ФГБОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Е.П. Енина

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ: ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2013

УДК 519.85 (075) + 658.012.122 (075)

Методы моделирования прогнозирования в экономике: лабораторный практикум: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые, граф. данные. (7,68 Мб) / Е.П. Енина. - Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ ; Windows XP ; MS Word 2007 или более поздняя версия ; 1024x768 ; CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана. – Диск и сопровод. материал помещены в контейнер 12x14 см.

В работе рассмотрены примеры математического моделирования экономических процессов на базе компьютерных технологий подготовки и принятия решений. В качестве инструментального средства моделирования используется стандартная офисная программа EXCEL.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 080100.62 «Экономика», «Финансы предприятий и организаций», «Экономика предприятий и организаций» и «дисциплине методы моделирования и прогнозирования в экономике».

Табл. 39. Ил. 67. Библиогр.: 61 назв.

Рецензенты факультет среднего и специального образования Института менеджмента, маркетинга и финансов (декан канд. физ.–мат. наук, доц. С.И. Моисеев);
д-р экон. наук, проф. С.В. Амелин.

ВВЕДЕНИЕ

Данный практикум содержит материал для подготовки и проведения лабораторных работ по дисциплине «Экономико-математические модели и методы» в соответствии с образовательным стандартом экономических специальностей в системе Excel. На основании опыта проведения занятий по данной дисциплине выделены разделы, каждый из которых посвящен отдельному классу задач. По каждому из этих классов задач приведен теоретический материал, содержащий основные понятия по соответствующей теме. Для активизации самостоятельной работы в практикум включены задания для лабораторных и самостоятельных работ. Большинство заданий заимствовано из литературы, часть заданий является авторскими.

Прогнозирование является одной из важнейших составляющих производственной деятельности людей. Поэтому важное значение имеет изучение возможностей применения методов и моделей прогнозирования в экономике, как в условиях полной информации, так и в условиях неопределенности вследствие дефицита информации и связанного с этим риска.

Методы и модели прогнозирования в экономике призваны помочь руководителю в сложном поиске наилучших вариантов управленческих решений, и по мере их использования накапливается опыт и развивается интуиция руководителей производства.

В современных условиях хозяйствования возрастает трудоемкость экономических расчетов и принятия решений без использования методов моделирования и прогнозирования в экономике.

Экономико-математическое моделирование становится единственно верным механизмом выработки будущего представления деятельности предприятия, с учетом многообразия факторов влияющих на него. Широкому применению методов анализа и прогнозирования данных способствовало появление стратегических методов программных пакетов. Использование стратегических методов прогнозирования и моделирования в деятельности плановых, аналитических, маркетинговых отделов производственных предприятий позволит повысить эффективность применяемых решений.

В пособии проводятся необходимые теоретические сведения и примеры практической реализации задач прогнозирования. Рассматриваются особенности принятия коллективных решений, использования экспертных знаний и различных математических методов и моделей.

Такой комплексный подход позволяет развивать методологию, овладение которой, управленческим персоналом даст основу для качественного и количественного анализа ситуации, выбора рациональных решений и их прогнозирования.

1. ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ С МАТРИЦАМИ В СРЕДЕ EXCEL

В Microsoft Excel есть множество функций для выполнения операций с матрицами, которые применяются для решения систем линейных уравнений, задач по модели межотраслевого баланса и др. Для этой цели используются функции:

МУМНОЖ - умножение матриц;

ТРАНСП - транспонирования матриц;

МОПРЕД - вычисление определителя матриц;

МОБР - вычисление обратной матрицы.

Кнопка «Мастер функций» f служит для вызова этих функций и расположена на панели инструментов. Функции для выполнения операций с матрицами находятся в категории ***математические,*** а функции, необходимые для выполнения статистических расчетов, находятся в категории ***статистические.***

Все функции, которые возвращают массив, в том .числе МУМНОЖ, ТРАНСП, МОБР, завершаются нажатием комбинации трех клавиш CTRL+SHIFT+ENTER. Предварительно должен быть выделен диапазон для записи возвращаемых значений.

Функции, возвращающие число, завершаются нажатием кнопки ОК или клавиши Enter.

Если функции не могут быть выполнены по причине несоответствия данных выполняемой операции, то функция возвращает ошибку вида #ЧИСЛО! Ниже рассматриваются операции в среде Excel.

1.Умножение матриц с помощью функции МУМНОЖ (массив 1, массив 2)

Массив 1 и массив 2 - это перемножаемые матрицы. Все ячейки массивов должны содержать только числа. Можно умножать как квадратные, так и прямоугольные матрицы. Количество столбцов массива 1 должно совпадать с количеством строк массива 2.

Необходимо выполнить следующие действия: в таблицу Excel ввести массивы 1 и 2; выделить диапазон для возвращения результата; из вставки функции ***fx*** вызвать функцию МУМНОЖ; ввести в нее массивы 1 и 2; нажать комбинацию клавиш ***CTRL+SHIFT+ENTER.***

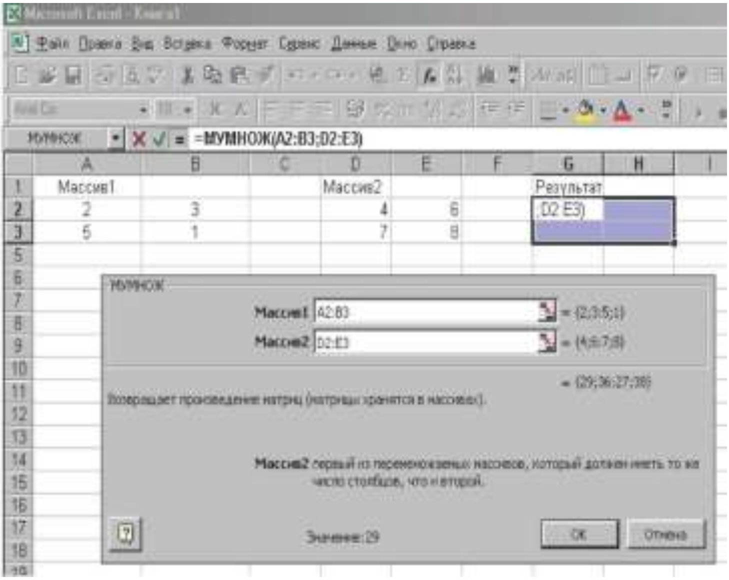


Рис. 1. Окно функции МУМНОЖ (выделен диапазон G2:H3 для возвращаемого значения произведения матриц).

Пример 1. Ателье выпускает три вида изделий: брюки, юбки, жилеты, используя два вида тканей: шерстяную и подкладочную. Нормативы расхода тканей характеризуются матрицей А:

Брюки, юбки, жилеты	Ткань	Цена за 1 м, (руб)
$A = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}75 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$	Шерстяная Подкладочная	450 130

Определить:

а) количество метров тканей (D), необходимое для выпуска изделий

$B = \begin{pmatrix} 150 \\ 160 \\ 40 \end{pmatrix}$	Брюки Юбки Жилеты

б) общую стоимость используемых тканей (S). **Решение:**

Количество метров ткани:

$$D = A * B = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}75 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 150 \\ 160 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 354 \\ 221 \end{pmatrix}$$

Общая стоимость тканей:

$$S = C * D = (450 * 130) * \begin{pmatrix} 354 \\ 221 \end{pmatrix} = 188030 \text{ руб.}$$

Задача решается с применением функции МУМНОЖ для определения вектора *D* и числа S.

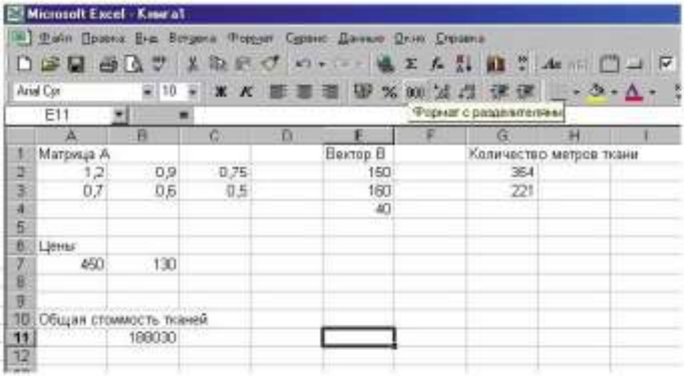


Рис. 2. Результаты решения примера 1 в таблице Excel

2. Транспонирование матриц с помощью функции ТРАНСП (массив)

Функция преобразует массив, переписывая строки в столбцы и наоборот. Последовательность действий такая же, как и при перемножении матриц: ввод исходной таблицы, выделение диапазона для транспонированной матрицы, вызов функции ТРАНСП. **Пример 2.** Пусть в ячейках A1:C1 содержатся числа 1, 2, 3. Если выделен возвращаемый диапазон A3:A5, то ТРАНСП(A1:C1) записывает числа 1,2,3 в диапазон A3:A5

3. Вычисление определителей матриц с помощью функции МОПР(массив)

Массив должен быть квадратной матрицей с равным количеством строк и столбцов. Функция возвращает число, поэтому завершается нажатием кнопки ОК.

Последовательность действий, такая же как и у предыдущих функций.

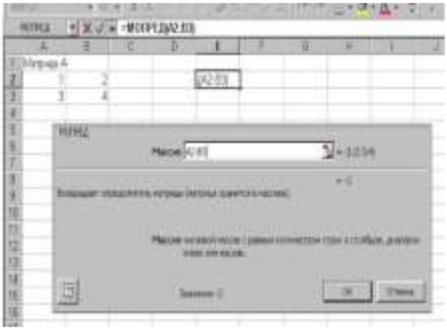


Рис. 3. Вычисление определителя матрицы с помощью функции МОПР

4. Вычисление обратной матрицы с помощью функции МОБР (массив)

Массив должен быть квадратной матрицей с определителем не равным нулю. Функция возвращает массив обратной матрицы. Если определитель исходной матрицы равен нулю, то она не имеет обратной матрицы и функция возвращает ошибку вида #ЧИСЛО!

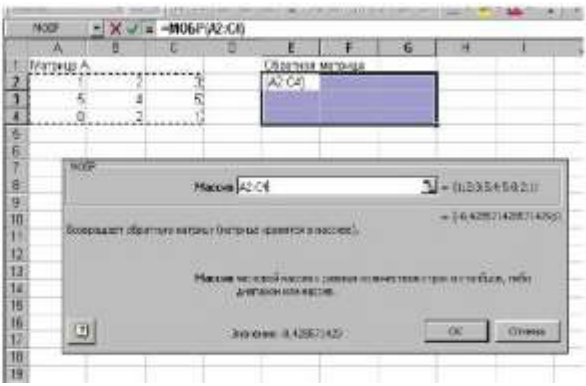


Рис. 4. Вычисление обратной матрицы с помощью функции МОБР

5. Решение систем уравнений с квадратной матрицей помощью обратной матрицы

Решение выполняется в два этапа: сначала вычисляют определитель матрицы с помощью функции МОПР и, если он не равен нулю, находят обратную матрицу с помощью функции МОБР, а затем ее умножают на вектор правой части системы уравнений с помощью функции МУМНОЖ.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&X_1 - X_2 = 1,\\
&2X_1 + X_2 + 5X_3 = -5,\\
&3X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 8,
\end{aligned}
$$

Представим данную систему в матричном виде:

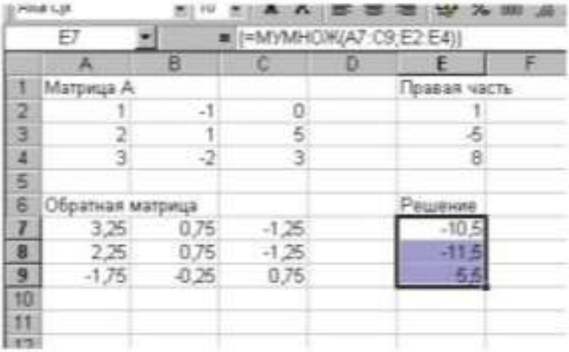
$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

Решение находится из выражения:

$$
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

Для решения применяется две функции: сначала находится обратная матрица с помощью функции МОБР, а затем используется функция МУМНОЖ.

Таким образом $X_1 = -10{,}5;$ $X_2 = -11{,}5;$ $X_3 = 5{,}5.$



E7 = {=МУМНОЖ(A7:C9;E2:E4)}

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица А				Правая часть	
2	1	-1	0		1	
3	2	1	5		-5	
4	3	-2	3		8	
5						
6	Обратная матрица				Решение	
7	3,25	0,75	-1,25		-10,5	
8	2,25	0,75	-1,25		-11,5	
9	-1,75	-0,25	0,75		5,5	
10						
11						

Рис. 5. Решение системы уравнений с квадратной матрицей с помощью функции МОБР

6. Решение систем уравнений с прямоугольной матрицей методом Жордана-Гаусса

Метод Жордана-Гаусса применяется для решения систем уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1,2,\ldots,m \qquad (1.1)$$

Или в матричном виде:

A*X=B

где,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.2)$$

$X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$,

$B = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$.

При этом считается, что количество неизвестных больше количества уравнений, т. е. n>m. Общее решение системы (1.1) зависит от некоторых (n-m) свободных переменных вектора *X*.

Общее решение системы уравнений находится следующим образом: среди столбцов матрицы *A* находятся такие, которые образуют квадратную матрицу *A]* с ненулевым определителем. Тогда систему (1.2) можно записать в виде:

$$A_1 * X_1 + A_2 * X_2 = B \tag{1.3}$$

откуда

$$X_1 = A_1^{-1} \times B - A_1^{-1} \times A_2 \times X_1, \tag{1.4}$$

где A_1 - квадратная подматрица матрицы *A* с ненулевым определителем; A_2 - дополнение матрицы A_1 в матрице А; X_1 - вектор переменных *X* соответствующих столбцам матрицы A_1; X_2 - вектор переменных *X* соответствующих столбцам матрицы A_2.

Переменные X_1 называются *основными* или *базисными,* а переменные X_2 - *свободными.* Любое частное решение получается из общего путем придания конкретных значений свободным переменным.

Для получения общего решения с помощью Excel надо найти с помощью функции МОПР квадратную подматрицу A_1 матрицы *A,* имеющую ненулевой определитель, затем с помощью функции МОБР найти обратную матрицу для матрицы A_1, и с помощью функции МУМНОЖ провести вычисления согласно формуле (1.4).

