, поэтому на практике широко используются все системы параметров.

Соотношения из табл. 8.2 позволяют существенно упростить расчеты сложных цепей, которые можно представить как

соединение простых четырехполосников.

Таблица 8.2

Вид соединения	Матрица
Последовательное по входу и выходу	$[Z] = [Z_1] + [Z_2]$
Параллельное по входу и выходу	$[Y] = [Y_1] + [Y_2]$
Последовательное по входу и параллельное по выходу	$[H] = [H_1] + [H_2]$
Параллельное по входу и последовательное по выходу	$[F] = [F_1] + [F_2]$
Каскадное	$[A] = [A_1] \times [A_2]$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}'_2, \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}'_2, \\ \dot{U}_2 = Z_H \dot{I}'_2, \\ \dot{U}_1 + Z_C \dot{I}_1 = \dot{E}. \end{cases} \quad (8.17)$$

При известной ЭДС источника и параметрах элементов цепи из системы уравнений (8.17) можно найти все токи и напряжения.

Из уравнений (8.17) определим комплексный коэффициент передачи напряжения в виде

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_H \dot{I}'_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}'_2} = \frac{Z_H}{A_{11} \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}'_2} + A_{12}} = \frac{Z_H}{A_{11}Z_H + A_{12}}. \quad (8.18)$$

Из второго уравнения (8.17) можно записать

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}'_2} = A_{21} \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}'_2} + A_{22} = A_{21}Z_H + A_{22}, \quad (8.19)$$

тогда комплексный коэффициент передачи тока равен

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}'_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{A_{21}Z_H + A_{22}}. \quad (8.20)$$

Как видно, частотные характеристики нагруженного четырехполосника определяются его А-параметрами и сопротивлением нагрузки. При отсутствии нагрузки ($Z_H \rightarrow \infty$) из (8.20) получим

$$\dot{K}_i \Big|_{Z_H \rightarrow \infty} = \frac{1}{A_{11}}. \quad (8.21)$$

8.6. Параметры четырехполосника и его частотные характеристики

Подключим к четырехполоснику источник сигнала с ЭДС

147

\dot{E} и внутренним сопротивлением Z_C и нагрузку Z_H (рис. 8.9).

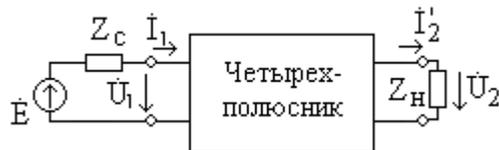


Рис. 8.9

Для описания четырехполосника используем систему А-параметров. В результате на основе законов Ома и Кирхгофа получим систему уравнений вида

8.7. Применение моделей четырехполосников

Модели четырехполюсников и их системы параметров широко используются в различных областях электротехники и электроники.

Это прежде всего теория линейных четырехполюсных трактов передачи сигналов, трансформации напряжений, токов, мощности и сопротивлений, задачи анализа и синтеза частотных фильтров с заданными частотными характеристиками.

Системы параметров четырехполюсников применяются для описания нелинейных активных элементов (транзисторов) в режиме малого сигнала. Для описания биполярных транзисторов чаще всего используется система Н-параметров. В справочниках по транзисторам их усилительные свойства определяются статическим (определяемом на постоянном токе) коэффициентом передачи тока в схеме с общим эмиттером $h_{21э}$, который является соответствующим Н-параметром.

Для измерения всех Н-параметров биполярных транзисторов имеются специальные измерительные приборы. Даже некоторые бытовые мультиметры (универсальные измерители напряжения, тока и сопротивления) имеют возможность измерения параметра H_{21} . Все это свидетельствует о широком практическом применении этой системы параметров.

149

В описании полевых транзисторов и электронных ламп применяют систему Y-параметров. Статический параметр Y_{21} имеет специальное название **крутизны**.

При разработке малосигнальных моделей полупроводниковых приборов часто используется система Z-параметров.

8.8. Задания для самостоятельного решения

Задание 8.1. Определите системы Y-, H- и A-параметров четырехполюсников, схемы которых показаны на рис. 8.10. Повторите расчеты, заменив емкость C на индуктивность L. Представьте результаты в виде частотных характеристик.

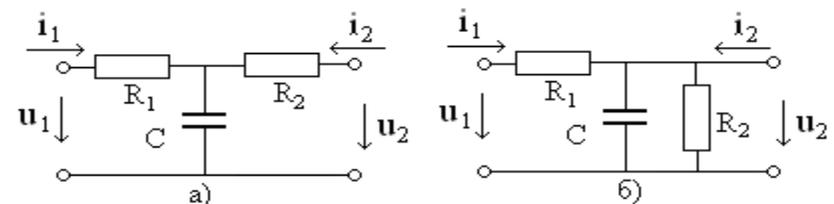


Рис. 8.10

Задание 8.2. Определите систему A-параметров четырехполюсников, схемы которых показаны на рис. 8.11. Определите их частотные характеристики, постройте графики.

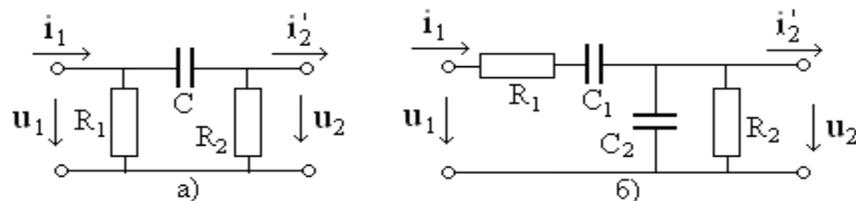


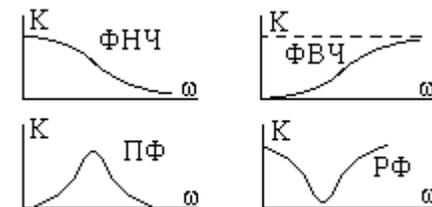
Рис. 8.11

150

9. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗБИРАТЕЛЬНОСТИ ЧАСТОТНЫХ ФИЛЬТРОВ

9.1. Частотные фильтры

Частотным фильтром называют четырехполюсник, комплексный коэффициент передачи, АЧХ и ФЧХ которого требуемым образом изменяются в заданном диапазоне частот. Он обладает способностью пропускать сигналы с входа на выход или подавлять (задерживать) их в определенных частотных интер-



валах.

Частотный фильтр **избирательно** реагирует на сигнал в зависимости от его **частоты**. Частотная избирательность обусловлена двумя явлениями:

- зависимостью от частоты сопротивлений реактивных элементов L и C;
- электрическим **резонансом** в цепи, содержащей емкости и индуктивности.

Резонанс – это явление резкого нарастания амплитуды колебаний (тока или напряжения) в цепи по сравнению с амплитудой источника (воздействия) при приближении частоты сигнала к собственной (**резонансной**) частоте цепи. Резонансные явления наблюдаются и в механических системах.

9.2. Характеристики избирательности

Избирательность характеризует способность четырехполюсника со свойствами частотного фильтра хорошо передавать на выход сигналы одних частот и подавлять сигналы на других частотах.

Для четырех основных типов фильтров: нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовых (ПФ) и режекторных (РФ), типовые графики амплитудно-частотных характеристик показаны на рис. 9.1.

Фильтры нижних частот (ФНЧ) и полосовые фильтры

(ПФ) характеризуются прежде всего **полосой пропускания Π** – диапазоном частот, внутри которого АЧХ уменьшается не более, чем в $\sqrt{2}$ раз или на 3 дБ (децибела) относительно максимального значения.

Это определение при-

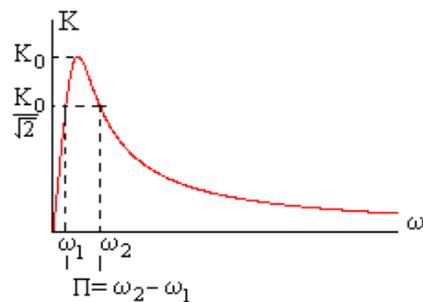


Рис. 9.1

менительно к полосовому фильтру иллюстрирует график на рис. 9.2. Прежде всего определяется **макси-**

мум K_0 АЧХ и величина АЧХ на границе полосы пропускания, равная $K_0/\sqrt{2}$. Затем по графику или из решения уравнения

Рис. 9.2

$$K(\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{2}} \quad (9.1)$$

находятся частоты ω_1 и ω_2 , соответствующие границам полосы пропускания, которые называют **частотами среза**. Тогда полоса пропускания Π равна

$$\Pi = \omega_2 - \omega_1. \quad (9.2)$$

Для фильтров верхних частот (ФВЧ) и режекторных фильтров (РФ) полоса пропускания бесконечна, и для их описания используется **полоса удержания Π_y** - диапазон частот,

внутри которого АЧХ уменьшается более, чем в $\sqrt{2}$ раз или на 3 дБ (децибела) относительно максимального значения, что иллюстрирует график, показанный на рис. 9.9. Расчет проводится аналогично предыдущему и тогда

$$\Pi_y = \omega_2 - \omega_1, \quad (9.3)$$

а частоты среза определяются из уравнения (9.1).

Полоса пропускания (удержания) характеризует частот-

152

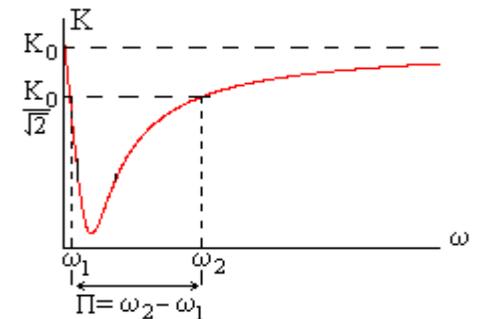


Рис. 9.3

ный диапазон, в котором фильтр выполняет заданные функции передачи или удержания сигнала. Как видно из приведенных рисунков, характер передачи сигнала меняется достаточно плавно, и представляют интерес характеристики избирательности, показывающие резкость перехода от пропускания до удержания сигнала при изменении частоты.

Наилучшей избирательностью обладает **идеальный фильтр** с прямоугольной АЧХ и прямолинейной ФЧХ, как показано для ПФ на рис. 9.4. Постройте аналогичные графики для ФНЧ, ФВЧ и РФ.

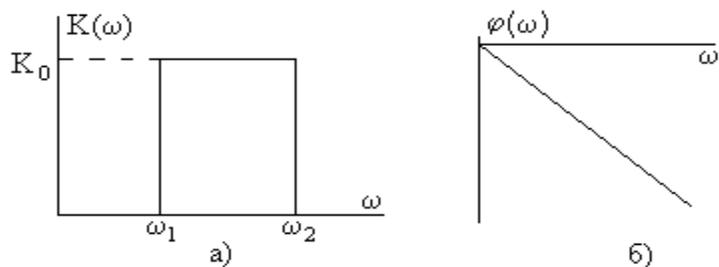
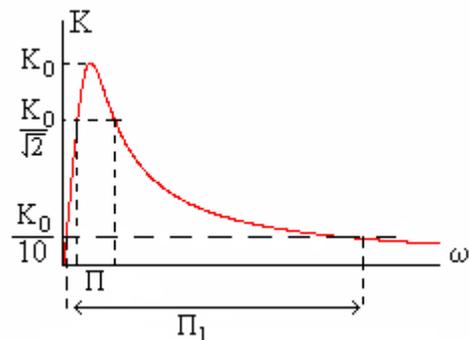


Рис. 9.4
153

Такой идеальный фильтр **физически нереализуем**, но к его частотным характеристикам можно приблизиться за счет усложнения схемы реального фильтра.

Мерой близости АЧХ реального фильтра к показанной на рис. 9.4а является **коэффициент прямоугольности** $K_{пр}$. Для ФНЧ и ПФ он равен отношению полосы пропускания Π на уровне $K_0 / \sqrt{2}$ (-3 дБ) к аналогичной полосе пропускания Π_1 на уровне $K_0 / 10$ (-20 дБ),

$$K_{пр} = \frac{\Pi}{\Pi_1} \quad (9.4)$$



Расчет $K_{пр}$ иллюстрирует рис. 9.5. Полоса Π_1 вычисляется из уравнения

$$K(\omega) = \frac{K_0}{10} \quad (9.5)$$

Для ФВЧ и РФ коэффициент прямоугольности Рис. 9.5

равен обратной величине,

$$K_{пр} = \frac{\Pi_1}{\Pi_y} \quad (9.6)$$

Для реальных фильтров величина $K_{пр}$ всегда **меньше единицы**. Чем ближе $K_{пр}$ к 1, тем выше избирательность частотного фильтра. В инженерной практике используют и другие меры избирательности.

9.3. Фильтры первого порядка

Электрическая цепь имеет первый порядок, если она содержит один реактивный элемент. Можно рассматривать четыре **простейших** фильтра первого порядка, показанных на рис. 9.6.

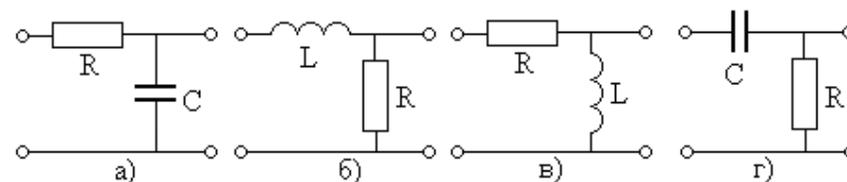


Рис. 9.6

На рис. 9.6а и рис. 9.6б показаны два ФНЧ, а на рис. 9.6в и

рис. 9.6г – два ФВЧ. В качестве примера рассмотрим ФНЧ рис. 9.6а.

Обозначим ток и напряжения, как показано на рис. 9.7. Тогда ток \dot{I}_1 в цепи равен

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \dot{U}_1 \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC},$$

а для выходного напряжения получим

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \frac{1}{j\omega C} = \dot{U}_1 \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

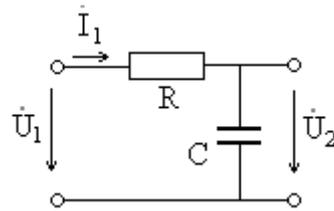


Рис. 9.7

По определению комплексный коэффициент передачи четырехполюсника равен

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

155

Определим АЧХ (модуль $\dot{K}(\omega)$) с учетом того, что модуль частного равен отношению модуля числителя к модулю знаменателя,

$$K(\omega) = |\dot{K}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

Фазочастотная характеристика $\varphi(\omega)$ как аргумент $\dot{K}(\omega)$ равна разности аргументов числителя и знаменателя,

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC).$$

На рис. 9.8 показаны графики АЧХ (рис. 9.8а) и ФЧХ (рис.

9.8б) соответственно при $R = 1 \text{ кОм}$ и $C = 1 \text{ нФ}$.

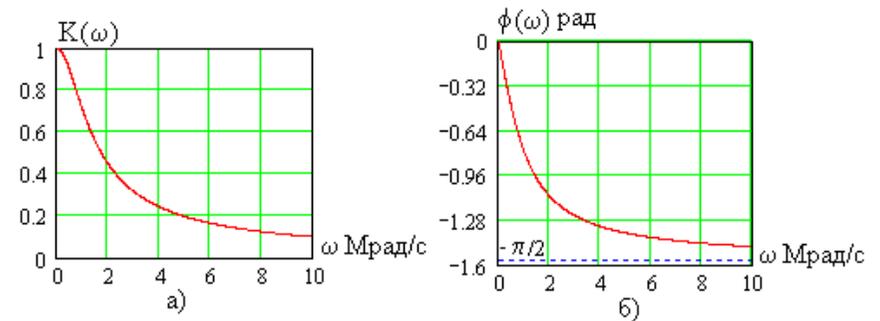


Рис. 9.8

Как видно по форме АЧХ, рассматриваемая цепь является типичным ФНЧ и форма частотных характеристик весьма далека от идеальной.

Вычислим полосу пропускания фильтра. Максимум АЧХ достигается при $\omega = 0$ и равен $K_0 = 1$. Тогда для полосы пропускания Π можно записать уравнение (рис. 9.9) вида

156

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\Pi \cdot RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а полоса пропускания в рад/с равна

$$\Pi = \frac{1}{RC}.$$

Как видно, для укоротенного ФНЧ необходимы большие значения сопротивления R и емкости C .

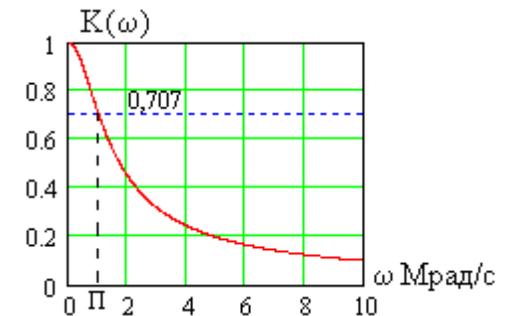


Рис. 9.9

Вычислим коэффициент прямоугольности $K_{пр}$ согласно

(9.4), соответствующие полосы частот показаны на рис. 9.10. Полоса пропускания Π на уровне $1/\sqrt{2}$ уже найдена, а аналогичная полоса Π_1 на уровне $1/10$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\Pi_1 \cdot RC)^2}} = \frac{1}{10}$$

Его решение имеет вид

$$\Pi = \frac{\sqrt{99}}{RC},$$

тогда коэффициент прямоугольности равен

$$K_{пр} = \frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{1}{\sqrt{99}} \approx 0,1$$

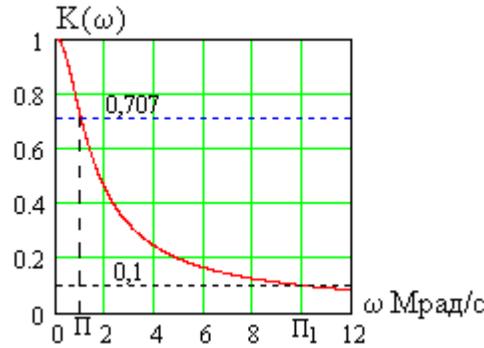


Рис. 9.10

Простейший ФНЧ вида рис. 9.7 обладает низкой избирательностью, не зависящей от его параметров.

Проведем аналогичный анализ простейшего фильтра верхних частот, схема которого показана на рис. 9.11. Его комплексный коэффициент передачи равен

157

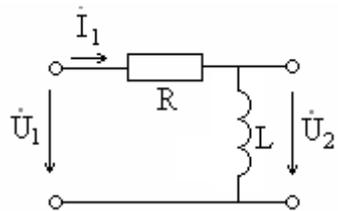


Рис. 9.11

$$\dot{K}(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}.$$

Для модуля (АЧХ) и аргумента (ФЧХ) получим

$$K(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right),$$

Их графики, построенные при $R = 1 \text{ кОм}$ и $L = 1 \text{ мГн}$, показаны на рис. 9.12а и рис. 9.12б соответственно.

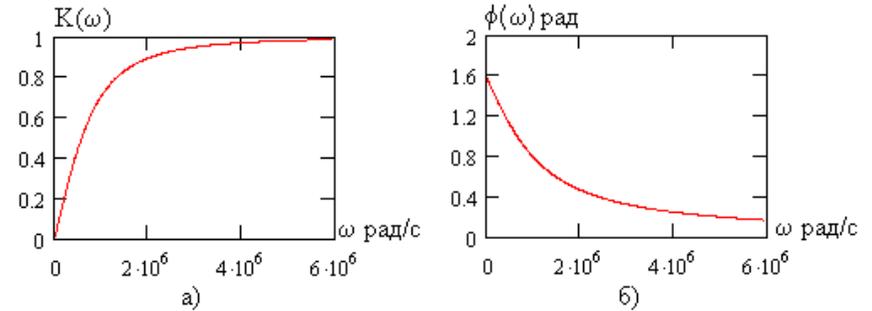


Рис. 9.12

Как видно, цепь является фильтром верхних частот. Для расчета полосы удержания Π_y удобнее представить АЧХ в виде выражения

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}.$$

Его максимум $K_0 = 1$, тогда из (9.1) получим уравнение

158

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\Pi_y L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

из которого получим выражение для полосы пропускания,

$$\Pi_y = \frac{R}{L}.$$

Для расчета коэффициента прямоугольности (9.6) определим полосу удержания Π_1 на уровне $1/10$ от максимума как решение уравнения вида

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\Pi_1 L}\right)^2}} = \frac{1}{10},$$

тогда полоса Π_1 равна

$$\Pi_1 = \frac{R}{\sqrt{99} \cdot L}.$$

Согласно (9.6), коэффициент прямоугольности равен

$$K_{пр} = \frac{\Pi_1}{\Pi_в} = \frac{1}{\sqrt{99}} \approx 0,1.$$

И в этом случае простой фильтр верхних частот имеет низкую избирательность.

9.4. Аперiodические фильтры второго порядка

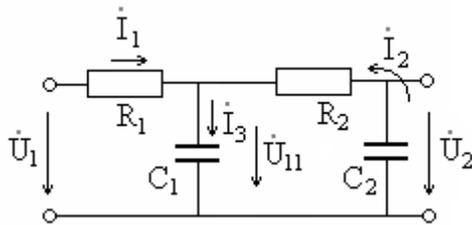
В фильтрах второго порядка присутствуют **два реактивных элемента**, при этом возможны следующие варианты:

- реактивные элементы одного типа (или две емкости, или две индуктивности);
- реактивные элементы разного типа (индуктивность и емкость).

Фильтры с одинаковыми реактивными элементами называют **аперiodическими**. Их работа основана на зависимости от частоты реактивных сопротивлений индуктивностей или емкостей.

В качестве примера рассмотрим RC фильтр нижних частот второго по-

Рис. 9.13



рядка, схема которого показана на рис. 9.13.

При известном значении входного напряжения \dot{U}_1 методом узловых напряжений определим выходное напряжение \dot{U}_2 , схема цепи с необходимыми обозначениями показана на рис. 9.14. Выразим токи ветвей через узло-

вые напряжения \dot{U}_2 , схема цепи с необходимыми обозначениями показана на рис. 9.14. Выразим токи ветвей через узло-

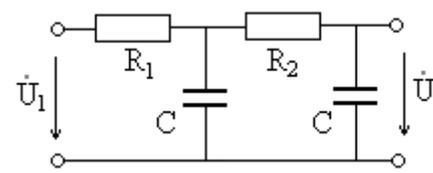


Рис. 9.14
вое напряжение \dot{U}_{11} ,

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{11}}{R_1}, \quad \dot{I}_2 = -\dot{U}_{11} \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}, \quad \dot{I}_3 = j\omega C_1 \dot{U}_{11}.$$

По первому закону Кирхгофа $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3$ получим уравнение

$$\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{11}}{R_1} - \dot{U}_{11} \frac{j\omega C_2}{1 + j\omega C_2 R_2} = j\omega C_1 \dot{U}_{11},$$

решением которого является узловое напряжение

$$\dot{U}_{11} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{j\omega C_2}{1 + j\omega C_2 R_2} + j\omega C_1 \right]},$$

160

или после преобразований

$$\dot{U}_{11} = \dot{U}_1 \frac{1 + j\omega C_2 R_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega C_2 R_2 + 1 + j\omega C_2 R_1 + 1 + j\omega C_1 R_1}$$

.Зная \dot{U}_{11} , нетрудно определить выходное напряжение,

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{11} \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \dot{U}_{11} \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2}.$$

Подставляя \dot{U}_{11} , получим

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \frac{1}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega C_2 R_2 + j\omega C_2 R_1 + j\omega C_1 R_1}$$

и комплексный коэффициент передачи будет равен

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega C_2 R_2 + j\omega C_2 R_1 + j\omega C_1 R_1}.$$

Годограф $\dot{K}(\omega)$ (КЧХ цепи) показан на рис. 9.15.

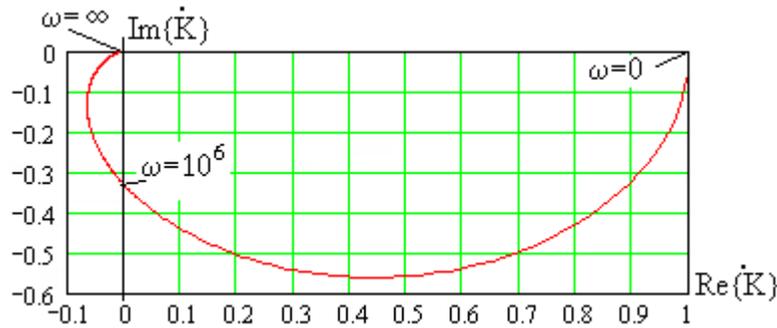


Рис. 9.15

Определим АЧХ $K(\omega)$ рассматриваемого фильтра как модуль $\dot{K}(\omega)$,

$$K(\omega) = \frac{161}{\sqrt{(1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2)^2 + \omega^2 (C_2 R_2 + C_2 R_1 + C_1 R_1)^2}}.$$

График АЧХ показан на рис. 9.16, а та же зависимость в децибелах - на рис. 9.17, при $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ и $C_1 = C_2 = 1 \text{ нФ}$. Пунктиром на рис. 9.16 изображена АЧХ простого ФНЧ вида рис. 9.6а.

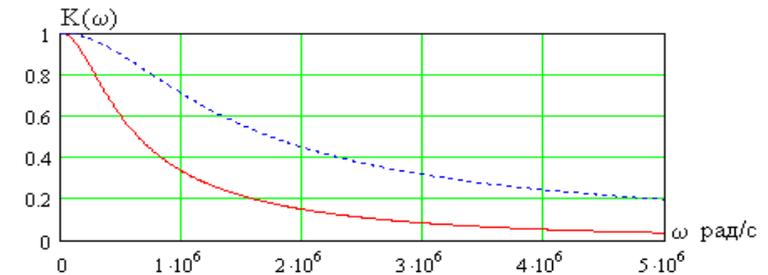


Рис. 9.16

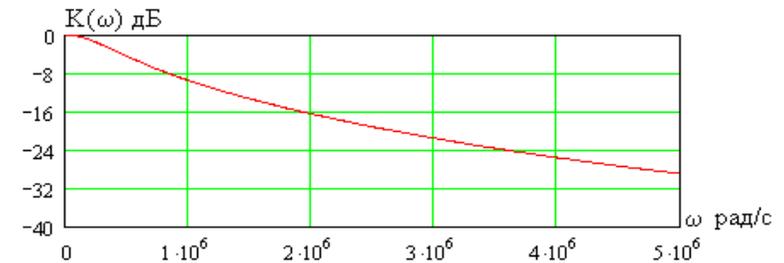


Рис. 9.17

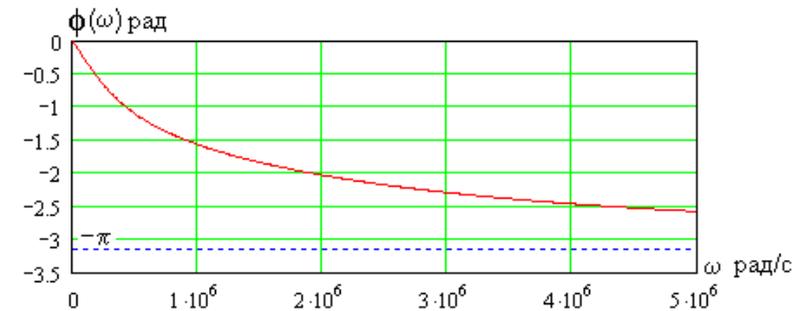


Рис. 9.18

162

Найдите самостоятельно полосу пропускания фильтра Π ,

$$\Pi = \sqrt{\frac{\sqrt{53} - 7}{2}} \frac{1}{CR} = 0,374 \frac{1}{CR}.$$

Как видно из полученной формулы и из графиков АЧХ на рис. 9.16, рассматриваемый ФНЧ второго порядка имеет меньшую полосу пропускания, чем простейший ФНЧ вида

рис. 9.6а при одинаковых величинах R и C .

Вычислите коэффициент прямоугольности $K_{ПР}$ ФНЧ на рис. 9.19, его аксимальное значение равно

$$K_{ПР \max} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{3} = 0,215.$$

Для одинаковых значений сопротивлений и емкостей получим $K_{ПР} = 0,141$, что заметно меньше максимального значения.

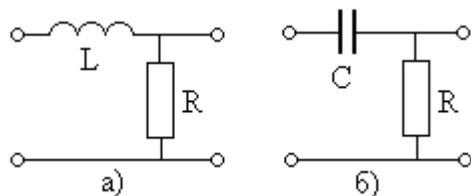
9.5. Фильтры второго порядка типа LC

Если фильтр второго порядка построен на элементах L и C , то его работа может быть основана на зависимости от частоты их реактивных сопротивлений, или на явлениях **резонанса тока или напряжения в этих элементах** (в этом случае цепь называют **резонансной**). В таких цепях всегда присутствуют активные сопротивления R (дискретные резисторы или сопротивления потерь в реактивных элементах).

Апериодические LC фильтры характеризуются включенными в них большими активными сопротивлениями R и их свойства подобны выявленным при анализе апериодических RC цепей. Резонансные LC цепи будут рассмотрены в дальнейшем.

9.6. Задания для самостоятельного решения

Задание 9.1. Определите комплексные коэффициенты передачи фильтров, показанных на рис. 9. 19. Постройте графики



КЧХ. Получите выражения для их АЧХ и ФЧХ, постройте графики, получите выражения для полосы про-

пускания и коэффициента прямоугольности.

Рис. 9.19

Задание 9.2. Получите выражения для АЧХ и ФЧХ фильтров с учетом сопротивления нагрузки R_H , соответствующие схемы показаны на рис. 9.20.

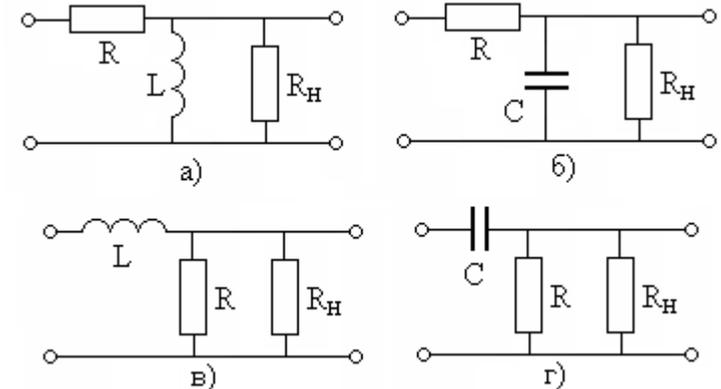


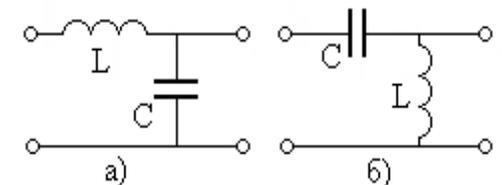
Рис. 9.20

Исследуйте влияние нагрузки на частотные характеристики и полосу пропускания фильтра.

10. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

10.1. Схема последовательного колебательного контура

Последовательным колебательным контуром называют электрическую цепь, представляющую собой последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора. Его



возможные варианты включения как четырехполюсника показаны на рис. 10.1 (выходное напряжение снимается с конденсатора или с катушки индуктивности).

Рис. 10.1

Конденсатор и катушка индуктивности имеют внутренние потери энергии, которые учитываются последовательно соединенными с ними эквивалентными сопротивлениями потерь r_C и r_L соответственно. На практике в керамических конденсаторах всегда $r_C \ll r_L$ и потерями в них пренебрегают, тогда эквивалентные схемы последовательных колебательных контуров рис. 10.1 примут вид, показанный на рис. 10.2.

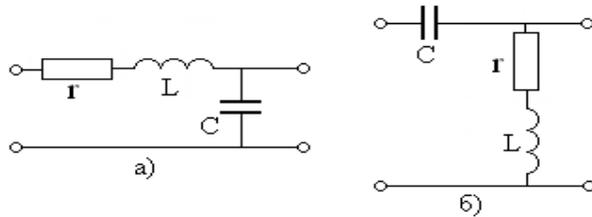


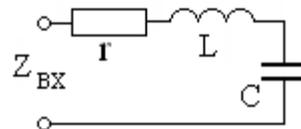
Рис. 10.2

В дальнейшем будем рассматривать схему на рис. 10.2а, в которой выходное напряжение снимается с емкости, а схему на рис. 10.2б аналогично рассмотрите самостоятельно.

10.2. Входное сопротивление последовательного колебательного контура

Определим входное сопротивление последовательного колебательного контура показанного на рис. 10.9. Полное комплексное сопротивление Z_{BX} равно

$$Z_{BX} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (10.1)$$



Его модуль $|Z|$, аргумент φ , активная R и реактивная X составляющие соответственно равны:

Рис. 10.3

$$|Z| = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right),$$

$$R = r,$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Зависимости этих функций от частоты сигнала при $r = 10 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ нФ}$ показаны на рис. 10.10. На частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.2)$$

реактивное сопротивление $X = 0$ и $|Z|$ принимает минимальное значение, равное r ,

$$\min_{\omega} \{|Z|\} = r. \quad (10.3)$$

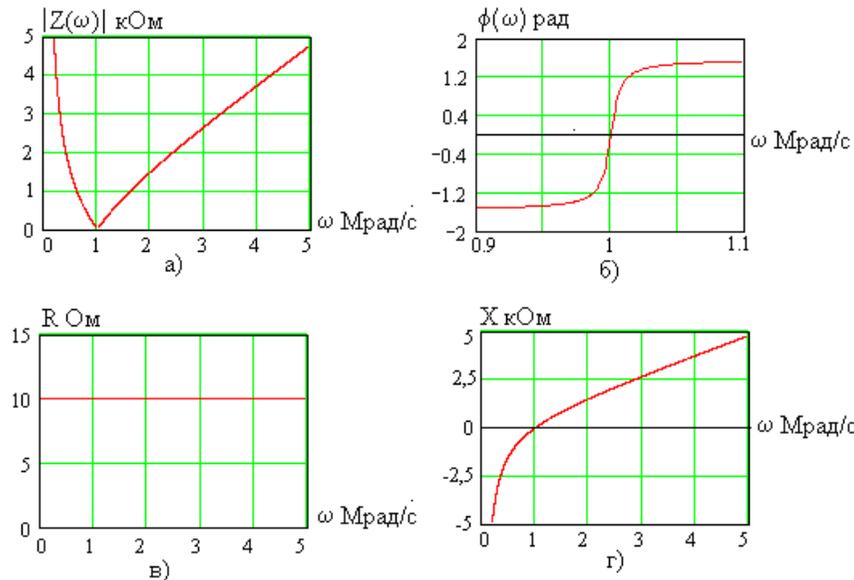


Рис. 10.4

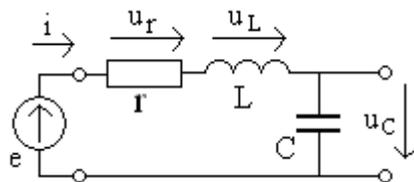
При отклонении частоты от ω_0 модуль сопротивления контура резко возрастает. В области $\omega > \omega_0$ реактивное сопротивление положительно, то есть контур имеет **индуктивный характер** сопротивления, сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi > 0$. В области $\omega < \omega_0$ реактивное сопротивление отрицательно и сопротивление контура имеет **емкостный характер** $\varphi < 0$.