Без использования компьютера для приведения системы (1.2) к виду (1.4) применяют преобразования Гаусса:

1. Формируют расширенную матрицу B добавлением к матрице коэффициентов системы A справа от вектора правой части системы уравнений.

2. Умножают (делят) любую строку матрицы B на ненулевое число.

3. Прибавляют (вычитают) из любой строки другую строку, умноженную на ненулевое число.

4. Вычеркивают нулевую строку матрицы B.

5. Если в результате преобразования получится строка, в которой только элемент правой части не будет равен нулю, а остальные элементы строки - нули, то система уравнений не имеет решения.

Целью преобразований является получение матрицы B, у которой будут единичными столбцы, отвечающие базисным переменным.

Пример 4. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_1 + 2X_2 + 2X_3 + 22X_4 - 4X_5 = 11, \\ &\mathrm{X}_1 + 2X_2 + X_3 + 16X_4 - 4X_5 = 9, \\ &\mathrm{X}_1 + X_2 + X_3 + 12X_4 - 2X_5 = 6. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 22 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 16 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 12 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Матрица А системы уравнений (1.5) равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 22 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 16 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 12 & -2 \end{pmatrix}.$$

С помощью функции МОПР находим, что подматрица A_1, образованная столбцами 1,2 и 3, имеет ненулевой определитель, равный -1. Таким образом:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 22 & -4 \\ 16 & -4 \\ 12 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{X}1 = (\mathrm{X}_1, X_2, X_3), \quad X2 = (X_4, X_5).$$

Тогда систему уравнений (1.6) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & -4 \\ 16 & -4 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Откуда находим решение:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

С помощью функции МОБР находим обратную матрицу к матрице A_1, а с помощью функции МУМНОЖ находим общее решение системы уравнений (1.5) согласно выражению (1.8).

Вычисления представлены в таблице Excel.

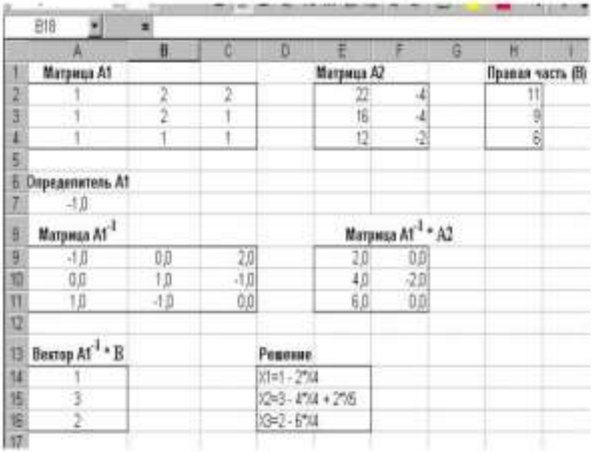


Рис. 6. Решение системы уравнений (1.5) с прямоугольной матрицей с помощью функции МОБР и МУМНОЖ

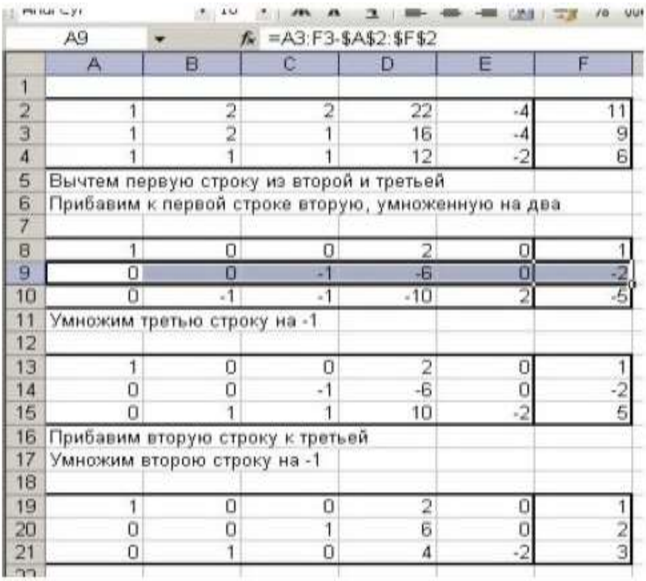
Таким образом, общее решение системы уравнение (1.5) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 1 - 2 \cdot X_4, \\
X_2 &= 3 - 4 \cdot X_4 + 2 \cdot X_5, \\
X_3 &= 2 - 6 \cdot X_4.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Переменные X_1, X_2, X_3 являются *основными* или *базисными,* переменные X_4, X_5 являются *свободными.* Любое частное решение получается из общего путем придания конкретных значений свободным переменным. Если положить $X_4 = X_5 = 0$, то получим базисное решение $X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_3 = 2$, $X_4 = 0$, $X_5 = 0$.

Система уравнений (1.5), (1.6) может быть решена и преобразованиями Гаусса. Для этого надо воспользоваться арифметическими операциями над диапазонами. Выделим диапазон результата, в него введем формулу операции над диапазонами аргументов, для получения результата в виде массива ввод завершается нажатием комбинации клавиш ***CTRL+SHIFT+ENTER.***

На рис. 7 показана последовательность преобразований Гаусса над матрицей системы уравнений (1.6).



A9 =A3:F3-$A$2:$F$2

	A	B	C	D	E	F
1						
2	1	2	2	22	-4	11
3	1	2	1	16	-4	9
4	1	1	1	12	-2	6
5	Вычтем первую строку из второй и третьей					
6	Прибавим к первой строке вторую, умноженную на два					
7						
8	1	0	0	2	0	1
9	0	0	-1	-6	0	-2
10	0	-1	-1	-10	2	-5
11	Умножим третью строку на -1					
12						
13	1	0	0	2	0	1
14	0	0	-1	-6	0	-2
15	0	1	1	10	-2	5
16	Прибавим вторую строку к третьей					
17	Умножим второю строку на -1					
18						
19	1	0	0	2	0	1
20	0	0	1	6	0	2
21	0	1	0	4	-2	3

Рис. 7. Решение системы уравнений преобразованиями Гаусса

В результате получается решение системы (1.5) в виде (1.9).

Метод Гаусса является общим методом решения систем уравнений с прямоугольной матрицей. Он позволяет установить неразрешимость системы уравнений и решить систему уравнений, в которой количество уравнений больше количества неизвестных.

2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА (МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК»)

Межотраслевой баланс (МОБ) это макроэкономическая модель, отражающая производство и потребление продукции в отраслях и секторах экономики в стоимостном выражении. МОБ отражает межотраслевые поставки и конечное потребление продукции произведенной в отраслях в течение года. Межотраслевой баланс представляется в виде табл. 1.

Таблица 1

Межотраслевой баланс производства и потребления продукции

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт Y	Валовый продукт X
	1	2	N		
1 2 … n	X_{11} X_{21} ... X_{n1}	X_{12} X_{22} ... X_{n2}	X_{1n} X_{22} ... X_{nn}	Y_1 Y_2 ... Y_n	X_1 X_2 ... X_n
Добавленная стоимость	Z_1	Z_2	Z_n	$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

В табл. 2.1 представлены объемы производства продукции n отраслей $X_1, X_2,...,X_n$; $X,$ - стоимость продукции i-й отрасли, потребленное в j-й отрасли в течение года; Y_t - объем потребления продукции i-й отрасли в непроизводственной сфере; *Z,* - добавленная стоимость в *j*-й отрасли, которая включает оплату труда, чистый доход, амортизацию.

В межотраслевом балансе имеют место следующие балансовые соотношения:

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i, \\ Z_j &= X_j - \sum_{i=1}^{n} X_{ij}, \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i &= \sum_{j=1}^{n} Z_j, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i &= \sum_{j=1}^{n} X_j. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Основу экономико-математической модели МОБ составляет матрица коэффициентов прямых затрат $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})$.

Коэффициенты прямых затрат определяются по формуле:

$$a_{ij} = X_{ij} / X_j, i, j = 1,2,...,n. \qquad (2.2)$$

Эти коэффициенты показывают, какое количество продукции i-ой отрасли необходимо для производства единицы валовой продукции j-ой отрасли.

Предполагается, что коэффициенты прямых затрат отражают технологию производства и не зависят от переменных X_{ij}, X_i, Y_j. . Из (2.2) следует, что

$$X_{ij} = a_{ij} X_j \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) получаем:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \qquad (2.4)$$

или в матричном виде:

$$X=AX+Y \qquad (2.5)$$

Откуда следует:

$$\begin{aligned} Y &= (E - A)X, \\ X &= (E - A)^{-1} Y \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Матрица $B = (E - A)^{-1}$ называется матрицей коэффициентов полных затрат, для ее существования необходимо, чтобы определитель матрицы $(E\text{-}A)$ не был равен нулю.

Система уравнений (2.4), (2.5), (2.6) называется статической моделью Леонтьева. С помощью этой системы можно решать три типа задач (рис. 2.1):

1) по заданным величинам валовых выпусков X_j надо определить объемы конечной продукции каждой отрасли Y и построить таблицу межотраслевого баланса;

2) по заданным величинам конечной продукции Yi надо определить величинам валовых выпусков X_j каждой отрасли и построить таблицу межотраслевого баланса;

3) для нескольких отраслей заданы величины валовых выпусков X_j, а для остальных отраслей заданы величины конечной продукции надо определить объемы конечной продукции первых отраслей и валовых выпусков вторых отраслей и построить таблицу межотраслевого баланса;

4) по матрице прямых затрат A, найти матрицу полных затрат B.

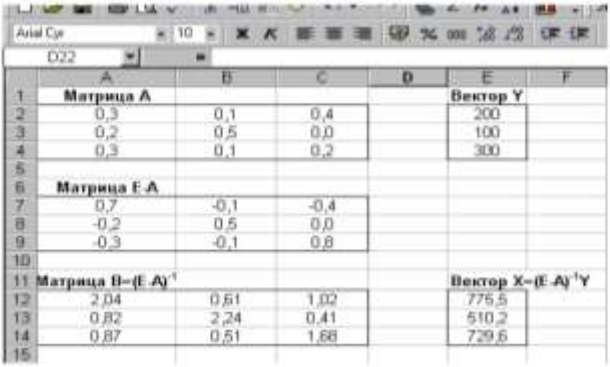
Пример. Даны матрица коэффициентов прямых затрат A и вектор конечной продукции Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Требуется определить:

1) Матрицу коэффициентов полных затрат $B=(E\text{-}A)^{-1}$.
2) Вектор валовых выпусков $X=(Xj)$.

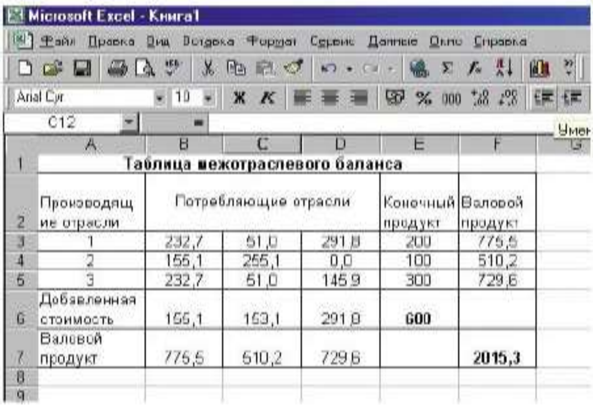
Построить таблицу межотраслевого баланса.



	A	B	C	D	E	F
1	Матрица A				Вектор Y	
2	0,3	0,1	0,4		200	
3	0,2	0,5	0,0		100	
4	0,3	0,1	0,2		300	
5						
6	Матрица E-A					
7	0,7	-0,1	-0,4			
8	-0,2	0,5	0,0			
9	-0,3	-0,1	0,8			
10						
11	Матрица B=(E-A)$^{-1}$				Вектор X=(E-A)$^{-1}$Y	
12	2,04	0,61	1,02		775,5	
13	0,82	2,24	0,41		510,2	
14	0,87	0,51	1,68		729,6	
15						

Рис. 8. Решение примера 2.1 по модели межотраслевого баланса

По полученным значениям с помощью соотношений (2.3) и (2.1) строится таблица межотраслевого баланса (рис. 2.2).



	A	B	C	D	E	F
1	Таблица межотраслевого баланса					
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой продукт
3	1	232,7	51,0	291,8	200	775,5
4	2	155,1	255,1	0,0	100	510,2
5	3	232,7	51,0	145,9	300	729,6
6	Добавленная стоимость	155,1	153,1	291,8	**600**	
7	Валовой продукт	775,5	510,2	729,6		**2015,3**

Рис. 9 . Таблица межотраслевого баланса для примера 2.1

В ячейках таблицы находятся значения показателей МОБ вычисляемые по формулам (2.1), (2.3).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для решения оптимизационных задач в среде Excel применяется команда «Поиск решения», которая находится в меню «Сервис». Если ее здесь нет, то в меню «Сервис» надо выбрать раздел «Надстройки» и в списке надстроек установить флажок для элемента «Поиск решения». Если этот элемент отсутствует, то необходима полная инсталляция пакета Excel.

Задача линейного программирования (ЗЛП) в произвольной форме имеет следующий вид:

Выражение называется *целевой функцией (или критерием)* задачи, величины (X_1, X_2, X_n) − переменные задачи. Система неравенств в задаче (3.1) определяет *область допустимых значений (планов) задачи* D, которая имеет форму выпуклого многогранника.

Неравенства и равенства в задаче (3.1) называются *ограничениями.* Каждое неравенство определяет полупространство, а равенство − плоскость в пространстве переменных ($X_1, X_2, \ldots, X_n$).

Решение задачи (3.1) называется *оптимальным решением (или оптимальным планом)* и обозначается как $X^* = (X^*_1, X^*_2, \ldots, X^*_n)$. Оптимальные решения лежат на границе области D. Если область D ограничена, то ЗЛП имеет либо единственное, либо бесконечно много решений. Если решение единственно, то оно совпадает с одной из вершин многогранника D. Если ограничения несовместны, или целевая функция неограниченна, то задача (3.1) не имеет решения. Если область D не ограничена, то решение может существовать либо быть неограниченным.