10.3. Ток и напряжения в контуре, резонансные явления

Подключим к контуру рис. 10.2а идеальный источник гармонического напряжения, получим схему на рис. 10.5.

167

Комплексная амплитуда ЭДС источника равна $\dot{E} = Ee^{j\psi_e}$, тогда для комплексной амплитуды тока в



контуре получим

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \quad (10.4) \quad \text{Рис. 10.5}$$

а для его амплитуды I и начальной фазы ψ_i соответственно

$$I = \frac{E}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (10.5)$$

$$\psi_i = \psi_e - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right). \quad (10.6)$$

Зависимости амплитуды и начальной фазы тока от частоты при $r = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ нФ}$, $E = 10 \text{ В}$ и $\psi_e = 0$ представлены на рис. 10.6.

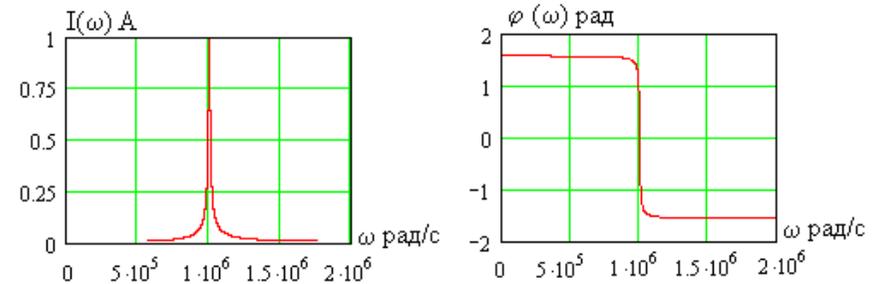


Рис. 10.6

168

Ток в контуре резко нарастает при приближении частоты источника к частоте ω_0 (10.3), его максимальное значение равно

$$I_{\max} = \frac{E}{r}. \quad (10.7)$$

Однако **резонанс тока в последовательном колебательном контуре отсутствует**, так как ток в контуре равен току источника, а не возрастает по сравнению с ним.

Так как изменения тока происходят в малой окрестности около частоты ω_0 , то целесообразно строить графики в координатах **абсолютной расстройки**, равной

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad (10.8)$$

то есть производится смещение начала координат в точку ω_0 .

Те же графики, что и на рис. 10.6, но в координатах $\Delta\omega$, показаны на рис. 10.7.

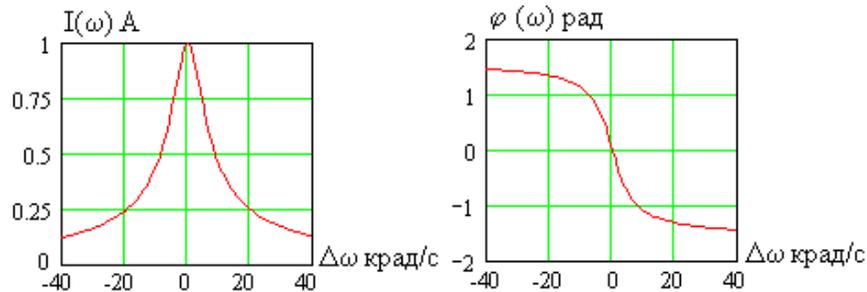


Рис. 10.7

Как видно, координаты абсолютной расстройки удобны для построения графиков частотных характеристик колебательного контура.

169

Определим комплексные амплитуды напряжений на элементах контура:

$$\dot{U}_r = \frac{\dot{E} \cdot r}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \quad (10.9)$$

$$\dot{U}_L = \frac{\dot{E} \cdot j\omega L}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \quad (10.10)$$

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{E} \cdot \frac{1}{j\omega C}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (10.11)$$

Тогда для амплитуд этих напряжений получим:

$$U_r = \frac{E \cdot r}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (10.12)$$

$$U_L = \frac{E \cdot \omega L}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (10.13)$$

$$U_C = \frac{E \cdot \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (10.14)$$

170

а их начальные фазы равны

$$\psi_r = \psi_e - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right), \quad (10.15)$$

$$\psi_L = \psi_e + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right), \quad (10.16)$$

$$\psi_C = \psi_e - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right). \quad (10.17)$$

На рис. 10.8 показаны зависимости амплитуд напряжений на элементах контура при $r=100\text{Ом}$, $L=1\text{мГн}$, $C=1\text{нФ}$, $E=10\text{В}$ и $\psi_e=0$ (обратите внимание, что сопротивление потерь в 10 раз больше, чем в предыдущем примере)

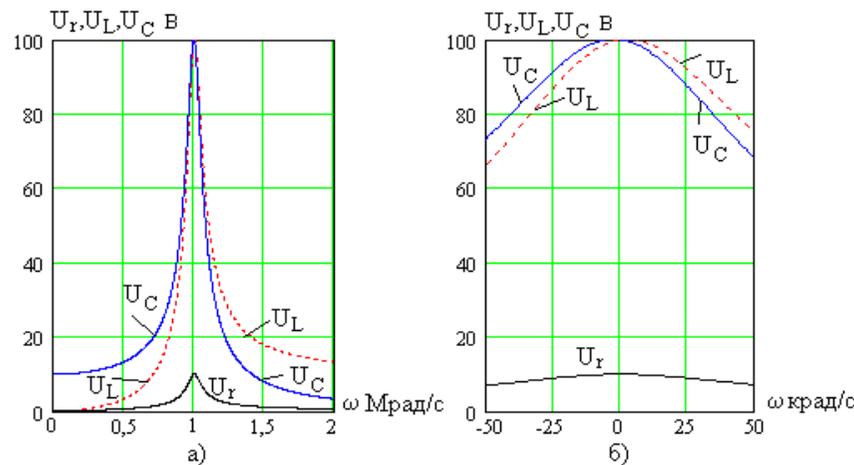


Рис. 10.8
171

На рис. 10.8а кривые представлены в широком диапазоне

частот, а на рис. 10.8б – в координатах абсолютной расстройки и узком частотном интервале в окрестности ω_0 .

Как видно на частоте ω_0 напряжения на индуктивности и емкости резко возрастают по сравнению с напряжением (ЭДС) источника (становятся много больше E), то есть **в последовательном колебательном контуре имеет место резонанс напряжений на реактивных элементах**. Напряжение на сопротивлении r не превышает входной ЭДС, поэтому о его резонансе говорить не приходится.

Частоты, на которых напряжения U_L и U_C максимальны, примерно равны ω_0 , поэтому частоту (10.2)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

называют **резонансной**.

Точные значения резонансных частот нетрудно найти, определив производные U_L и U_C по частоте ω и приравняв результат нулю (проделайте это самостоятельно). Как видно из кривых рис. 10.8б, эти частоты отличаются от ω_0 весьма **незначительно** (резонансная частота напряжения емкости меньше ω_0 , а индуктивности – больше) и тем сильнее, чем больше сопротивление r (для того, чтобы это увидеть графически и было выбрано $r=100\text{Ом}$).

Принимая резонансную частоту равной ω_0 , определим резонансные амплитуды напряжений,

$$U_{r,0} = E, \quad (10.18)$$

$$U_{L,0} = \frac{E \cdot \omega_0 L}{r}, \quad (10.19)$$

$$U_{C0} = \frac{E \cdot \frac{1}{\omega_0 C}}{r}. \quad (10.20)$$

Подстановкой ω_0 нетрудно убедиться, что

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (10.21)$$

тогда резонансные напряжения на реактивных элементах одинаковы и равны

$$U_{C0} = U_{L0} = Q \cdot E. \quad (10.22)$$

Величину

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{\sqrt{L}}{r C} \quad (10.23)$$

называют **добротностью** колебательного контура. Согласно (10.22) добротность является важнейшей характеристикой резонансных явлений.

На рис. 10.9 приведены зависимости от частоты сдвигов фаз напряжений на элементах контура относительно фазы ЭДС источника,

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \psi_r - \psi_e, \\ \varphi_L &= \psi_L - \psi_e, \\ \varphi_C &= \psi_C - \psi_e, \end{aligned} \quad (10.24)$$

начальные фазы напряжений определяются из (10.15)-(10.17). Как видно, напряжение на индуктивности **опережает** по фазе

напряжение на сопротивлении на $\pi/2$, а на емкости – **отстает** от него на $\pi/2$. Напряжение на индуктивности u_L опережает по фазе напряжение на емкости u_C на π , то есть эти напряжения **противофазны**.

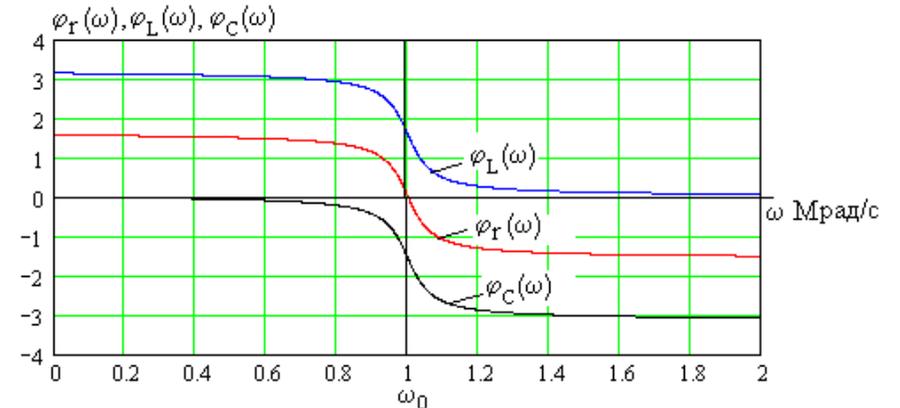


Рис. 10.9

10.4. Вторичные параметры колебательного контура

Последовательный колебательный контур полностью описывается своими первичными параметрами r , L и C . Однако их численные значения малоинформативны, и на практике широко используются дополнительные (вторичные) параметры.

Резонансная частота контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.25)$$

измеряется в **радианах делить на секунду**, или

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (10.26)$$

которая измеряется в **герцах**. Ее значение сразу определяет частоту настройки колебательного контура.

Характеристическое сопротивление контура

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (10.27)$$

измеряется в Омах и численно равно модулю реактивного сопротивления индуктивности или емкости (отдельно) на резонансной частоте ω_0 .

Добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} \quad (10.28)$$

- величина безразмерная, характеризует резонансные свойства колебательного контура. **Физический смысл** добротности – это отношение максимальной энергии, накапливаемой в реактивных элементах, к энергии потерь в контуре за период колебаний на резонансной частоте.

Как видно из (2.28), добротность возрастает с уменьшением сопротивления потерь контура, которое практически полностью определяется потерями мощности сигнала в катушке индуктивности. На практике добротность $Q \geq 10$. В большинстве случаев добротность составляет 70-100. Для получения высоких добротностей 150-300 используют специальный провод (покрытый тонким слоем серебра – «серебрянку»), вжигание серебряного проводника в керамический каркас и ряд других инженерных решений. Более высокие значения добротности LC колебательных контуров получить не удается.

Явление резонанса и понятие добротности используются и в механических колебательных системах. Например,

в кристаллах кварца (горного хрусталя) очень малы потери энергии механических колебаний, то есть они имеют высокую добротность. Поэтому изготовленные из него бокалы при слабом ударе издают продолжительный звон. В железе, алюминии или пластмассе эти потери велики, поэтому сделанные из них бокалы не обладают соответствующим звучанием.

Помимо малых потерь энергии механических колебаний монокристаллы кварца характеризуются явлением пьезоэффекта (повторите материал по физике): при возникновении в кварцевой пластине механических колебаний на ее гранях возникает переменное напряжение и наоборот, приложенное к кристаллу переменное напряжение вызывает механические колебания кристалла. Из кварцевых пластин изготавливают электронные устройства - кварцевые резонаторы. С электрической точки зрения они эквивалентны последовательному колебательному контуру с очень высокой добротностью $10^5 \div 10^7$.

10.5. Частотные характеристики контура

Под частотными характеристиками последовательного колебательного контура (рис. 10.2) понимают зависимость от частоты характеристик **комплексного коэффициента передачи по напряжению** вида

$$\dot{K}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{E}} \quad (10.29)$$

или

$$\dot{K}_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{E}}, \quad (10.30)$$

где \dot{U}_C - комплексная амплитуда напряжения на емкости (обычно полагают, что потери в емкости отсутствуют), \dot{U}_L - комплексная амплитуда напряжения на последовательном со-

единении индуктивности L с ее сопротивлением потерь r (напряжение на реальной катушке индуктивности).

Рассмотрим комплексный коэффициент передачи напряжения емкости \dot{K}_C (аналогичный анализ \dot{K}_L проведите самостоятельно). Из (10.29) с учетом (10.11) получим

$$\dot{K}_C = \frac{1}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (10.31)$$

Из (10.31) АЧХ $K_C(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_C(\omega)$ контура имеют вид

$$K_C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (10.32)$$

$$\varphi_C(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}\right). \quad (10.33)$$

Частотные характеристики последовательного колебательного контура при $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ нФ}$ для двух значений $r = 10 \text{ Ом}$ (сплошные линии) и $r = 50 \text{ Ом}$ (пунктир) в различных масштабах показаны на рис. 10.10 в координатах абсолютной расстройки. Кривые резко возрастает при приближении частоты сигнала ω к резонансной частоте контура ω_0 (10.25). Максимум коэффициента передачи имеет место при

на частоте ω_0 и равен добротности контура,

$$K_{C \max} = \frac{1}{\omega_0 C r} = Q. \quad (10.34)$$

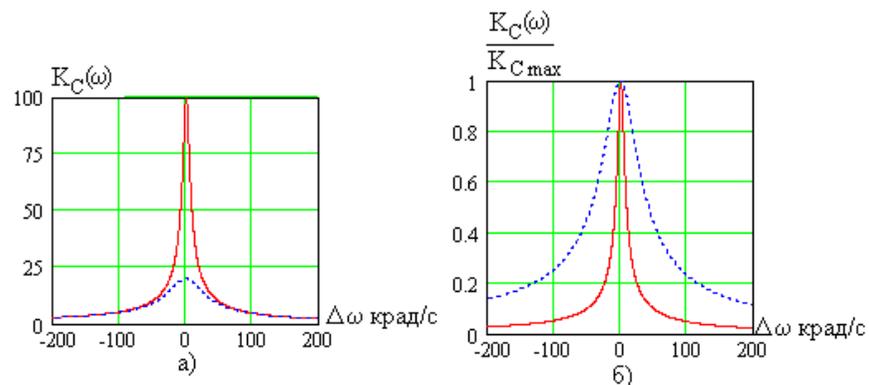


Рис. 10.10

На рис. 10.10а приведены АЧХ в абсолютном, а на рис. 10.10б в относительном масштабах по оси ординат. На рис. 10.11 показаны ФЧХ этих контуров.

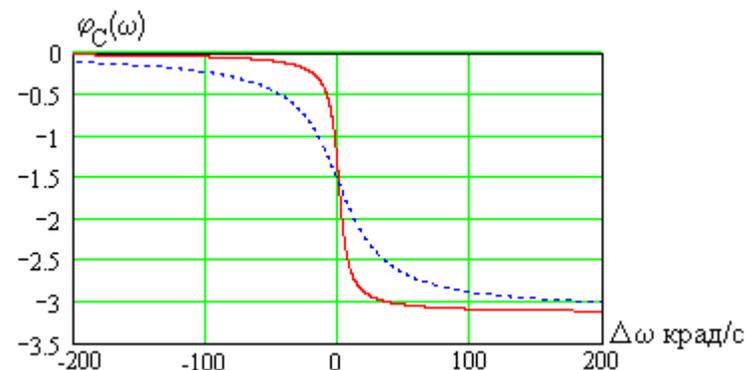


Рис. 10.11

Как видно, с ростом сопротивления потерь r в колеба-

тельном контуре максимум АЧХ падает (так как уменьшается добротность) и кривая АЧХ становится «шире», а ФЧХ – более пологой.

Постройте графики АЧХ в координатах частоты ω , рассмотрите влияние на форму кривой величины сопротивления потерь, оцените удобство координат абсолютной расстройки.

По форме АЧХ видно, что последовательный колебательный контур является узкополосным частотным фильтром.

10.6. Обобщенная расстройка

Исследование частотных характеристик колебательного контура удобнее всего проводить в координатах обобщенной расстройки ξ , равной

$$\xi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}. \quad (10.35)$$

Как видно, она зависит от частоты сигнала и параметров контура. Проведем преобразования

$$\xi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega Cr} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\omega Cr} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 \omega Cr} = \frac{\omega + \omega_0}{\omega_0^2 \omega Cr} (\omega - \omega_0). \quad (10.36)$$

Обозначая **абсолютную расстройку**

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad (10.37)$$

и приближенно полагая в первой дроби $\omega \approx \omega_0$, получим

$$\xi \approx \frac{2}{\omega_0^2 Cr} \Delta\omega = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (10.38)$$

Из (10.38) видно, что **обобщенная расстройка прямо пропорциональна абсолютной расстройке**, то есть частоте сигнала (начало координат смещено в точку ω_0).

10.7. Частотные характеристики в координатах обобщенной расстройки

Комплексное входное сопротивление контура (10.1) в координатах ξ можно записать в виде

$$Z_{BX} = r \left[1 + j \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{r} \right] = r [1 + j\xi], \quad (10.39)$$

а его модуль, аргумент, активную и реактивную составляющие соответственно

$$\begin{aligned} |Z| &= r \sqrt{1 + \xi^2}, \\ \varphi &= \arctg(\xi), \\ R &= r, \\ X &= r \cdot \xi. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Эти характеристики как функции обобщенной расстройки показаны на рис. 10.12. Сплошной линией показаны точные, а пунктирной – приближенные значения, полученные из (10.40).

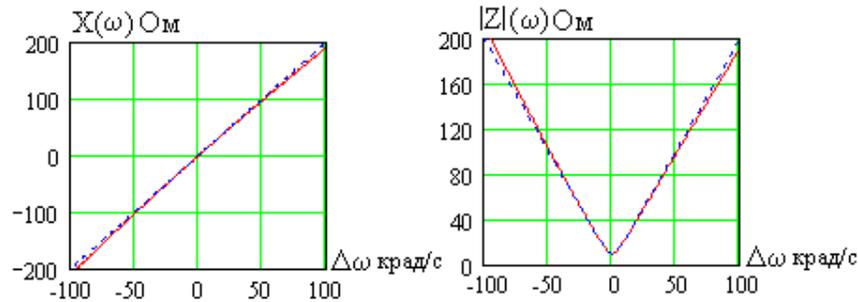


Рис. 10.12

Проведем расчет комплексного коэффициента передачи, приближенно заменив в числителе (10.31) ω на ω_0 ,

$$\dot{K}_C = \frac{1}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + j\xi} = -\frac{jQ}{1 + j\xi}. \quad (10.41)$$

Частотные характеристики последовательного колебательного контура в координатах обобщенной расстройки имеют вид

$$K_C(\xi) = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (10.42)$$

$$\varphi_C(\xi) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\xi). \quad (10.43)$$

Зависимости АЧХ $K_C(\xi)$ и ФЧХ $\varphi_C(\xi)$ показаны на рис. 10.13 пунктирными линиями. Их точные значения показаны сплошными кривыми.

Как видно, расчеты частотных характеристик в координатах обобщенной расстройки имеют вполне удовлетворитель-

ную точность в достаточно широкой окрестности резонансной частоты, то есть там, где они и представляют практический интерес.

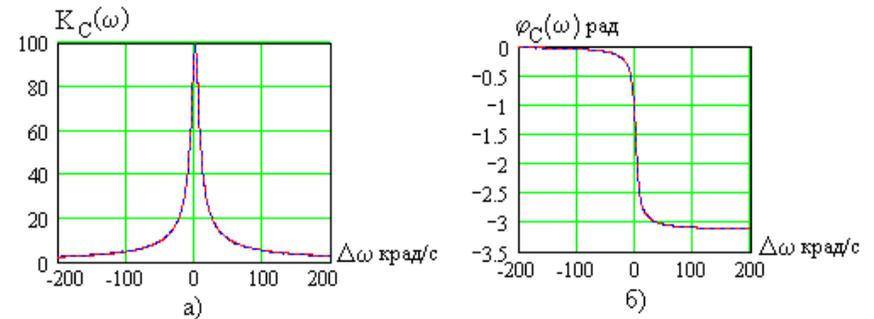


Рис. 10.13

С помощью обобщенной расстройки можно проводить расчеты токов и напряжений в контуре:

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{r(1 + j\xi)}, \quad (10.44)$$

$$\dot{U}_r = \frac{\dot{E}}{1 + j\xi}, \quad (10.45)$$

$$\dot{U}_L = \frac{\dot{E} \cdot jQ}{1 + j\xi}, \quad (10.46)$$

$$\dot{U}_C = -\frac{\dot{E} \cdot jQ}{1 + j\xi}, \quad (10.47)$$

Выражения и вычисления существенно упрощаются.

Запишите самостоятельно выражения для амплитуд и начальных фаз тока и напряжений на элементах контура. Постройте их зависимости от частоты и обобщенной расстройки, оцените погрешность вычислений в координатах ξ .

10.8. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности

Определим полосу пропускания контура, расчет проведем в координатах обобщенной расстройки (рис. 10.14).

Максимум АЧХ контура равен добротности Q , тогда полоса пропускания определяется на уровне $Q/\sqrt{2}$.

С учетом (10.42) уравнение имеет вид

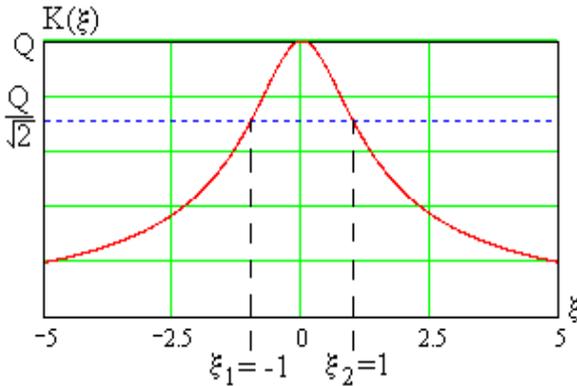


Рис. 10.14

$$\frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} \quad (10.48)$$

и его решения равны

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = 1.$$

Интервал обобщенной расстройки в полосе пропускания

$$\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1 = 2,$$

с другой стороны из (10.38)

$$\Delta\xi = 2Q \frac{\Pi}{\omega_0},$$

тогда получим уравнение

$$2Q \frac{\Pi}{\omega_0} = 2,$$

а полоса пропускания будет равна

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (10.49)$$

Как видно, полоса пропускания контура с заданной частотой настройки ω_0 определяется только его добротностью. Высокودобротный контур позволяет реализовать узкополосный частотный фильтр. Как уже отмечалось, большие значения Q обеспечить достаточно сложно.

Добротность колебательного контура является основной характеристикой его резонансных свойств.

Для определения коэффициента прямоугольности $K_{пр}$ необходимо найти полосу пропускания контура Π_1 на уровне 1/10 от максимума. Для этого составим уравнение в координатах ξ ,

$$\frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{Q}{10}, \quad (10.50)$$

решения которого равны

$$\xi_1 = -\sqrt{99}, \quad \xi_2 = \sqrt{99}.$$

Интервал величин обобщенной расстройки в полосе пропускания на уровне 1/10 от максимума равен

$$\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1 = 2\sqrt{99},$$

тогда получим уравнение

$$2Q \frac{\Pi_1}{\omega_0} = 2\sqrt{99},$$

а полоса пропускания Π_1 будет равна

$$\Pi_1 = \sqrt{99} \frac{\omega_0}{Q}. \quad (10.51)$$

В результате коэффициент прямоугольности колебательного контура оказывается равным

$$K_{\text{пр}} = \frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{1}{\sqrt{99}} \approx 0,1.$$

Как видно, последовательный колебательный контур является полосовым частотным фильтром с низкой избирательностью.

10.9. Влияние внутреннего сопротивления источника сигнала и нагрузки на резонансные свойства контура

Рассмотрим контур с подключенным реальным источником напряжения \dot{E} (R_e - его внутреннее сопротивление) и сопротивлением нагрузки R_H (рис. 10.15). Можно провести анализ этой цепи отдельно, однако целесообразнее преобразовать ее к уже рассмотренной цепи вида рис. 10.5 (с идеальным источником напряжения и без нагрузки) и воспользоваться уже полученными результатами анализа.

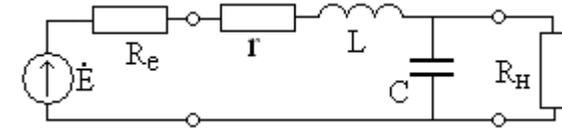


Рис. 10.15

Как видно, сопротивление источника R_e просто складывается с r , **увеличивая сопротивление потерь контура**. Нагрузка же подключена параллельно емкости, и тогда параллельное соединение C, R_H

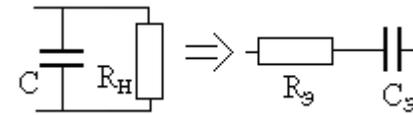


Рис. 10.16

необходимо эквивалентно преобразовать в последовательное соединение элементов r_3, C_3 (как показано на рис. 10.16).

Эти цепи эквивалентны лентны, если равны их полные комплексные сопротивления, тогда получим

$$\frac{R_H + \frac{1}{j\omega C}}{R_H + \frac{1}{j\omega C}} = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}.$$

Преобразуя дроби и приводя обе части равенства к алгебраической форме записи комплексных чисел, можно записать

$$\frac{R_H}{1 + (\omega C R_H)^2} - j \frac{\omega C R_H^2}{1 + (\omega C R_H)^2} = R_3 - j \frac{1}{\omega C_3}.$$

Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны отдельно их действительные и мнимые части, поэтому после алгебраических преобразований получим два уравнения для неизвестных r_3, C_3 ,

$$R_{\text{э}} = \frac{R_H}{1 + (\omega CR_H)^2}, \quad (10.52)$$

$$C_{\text{э}} = C \frac{1 + (\omega CR_H)^2}{(\omega CR_H)^2}. \quad (10.53)$$

Прделайте необходимые преобразования самостоятельно.

Как видно, эквивалентные параметры последовательной цепи зависят от частоты и, строго говоря, такое преобразование возможно только **на фиксированной частоте**. При анализе колебательного контура интерес представляет окрестность его резонансной частоты ω_0 , поэтому в (10.52) и (10.53), приняв $\omega = \omega_0$ и условие

$$\omega_0 CR_H \gg 1, \quad (10.54)$$

получим

$$\begin{cases} R_{\text{э}} = \frac{1}{(\omega_0 C)^2} = \frac{\rho^2}{R_H}, \\ C_{\text{э}} = C. \end{cases} \quad (10.55)$$

Эти равенства является точными на частоте ω_0 и приближенными в ее окрестности. На рис. 10.17 показаны зависимости эквивалентных сопротивления $R_{\text{э}}$ и емкости $C_{\text{э}}$ от абсолютной расстройки при $C = 1 \text{ нФ}$ и $\omega_0 = 10^6 \text{ рад/с}$ и различных значениях сопротивления нагрузки R_H . Как видно, при больших R_H , и особенно при выполнении условия (10.54), величины $R_{\text{э}}$ и $C_{\text{э}}$ практически постоянны в широкой окрестности резонансной частоты.

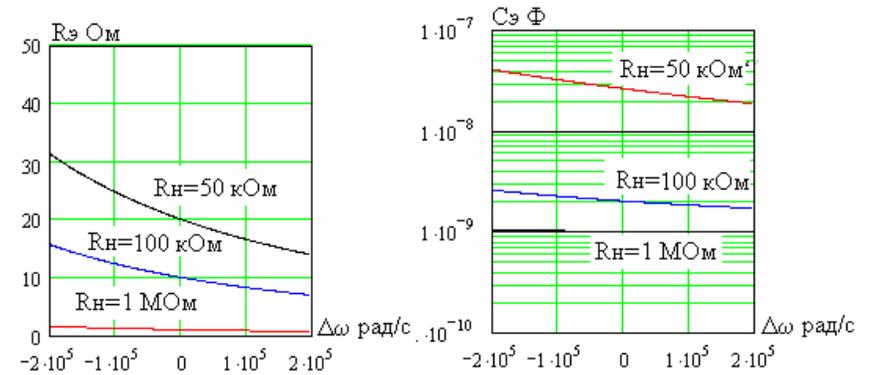


Рис. 10.17

Таким образом эквивалентная схема последовательно-колебательного контура с реальным источником сигнала и нагрузкой имеет вид, показанный на рис. 10.18, где $r_{\text{э}}$ - эквивалентное сопротивление потерь, равное

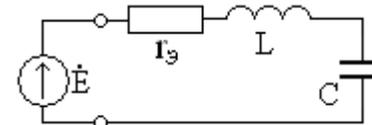


Рис. 10.18

$$r_{\text{э}} = r + R_e + R_{\text{э}} = r + R_e + \frac{\rho^2}{R_H}. \quad (10.56)$$

Контур рис. 10.18 уже изучен, его резонансные свойства определяются эквивалентной добротностью $Q_{\text{э}}$,

$$Q_{\text{э}} = \frac{\rho}{r_{\text{э}}} = \frac{\rho}{r + R_e + \frac{\rho^2}{R_H}} = \frac{\rho/r}{1 + \frac{R_e}{r} + \frac{Q\rho}{R_H}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_e}{r} + \frac{Q\rho}{R_H}}. \quad (10.57)$$

Как видно, внутреннее сопротивление источника сигнала R_e снижает эквивалентную добротность, его влияние будет мало, если

$$\frac{R_e}{r} \ll 1 \text{ или } R_e \ll r, \quad (10.58)$$

Собственное сопротивление потерь r достаточно мало (доли Ома - единицы Ом), поэтому источник сигнала для последовательного колебательного контура должен быть практически идеальным.

Нагрузка контура также снижает его добротность, чем больше R_H , тем меньше падает $Q_{\text{э}}$. Для того, чтобы влияние нагрузки было невелико, необходимо выполнение условия

$$\frac{Q\rho}{R_H} \ll 1 \text{ или } R_H \gg Q\rho. \quad (10.59)$$

На практике величина характеристического сопротивления ρ составляет сотни Ом – килоОмы, добротность лежит в пределах от нескольких десятков до 150, тогда произведение $Q\rho$ составляет десятки - сотни килоОм. С учетом сделанных оценок необходимое сопротивление нагрузки при условии (10.59) оказывается достаточно большим, например, 1 МОм, что крайне сложно обеспечить на практике.

Для ослабления влияния нагрузки на добротность контура используют ее неполное включение, один из вариантов схемы показан на рис. 10.19.

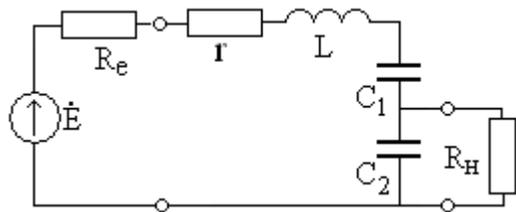


Рис. 10.19
189

Проведите самостоятельно анализ этой цепи аналогично предыдущей, преобразовав параллельное соединение C_2, R_H в последовательное, получите выражение для эквивалентной добротности, в результате можно записать

$$Q_{\text{э}} = \frac{\rho/r}{1 + \frac{R_e}{r} + p^2 \frac{Q\rho}{R_H}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_e}{r} + p^2 \frac{Q\rho}{R_H}}, \quad (10.60)$$

где p - коэффициент включения нагрузки в контур, равный

$$p = \frac{C_1}{C_1 + C_2}. \quad (10.61)$$

Требования к сопротивлению нагрузки определяются неравенством

$$R_H \gg p^2 Q\rho, \quad (10.62)$$

что значительно слабее (10.59). Например, при $Q\rho = 100\text{кОм}$ и $p = 0,1$ (типичное значение) необходимо выполнение условия $R_H \gg 1\text{кОм}$, что вполне приемлемо на практике.

10.10. Расчеты цепей с последовательными колебательными контурами

Расчет гармонических токов и напряжений в электрических цепях с колебательными контурами проводится методом комплексных амплитуд чаще всего в координатах обобщенной расстройки.

Рассмотрим пример, показанный на рис. 10.20, в котором на заданной частоте $\omega = 0,99 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ при $r = 10\text{Ом}$, $L = 1\text{мГн}$, $C = 1\text{нФ}$, $R_0 = R_H = 200\text{Ом}$ и $\dot{E} = 10e^{-j30^\circ}$. В необхо-

димом определить комплексную амплитуду напряжения на нагрузке \dot{U}_H . Расчет в координатах частоты ω будет достаточно громоздким (проведите его самостоятельно, чтобы убедиться в этом).