Всякая задача на минимум может быть сведена к задаче на максимум и, наоборот, умножением целевой функции на -1. Оптимальный план задачи при этом не изменится, а значение целевой функции изменит знак. После решения надо снова изменить знак целевой функции.

В следующем примере дается экономическая постановка задачи линейного программирования.

Пример. Необходимо найти месячный оптимальный производственный план предприятия, выпускающего четыре вида продукции (П1, П2, П3, П4). Цены реализации каждого вида продукции известны и нет ограничения на объемы реализации.

Оптимальным планом предприятия будем называть план, обеспечивающий максимальную прибыль при заданных ограничениях на имеющиеся ресурсы. Задача может быть поставлена также на минимум затрат.

В табл. 2 записываются необходимые для задачи данные: нормативы затрат ресурсов на производство единицы продукции, прибыль от реализации единицы продукции и запасы каждого вида ресурса. Если в последней строке задать цены реализации, то задача будет поставлена на максимум выручки от реализации продукции.

Таблица 2

Наименование ресурса	Нормативы затрат				Запасы ресурсов, тыс. ед.
	П1	П2	П3	П4	
Труд, чел./дней	0,6	1	2	2,5	20
Сырье, т.	3	5	2	3	50
Оборудование, станко/ч	5	4	3	4	45
Прибыль на ед. продукции, тыс. руб.	20	25	40	50	

Экономико-математическая модель задачи имеет вид:

$$\max Z = 20x_1 + 25x_2 + 40x_3 + 50x_4 ;$$

$$0{,}6x_1 + x_2 + 2x_3 + 2{,}5x_4 \le 20 ;$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 50 ;$$

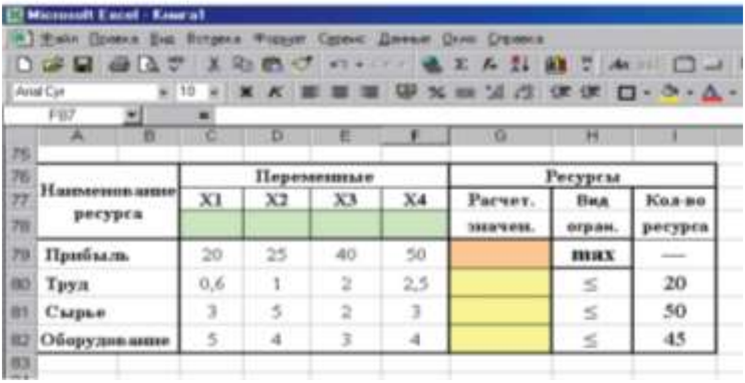
$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 45 ;$$

где переменные (x_1, x_2, x_3, x_4) обозначают объемы производства соответствующих видов продукции (тыс.т), Z - выручка от реализации продукции при заданных ценах (20, 25, 40, 50) в тыс.руб. и заданных ограничениях на используемые ресурсы труда, сырья и оборудования (20, 50, 45) в ед.

Решение задачи осуществляется при помощи пакета EXCEL с помощью функции **«Поиск решения».**

Решение задачи состоит из следующих шагов:

1. Создать форму с данными задачи (3.1) (рис. 10).



Наименование ресурса	Переменные				Ресурсы		
	X1	X2	X3	X4	Расчет. значен.	Вид огран.	Кол-во ресурса
Прибыль	20	25	40	50		max	—
Труд	0,6	1	2	2,5		≤	20
Сырье	3	5	2	3		≤	50
Оборудование	5	4	3	4		≤	45

Рис. 10. Таблица EXCEL решения задачи линейного программирования с помощью функции **«Поиск решения»**

2. Осуществить абсолютную адресацию к блоку (диапазону) переменных ***(X_1, X_2, X_3, X_4)***, которому надо дать уникальное имя (например «Переменные») (рис. 11.).

Чтобы не повторять имена, надо щелкнуть по кнопке рядом с полем для ввода имени блока. После этого увидите список имен. Можно щелчком по имени в этом списке переместиться к соответствующему блоку, на каком бы листе книги он не находился.

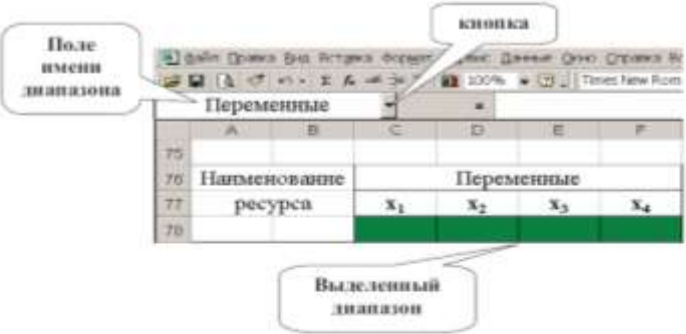


Рис. 11. Ввод наименования диапазона

В ячейки, выделенные цветом, надо ввести формулы для вычисления значений прибыли и используемых ресурсов, умножая и складывая диапазон **«Переменные»** с коэффициентами, находящимися в соответствующих строках. Для этой цели используется функция СУМПРОИЗВ (сумма произведений).

3. Вычислить значения прибыли. Выделим ячейку G79 (рис. 3.3), в которую нужно занести расчетное значение прибыли. Нажмем вставку функции **(кнопка f_x)** и далее выберем функцию ***СУММПРОИЗВ*** среди математических функций пакета.

В качестве первого аргумента выделим указателем диапазон переменных *(X_j, X_2, X_3, X_4)*. Имя блока **(«Переменные»)** будет вставлено автоматически. Щелкнем по полю для ввода второго массива и выделим блок ячеек, содержащий значения прибыли. В этом случае в качестве второго аргумента будут вставлены адреса соответствующих ячеек (См. рис. 12). Закончим ввод формулы нажатием на кнопку ОК.

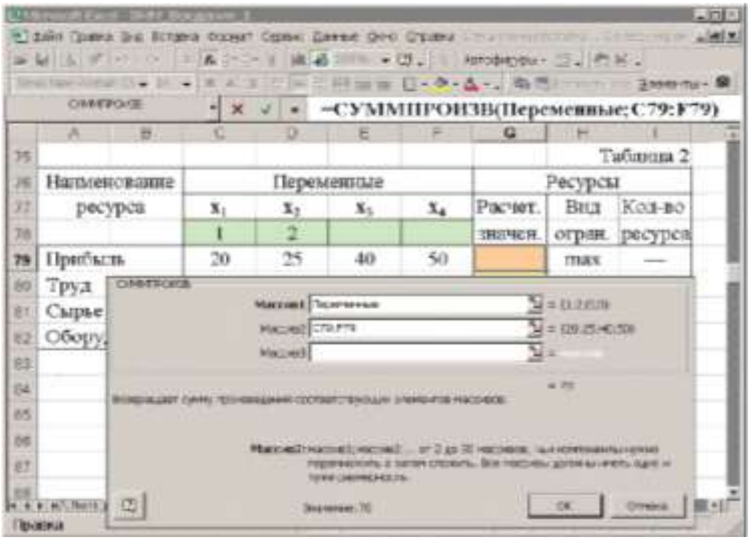


Рис. 12. Вычисление значения прибыли

Для контроля правильность формулы в диапазон переменных (x_1, x_2, x_3, x_4) надо ввести произвольные значения например x_1=1, x_2=2, тогда в ячейке прибыли должно получиться значение 70.

4. Вычислить значения ресурсов. Чтобы записать формулы для вычисления расчетных значений расхода ресурсов, надо скопировать формулу для расчета прибыли в ячейки, предназначенные для расчета ресурсов.

Клавишей «мышка» протащим указатель по заполняемым ячейкам. Адреса ячеек со значениями прибыли (строка 79) автоматически будут заменены на адреса ячеек со значениями коэффициентов расхода ресурсов.

Теперь для любых назначенных нами значений переменных *(x_1, x_2, x_3, x_4)* (в нашем случае x;=1, x_2=2) в соответствующих ячейках можно видеть значения прибыли и объемы затраченных ресурсов.

Рис. 13. Вычисление значений расхода ресурсов

5. Решить задачу оптимизации. В пункте меню **Сервис** выберите команду **«Поиск решения».** В поле **Установить целевую ячейку** команды **«Поиск решения»** выделите ячейку со значением целевой функции модели (рис. 14.)

Если эта команда уже использовалась, то ее входные поля могут быть заполненными. Надо заменить или удалить устаревшие поля. Чтобы максимизировать (минимизировать) значение целевой ячейки, установите соответствующее положение переключателя (см. рис. 14.) В поле **Изменение ячейки** введите имена или адреса переменных модели, выделяя блок этих ячеек («Переменные»). Если они несмежные, то удерживайте в нажатом положении клавишу Ctrl. Имя **«Переменные»** блока будет вставлено автоматически.

Щелкните по полю **Ограничения,** после чего введите ограничения, накладываемые на решение задачи. Для этого нажмите кнопку **Добавить.** В поле **Ссылка на ячейку** выберите ячейку или диапазон ячеек на значения которых накладываются ограничения (рис. 15).

В примере левые части ограничений это - блок ячеек **\$G\$80:\$G\$82,** а правые части ограничений соответственно **\$I\$80:\$I\$82.**

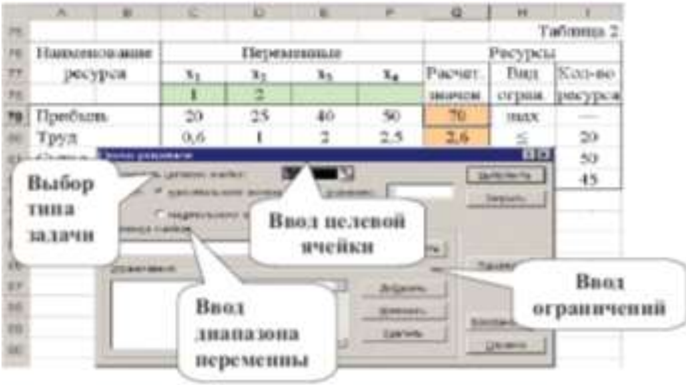


Рис. 14. Использование команды **Поиск решения**

Рис. 15. Ввод ограничений при нажатии кнопки **Добавить**

Для ограничений одного вида при вводе левых и правых частей можно ввести сразу весь диапазон, выделяя соответствующие ячейки.

Выберите требуемый вид ограничения (<=, =, >=, цел., двоич.) из раскрывающегося списка, который находится между ссылкой и ограничением. (Если выбрано "цел." или "двоич.", в поле **Ограничение** появятся значения типа "целого" или "двоичного" типа. Последнее означает, что результат может быть только нулем или единицей).

В поле для величины ограничения можно вводить и число, но тогда не так удобно анализировать модель на экране.

Чтобы ввести ограничение и приступить к набору нового, нажмите кнопку **Добавить,** а чтобы вернуться в диалоговое окно **Поиск решения,** нажмите кнопку OK. В окне **Параметры поиска решения** (рис. 3.7) для решения линейных задач надо установить флажки **Линейная модель** и **Неотрицательные значения.** Остальные величины, которые определяют точность и сходимость решения, как правило, нет необходимости изменять.

Рис. 16. Ввод параметров поиска решения

Нажмем кнопку OK и вернемся в окно команды **Поиск решения.** Затем нажмем кнопку **Выполнить,** и, если все сделано правильно, то в таблице данных получим результаты решения задачи (рис. 17.), где можно задать тип отчета.

Рис. 17. Результаты решения задачи и выбор типа отчета

Оптимальный план задачи ***(x_1*= 0, x_2*= 6, x_3*= 7, x_4*= 0)*** единиц. Максимальная прибыль равна 430 ед. Ресурсы использованы следующим образом: труд полностью − 20 ед., сырье не полностью − 44 ед., оборудование − полностью − 45 ед.

Анализ устойчивости решения

Рассмотрим отчет по устойчивости (см. рис. 11). Этот отчет содержит сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле для целевой функции и в формулах ограничений. Поясним смысл столбцов табл. 3.

Таблица 3

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результат-значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффиц.	Допустимое	
					увелич.	уменьш.
$C$78	X_1	0	-0,2	20	0,20	1E+30
$D$78	X_2	6	0	25	28,33	0,12
$E$78	X_3	7	0	40	0,38	0,42
$F$78	X_4	0	-0,5	50	0,50	1E+30
Ячейка	Имя	Результат-значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффиц.	Допустимое	
					увелич.	уменьш.
$G$80	Труд	20	17	20	10	4,29
$G$81	Сырье	45	0	50	1E+30	6
$G$82	Оборуд.	45	2	45	3,75	15

Нормированная стоимость показывает изменение целевой функции при увеличении соответствующей переменной на единицу. Например, если ввести $x_4 = 1$, то x_2 и x_3 станут меньше, а величина целевой функции изменится на -0,5.

Допустимое увеличение и уменьшение определяют интервал изменений коэффициентов целевой функции, внутри которого сохраняются значения переменных оптимального плана.

В разделе отчета **«Ограничения»** теневые цены это двойственные оценки ресурсов, а **Допустимое увеличение и уменьшение** показывают допустимые диапазоны изменения правых частей ограничений, в пределах которых в оптимальный план входят те же переменные, хотя возможно и с другими значениями.

Любое увеличение ресурса сырья, поскольку этот ресурс недефицитный, (величина 1Е+30 выполняет роль бесконечности), не влияет на оптимальный план, однако уменьшение этого ресурса более чем на 6 единиц приведет к изменению структуры решения. При увеличении ресурса труда в оптимальном плане будет возрастать переменная X_3 и убывать X_2, но если прирост превысит 10 ед., то останется только переменная X_3. А при уменьшении ресурса труда более чем на 4,29 в оптимальный план войдет переменная X_1.

Такой отчет не создается для целочисленных моделей. В случае нелинейных моделей, которые будут рассмотрены в дальнейшем, отчет содержит данные для градиентов и множителей Лагранжа.

Изменение условий задачи

Пусть необходимо учесть ограничения на производственные мощности при производстве каждого вида продукции, иначе говоря, требуется предусмотреть возможность задания максимального значения для каждой переменной модели.

Чтобы удобно разместить в таблице величины задаваемых границ, вставим две строки перед строкой со значениями функционала. Для этого выделим ее (щелчком **левой клавиши мыши** по номеру строки) и дважды используем раздел меню **Вставка** пункт **Строки.** Назовем эти строки "Минимум" и "Максимум". В задаче введены только ограничения «Максимум».