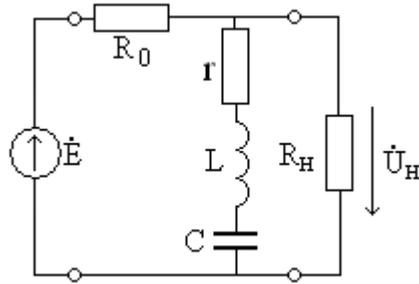


Рис. 10.20

Резонансная частота ω_0 контура равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ рад/с},$$

а добротность соответственно

$$Q = \frac{\sqrt{L}}{r} = 100.$$

В координатах обобщенной расстройки ξ , равной

$$\xi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 200 \frac{0,99 \cdot 10^6 - 10^6}{10^6} = -2,$$

сопротивление Z_K последовательного колебательного контура r, L, C равно $Z_K = r(1 + j\xi) = 10(1 - j2) = 10 - j20$ Ом.

Сопротивление Z' параллельного соединения контура с нагрузкой определяется выражением

$$Z' = \frac{Z_K R_H}{Z_K + R_H} = \frac{r R_H (1 + j\xi)}{r + R_H + jr\xi} = \frac{(10 - j20) \cdot 200}{210 - j20} = 11,24 - j17,98 \text{ Ом}.$$

Вычислим общее сопротивление цепи,

$$Z_{\text{ОБЩ}} = R_0 + Z' = \frac{R_0 R_H + Z_K (R_0 + R_H)}{Z_K + R_H} = \frac{R_0 R_H + r \cdot (R_0 + R_H)(1 + j\xi)}{r + R_H + jr\xi},$$

в результате получим $Z_{\text{ОБЩ}} = 211,24 - j17,98$ Ом.

Комплексная амплитуда тока в цепи равна

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{Z_{\text{ОБЩ}}} = \frac{10e^{-j30^\circ}}{211,24 - j17,98} = \frac{10e^{-j30^\circ}}{212e^{-j4,86^\circ}} = 0,047 - j0,02 = 0,047e^{-j25,1^\circ} \text{ А},$$

а напряжения на нагрузке соответственно

$$\dot{U}_H = \dot{i} \cdot Z' = 0,047e^{-j25,2^\circ} \cdot 21,2e^{-j58^\circ} = 1e^{-j83,13^\circ} \text{ В}.$$

Переход к координатам обобщенной расстройки существенно упрощает расчеты цепей с колебательными контурами.

10.11. Применение последовательного колебательного контура

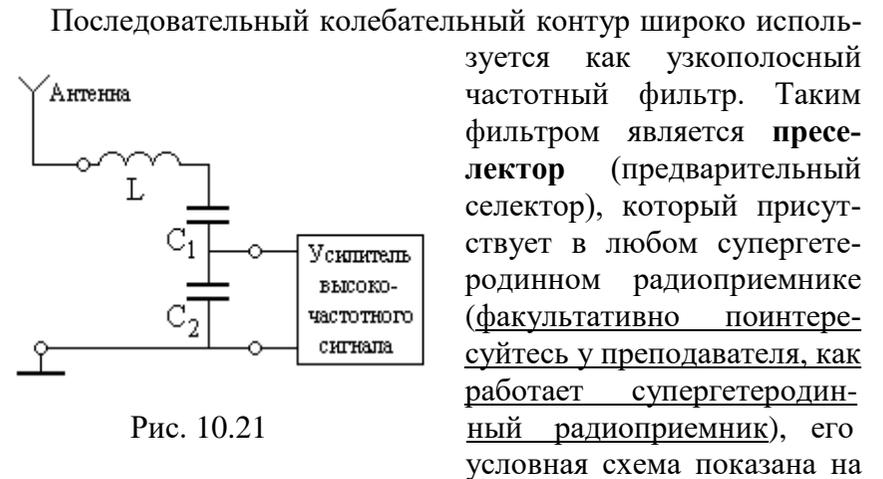


Рис. 10.21

рис. 10.21.

Антенна приемника включена в контур как источник сигнала, а напряжение с емкости C_2 подается на вход усилителя высокочастотного сигнала (УВЧ), входное сопротивление которого является нагрузкой колебательного контура. Так как транзисторный УВЧ имеет невысокое входное сопротивление,

Последовательный колебательный контур широко используется как узкополосный частотный фильтр. Таким фильтром является **преселектор** (предварительный селектор), который присутствует в любом супергетеродинном радиоприемнике (факультативно поинтересуйтесь у преподавателя, как работает супергетеродинный радиоприемник), его условная схема показана на

то используется неполное включение нагрузки. Задача преселектора – фильтрация «зеркального канала» приема в супергетеродинном радиоприемнике.

10.12. Задания для самостоятельного решения

Задание 10.1. Определите сопротивление потерь колебательного контура при $Q = 50$, $\omega_0 = 10^6$ рад/с и $L = 1$ мГн.

Задание 10.2. Определите полосу пропускания колебательного контура при $\omega_0 = 10^6$ рад/с, $C = 1$ нФ и сопротивлении потерь $r = 100$ Ом.

Задание 10.3. Определите напряжение на катушке индуктивности контура рис. 10.22 при $L = 2$ мГн, $C = 500$ пФ, $r = 20$ Ом, $\dot{E} = 5$ В, $R_e = 5$ Ом и $\omega = 0,98 \cdot 10^6$ рад/с. Расчет проводите обычным методом комплексных амплитуд и используя теорию колебательных контуров в координатах обобщенной расстройки, сравните результаты.

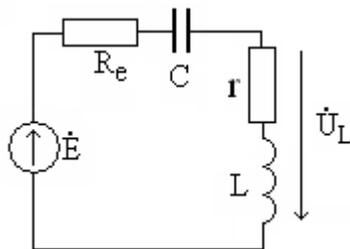


Рис. 10.22

Задание 10.4. В координатах обобщенной расстройки вычислите напряжение \dot{U}_H на нагрузке цепи на рис. 10.23 при $\dot{E} = 1$ В, $L = 1$ мГн, $C = 1$ нФ, $r = 10$ Ом, $R_e = 5$ Ом,

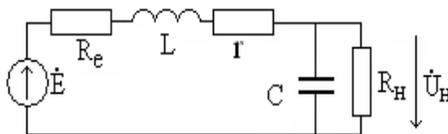


Рис. 10.23

$R_H = 100$ кОм и $\omega = 1,02 \cdot 10^6$ рад/с.

Расчет проводите обычным методом комплексных амплитуд и используя теорию колебательных контуров в координатах обобщенной расстройки, сравните результаты.

11. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

11.1. Схема параллельного колебательного контура

Параллельный колебательный контур представляет собой параллельное соединение катушки индуктивности L и конденсатора C , принципиальная схема которого показана на рис. 11.1а.

На рис. 11.1б показана эквивалентная схема параллельного колебательного контура, в которую включено сопротивление потерь r катушки индуктивности, сопротивление потерь конденсатора в большинстве случаев можно не учитывать.

В ряде случаев применяется параллельная эквивалентная схема, показанная на рис. 11.1в, в этом случае сопротивление R не является сопротивлением потерь контура, хотя и зависит от него. Параллельная модель рис. 11.1в удобна при расчете проводимости цепи.

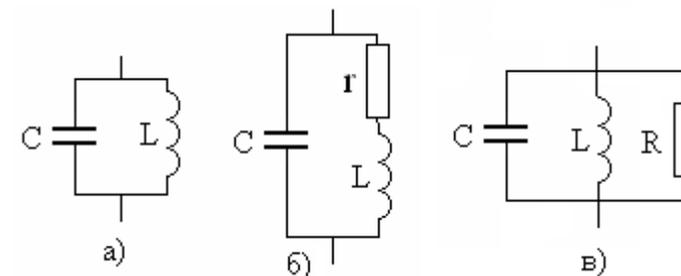


Рис. 11.1

11.2. Входное сопротивление и проводимость

В дальнейшем в основном будем использовать модель параллельного колебательного контура вида рис. 11.1б. Ее комплексное сопротивление определяется выражением

$$Z = \frac{(r + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}. \quad (11.1)$$

В окрестности частоты ω_0 , равной

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (11.2)$$

пренебрегая в числителе (11.1) величиной r , получим

$$Z = \frac{\frac{L}{C}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (11.3)$$

Как видно, целесообразно перейти к координатам обобщенной расстройки, рассмотренным в подразделе 9.6,

$$\xi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \quad (11.4)$$

Q - добротность параллельного колебательного контура, равная

$$Q = \frac{\rho}{r}, \quad (11.5)$$

ρ - характеристическое сопротивление контура,

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (11.6)$$

Вторичные параметры **параллельного** колебательного контура (добротность и характеристическое сопротивление) совпадают с аналогичными параметрами для **последовательного** контура

В результате из (11.3) получим выражение для комплексного сопротивления контура в координатах обобщенной расстройки

$$Z = \frac{Q\rho}{1 + j\xi}, \quad (11.7)$$

из которого нетрудно найти модуль Z , аргумент φ , активную R и реактивную X составляющие,

$$|Z| = \frac{Q\rho}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (11.8)$$

$$\varphi = -\arctg(\xi), \quad (11.9)$$

$$R = \frac{Q\rho}{1 + \xi^2}, \quad (11.10)$$

$$X = -\xi \frac{Q\rho}{1 + \xi^2}, \quad (11.11)$$

(получите эти выражения самостоятельно). Графики этих функций ξ показаны на рис. 11.2.

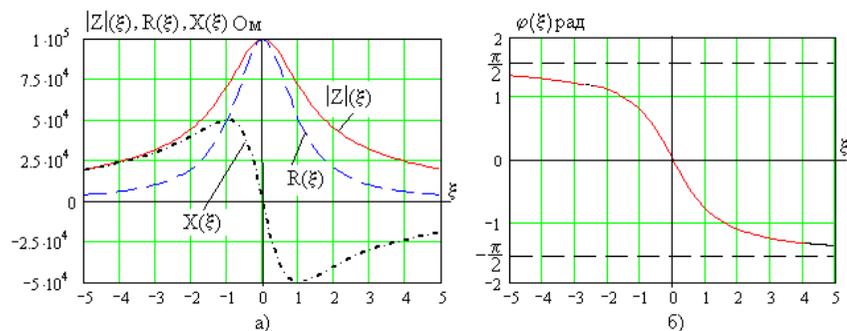


Рис.11.2

На частоте ω_0 (11.2) сопротивление контура **максимально, чисто активно** и равно

$$R_0 = Q\rho, \quad (11.12)$$

графики на рис. 11.2 построены при $R_0 = 100 \text{ кОм}$ (сравните с сопротивлением последовательного контура, которое **минимально** на этой частоте). При отклонении от частоты ω_0 сопротивление резко падает, появляется реактивная компонента. При $\omega < \omega_0$ сопротивление контура имеет индуктивный характер, а при $\omega > \omega_0$ - емкостный, этот же результат вытекает и из анализа фазовой характеристики на рис. 11.2б.

Анализ проводимости контура, в том числе и для модели рис. 11.1в, проведите самостоятельно.

11.3. Напряжение и токи в контуре

Подключим к параллельному колебательному контуру идеальный источник тока с комплексной амплитудой \dot{I}_0 , как показано на рис. 11.3, и определим напряжение на параллельных ветвях контура \dot{U}_k ,

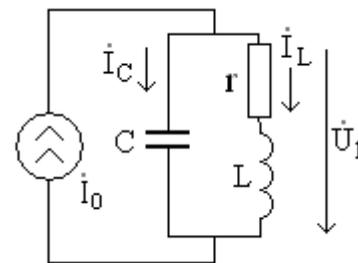


Рис. 11.3

$$\dot{U}_k = \dot{I}_0 Z = \frac{\dot{I}_0 Q \rho}{1 + j\xi}. \quad (11.13)$$

Токи \dot{I}_C и \dot{I}_L в реактивных ветвях контура в окрестности частоты ω_0 , то есть при условии $\omega \approx \omega_0$, соответственно равны

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_k}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{U}_k}{\frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{\dot{I}_0 Q \rho}{(1 + j\xi)(-j\rho)} = \dot{I}_0 \frac{jQ}{1 + j\xi}, \quad (11.14)$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_k}{j\omega L} = \frac{\dot{U}_k}{j\omega_0 L} = \frac{\dot{I}_0 Q \rho}{(1 + j\xi)(j\rho)} = \dot{I}_0 \frac{-jQ}{1 + j\xi}. \quad (11.15)$$

Амплитуда и начальная фаза напряжения на контуре определяются выражениями

$$U_k = \frac{I_0 Q \rho}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{I_0 R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (11.16)$$

$$\psi_u = \psi_0 - \arctg(\xi), \quad (11.17)$$

где ψ_0 - начальная фаза тока источника. Зависимости амплитуды напряжения U_k и сдвига фаз φ_u между этим напряжением и током источника $\varphi_u = \psi_u - \psi_0$ от обобщенной расстройки показаны на рис. 11.4 при $R_0 = 100 \text{ кОм}$ и $I_0 = 1 \text{ мА}$.

Как видно, кривая $U_k(\xi)$ имеет экстремальный характер, однако **резонанс напряжения в параллельном колебательном контуре отсутствует**, так как напряжение на контуре всегда равно напряжению на источнике тока.

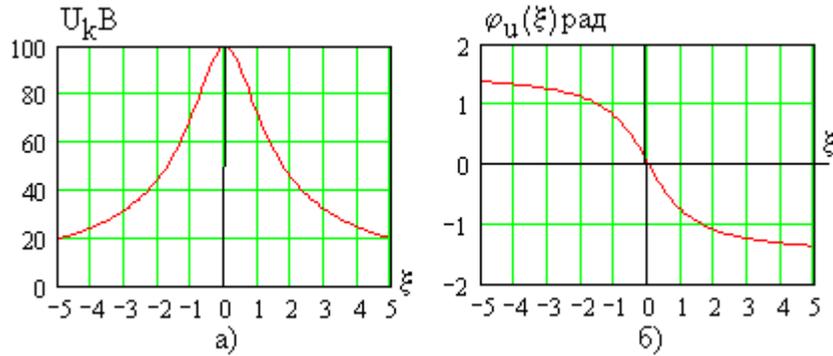


Рис. 11.4

Токи \dot{I}_C и \dot{I}_L в реактивных ветвях контура определяются формулами (11.14) и (11.15), из которых следует

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_L \quad \text{или} \quad \dot{I}_C + \dot{I}_L = 0. \quad (11.18)$$

Эти равенства нарушают первый закон Кирхгофа

$$\dot{I}_C + \dot{I}_L = \dot{I}_0, \quad (11.19)$$

то есть выражения (11.14) и (11.15) являются **приближенными** (как и все вычисления в координатах обобщенной расстройки). Амплитуды этих токов одинаковы и равны

$$I_C = I_L = \frac{I_0 Q}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (11.20)$$

а начальные фазы ψ_C и ψ_L определяются соотношениями

$$\psi_C = \psi_0 + \frac{\pi}{2} - \arctg(\xi), \quad (11.21)$$

$$\psi_L = \psi_0 - \frac{\pi}{2} - \arctg(\xi), \quad (11.22)$$

Как видно, токи в реактивных ветвях контура **противофазны**. Зависимости амплитуд токов в реактивных ветвях контура и сдвигов фаз $\varphi_C = \psi_C - \psi_0$ и $\varphi_L = \psi_L - \psi_0$ между токами в реактивных ветвях и током источника от обобщенной расстройки показаны на рис. 11.5 при $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ нФ}$, $r = 10 \text{ Ом}$ и $I_0 = 1 \text{ мА}$.

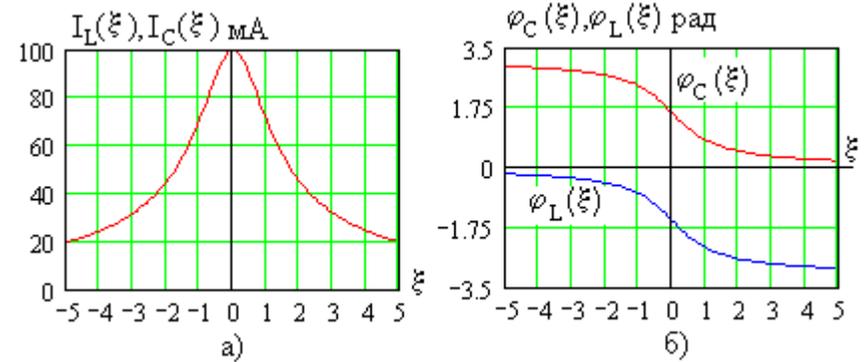


Рис. 11.5

Как видно, токи I_C и I_L резко возрастают в окрестности точки $\xi = 0$ (или частоты ω_0) по сравнению с амплитудой тока источника, то есть **в параллельном колебательном контуре имеет место резонанс токов в реактивных ветвях**.

Частота ω_0 (11.2) является **резонансной частотой контура**, на которой

$$I_C = I_L = Q \cdot I_0, \quad (11.23)$$

то есть **резонансный ток в реактивных ветвях контура в Q раз больше тока источника**.

Так как токи \dot{I}_C и \dot{I}_L противофазны, то вводят в рассмотрение кольцевой замкнутый ток в контуре \dot{I}_K , как показано на рис. 11.6. Он совпадает по направлению с током \dot{I}_L и поэтому равен

$$\dot{I}_K = \dot{I}_L = \dot{I}_0 \frac{-jQ}{1+j\xi}. \quad (11.24)$$

Амплитуда контурного тока равна (11.20), а начальная фаза (11.22), соответствующие графики показаны на рис. 11.11. **Резонансный контурный ток в Q раз больше тока источника.**

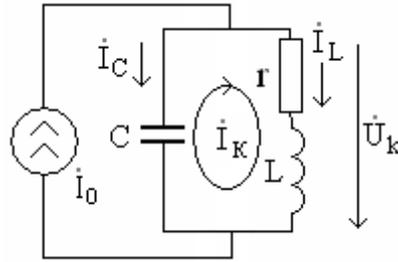


Рис. 11.6

$$I_K = Q \cdot I_0. \quad (11.25)$$

11.4. Вторичные параметры колебательного контура

Параллельный колебательный контур (как и последовательный) полностью описывается своими первичными параметрами r , L и C . На практике широко используются вторичные параметры:

- **резонансная частота** контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.26)$$

или

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad (11.27)$$

- **характеристическое сопротивление** контура

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}; \quad (11.28)$$

- **добротность** контура

$$Q = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{L}}{r} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 Cr}. \quad (11.29)$$

11.5. Частотные характеристики

Частотные характеристики параллельного колебательного контура представляют собой зависимость от частоты характеристик **комплексного коэффициента передачи по току**

$$\dot{K}_C = \frac{\dot{I}_C}{\dot{I}_0} \quad (11.30)$$

или

$$\dot{K}_L = \frac{\dot{I}_L}{\dot{I}_0}, \quad (11.31)$$

где \dot{I}_C и \dot{I}_L - комплексные амплитуды токов реактивных ветвей контура, \dot{I}_0 - комплексная амплитуда тока источника.

Рассмотрим комплексный коэффициент передачи тока емкости \dot{K}_C (аналогичный анализ \dot{K}_L проведите самостоятельно). Из (11.30) с учетом (11.14) получим

$$\dot{K}_C = \frac{jQ}{1+j\xi}. \quad (11.32)$$

Для АЧХ $K_C(\xi)$ и ФЧХ $\varphi_C(\xi)$ контура получим

$$K_C(\xi) = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (11.33)$$

$$\varphi_C(\xi) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\xi), \quad (11.34)$$

где обобщенная расстройка определяется выражением (9.38)

$$\xi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (11.35)$$

Частотные характеристики параллельного колебательного контура в координатах ξ вида (11.33) и (11.34) численно совпадают с аналогичными характеристиками для последователь-

ного контура (10.42) и (10.43). Эти зависимости показаны на рис. 11.7 при $Q = 100$.

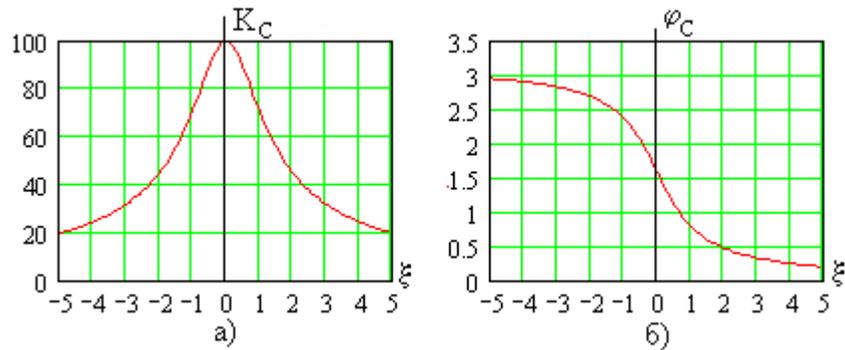


Рис. 11.7

Те же графики в координатах абсолютной расстройки $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ оказаны на рис. 11.8 при $Q = 100$ и $\omega_0 = 10^6$ рад/с.

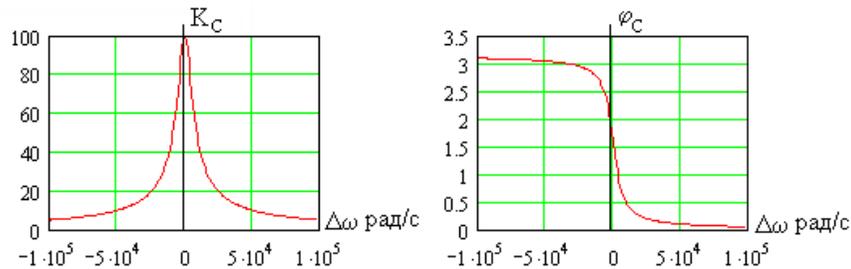


Рис. 11.8

Максимум АЧХ равен Q и достигается при $\xi = 0$, то есть на резонансной частоте $\omega = \omega_0$. При отклонении частоты от ω_0 коэффициент передачи резко падает, то есть параллельный колебательный контур может использоваться как **узкополосный частотный фильтр**.

Влияние параметров контура на форму частотных харак-

теристик было рассмотрено при анализе последовательного колебательного контура (повторите его самостоятельно)

11.6. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности

Так как выражение для АЧХ (11.33) параллельного колебательного контура совпадает с аналогичным выражением для последовательного контура, то формулы для полосы пропускания Π и коэффициента прямоугольности $K_{\text{ПР}}$ этих контуров совпадают (получите эти результаты еще раз самостоятельно),

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q}, \quad (11.36)$$

$$K_{\text{ПР}} \approx 0,1. \quad (11.37)$$

11.7. Влияние сопротивления источника сигнала и нагрузки на резонансные свойства контура

Рассмотрим параллельный колебательный контур на рис. 11.9а с реальным источником тока \dot{I}_0 (R_i - внутреннее сопротивление источника) и параллельно подключенной нагрузкой R_H .

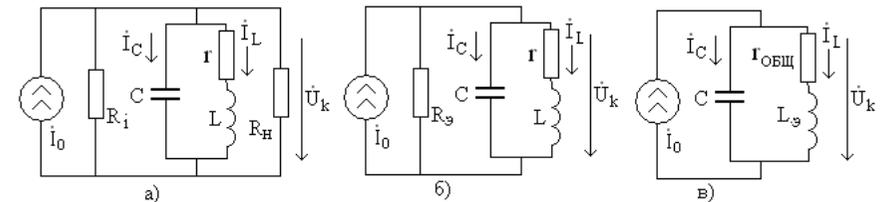


Рис. 11.9

Параллельное соединение R_i и R_H заменяется эквива-

лентным сопротивлением R_3 , как показано на рис. 11.9б, а в этой схеме необходимо преобразовать параллельное соединение R_3 и ветви L, r в эквивалентное последовательное соединение $L_3, r_{\text{ОБЩ}}$ в окрестности резонансной частоты контура ω_0 . Найдем сопротивление Z параллельного соединения,

$$Z = \frac{R_3(r + j\omega L)}{r + R_3 + j\omega L} = R_3 \frac{r(r + R_3) + (\omega L)^2}{(r + R_3)^2 + (\omega L)^2} + j\omega L \frac{R_3^2}{(r + R_3)^2 + (\omega L)^2}, \quad (11.38)$$

выделим его действительную и мнимую составляющие и приравняем их составляющим эквивалентного последовательного соединения элементов $L_3, r_{\text{ОБЩ}}$ (рис. 11.9в) вида

$$Z = r_{\text{ОБЩ}} + j\omega L_3. \quad (11.39)$$

В результате получим

$$r_{\text{ОБЩ}} = R_3 \frac{r(r + R_3) + (\omega L)^2}{(r + R_3)^2 + (\omega L)^2}, \quad (11.40)$$

$$L_3 = L \frac{R_3^2}{(r + R_3)^2 + (\omega L)^2}. \quad (11.41)$$

Допустим, что сопротивление R_3 много больше величин r и $\omega_0 L$, тогда в окрестности резонансной частоты $\omega \approx \omega_0$ можно записать

$$r_{\text{ОБЩ}} = R_3 \frac{rR_3 + (\omega_0 L)^2}{R_3^2} = r + \frac{(\omega_0 L)^2}{R_3} = r + \frac{\rho^2}{R_3}, \quad (11.42)$$

$$L_3 = L \quad (11.43)$$

(повторите эти преобразования самостоятельно).

Как видно из (11.42), подключение внутреннего сопротивления источника сигнала и нагрузки приводит к повышению эквивалентных потерь в контуре, эквивалентная добротность которого при этом равна

$$Q_3 = \frac{\rho}{r_{\text{ОБЩ}}} = \frac{\rho}{r + \frac{\rho^2}{R_3}} = \frac{Q}{1 + \frac{Q\rho}{R_3}}. \quad (11.44)$$

Полученное выражение совпадает с аналогичной формулой, учитывающей влияние нагрузки в последовательном колебательном контуре (проверьте это самостоятельно).

Подключение реального источника сигнала и нагрузки снижает эквивалентную добротность контура. Чтобы добротность упала незначительно, необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} R_i \gg Q\rho, \\ R_H \gg Q\rho. \end{cases} \quad (11.45)$$

Например, если $R_i = R_H = Q\rho$, то $Q_3 = Q/3$, то есть добротность **значительно снижается**, а если $R_i = R_H = 10Q\rho$, то $Q_3 = Q/1,2 = 0,83 \cdot Q$.

Реализовать условие (11.45) достаточно сложно, а часто и невозможно и требуются использование неполного включения контура к источнику сигнала и нагрузке, как показано на рис. 11.10. Можно показать, что эквивалентная добротность в этом случае равна

$$Q_3 = \frac{Q}{1 + p_1^2 \frac{Q\rho}{R_i} + p_2^2 \frac{Q\rho}{R_H}}, \quad (11.46)$$

где

$$p_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \text{ и } p_2 = \frac{L_4}{L_3 + L_4} \quad (11.47)$$

коэффициенты включения в контур источника сигнала и нагрузки. Их значения выбираются достаточно малыми (например, 0,1), что существенно ослабляет влияние на добротности сопротивлений R_i и R_H , которые должны удовлетворять условиям

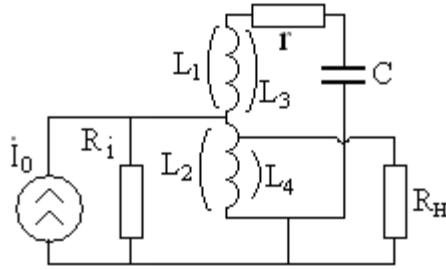


Рис. 11.10

$$\begin{cases} R_i \gg p_1^2 Q \rho, \\ R_H \gg p_2^2 Q \rho, \end{cases} \quad (11.48)$$

что значительно проще реализовать, чем (11.45).

Колебательные контуры вида рис. 11.10 называют сложными параллельными колебательными контурами. Помимо резонанса токов на частоте ω_0 , равной

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}, \quad (11.49)$$

имеется резонанс напряжений в последовательном колебательном контуре $L_1 C$ на частоте

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}. \quad (11.50)$$

Рабочим является интервал частот в окрестности ω_0 , в котором сопротивление контура в точках подключения источника сигнала в координатах обобщенной расстройки равно

$$Z = p_1^2 \frac{Q \rho}{1 + j\xi}. \quad (11.51)$$

11.8. Расчеты цепей с параллельными колебательными контурами

Если в составе цепи имеется параллельный колебательный контур, то ее расчет целесообразно проводить в координатах обобщенной расстройки. Рассмотрим цепь, показанную на рис. 11.11 при $r = 10 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ нФ}$, $R = 10 \text{ кОм}$, в

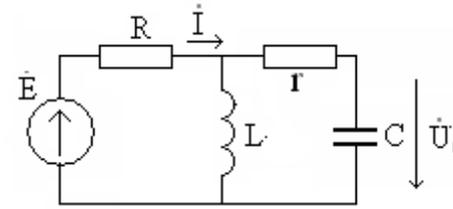


Рис. 11.11

нее включен источник гармонических колебаний с комплексной амплитудой $\dot{E} = 10 \text{ В}$ и частотой $\omega = 0,99 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$.

В состав цепи входит параллельный колебательный контур rLC , его резонансная частота ω_0 ,

добротность Q и обобщенная расстройка ξ соответственно равны

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}10^{-9}}} = 10^6 \text{ рад/с},$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{10^6 10^{-3}}{10} = 100,$$

$$\xi = 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2 \cdot 100 \cdot \frac{0,99 \cdot 10^6 - 10^6}{10^6} = -2.$$

Вычислим комплексное сопротивление контура Z в координатах обобщенной расстройки,

$$Z = \frac{Q \omega_0 L}{1 + j\xi} = \frac{100 \cdot 10^6 10^{-3}}{1 - j2} = \frac{10^5}{1 - j2} = 20 + j40 = 44,7 e^{j1,107} \text{ кОм}.$$

Тогда ток \dot{i} равен

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{R + Z} = \frac{10}{10^4 + 2 \cdot 10^4 + j4 \cdot 10^4} = 0,12 - j0,16 = 0,2 e^{-j0,927} \text{ мА},$$

а напряжение на емкости –

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot Z = 0,2 \cdot 10^{-3} e^{-j0,927} 44,7 \cdot 10^3 e^{j1,107} = 8,944 e^{j0,18} \text{ В.}$$

11.9. Применение параллельного колебательного контура

Параллельный колебательный контур чаще всего используется как элемент частотного фильтра аналогично последовательному контуру, или как нагрузка активного элемента (транзистора) в резонансном усилителе сигнала. Пример схемы такого усилителя в моделирующем пакете MicroCAP7 показан на рис. 11.12.

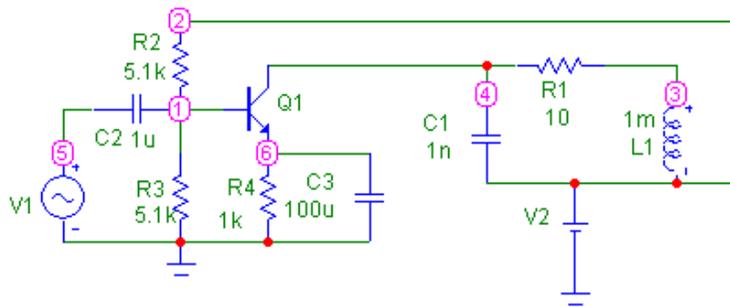


Рис. 11.12

В состав усилителя входит биполярный транзистор Q1 типа 2N5190 с цепями питания по постоянному току R2, R3, R4, C2, C3 от источника V2 постоянного напряжения 15В, параллельный колебательный контур R1, C1, L1 и источник гармонического входного сигнала с частотой $f = 159,15$ кГц ($\omega = 10^6$ рад/с), совпадающей с резонансной частотой контура, и амплитудой 4 мВ.

На рис. 11.13 представлены частотные характеристики резонансного усилителя (верхняя кривая – АЧХ, нижняя – ФЧХ). Коэффициент усиления равен примерно 3000 на частоте 151,6 кГц, амплитуда входного сигнала равна 3 мВ, а выходного 9 В.

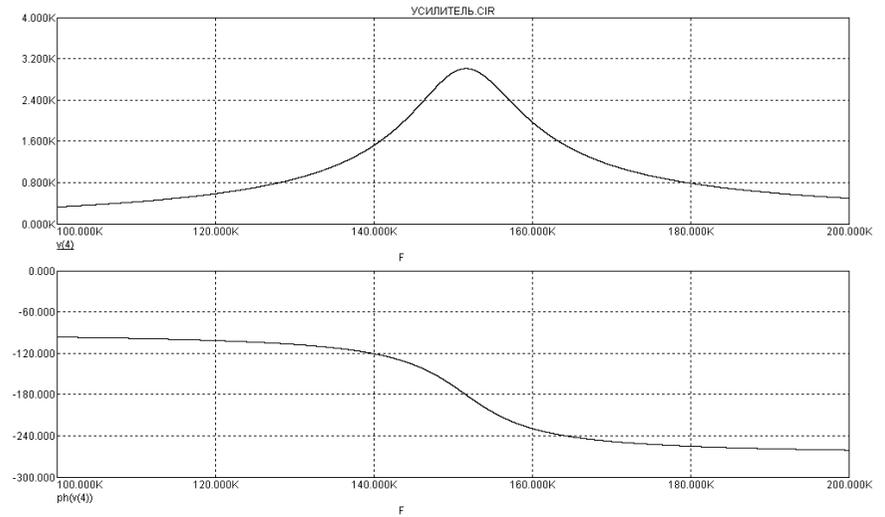


Рис. 11.13

Проведите моделирование рассмотренной цепи самостоятельно, изменяя ее параметры. Введите неполное включение транзистора к контуру, сравните результаты.