Для простоты введем ограничения сразу по всем переменным, принимая в качестве верхней границы некоторое значение, например 6 единиц (рис. 18). Можно задать и разные значения ограничений для каждой переменной. В этой задаче диапазону переменных надо дать новое имя **«Переменные1»,** чтобы сохранить решение предыдущей задачи.

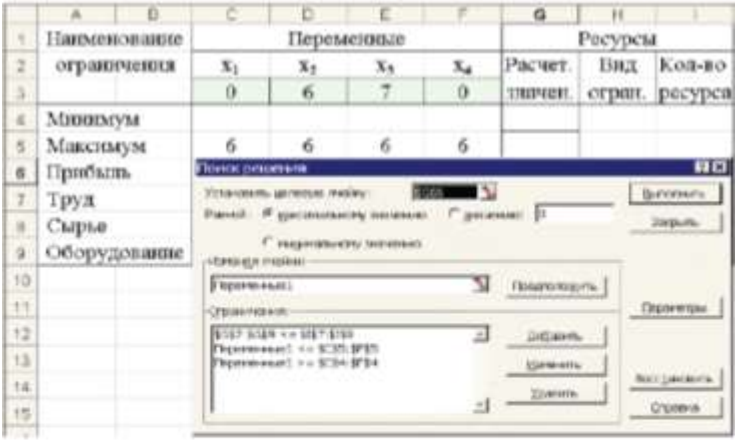


Рис. 18. Введение новых ограничений

Из рис. 18 видно, что новые ограничения заданы в виде диапазонов. Результаты оптимизации показывают уменьшение прибыли, что естественно, так как любые дополнительные ограничения могут только уменьшать область допустимых решений (рис. 19). Кроме того, в оптимальный план вошел новый продукт X_4=0,833.

Наименование ограничения	Переменные				Ресурсы		
	x_1	x_2	x_3	x_4	Расчет. значен.	Вид огран.	Кол-во ресурса
	0	5,9167	6	0,8333			
Минимум							
Максимум	6	6	6	6			
Прибыль	20	25	40	50	429,58	max	—
Труд	0,6	1	2	2,5	20	≤	20
Сырье	3	5	2	3	44,083	≤	50
Оборудование	5	4	3	4	45	≤	45

Рис. 19. Оптимальное решение задачи с дополнительными ограничениями.

Предположим, что ограничений по реализации нет, а минимальные объемы производства заданы и равны 3 по каждой переменной (они могут быть и разными). В этом случае команда **Поиск решения** не может найти решения (рис. 20.).

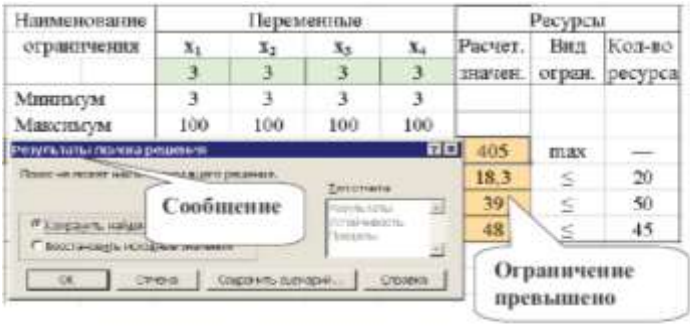


Рис. 20. Оптимальное решение задачи с дополнительными ограничениями

В этом случае надо ослабить требования к минимальным объемам производства или привлечь дополнительные объемы ресурсов.

Для определения необходимых дополнительных объемов ресурсов задача решается введением дополнительных переменных, соответствующих ограничениям задачи, которым в целевой функции соответствуют отрицательные коэффициенты, т.е. в обычных условиях их использование будет убыточным. Такие переменные называются ***штрафными.***

Введем отрицательные цены новых переменных − 10 ед. (рис. 21.), что означает, что за их привлечение надо платить.

Диапазон переменных $x_1,x_2...,x_7$ должен получить новое имя, и формулы для расчетных значений прибыли и используемых ресурсов исправлены.

Наименование ограничения	Переменные				Штрафные переменные			Ресурсы		
					Труд	Сырье	Оборуд.			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Расчет. значен.	Вид огран.	Кол-во ресурса
	3	3	3,85	3	0	0	5,55			
Минимум	3	3	3	3						
Максимум	100	100	100	100						
Прибыль	20	25	40	50	-10	-10	-10	383,5	max	—
Труд	0,6	1	2	2,5	-1			20	≤	20
Сырье	3	5	2	3		-1		40,7	≤	50
Оборудование	5	4	3	4			-1	45	≤	45

Рис. 21. Введение штрафных переменных

Результаты расчета показывают, что надо привлечь дополнительное оборудование в количестве 5,55 ед. (рис. 21).

Таким образом, если 10 − цена за оплату дополнительной единицы оборудования, то найдено оптимальное решение задачи. Если же надо определить, сколько и каких ресурсов не хватает, то достаточно установить коэффициенты при штрафных переменных, например по -99.

Также можно решать и другие задачи. Например, учесть взаимосвязи между объемами реализуемой продукции, определять динамику изменения объемов производства при изменении располагаемых объемов ресурсов и т.д.

4. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Транспортная задача является специальным типом задач линейного программирования. Экономическая постановка этой задачи следующая: имеется m поставщиков и n потребителей некоторой продукции. Заданы тарифы (стоимость) перевозок единицы продукции от поставщиков к потребителям, известны объемы запасов у поставщиков и потребности каждого потребителя в продукции. Требуется составить план поставок продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной. Математическая постановка этой задачи имеет вид

Здесь X_{ij}– объем; c_{ij} − тариф поставки продукции от i-го поставщика к j-му потребителю; b_j - потребности потребителей в продукции; a_i - запасы продукции у поставщиков.

Исходные данные транспортной задачи оформляются в виде табл.4, где заданы мощности поставщиков и потребности потребителей, а также транспортные затраты на перевозку единицы продукции от поставщиков к потребителям.

Таблица 4

Исходные данные транспортной задачи

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	250	100	150	50
80	6	6	1	4
320	8	30	6	5
100	5	4	3	30
50	9	9	9	9

При решении транспортной задачи в системе Excel исходные данные записываются в две таблицы и формируется вычисляемая ячейка значения целевой функции. В изменяемую таблицу **Объемы перевозок** первоначально для контроля вводятся единицы. В таблицу исходных данных задачи вводятся данные табл. 4.

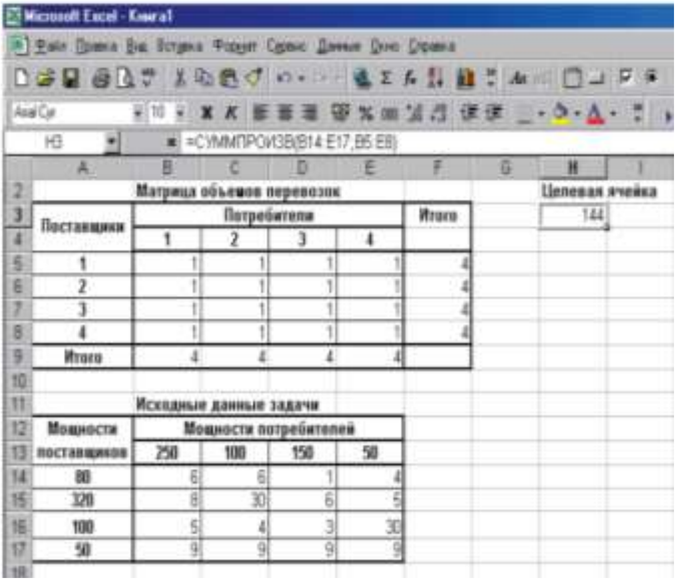


Рис. 22. Таблицы Excel для решения транспортной задачи

В целевую ячейку записана функция СУМПРОИЗ(B14:E17;B5:E8), которая вычисляет совокупные затраты на перевозку грузов от поставщиков к потребителям. В ячейках **Итого** помещены формулы сумм объемов перевозок по строкам и столбцам, затем вызывается функция **Поиск решения** и осуществляется ввод данных в окно функции (рис.23).

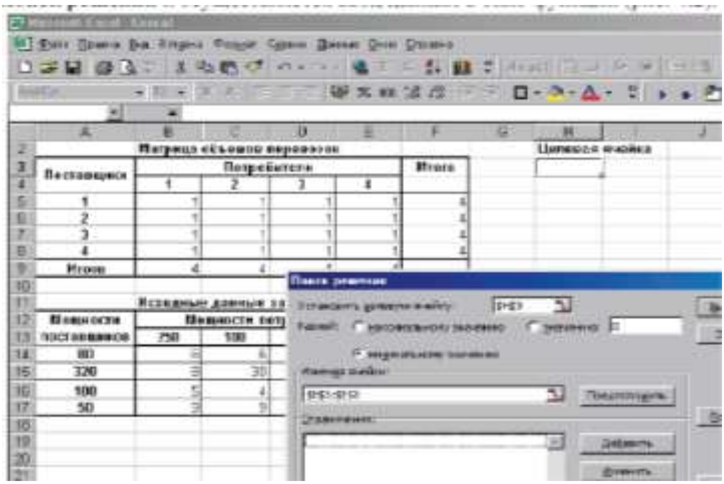


Рис. 23. Вводных данных в окно функции **Поиск решения** при решении транспортной задачи

Затем вводятся ограничения по мощностям поставщиков и потребителей.

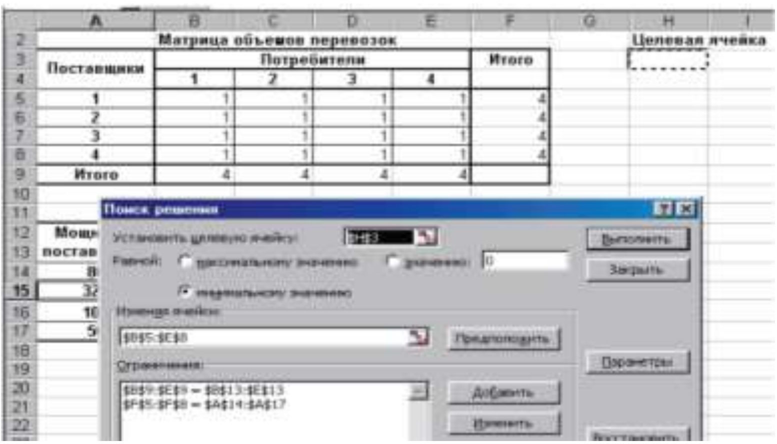


Рис. 24. Ввод ограничений транспортной задачи

В окне **Параметры поиска решения** устанавливаются параметры решения задачи (рис. 25). После этого выполняется возврат в окно **Поиск решения,** где нажимается кнопка **Выполнить** (см. рис. 26).

Анализ содержания таблицы позволяет сделать вывод, что минимальные затраты на перевозку всех грузов равны 3200 ед. Объемы перевозок отражены в таблице **Матрица объемов перевозок** на том же рисунке. Таким образом, решение найдено.

Рис. 25. Ввод параметров решения транспортной задачи

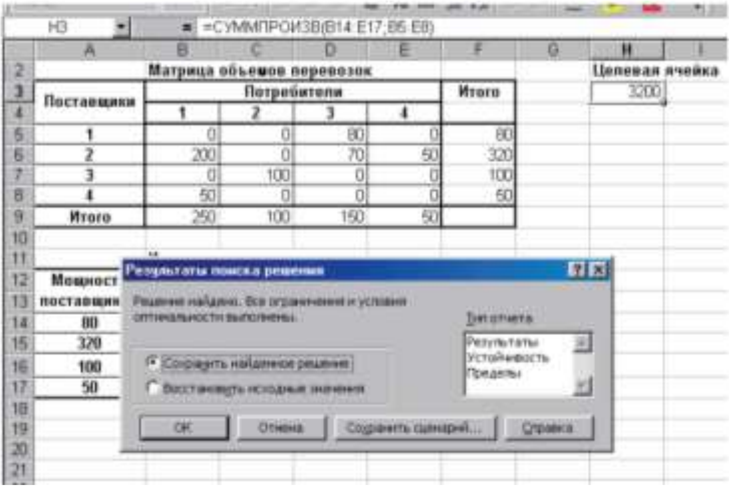


Рис. 26. Решение транспортной задачи

5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Для решения сложных статистических задач в Excel применяется команда «Анализ данных», которая также находится в меню «Сервис». Если ее здесь нет, то в меню «Сервис» надо выбрать раздел «Надстройки» и в списке надстроек установить флажок для элемента «Анализ данных ». Если этот элемент отсутствует, то необходима полная инсталляция пакета Excel.

Корреляционный анализ используется для определения тесноты связи между исследуемыми показателями. Такая задача возникает, когда необходимо оценить степень влияния некоторых факторов на исследуемый показатель.

Постановка задачи состоит в следующем. Пусть имеется некоторый показатель *Y*. На основе содержательного экономического анализа производится отбор факторов *X*, которые влияют на исследуемый показатель. Необходимо на основе наблюдаемых значений (временных рядов) показателей *Y* и *X* определить уровень (величину) влияния каждого фактора *X* на показатель *Y*.

Для оценки влияния факторов используются коэффициенты корреляции между показателями *Y* и *X*. Для получения надежных оценок должно выполняться следующее условие: $m \leq n/3$, где m - количество факторов, n - количество наблюдений, т. е. длина временного ряда [1].

Значения наблюдаемых переменных *Y*и *X* записываются в табл. 5.

Таблица 5

Исходные данные для корреляционного анализа

№ п/п	Y	X_1	X_2	...	X_m
1	Y_1	X_{11}	X_{12}		X_{1m}
...	...	...	...	...	...
n	Y_n	Y_{1n}	X_{2n}	...	X_{nm}

Коэффициенты корреляции между показателями определяются по формулам:

Коэффициенты корреляции заносятся в таблицу 6.

Таблица 6

Матрица коэффициентов корреляции между показателями Y и X

№ п/п	Y	X_1	X_2	...	X_m
Y	1	$R_{y\,x1}$	$R_{y\,x2}$	...	$R_{y\,xm}$
X_1	$R_{x1\,y}$	1	$R_{x1\,x2}$	...	
X_2	$R_{x2\,y}$	$R_{x2\,x1}$	1	...	$R_{x2\,xm}$
...	...	...	...	...	...
X_n	$R_{xn\,y}$	$R_{xn\,x1}$	$R_{xn\,x2}$	...	1

Значения коэффициентов корреляции лежат в интервале [-1,1]. Положительное значение коэффициента свидетельствует о положительной связи между показателями, т.е. при увеличении одного из показателей второй показатель также статистически возрастает. Отрицательное значение коэффициента свидетельствует об отрицательной связи между показателями, т. е. при увеличении одного показателя второй статистически уменьшается. Чем ближе абсолютное значение коэффициента к 1, тем теснее связь между показателями.

Связь считается достаточно сильной, если коэффициент корреляции по абсолютной величине больше 0,7, и слабой, если меньше 0,4. Если значение коэффициента равно нулю, то связь между показателями отсутствует. Этот коэффициент дает объективную статистическую оценку тесноты связи между показателями.

Значимость коэффициента корреляции определяется с помощью t-критерия Стьюдента:

Вычисленное по этой формуле значение сравнивается с критическим табличным значением t-критерия, которое берется с учетом заданного уровня значимости $a = 0,05$ и числа степеней свободы (n-2). Если $t_{набл} > t_{кр}$, то значение коэффициента корреляции считается значимым.

В факторную модель показателя *Y* относительно факторов *X* включаются только те факторы, связь которых с переменной *Y* является сильной. Кроме того, в модель включают факторы *X*, между которыми нет мультиколлинеарности, т.е. у которых $R_{xx} < 0,8$.

С помощью системы Excel решение этой задачи показано следующемна примере.

Пример 1. Определить степень влияния на объем реализации продукции расходов на рекламу, цены и времени.

В таблицу Excel вводятся исходные данные. Для решения этой задачи с помощью системы Excel применяется команда «Анализ данных...», которая находится в меню «Сервис». В команде выбирается функция «Корреляция».

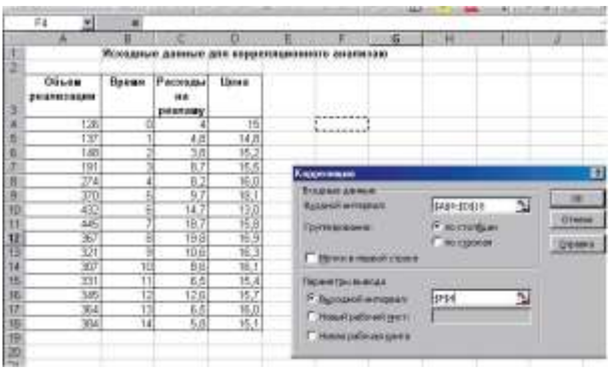


Рис. 27. Использование команды **Анализ данных** для построения корреляционной матрицы

После нажатия кнопки ОК определяется корреляционная матрица рассматриваемых показателей.

F13

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Исходные данные для корреляционного анализаю								
2										
3	Объем реализации	Время	Расходы на рекламу	Цена			Корреляционная матрица			
4	126	0	4	15			Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3	Столбец 4
5	137	1	4,8	14,8		Столбец 1	1			
6	148	2	3,8	15,2		Столбец 2	0,706022848	1		
7	191	3	8,7	15,5		Столбец 3	0,680041393	0,211671473	1	
8	274	4	8,2	16,0		Столбец 4	0,147956168	0,152672467	0,167370442	1
9	370	5	9,7	18,1						
10	432	6	14,7	13,0						
11	445	7	18,7	15,8						

Рис. 28. Корреляционная матрица для данных примера 6.1

Из корреляционной матрицы следует, что на объем реализации наибольшее влияние оказывают время (коэффициент корреляции равен 0,706) и расходы на рекламу (коэффициент корреляции равен 0,68). Цена в рассматриваемом интервале изменения практически не влияет на объем реализации (коэффициент корреляции равен 0,148). Из корреляционной матрицы также следует, что между факторами отсутствует мультиколлинеарность.

В данном примере, таким образом, необходимо рассматривать влияние на объемы реализации только времени и расходов на рекламу.

6. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Основная задача, которая решается с помощью регрессионного анализа - построение статистических моделей экономических процессов на основе наблюдаемых значений экономических показателей. Такие модели представляют собой математические соотношения между показателями объекта.

Задача построения простой регрессионной модели ставится следующим образом. Есть два экономических показателя X и Y, характеризующих экономический объект. Показатель Y называется объясняемым (выходным или эндогенным), показатель X - объясняющим (входным, фактором или экзогенным).

Пример 1. Пусть Y - рентабельность продукции, X - уровень инфляции (или курс рубля) за месяц (квартал, год).

Имеется ряд наблюдаемых значений показателей (Y, X), полученных либо:

1) в разные периоды времени для одного объекта;
2) в один период времени для разных однотипных объектов.

Данные сведены в таблицу:

Таблица 7

№	1	2	3	…	n
Показатель X	X_1	X_2	X_3	...	X_n
Показатель Y	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_n

В первом случае значения (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots n$ называются временными рядами, n - количество наблюдений, во втором случае -пространственными наблюдениями.

По значениям табл. 7 строится график, называемый корреляционным полем:

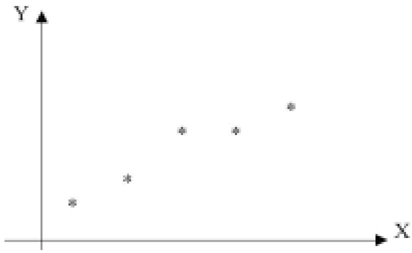


Рис. 29. Корреляционное поле

Если между показателями X и Y нет функциональной зависимости, то предполагается, что связь между X и Y выражается стохастической моделью вида:

$$Y = f(X) + U_t, \tag{6.1}$$

Где $f\ (x)$ - некоторая функция, выражающая зависимость переменной Y от фактора X, а U_t - случайная функция, характеризующая влияние неучтенных факторов, t - время наблюдения.

Обычно считают, что U_t, нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием $M(U_t)=0$, постоянной дисперсией $D(U_t)=const$ и ковариацией $cov(U_t,U_t+s)=0,\ s>0$. В этом случае уравнение

$$\hat{Y} = f(X) \tag{6.2}$$

называется уравнением *простой регрессии,* а функция *f(X)* - *функцией регрессии.*

Если *f(X)* - линейная функция то уравнение (6.2) примет вид:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X \tag{6.3}$$

и называется уравнением *простой (однофакторной) линейной регрессии.* Если *f(X)* - нелинейная функция, то уравнение (6.2) называется уравнением *нелинейной регрессии.*

При рассмотрении модели (6.3) коэффициенты a_0 и a_1 выбирают так, чтобы функция (6.3) наилучшим (в некотором смысле) образом приближала значения из табл. 7.

Общепринятым методом оценки коэффициентов модели (6.3) является метод наименьших квадратов (МНК), при котором коэффициенты a_0 и a_1 определяются из задачи:

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (a_0 + a_1 X))^2 \tag{6.4}$$

Где Y_i, X_i – значения из таблицы 6.1.

Величины

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (a_0 + a_1 X_i), \tag{6.5}$$

i=1,2,…,n.

называются *остатками регрессии,* они показывают на какую величину регрессия $\hat{Y}_i$ отличается от реального значения Y_i.

Из (6.4) следует, что у линейной регрессии, определяемой по МНК, значение суммы квадратов остатков минимально.

Если ввести выборочные средние:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\overline{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i, \quad \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \tag{6.6}$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}),$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

То из (6.4) следует, что:

$$a_0 = \overline{Y} - a_1\overline{X},$$
$$a_1 = \frac{\overline{XY} - (\overline{X})(\overline{Y})}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}. \qquad (6.7)$$

Можно показать, что:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)}. \qquad (6.8)$$

Из (6.7) видно, что решение задачи МНК существует, если $\overline{X^2} \neq (\overline{X})^2$, в противном случае линейная регрессия не может быть построена.

Коэффициенты a_0 и a_1 определенные по формулам (6.7) или (6.8), называются коэффициентами простой линейной регрессии.

График функции (6.3) наносят на корреляционном поле:

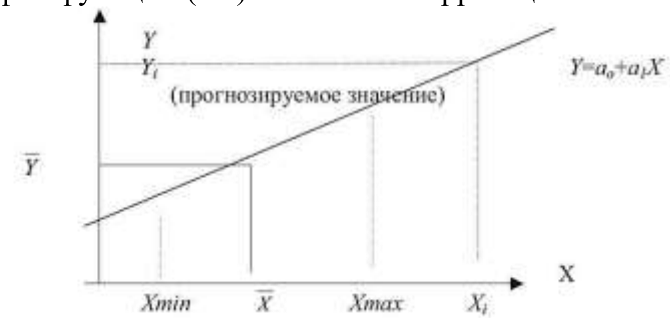


Рис. 30. График регрессии

Как видно из уравнений (6.7), средние значения показателей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ лежат на линии регрессии.

Одной из основных задач регрессионного анализа является получение *прогнозных* значений показателей *X* и Y. Если значения X_j, $j = n + 1, n + 2, \ldots, N$ являются прогнозными (ожидаемыми) значениями фактора X, то, определяемые из уравнений регрессии (6.3), значения $\hat{Y}_j$ будут соответствующими прогнозными значениями показателя *Y*.

Точность и надежность модели простой линейной регрессии

Для оценки точности и надежности модели (6.3) используется несколько критериев (называемых статистиками или статистическими характеристиками).

1. ***Коэффициент корреляции*** $\boldsymbol{r_{xy}}$ - используется для оценки тесноты связи между показателями *X* и *Y:*

$$r_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}, \tag{6.9}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}}, \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n}}.$$

Известно, что $|r_{xy}| \le 1$. При этом, чем ближе $|r_{xy}|$ к 1, тем сильнее статистическая связь между *X* и *Y*, если r_{xy}=0, то связь между *X* и *Y* отсутствует. Если r_{xy} > 0, то имеется положительная корреляция, т.е. при возрастании *X* статистически возрастает Y; если r_{xy} < 0, то имеется отрицательная - при возрастании *X* показатель *Y* статистически убывает.

Считается, что если $|r_{xy}|$>0,7 то связь между показателями *X* и *Y* высокая и можно строить простую регрессию, если r_{xy}<0,5 то связь между показателями слабая и вместо *X* необходимо выбрать другой фактор для построения простой регрессии показателя *Y,* или увеличить количество наблюдений.

2. Значимость (надежность) вычисленного значения r_{xy} определяется с помощью ***t-критерия Стьюдента.*** По наблюдаемым значениям вычисляется t- статистика:

$$t_{набл} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}(n-2)} \quad (6.10)$$

Вычисленное значение $t_{набл}$ сравнивается с критическим (табличным) значением t-критерия Стьюдента $t_{кр} = t_{табл}$ *(a,* n-2) при уровне значимости *a*=0,05 (или 0,01) (тогда уровни доверительной вероятности *p=1-a* равны 0,95 или 0,99) и числе степеней свободы (n-2), *n* - количество наблюдений.

Если $t_{набл}>t_{кр}$ то полученное значение r_{xy} считается значимым и принимается гипотеза о наличии статистической связи между показателями, иначе принимается гипотеза об отсутствии связи между показателями и надо выбрать другой показатель *X*. Обычно при *a* = 0,3 принимают $t_{кр}$=1,05 (70%-ная доверительная вероятность); при *a* = 0,05 $t_{кр}$= 1,96 (95%-ная доверительная вероятность); при *a* = 0,01 $t_{кр}$=2,65 (99%-ная доверительная вероятность).

3. ***Коэффициент детерминации R^2*** (R-квадрат) служит для оценки степени соответствия модели фактическим данным.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2} \quad (6.11)$$

Величина $\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$ называется вариацией регрессии,

а $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$ - вариацией наблюдений относительно среднего.

Здесь имеет место неравенство $0<R^2<1$. Коэффициент детерминации R^2 показывает, какую часть фактической вариации переменной *Y* составляет вариация регрессии. Если

R^2=0,85, то модель объясняет наблюдаемые значения переменных на 85%.

Чем ближе R^2 к 1, тем точнее модель линейной регрессии; если R^2>0,8 то модель линейной регрессии считается точной; если R^2<0,5, то модель является неудовлетворительной, надо строить нелинейную регрессию или выбирать другой фактор *X*.

4. Вычислить ***стандартную ошибку регрессии:***

$$SE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n-2}} \qquad (6.12)$$

5. Проверка значимости простой линейной регрессии осуществляется по ***F-критерию Фишера.*** По наблюдаемым значениям вычисляется *F*-статистика:

$$F_{набл} = \frac{R^2(n-2)}{(1-R^2)} \qquad (6.13)$$

Если вычисленное значение $F_{набл}$ больше табличного $F_{таб}$ при заданном уровне значимости 0,05 (или уровне доверительной вероятности 0,95) и числе степеней свободы (n-2), то принимается гипотеза о наличии линейной регрессии между показателями *X* и Y, иначе эта гипотеза отвергается и необходимо строить нелинейную регрессию или выбирать другой фактор *X*.

6. При уровне значимости α определяются ***доверительные интервалы коэффициентов регрессии*** по формулам:

$$\begin{aligned} &(a_0 - SEa_0 \cdot t(\alpha/2, n-2), a_0 + SEa_0 \cdot t(\alpha/2, n-2)), \\ &(a_1 - SEa_1 \cdot t(\alpha/2, n-2), a_1 + SEa_1 \cdot t(\alpha/2, n-2)). \end{aligned} \qquad (6.14)$$

Стандартные ошибки коэффициентов определяются формулами:

$$SEa_0 = \sqrt{\frac{\sum X_t^2 \sum (Y_t - \bar{Y})^2}{n(n-2)\sum (X_t - \bar{X})^2}},$$
$$SEa_1 = \sqrt{\frac{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}{(n-2)\sum (X_t - \bar{X})^2}}. \qquad (6.15)$$

7. ***Доверительный интервал*** для прогнозных значений X^*_t регрессии определяется по формуле:

$$(\hat{Y}_t - V_t, \hat{Y}_t + V_t), \qquad (6.16)$$

где
$$V_t = SE \cdot t(\alpha, n-2)\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_t^* - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}}. \qquad (6.17)$$

Здесь $t(\alpha, n\text{-}2)$ - табличное значение критерия Стьюдента при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы (n-2). Формулы (6.16) и (6.17) применяются для прогнозных значений X и Y.