11.10. Задания для самостоятельного решения

Задание 11.1. Вычислите резонансное сопротивление параллельного колебательного контура при $L = 2$ мГн, $C = 500$ пФ, $r = 20$ Ом.

Задание 11.2. Найдите напряжение на емкости параллельного контура в цепи рис.

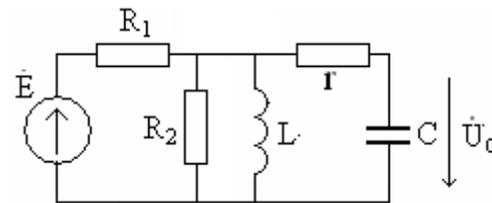


Рис. 11.14

рис. 11.14 при $L = 2$ мГн, $C = 500$ пФ, $r = 10$ Ом, $\dot{E} = 5$ В, $R_1 = R_2 = 20$ кОм, $\omega = 1,02 \cdot 10^6$ рад/с. Расчет проведите в координатах обобщенной расстройки.

12. СЛОЖНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

12.1. Назначение частотных фильтров

В различных областях, связанных с электронной техникой (радиотехника, передача информации, биомедицинская электроника) возникает необходимость в частотной фильтрации сигналов на фоне помех. Например, в системах радиосвязи для работы каждой радиостанции выделяется определенная частотная область, как показано на рис. 12.1.

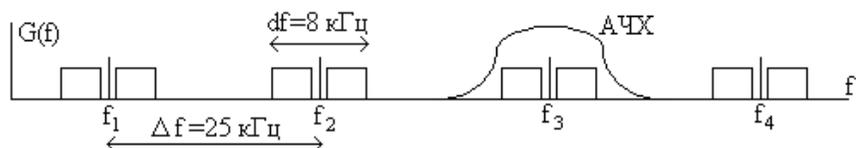


Рис. 12.1

Между несущими частотами f_1, f_2, \dots задан разнос $\Delta f = 25 \text{ кГц}$, а каждая станция занимает полосу частот $df = 8 \text{ кГц}$. Для выделения полезного сигнала, например, на частоте f_3 , и подавления всех других сигналов необходимо использовать частотный фильтр с полосовой АЧХ, как показано на рис. 12.1. Он должен пропускать сигнал в заданной полосе частот $df = 8 \text{ кГц}$ и подавлять в заданное число раз (например, 1000) сигналы соседних станций, отстоящих от центральной частоты f_3 на величину

$$\Delta f - \frac{df}{2} = 21 \text{ кГц}.$$

Требуемое затухание соседних сигналов чаще задается в децибелах, в нашем примере 60 дБ.

12.2. Фильтры сосредоточенной селекции

Рассмотренные простые частотные фильтры не обеспечивают высокой избирательности. Фильтры сосредоточенной селекции (ФСС) обеспечивают высокую избирательность в заданной полосе частот за счет усложнения цепи.

Простейшими ФСС являются связанные колебательные контуры, пример схемы двухконтурного ФСС показан на рис.12.2. В теории цепей [2] для двух связанных контуров с одинаковыми элементами $r_1 = r_2 = r$, $C_1 = C_2 = C$ и $L_1 = L_2 = L$ получено выражение для АЧХ вида

$$\xi = \frac{2A}{\sqrt{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}},$$

где **фактор связи** A равен

$$A = Q \frac{M}{L},$$

M - взаимная индуктивность связанных (близко расположенных) катушек L_1 и L_2 , Q - добротность каждого контура, ξ - обобщенная трансстройка.

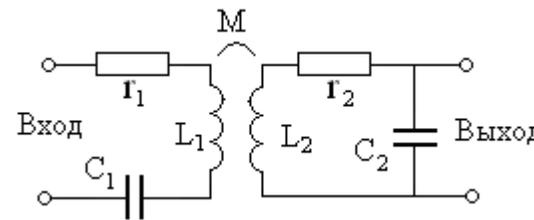


Рис. 12.2

Графики нормированных АЧХ в виде отношения амплитуды тока во втором контуре к ее максимальному значению показаны на рис. 12.3. При малых $A < 1$ кривая подобна АЧХ одиночного колебательного контура, при $A = 1$ вершина кривой становится более плоской, а скаты круче, чем у одиночного контура, то есть избирательность становится выше. При $A > 1$ в полосе пропускания появляется провал (это допустимо, если глубина провала не велика) и скаты АЧХ становятся еще круче.

Таким образом, удается повысить избирательность фильтра за счет усложнения цепи.

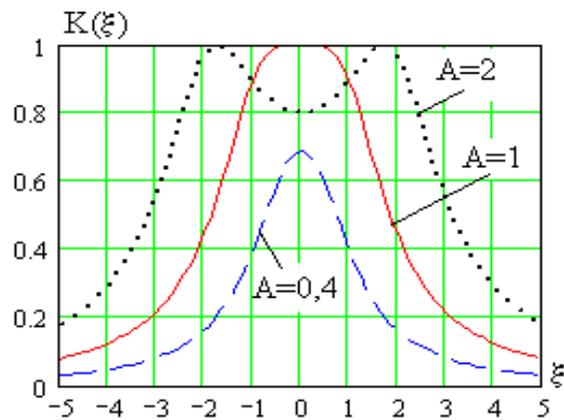


Рис. 12.3

12.3. Синтез частотных фильтров

Синтезом частотного фильтра называют формирование его схемы и определение параметров при заданной форме и параметрах требуемой АЧХ. Имеются методики синтеза фильтров с различными свойствами и необходимая справочная литература.

Значительно удобнее и, главное, быстрее синтезировать сравнительно простой фильтр с помощью специализированных или универсальных программ, например, MicroCAP.

На рис. 12.4 показано задание на синтез частотного фильтра Баттерворта (равномерного в полосе пропускания) с центральной частотой $F_c = 1$ МГц, полосой пропускания $FB = 8$ кГц и затуханием 60 дБ при отстройке на ± 21 кГц от частоты F_c ($SB = 42$ кГц).

При проектировании сложных частотных фильтров необходимо задать и поддерживать постоянными в полосе рабочих частот сопротивления источника сигнала и нагрузки, которые в рассматриваемом примере выбраны равными 50 Ом.

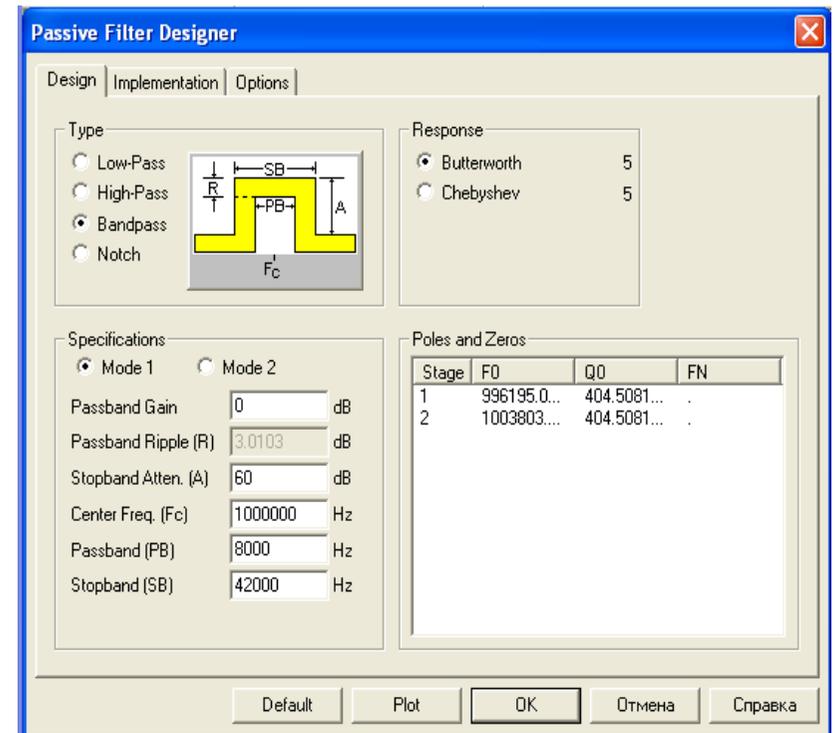


Рис. 12.4

Синтезированная программой MicroCAP схема фильтра показана на рис. 12.11. Он представляет собой соединение двух последовательных и трех параллельных колебательных контуров (последовательные контуры можно заменить эквивалентными емкостями) и обеспечивает АЧХ, показанную на рис. 12.6 (затемнены заданные границы, в которых должна находиться АЧХ).

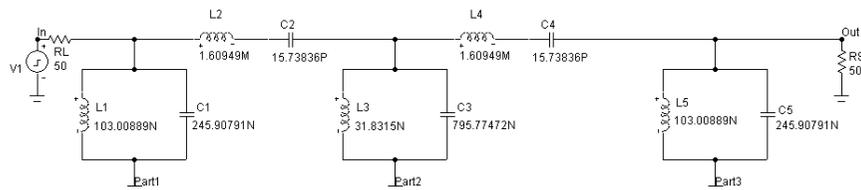


Рис. 12.5

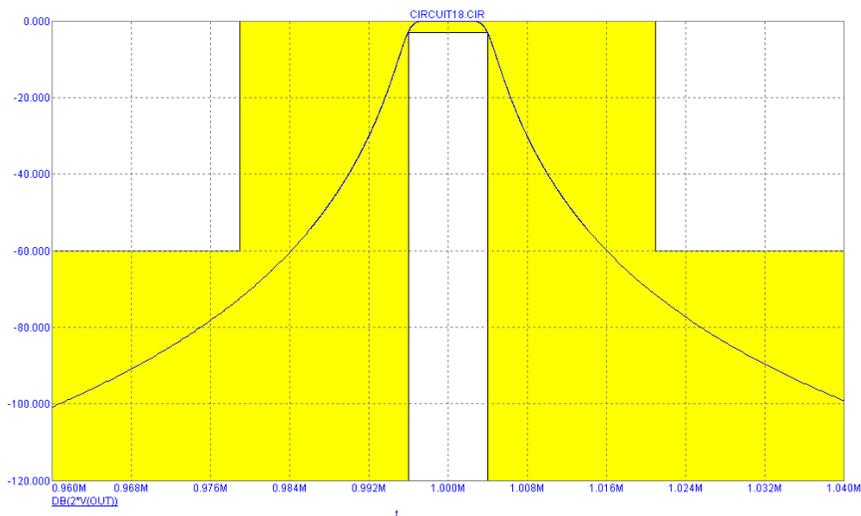


Рис. 12.6

Аналогично проведем синтез фильтра нижних частот чебышевского типа с полосой пропускания 200 Гц и высокой избирательностью: на уровне -20 дБ частота равна 218,6 Гц, а коэффициент прямоугольности –

$$K_{пр} = \frac{200}{218,6} = 0,915.$$

Синтезированная схема фильтра показана на рис. 12.7, а на рис. 12.8 – его АЧХ. Как видно, она имеет неравномерность в полосе пропускания, но более крутые скаты АЧХ при той же сложности, что и фильтр Баттерворта.

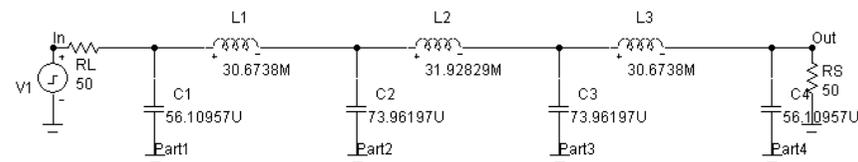


Рис. 12.7

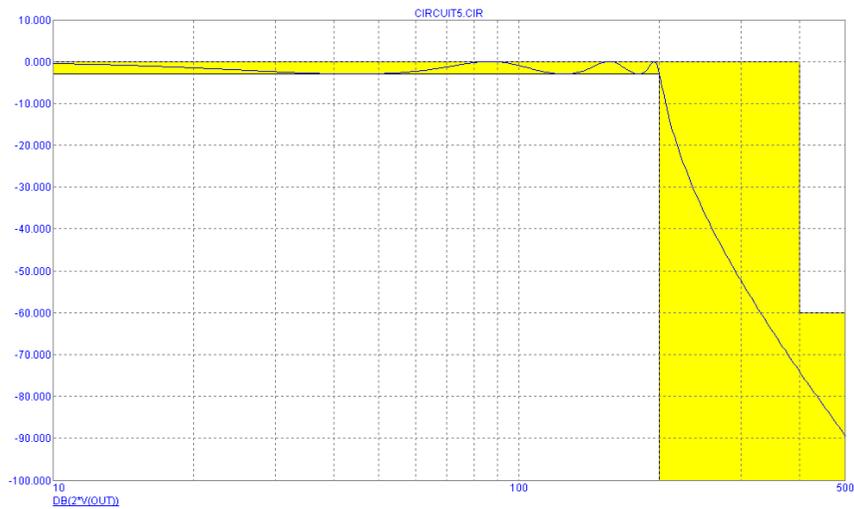


Рис. 12.8

Проявите интерес к задаче синтеза частотных фильтров различных типов, поработайте с программой Micro-CAP7, проанализируйте результаты.

12.4. Пьезоэлектрические фильтры

Высококачественные частотные фильтры на базе реактивных элементов являются весьма сложными электрическими цепями, **трудоемкими и дорогими** в изготовлении и настройке.

Высокоизбирательные узкополосные фильтры могут быть реализованы на базе кварцевого резонатора, условно показанного на рис. 12.9а. Это пластина, определенным образом вырезанная из монокристалла кварца, на противоположные грани которой нанесены металлические обкладки с подключенными к ним проволочными выводами.

В кварцевой пластине имеет место явление пьезоэффекта: при подаче на металлические электроды переменного напряжения определенной частоты в ней возникают **механические** колебания и, наоборот, при возникновении в пластине механических колебаний на ее гранях возникает переменное напряжение.

Эквивалентная электрическая схема кварцевого резонатора показана на рис. 12.9б. Ее особенностью является очень малые сопротивление потерь r_K (доли Ома) и емкость C_K (доли пикофарады).

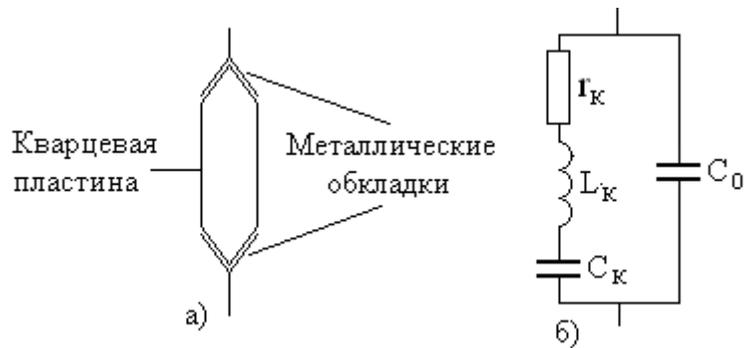


Рис. 12.9

На частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_K C_K}}$$

имеет место резонанс напряжений в последовательном контуре $r_K L_K C_K$, а на частоте

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_K \frac{C_K C_0}{C_K + C_0}}}$$

- резонанс токов в параллельном колебательном контуре $r_K L_K C_K C_0$. На рис. 12.10 показаны зависимости от частоты модуля $|Z|$, активной R_{Σ} и реактивной X_{Σ} составляющих сопротивления цепи рис. 12.9б при $r_K = 1$ Ом, $L_K = 10$ мГн, $C_K = 0,01$ пФ и $C_0 = 10$ пФ. Обратите внимание, в каком узком диапазоне частот резко меняются сопротивления кварцевого резонатора.

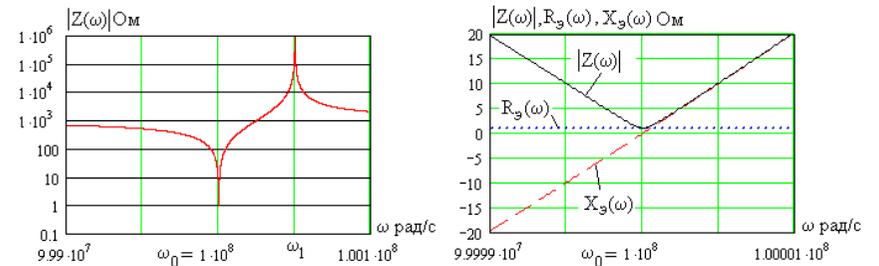


Рис. 12.10

Таким образом, на базе кварцевого резонатора в окрестности частоты ω_0 можно реализовать высокочастотные (например, $f_0 = 10$ МГц) весьма узкополосные ($\Pi = 100$ Гц) фильтры с высокой избирательностью. Это обусловлено **высокой добротностью** кварцевого резонатора (до нескольких миллионов, в примере на рис. 12.10 получим $Q = 100000$) за счет малых потерь энергии механических колебаний в монокристалле кварца (горного хрусталя). Благодаря этой особенности из него

изготавливают хрустальные бокалы с очень продолжительным «звоном».