Ложная регрессия

Если каждая из наблюдаемых величин имеет тенденцию к росту или снижению с течением времени, то между ними возникает ложная регрессия (корреляция), которая может превысить причинную связь между этими величинами. Такая проблема возникает в случае цен и финансовых показателей, определяемых с нарастающим итогом. Чтобы избежать ложной регрессии обычно переходят к анализу индексов величин например $(P_1 - P_0)/P_0$ или P_1/P_0 где P_0 базовое значение показателя P.

Нелинейная регрессия

В случае, если корреляционное поле показывает явно нелинейную связь между показателями, или когда (согласно F-критерия) отвергнута гипотеза о линейной связи между X и Y, надо строить нелинейную регрессию.

Обычно рассматривают следующие уравнения нелинейной регрессии:

$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + ... + a_n X^n$ - полиномиальная регрессия,

$Y = a_0 + a_1 LnX$ - логарифмическая регрессия,

$Y = aExp(bX)$ - экспоненциальная регрессия,

$Y = aX^b$ - степенная регрессия.

Полиномиальная регрессия выбирается, когда имеет место немонотонная зависимость между X и Y. Если на корреляционном поле есть n точек максимума и минимума, то выбирается полиномиальная регрессия (n+1)-го порядка. Обычно полиномиальную регрессию с помощью замены переменных сводят к линейной множественной регрессии.

В других случаях нелинейной регрессии ее сводят к простой линейной с помощью замены переменных. Данная процедура состоит в следующем. Пусть, исходя из экономических соображений или из вида корреляционного поля, выбрана степенная регрессионная модель:

$$Y = aX^b \tag{6.18}$$

Логарифмируя (22) – получим соотношение:

$$Ln(Y) = Ln(a) + bLn(X) \tag{6.19}$$

На основе наблюдаемых данных строится таблица.

Таблица 8

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**….**	**N**
$Ln(X)$	$Ln(X_1)$	$Ln(X_2)$	$Ln(X_3)$	…	$Ln(X_n)$
$Ln(Y)$	$Ln(Y_1)$	$Ln(Y_2)$	$Ln(Y_3)$	…	$Ln(Y_n)$

Делается замена переменных: $V = Ln(Y)$, $Z = Ln(X)$. По данным табл. 6.2 строится линейная регрессия:

$$V = a_0 + a_1 Z = a_0 + a_1 Ln(X) \tag{6.20}$$

Сравнивая (6.20) с (6.19), получаем: $a_0 = Ln(a)$, $a_1 = b$. Откуда нелинейная регрессия (6.18) будет иметь вид:

$$Y = Exp(a_0)X^{a_1} \tag{6.21}$$

Этот же метод используется при построении других видов нелинейной регрессии.

Построение простой регрессии в системе Excel выполняется следующим образом:

1. Строится корреляционное поле.
2. Наблюдаемые значения показателей вводятся в таблицу Excel.
3. Вычисляется коэффициент корреляции между показателями. Если он по абсолютной величине меньше 0.5, то связь между показателями слабая и для построения модели надо взять другие показатели или увеличить период наблюдения.
4. В пункте меню **Сервис** выбирается функция **Анализ данных,** где выбирается пункт **Регрессия.**
5. Для построения лучшей модели строится линейная и несколько нелинейных моделей регрессии, и по максимальному коэффициенту детерминации R выбирается лучшая.
6. Оценивается значимость и надежность модели.
7. Вычисляются прогнозные значения показателей и их доверительные интервалы.

Пример 2. Наблюдения за 11 месяцев для объемов реализованной продукции и балансовой прибылью предприятия, представлены в табл. 9. Необходимо построить модель линейной регрессии и определить ее значимость, коэффициент детерминации и другие статистики, дать прогноз балансовой прибыли при объемах реализации, равных 82; 86 и 92.

Таблица 9

Y	1,2	1,8	2,0	2,5	3,0	3,2	3,5	4,9	5,0	6,2	7,3
X	20	25	34	30	36	37	40	46	58	69	80

Рассмотрим решение этой задачи с помощью системы Excel. Найдем коэффициент корреляции между переменными X и Y, введем данные в таблицу Excel и вызовем пакет **Анализ данных,** где выберем режим **Корреляция.**

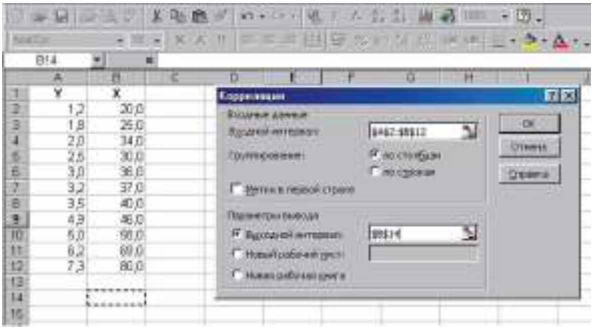


Рис. 31. Определение коэффициента корреляции между показателями

Рис.32. Значения коэффициента корреляции между показателями

Если коэффициент корреляции равен 0,978664, это говорит о высоком уровне положительной статистической значимости связи между анализируемыми показателями. Далее в пакете **Анализ данных** выберем режим **Регрессия.**

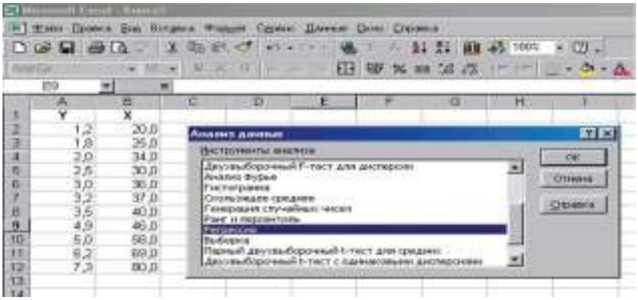


Рис. 33. Выбор режима Регрессия

Введем исходные данные в диалоговое окно режима Регрессия:

Рис. 34. Ввод данных в режиме Регрессия

После нажатия кнопки ОК получаем итоги расчетов:

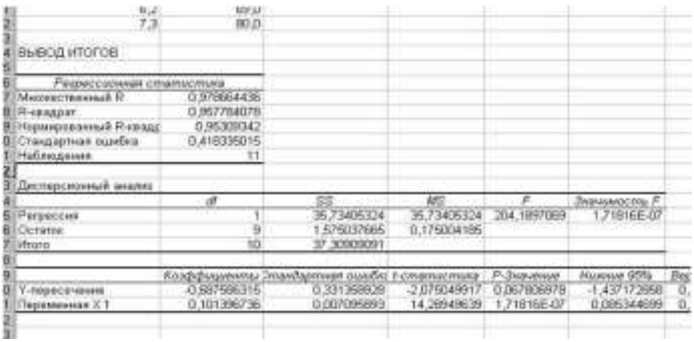


Рис. 35. Итоги расчетов по модели линейно регрессии

Таким образом, модель линейной регрессии имеет вид:

$$Y = \mathbf{-0{,}688 + 0{,}101}\ X \qquad (6.22)$$

В модели коэффициент детерминации является высоким R = 0,958, т.е. почти на 96% модель объясняет зависимость между переменными. Модель линейной регрессии является значимой, так как расчетное значение F-статистики $F_{набл}$=204,1189, что больше табличного равного $F_{таб}$=$7181 \cdot 10^{-7}$. Стандартная ошибка модели SE равна 0,41833, стандартные ошибки коэффициентов равны $SE(a_0)$=0,331 и $SE(a_1)$=0,007. Доверительные интервалы коэффициентов (с уровнем доверительной вероятности 0,95) равны (-1,437; 0,062) для a_0 и (0,085; 0,117) для a_1.

Прогнозные значения находятся путем ввода формулы (6.20) в таблицу Excel.

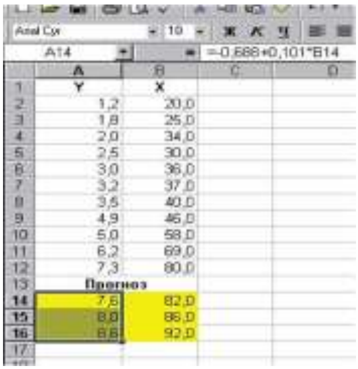


Рис. 36. Расчет прогнозных значений балансовой прибыли с помощью регрессионной модели

Точно также строится модель нелинейной регрессии путем ее сведения к линейной (6.18) - (6.20). Затем выбирается лучшая модель по максимуму коэффициента детерминации R^2 или, что то же самое, по минимуму остаточной дисперсии (стандартной ошибки).

Выделение тренда временных рядов

В экономике часто надо принимать решения на основе прогнозов развития той или иной ситуации. Такие прогнозы обычно осуществляются на основе знания динамики экономических показателей в предыдущие периоды времени. Такими показателями могут быть курсы валют, уровни цен, прибыль и рентабельность производства и т.д. Они обычно рассматриваются с периодичностью в месяц, квартал, год. Такие ряды показателей называются временными рядами. Временной ряд - это набор значений показателей, определенных через равные промежутки времени.

Элементы временного ряда обычно нумеруются моментом времени (или его номером): $Y_;$, Y_2, Y_n или Y_t , где t - месяц, квартал или год. Задача прогнозирования тогда состоит в том, чтобы получить оценки возможных значениях рассматриваемых показателей на заданном будущем промежутке времени: Y_t, $t=n+1,\ n+2,\ \ldots\ ,\ n+k$. Промежуток времени от (n+1) до ($n+k$) называется периодом прогнозирования.

Модели временных рядов можно рассматривать как частный случай простой регрессии, когда фактор X является временем.

Статистические методы прогнозирования временных рядов основаны на представлении динамики показателя с помощью модели:

$$Y(\mathrm{t}) = F_0(t) + F_1(t) + F_2(t) + U(t), \qquad (6.23)$$

где $F_0(t)$ - обычно монотонная функция (называемая трендом);

$F_1(t)$ - периодическая функция с периодом один год, называемая сезонной компонентой, в этом случае t - месяцы или кварталы;

$F_2(t)$ - периодическая функция с периодом несколько лет, называемая циклической компонентой;

$U(t)$ - случайная составляющая, обычно имеющая нормальное распределение с нулевым средним.

Тренд характеризует устойчивую динамику показателя в течение предыдущего периода времени. Сезонная составляющая характеризует внутригодичные колебания значений показателя, обычно связанные с сезонностью экономической конъюнктуры (зима, весна, лето, осень). Циклическая компонента рассматривается только для временных рядов, охватывающих периоды более десяти лет, и характеризует долгосрочные колебания экономической конъюнктуры, связанные с обновлением основных средств, изменениями технологий и т.д. Эти колебания рассматриваются обычно в макроэкономических исследованиях.

При прогнозировании временных рядов случайную составляющую не рассматривают, ограничиваясь оценкой ее дисперсии, для получения доверительного интервала прогнозных значений рассматриваемого показателя.

Методы экстраполяции динамики временных рядов исходят из предположения, что закономерности изменения показателя в прошлом сохранятся и на период прогнозирования.

Анализ временных рядов с использованием Excel выполняется с помощью **Мастера диаграмм,** который позволяет построить различные функции тренда временного ряда. При анализе временного ряда строятся таблица и график значений показателя.

Пример 3. Построить график временного ряда ***Индекс цен продукции,*** выделить его тренд и построить прогноз на два периода вперед.

Решение. Исходные данные заносятся в таблицу Excel, вызывается **Мастер диаграмм** и выбирается тип диаграммы ***График:***

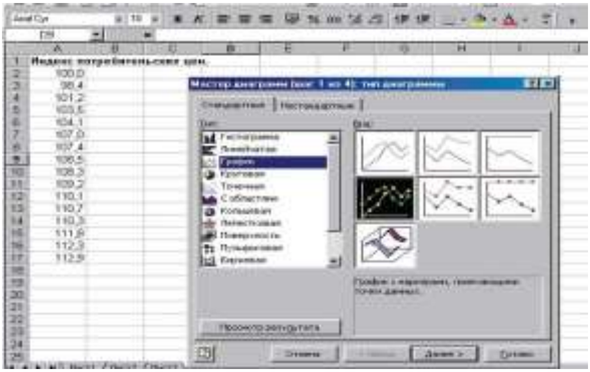


Рис. 37. Выбор типа диаграммы с помощью Мастера диаграмм

Нажатием кнопки Далее> строится график временного ряда.

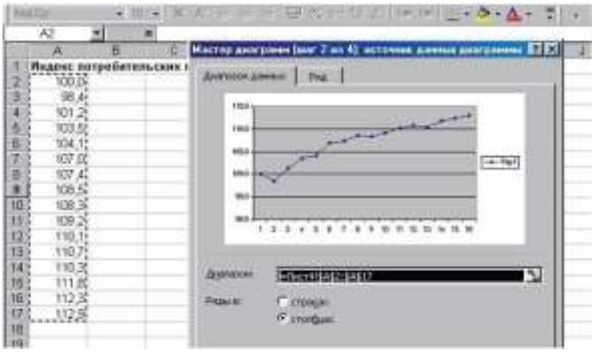


Рис. 38. Построение графика временного ряда с помощью Мастера диаграмм

На вкладке **Ряд** устанавливаются параметры каждого временного ряда: добавляются или удаляются ряды, присваиваются имена, выделяются данные для построения рядов, определяются подписи.

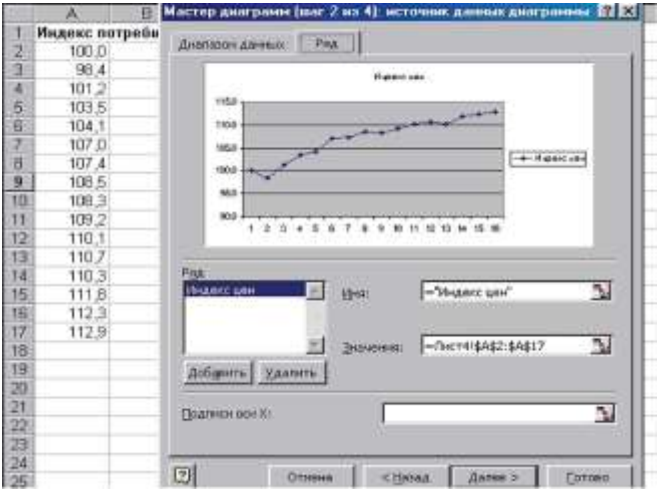


Рис. 39. Задание параметров графика временного ряда

Задав на вкладке Ряд название ряда «Индекс цен», нажмем кнопку Далее>.

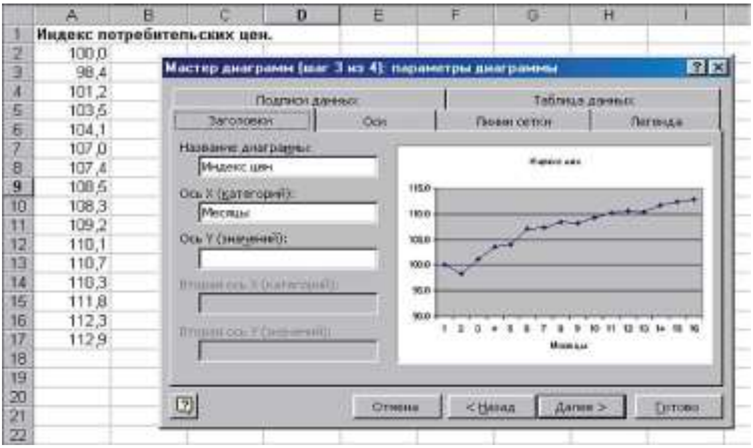


Рис. 40. Задание параметров диаграммы

Нажав Готово, получаем в таблице Excel график временного ряда.

Рис. 41. Построение линии тренда временного ряда

Чтобы построить функцию и линию тренда, надо установить курсор на линии графика и щелкнуть правой кнопкой мыши, затем в появившемся окне выбрать пункт меню **Добавить линию тренда.**

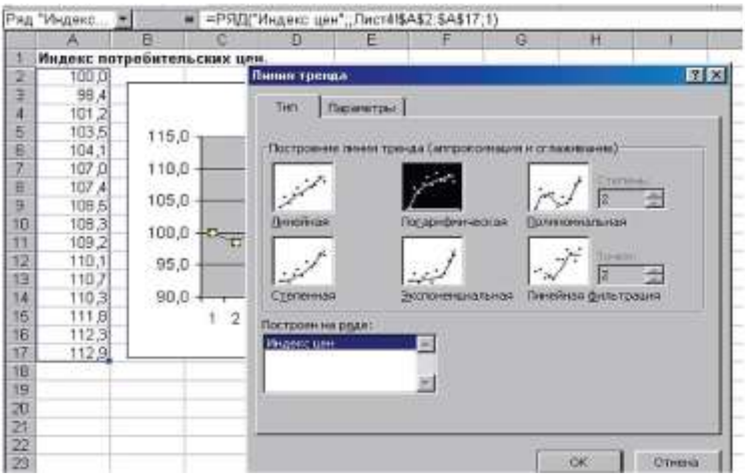


Рис. 42. Выбор типа тренда

В появившемся окне выбрать тип тренда и нажать вкладку **Параметры,** задать период прогнозирования и показать на диаграмме уравнение тренда и коэффициент детерминации модели R^2

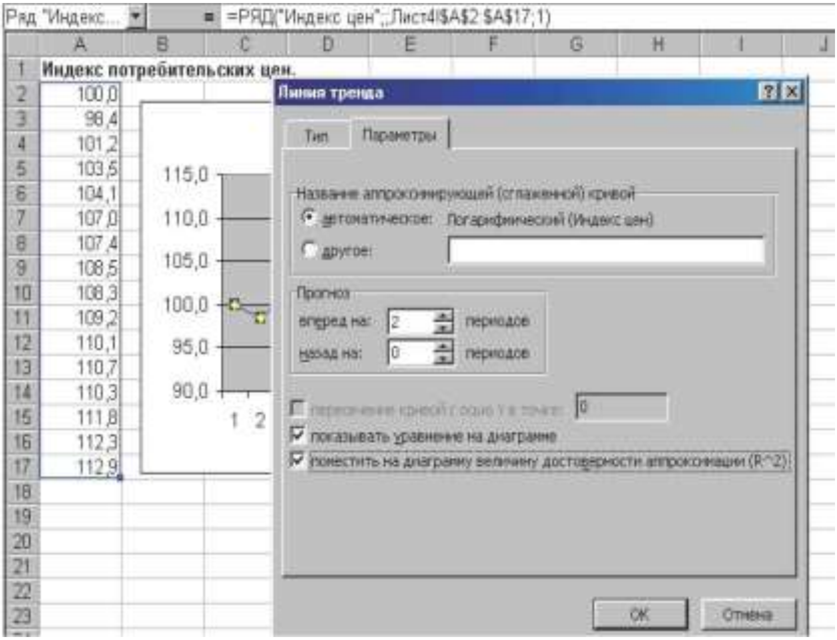


Рис. 43. Задание параметров

Нажав кнопку ОК, получим на диаграмме график временного ряда, линию тренда, уравнение тренда и значение коэффициента детерминации. Полученное значение коэффициента R^2 = 0,9238 свидетельствует о достаточно высокой точности модели.

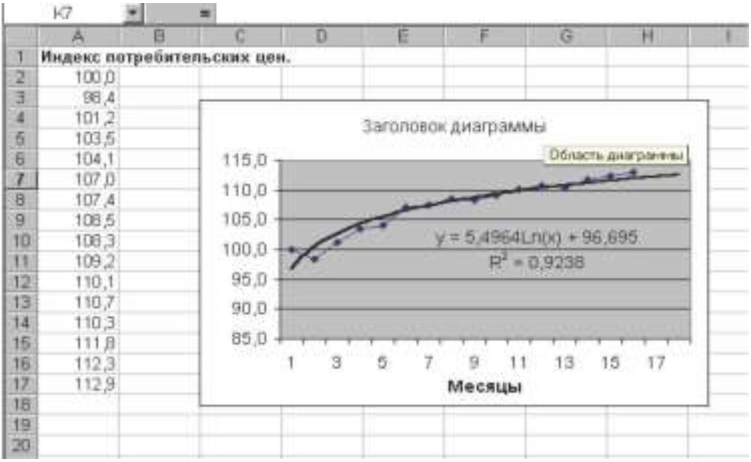


Рис. 44. Диаграмма временного ряда с линией тренда

На основе полученной функции тренда вычисляются прогнозные значения рассматриваемого показателя

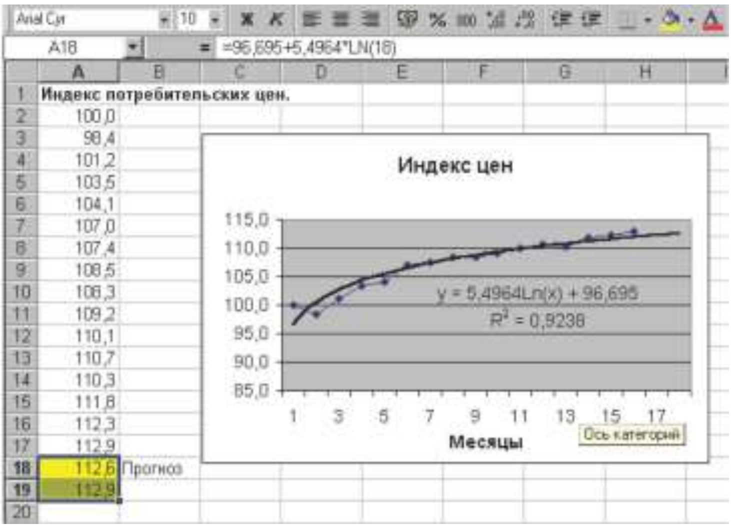


Рис. 45. Определение прогнозных значений

Трендовая модель и прогноз индекса цен построены. Для получения лучшей модели надо из предлагаемых **Мастером диаграмм** трендов выбрать тренд, у которого R имеет максимальное значение. Для этого на диаграмме надо задать несколько функций тренда.

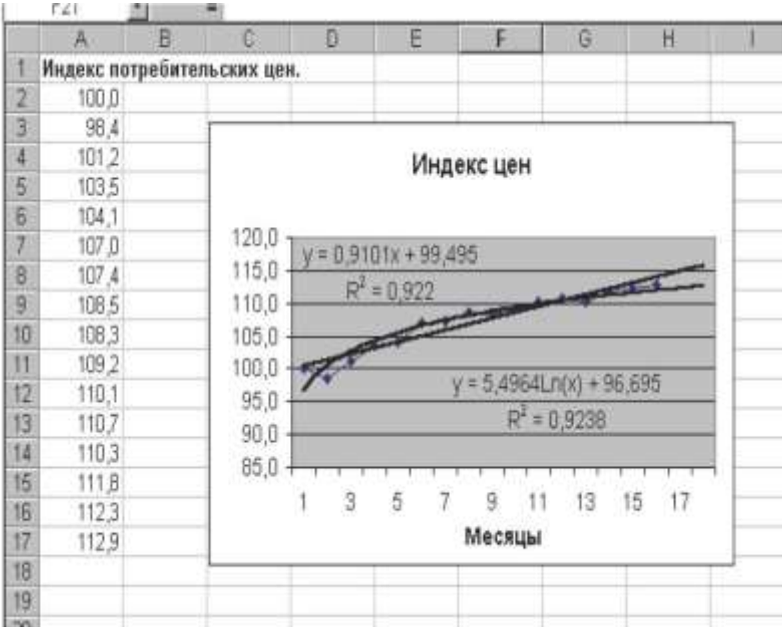


Рис. 46. Выбор лучшей функции тренда

На рисунке показаны две линии тренда: линейная и логарифмическая. Так как R логарифмической модели больше, чем y линейной, то логарифмическая модель считается более точной.

Как видно из графика, линейная модель дает завышенные, а логарифмическая - заниженные значения по сравнению с наблюдаемыми значениями в конце периода наблюдения. Поэтому прогнозные значения индекса цен можно взять как средние между линейной и логарифмической моделями. Таким же образом можно строить функции тренда и для таблиц содержащих несколько временных рядов.

Модели регрессии и временных рядов могут быть объединены в одну модель, когда показатель X прогнозируется с помощью модели временных рядов, а показатель Y - модели регрессии. Так, в примере 6.2 прогноз показателя объемов реализации может быть сделан с помощью модели временного ряда, а прогноз балансовой прибыли - с помощью модели регрессии по данным прогноза временного ряда объемов реализации.

7. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЕКТАМИ

7.1. Построение сетевых графиков и расчет их временных параметров

Общие сведения

Методы сетевого планирования и управления (СПУ) активно используются при управлении проектами, прежде всего для расчета планов и их оптимизации по различным критериям. Основным элементом систем СПУ является сетевая модель, которая моделирует процесс выполнения комплекса работ для достижения определенной цели. Графическое изображение сетевой модели называется сетевым графиком. Сетевой график с математической точки зрения представляет собой ориентированный граф без петель и контуров. Обозначим его G = (E, U), где E — множество вершин, U — множество дуг.

Дугам на сетевом графике соответствуют работы, а вершинам — события. Работой называется любой процесс, происходящий во времени. Все работы можно разделить на действительные работы, ожидания, фиктивные (зависимости). Под действительными работами следует понимать любой трудовой процесс, требующий ресурсов и имеющий некоторую продолжительность. Ожидание — это некоторый процесс, не требующий ресурсов, но имеющий некоторую продолжительность. Фиктивные работы (зависимости) не требуют ресурсов и имеют нулевую продолжительность, они используются для обозначения логических зависимостей между действительными работами.

Событие — это результат выполнения работ, в него входящих; оно не имеет продолжительности и не потребляет ресурсов. На любом сетевом графике можно выделить исходное, промежуточное и завершающее события. Любая работа сетевой модели соединяет два события: начальное событие работы и конечное событие работы. Для однозначного обозначения работ используют идентификаторы (i, j), где i — номер начального события работы, j — номер конечного события работы. Обычно на сетевых графиках события упорядочены, т.е. $i < j$.

Любая последовательность работ, в которой конечное событие предыдущей работы является начальным событием последующей, называется путем. Под длиной пути будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь. На сетевой модели следует различать: полный путь; путь, предшествующий событию; путь, следующий за событием; путь между событиями. Среди полных путей особое значение придается критическому пути.

Критический путь — это наиболее протяженный по времени полный путь; его продолжительность определяет минимальное время выполнения проекта (критический срок $t_{Кр}$). Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

При анализе сетевых графиков прежде всего вычисляют их временные параметры. К основным временным параметрам относятся:

- продолжительность критического пути (критический срок);
- сроки свершения и резервы событий;
- сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Продолжительность выполнения работы (ij) обозначим t_{ij} .

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события j — это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$t_P(1) = 0$,

$t_p(j) = \max(t_p(i) + t_{ij})$ по $(ij) \in E_j^*$,

где E_{j^*} — множество работ, заканчивающихся j -м событием; $t_p(i)$ — ранний срок свершения начального события работы (i, j); t_j — продолжительность работы (i, j). Тогда $t_p(S) = t_{Kp}$.

Поздний срок $t_n(i)$ свершения события i — такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием. Для завершающего события S предполагается, что

$$t_n(S) = t_p(S) = t_{Kp}$$

Тогда $t_n(i) = \min(t_n(j) - t_{i,j})$ по $(ij) \in E_i^*$,

Где E_{ij}^* — множество работ, начинающихся i-м событием; $t_n(i)$ — поздний срок свершения конечного события работы (i, j).

Резерв времени R(i) события *i* показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события *i* без нарушения срока наступления завершающего события: $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$.

Ранний срок начала работы (i,j): $t_{рн}(ij) = t_p(i)$.

Ранний срок окончания работы (i,j): $t_{рн}(ij) = t_p(i)$.

Поздний срок окончания работы (i,j): $t_{p,o}(ij) = t_n(j)$.

Поздний срок начала работы (i,j): $t_{n,н}(ij) = t_n(j) - t_{ij}$.

Ранний срок свершения события *j* часто находят по формуле

$$t_p(i) = \max t_{p,o}(ij) \text{ по } (ij) \in E_{j^*},$$

а поздний срок свершения события *i* — по формуле

$$t_n(i) = \min t_{p,n}(ij) \text{ по } (ij) \in E_{i^*},$$

Полный резерв времени $R_n(i,j)$ работы (i,j) — это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t_{ij} = t_n(j) - t_{p,o}(ij)$.