Высокочастотные колебательные системы (например, кварцевые резонаторы) крайне необходимы для реализации генераторов гармонических колебаний с высокой стабильностью частоты, например в электронных часах.

В радиотехнике широкое применение получили пьезоэлектрические частотные фильтры на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Они обеспечивают АЧХ с высокой прямоугольностью (эквивалентный порядок электрической цепи на реактивных элементах 100-200) и широко применяются, например, в телевизионных приемниках.

12.5. Активные RC фильтры

Частотные пассивные (без усилителей сигнала) LC фильтры включают в себя катушки индуктивности, которые достаточно сложны в изготовлении, дороги и плохо поддаются миниатюризации. С этой точки зрения удобнее безындуктивные или RC фильтры. Однако в этом случае сложно реализовать фильтры с высокой избирательностью и в них часто будет наблюдаться значительное затухание сигнала в полосе пропускания.

Широкое применение на практике находят активные RC фильтры на базе операционных усилителей (ОУ), условное обозначение которого показано на рис. 12.11а. Усилитель имеет два входа: неинвертирующий u_1 и инвертирующий u_2 , один выход $u_{ВЫХ}$ и выполняет **операцию** вида

$$u_{ВЫХ} = K_{ОУ} \cdot (u_1 - u_2),$$

где $K_{ОУ}$ - коэффициент усиления ОУ, который зависит от частоты сигнала, как показано на рис. 12.11б (обе оси в логарифмическом масштабе).

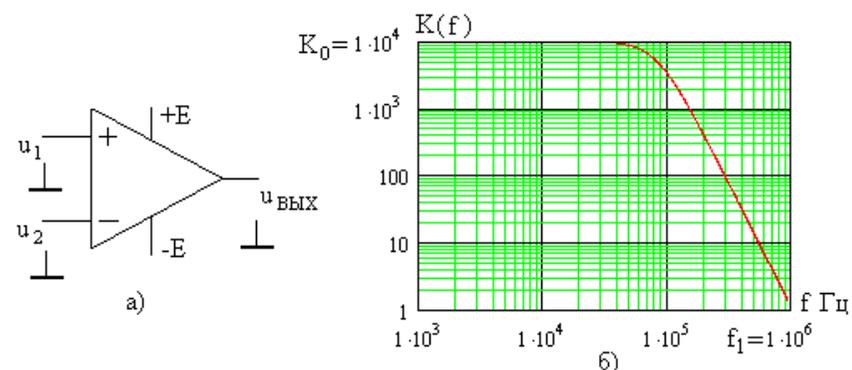


Рис. 12.11

Максимум $K_{ОУ} = K_0$ имеет место на низких частотах и лежит в пределах от нескольких сотен до сотен тысяч (в примере $K_0 = 10^4$). Затем он медленно падает до уровня $K_0 / \sqrt{2}$ (на 3 дБ) в полосе пропускания, а далее снижается до 1 на частоте единичного усиления f_1 . Входное сопротивление ОУ весьма велико (например, 1 МОм) и его можно считать бесконечным, а выходное – мало (например, 0,1 Ом), практически равно нулю.

В современных ОУ, например, LMN6624 или ОРА847 ([найдите их характеристики в Internet](#)), полоса усиливаемых частот достигает сотен МГц при коэффициенте усиления в десятки тысяч, а частота единичного усиления f_1 – нескольких ГГц,

Пример схемы активного RC фильтра нижних частот второго порядка показан на рис. 12.12. Синтез активных RC фильтров с заданными частотными характеристиками можно проводить в пакете программ MicroCAP7, пример модели показан на рис. 12.13, а его АЧХ и ФЧХ показаны на рис. 12.14 (в верхней и нижней частях соответственно).

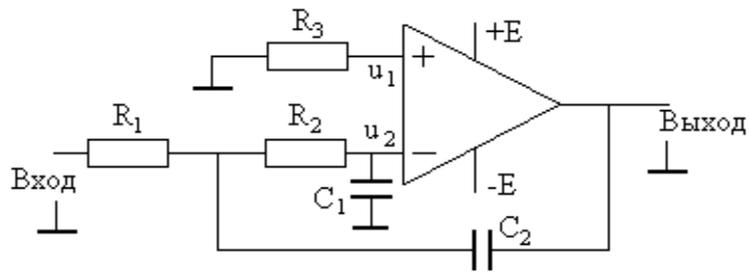


Рис.12.12

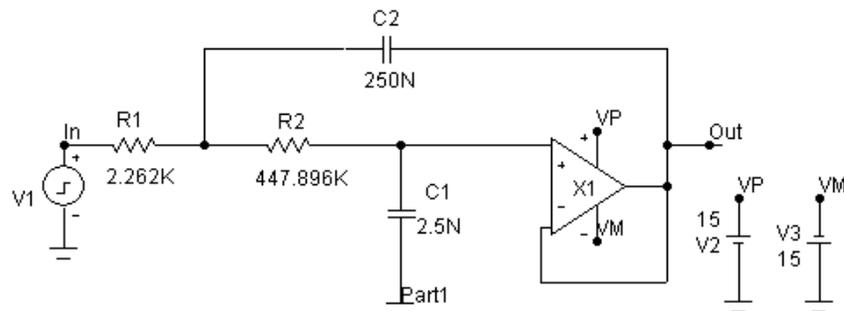


Рис. 12.13

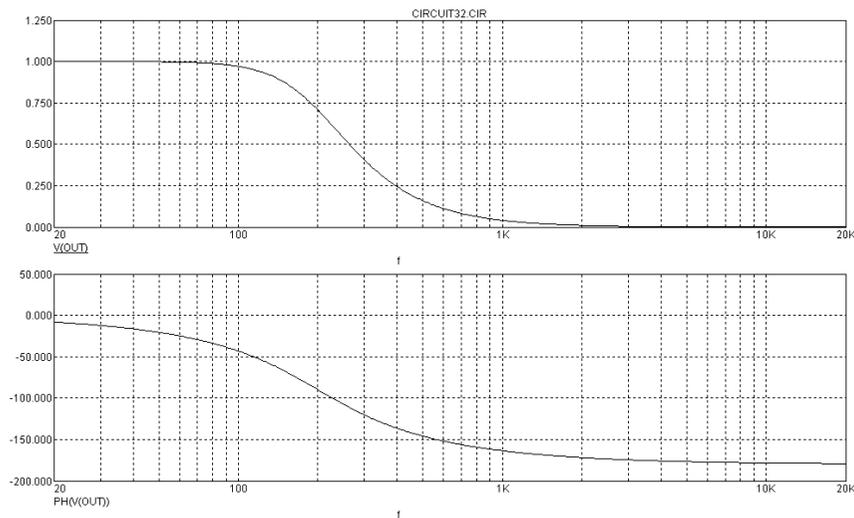


Рис. 12.14

Подобный фильтр может применяться, например, в биомедицинской аппаратуре для выделения сигналов.

12.6. Задания для самостоятельного решения

Задание 12.1. На рис. 12.15 в частотном диапазоне показаны области, занимаемые сигналами двух радиостанций - полезной на частоте f_1 и мешающей на частоте f_2 , а пунктирной линией - трапецидальная АЧХ фильтра, выделяющего полезный сигнал. Определите минимальный коэффициент прямоугольности $K_{пр}$ фильтра при $f_1 = 100$ МГц, $f_2 = 100,05$ МГц и $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 20$ кГц.

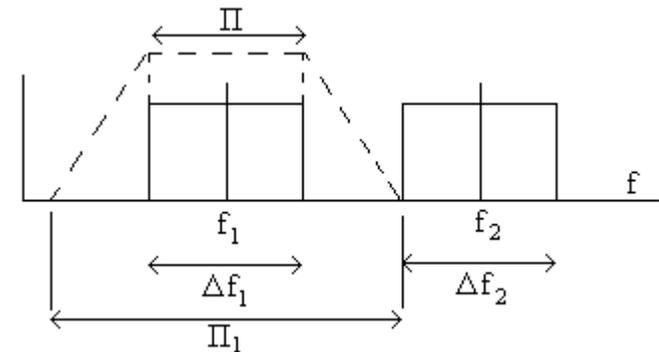


Рис. 12.15

Задание 12.2. В условиях задания 12.1 получите общую формулу для $K_{пр}$, постройте график зависимости коэффициента прямоугольности от разноса частот $F = f_2 - f_1$. Вычислите при указанных выше данных разнос частот F , при котором $K_{пр} = 0,9$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный материал позволяет проводить расчеты электрических цепей при постоянных и гармонических воздействиях. Он является основой для дальнейшего изучения теории цепей и методов проектирования радиоэлектронной аппаратуры.

Особое внимание в радиотехнике уделяется частотно-селективным цепям (частотным фильтрам) и особенно колебательным контурам.

Частотное описание электрических цепей и устройств широко используется в инженерной практике в ходе теоретических исследований, моделирования и экспериментальных работ.

Теоретический материал по расчету электрических цепей сопровождается простейшими примерами. Панорама примеров расчета сигналов и цепей приведена в [7].

Первая задача по теме решается с большим трудом, над третьей необходимо подумать, а решение десятой не вызывает никаких затруднений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кратные и дольные единицы

Наименование	Значение	Обозначение	Наименование	Значение	Обозначение
тера	10^{12}	Т	пико	10^{-12}	п
гига	10^9	Г	нано	10^{-9}	н
мега	10^6	М	микро	10^{-6}	мк
кило	10^3	к	милли	10^{-3}	м
гекто	10^2	г	санتي	10^{-2}	с
дека	10	Да	деци	10^{-1}	Д

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов, В.П. Основы теории цепей [Текст] / В.П. Попов. - М.: Высш. шк., 2003. - 575с.
2. Семенцов, В.И. Сборник задач по теории цепей [Текст] / В.И. Семенцов, В.П. Попов, В.Н. Бирюков. - М.: Высш. шк., 2003. - 270 с.
3. Литвиненко, В.П. Лабораторный практикум по теории цепей [Текст]: учеб. пособие / В.П. Литвиненко, Ю.В. Литвиненко. - Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2014. - 104 с.
4. Макаров, Е. Г. – Mathcad: учебный курс [Текст] / Е.Г. Макаров. - СПб.: Питер, 2009. – 394 с.
5. Амелина, М.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8 [Текст] / М.А. Амелина, С.А. Амелин. – М.: Горячая линия – Телеком. 2011. – 464 с.
6. Карлащук, В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение [Текст] / В.И. Карлащук. - М.: Солон-Р, 1999. – 506 с.
7. Литвиненко, В.П. Расчет линейных электрических цепей [Текст]: учеб. пособие / В.П. Литвиненко, Ю.В. Литвиненко. - Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2009. - 243 с.
8. Литвиненко, В.П. Практикум по расчету линейных электрических цепей [Текст]: учеб. пособие / В.П. Литвиненко. - Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2014. - 164 с.
9. Литвиненко, В.П. Линейные цепи при гармонических воздействиях [Текст]: учеб. пособие / В.П. Литвиненко. - Воронеж: ГОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2011. - 114 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ.....	4
1.1 Электрическая цепь.....	4
1.2 Заряд, ток, напряжение, мощность, энергия.....	4
1.3. Элементы электрической цепи.....	8
1.4. Модели основных линейных элементов цепи....	9
1.5. Законы Ома для элементов цепи.....	13
1.6. Расчет тока и напряжения в элементах цепи....	14
1.7. Идеальные источники сигнала.....	19
1.8. Основы топологического описания цепи.....	21
1.9. Соединения элементов цепи.....	24
1.10. Законы Кирхгофа для мгновенных значений сигналов.....	26
1.11. Реальные источники сигнала.....	29
1.12. Система уравнений электрической цепи для мгновенных значений токов и напряжений....	33
1.13. Задания для самостоятельного решения.....	37
2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ	38
2.1. Информационные сигналы.....	38
2.2. Гармонический сигнал.....	39
2.3. Измерение параметров гармонического сигнала с помощью электронного осциллографа.....	43
2.4. Последовательность прямоугольных Импульсов.....	46
2.5. Числовые характеристики (значения) сигналов	47
2.6. Задания для самостоятельного решения	50
3. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....	52
3.1. Модель цепи постоянного тока.....	52
3.2. Расчет цепи на основе закона Ома.....	53
3.3. Общий метод расчета цепи на основе законов Ома и Кирхгофа.....	54
3.4. Метод контурных токов.....	56
3.5. Метод узловых напряжений.....	58
3.6. Метод наложения.....	60
3.7. Сравнительный анализ методов расчета.....	61
3.8. Задания для самостоятельного решения.....	62

4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТОКИ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ.....	63
4.1. Гармонические ток и напряжение в элементах цепи	63
4.2. Средняя мощность гармонических сигналов в линейном двухполюснике.....	69
4.3. Векторная диаграмма цепи.....	71
4.4. Особенности расчета цепи с гармоническими сигналами.	74
4.5. Задания для самостоятельного решения.....	74
5. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД.....	75
5.1. Комплексная амплитуда гармонического сигнала.....	75
5.2. Операции с комплексными числами.....	76
5.3. Законы Ома и Кирхгофа для комплексных амплитуд токов и напряжений.....	80
5.4. Комплексные сопротивления и проводимости элементов цепи.....	81
5.5. Комплексные сопротивление и проводимость участка цепи.....	82
5.6. Характеристики комплексного сопротивления и проводимости.....	85
5.7. Комплексная мощность.....	88
5.8. Расчет мощности, потребляемой двухполюсником	90
5.9. Максимизация потребляемой мощности.....	93
5.10. Задания для самостоятельного решения.....	96
6. РАСЧЕТ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ.....	98
6.1. Общие замечания.....	98
6.2. Расчет токов и напряжений на основе закона Ома	98
6.3. Общий метод расчета по уравнениям Кирхгофа.....	101
6.4. Метод контурных токов.....	105
6.5. Метод узловых напряжений (потенциалов)....	108
6.6. Метод (принцип) наложения.....	111

6.7. Теорема об эквивалентном источнике.....	112
6.8. Задания для самостоятельного решения.....	115
7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ	
ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ	117
7.1. Четырехполюсник	117
7.2 Входное и выходное сопротивления четырехполюсника	119
7.3. Комплексный коэффициент передачи	126
7.4. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики четырехполюсника	129
7.5. Задания для самостоятельного решения	134
8. СИСТЕМЫ ПАРАМЕТРОВ	
ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА	135
8.1. Системы параметров четырехполюсника.....	135
8.2. Физический смысл параметров четырехполюсника	137
8.3. Методика расчета параметров четырехполюсников.	140
8.4. Измерение параметров четырехполюсников... ..	143
8.5. Соединения четырехполюсников.....	146
8.6. Параметры четырехполюсника и его частотные характеристики.....	147
8.7. Применение моделей четырехполюсников.....	149
8.8. Задания для самостоятельного решения.....	150
9. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗБИРАТЕЛЬНОСТИ	
ЧАСТОТНЫХ ФИЛЬТРОВ	151
9.1. Частотные фильтры.....	151
9.2. Характеристики избирательности.....	151
9.3. Фильтры первого порядка.....	155
9.4. Аперриодические фильтры второго порядка.....	159
9.5. Фильтры второго порядка типа LC.....	163
9.6. Задания для самостоятельного решения.....	164
10. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ	
КОНТУР	165
10.1. Схема последовательного колебательного	

контура.....	165
10.2. Входное сопротивление последовательного колебательного контура.....	166
10.3. Ток и напряжения в контуре, резонансные явления	167
10.4. Вторичные параметры колебательного контура.....	174
10.5. Частотные характеристики контура.....	176
10.6. Обобщенная расстройка	179
10.7. Частотные характеристики в координатах обобщенной расстройки	180
10.8. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности	183
10.9. Влияние внутреннего сопротивления источника сигнала и нагрузки на резонансные свойства контура	185
10.10. Расчеты цепей с последовательными колебательными контурами.....	190
10.11. Применение последовательного колебательного контура	192
10.12. Задания для самостоятельного решения	193
11. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР .	194
11.1. Схема параллельного колебательного контура	194
11.2. Входное сопротивление и проводимость	194
11.3. Напряжение и токи в контуре	197
11.4. Вторичные параметры колебательного контура	201
11.5. Частотные характеристики	202
11.6. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности	204
11.7. Влияние сопротивления источника сигнала и нагрузки на резонансные свойства контура	204
11.8. Расчеты цепей с параллельными колебательными контурами	208

11.9. Применение параллельного колебательного контура	209
11.10. Задания для самостоятельного решения	210
12. СЛОЖНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ФИЛЬТРЫ.....	211
12.1. Назначение частотных фильтров	211
12.2. Фильтры сосредоточенной селекции	212
12.3. Синтез частотных фильтров	213
12.4. Пьезоэлектрические фильтры	216
12.5. Активные RC фильтры	219
12.6. Задания для самостоятельного решения	222
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	223
ПРИЛОЖЕНИЕ	223
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	224

Учебное издание

Литвиненко Владимир Петрович
Чернояров Олег Вячеславович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕНЕЙ

Часть 1

В авторской редакции

Подписано к изданию 12.01.16.

Формат 60x84/112. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. 14,4. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 250 экз.

Зак. №

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14