Свободный резерв времени $R_c(ij)$ работы (ij) — это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушаются ранние сроки начала всех последующих работ:

$R_c(i\,j) = t_p(j) - t_p(i) - t_{ij} = t_p(j) - t_{p,o}(ij)$.

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

7.2. Оптимизация проекта по времени

Общие сведения

Сокращение времени завершения проекта, как правило, связано с привлечением дополнительных средств (количество рабочих, сверхурочные работы). Рассмотрим два примера задачи оптимизации проекта по времени с привлечением дополнительных средств.

Постановка задачи 1. Для сокращения времени выполнения проекта выделяется некоторая сумма дополнительных средств B. Задан сетевой график G=(E,U) выполнения проекта, где *E* - множество событий, *U* - множество работ. Продолжительность каждой работы равна t_{ij}. Известно, что вложение дополнительных средств x_{tj} в работу (i,j) сокращает время ее выполнения от *t* до t'_{ij}, причем эта зависимость выражается как $t'_{ij} = (x_{ij}) < t_{ij}$ (f_{ij} — известные функции). Для каждой работы существует минимально возможное время ее выполнения d_{ij}.

Требуется определить время начала $t^н_{ij}$ и окончания $t^о_{ij}$ выполнения работ, а также количество дополнительных средств x_{ij}, которые необходимо вложить в работы (i, j), чтобы общее время выполнения проекта было минимальным, сумма вложенных дополнительных средств не превышала величины В, время выполнения каждой работы было не меньше минимально возможного времени.

Математически условия задачи можно записать следующим образом:

$$t_{кр}=t^{o}_{n-1,n};\tag{7.1}$$

$$\sum_{(i,j)} x_{ij} \leq В;\tag{7.2}$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} \geq d_{ij},\ (i,\ j) \in U;\tag{7.3}$$

$$t^{o}_{ij} - t^{H}_{ij} = f_{ij},\ (i,\ j) \in U;\tag{7.4}$$

$$t^{H}_{rj} \geq t^{\circ}_{ir}, \text{для всех } r,\ i,\ j \in U;\tag{7.5}$$

$$t^{\circ}_{ij} \geq 0,\ 0\ t^{H}_{ij} \geq 0,\ (i,\ j) \in U.\tag{7.6}$$

Ограничение (7.2) определяет сумму вложенных дополнительных средств: она не должна превышать величины В. Ограничения (7.3) показывают, что продолжительность каждой работы должна быть не менее минимально возможной ее продолжительности. Ограничения-равенства (7.4) показывают зависимость продолжительности каждой работы от вложенных в нее дополнительных средств. Ограничения (7.5) обеспечивают выполнение условий предшествования работ в соответствии с топологией сети: время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующих ей работ. Ограничение (7.6) — условие неотрицательности.

Если в последнее событие сети п входят сразу несколько работ, то необходимо добавить фиктивную работу $(n,\ n+1)$, время выполнения которой равно нулю ($t^{\circ}_{njl+1} - t^{H}_{nn+1} = 0$ добавить в ограничение (7.4). Тогда целевая функция запишется так : $t_{кр} = t^{\circ}_{n-1,\ n}$ (min).

Постановка задачи 2. Пусть задан срок выполнения проекта t_0, а расчетное время $t_{кр} \geq t_o$. В этом случае оптимизация комплекса работ сводится к сокращению продолжительности критического пути. Задача заключается в определении величины дополнительных вложений x_{ti} в отдельные работы проекта с тем, чтобы общий срок его выполнения не превышал заданной величины t_Q , а суммарный расход дополнительных средств был минимальным. Время выполнения каждой работы должно быть не меньше минимально возможного времени d_{tj}.

Математическая запись этой задачи:

$$F(^x)= \sum_{(i,j)} x_{ij} \text{ (min)}$$

$$t_{nj} \leq t_Q$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} > d_{ij} \text{ , } (i,j) \in U;$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} = f_{ij} \text{ , } (i, j) \in U;$$

$$t^{H}_{rj} \geq t^{\circ}_{ir} \text{ ,для всех } r, i, j \in U;$$

$$t^{\circ}_{ij} > 0, t^{H}_{ij} \geq 0, (i, j) \in U.$$

Смысл ограничений аналогичен соответствующим ограничениям постановки задачи 1 (7.1) — (7.6).

Приведенные постановки задачи относятся к классу задач математического программирования и могут быть решены известными методами в зависимости от вида функций f_{ij} (x_{ij}). Если предположить, что продолжительность выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}$, где k_{ij} – технологические коэффициенты использования дополнительных средств, то будем иметь задачу линейного программирования.

Пример. Для сокращения срока реализации проекта, представленного сетевым графиком (рис.47), заказчик выделил 14 ед. дополнительных средств. Продолжительность выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением

$$t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij} .$$

Известно, что $k_{12} = 0{,}1$; $k_{13} = 0{,}2$; $k_{23} = 0{,}5$; $k_{24} = 0{,}3$; $k_{35} = 0{,}6$; $k_{45} = 0{,}1$. Над каждой работой поставлены ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij}.

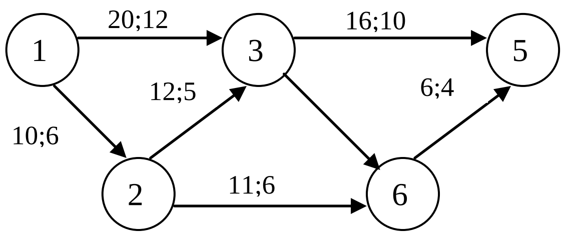


Рис. 47.

Требуется оптимизировать сетевой график по времени, то есть найти такие $t^{н}_{ij}$, $t^{о}_{ij}$, x_{ij} чтобы:

а) время выполнения всего проекта было минимальным;

б) сумма дополнительно вложенных средств не превышала 14 ед.;

в) продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины d_{tj}.

Добавим на сетевом графике фиктивную работу (5, 6), как показано на рис. 48.

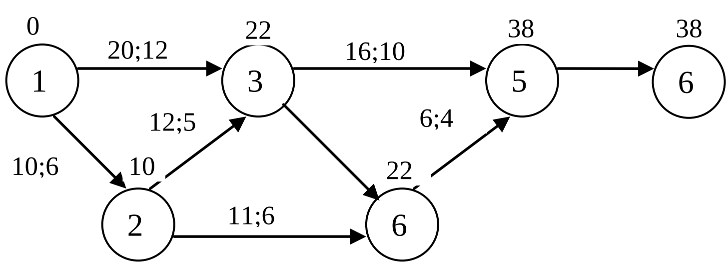


Рис. 48

Тогда целевая функция запишется в виде $t_{кр} = t^{\circ}_{5,6}\ (min)$

Запишем ограничения задачи:

а) сумма вложенных средств не должна превышать их наличного количества $x_{12} + x_{13} + x_{45} + x_{23} + x_{24} + x_{35} \leq 14$;

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$t^{o}_{12} - t^{н}_{12} \geq 6$; $t^{o}_{13} - t^{н}_{13} \geq 12$; $t^{o}_{23} - t^{н}_{23} \geq 5$; $t^{o}_{24} - t^{н}_{24} \geq 6$;
$t^{o}_{34} - t^{H}_{34} = 0$; $t^{o}_{35} - t^{H}_{35} \geq 10$; $t^{o}_{45} - t^{H}_{45} \geq 4$; $t^{o}_{56} - t^{H}_{56} =$;

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств

$t^{o}_{12} - t^{н}_{12} = 10 - 0,1x_{12}$; $t^{o}_{13} - t^{н}_{13} = 20 - 0,2x_{13}$;
$t^{o}_{24} - t^{н}_{24} = 11 - 0,3x_{24}$; $t^{o}_{35} - t^{H}_{35} = 16 - 0,6x_{35}$;
$t^{o}_{45} - t^{H}_{45} = 6 - 0,1x_{45}$; $t^{o}_{23} - t^{н}_{23} = 12 - 0,5x_{23}$.

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы

$t^{н}_{12} = 0$; $t^{н}_{13} = 0$; $t^{н}_{23} \geq t^{0}_{12}$; $t^{н}_{34} \geq t^{0}_{13}$; $t^{H}_{34} \geq t^{0}_{23}$; $t^{н}_{24} \geq t^{0}_{12}$; $t^{н}_{35} \geq t^{0}_{13}$; $t^{н}_{35} \geq t^{o}_{23}$; $t^{H}_{45} \geq t^{0}_{24}$; $t^{H}_{56} \geq t^{0}_{35}$; $t^{H}_{56} \geq t^{0}_{45}$; $t^{H}_{45} \geq t^{0}_{34}$;

д) условие неотрицательности неизвестных

$t^{н}_{ij} \geq 0$; $t^{\circ}_{ij} \geq 0$; $t^{\circ}_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in U$.

Решив данную задачу симплекс-методом на ПЭВМ, получаем:

$t^{н}_{12} = 0$; $t^{\circ}_{12} = 10$; $t^{н}_{13} = 0$; $t^{o}_{13} = 20$; $-t^{н}_{23} = 10$; $t^{\circ}_{23} = 20$;
$t^{H}_{24} = 10$; $t^{\circ}_{24} = 21$; $t^{н}_{34} = 20$; $t^{0}_{34} = 20$; $t^{н}_{35} = 20$; $t^{\circ}_{35} = 30$;
$t^{н}_{45} = 24$; $t^{\circ}_{45} = 30$; $t^{н}_{56} = 30$; $t^{o}_{56} = 30$; $x_{12} = 0$; $x_{13} = 0$;
$x_{23} = 4$; $x_{24} = 0$; $x_{35} = 10$; $x_{45} = 0$; $t_{кр} = 30$.

Таким образом, при дополнительном вложении 14 ед. комплекс работ может быть выполнен за 30 ед. времени. При этом средства распределятся следующим образом: 4 ед. в работу (2, 3) и 10 ед. в работу (3, 5) (рис.49).

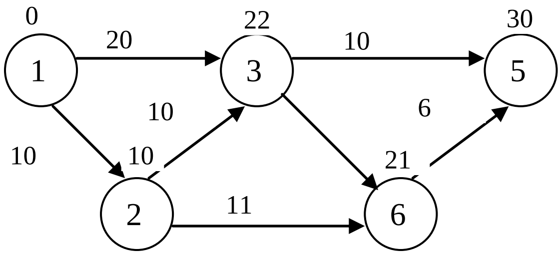


Рис. 49

8. ПАУТИНООБРАЗНАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ

Цель работы: Освоение метода построения и анализа паутинообразной модели равновесия, определение ее параметров и разработка рекомендаций по корректировки положения.

Исходные положения. Стабильность или не стабильность рыночного равновесия может быть проанализирована при помощи так называемой паутинообразной модели.

Данная модель предполагает следующие допущения: Величина спроса зависит от цен предшествующего периода.

$$Q_d = Q_d(P_t)$$
$$Q_s = Q_s(P_t - 1)$$

где t - период времени

функции спроса и предложения являются линейными,

$$Q_d = a - bP_t$$
$$Q_s = c + dP_t - 1$$

где a,b,c,d - положительные коэффициенты;

функции спроса и предложения не меняются во времени.

В зависимости от соотношения абсолютной величины тангенса угла наклона кривой спроса b и угла наклона кривой предложения d (угол определяется по отношению к оси OP) будет определяться стабильность или нестабильность рыночного равновесия.

Возможны три случая:

если $d>b$, то любое отклонение от равновесия будет вести к увеличению колебаний цен и объемов, все, более удаляя исходное положение от точки равновесия.

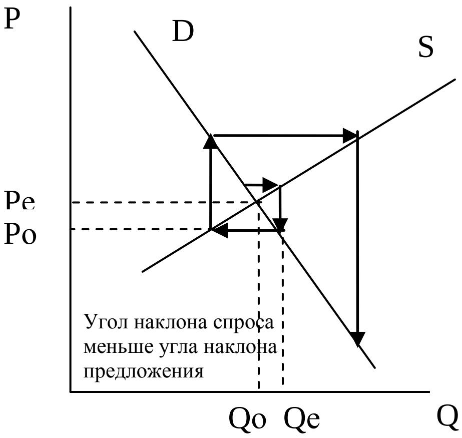


Рис. 50.

если $d=b$, то любое первоначальное отклонение ведет к колебаниям цен и объемов одинаковой амплитуды;

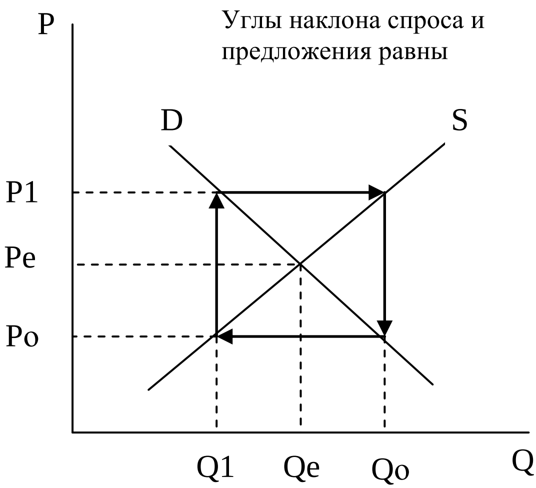


Рис. 51.

если $d>b$, то колебания будут постепенно затухать, а рыночное равновесие восстановится.

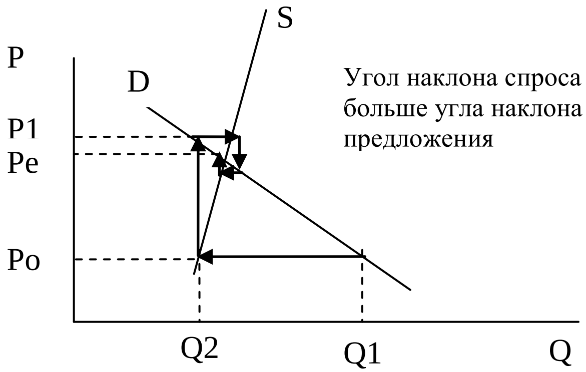


Рис. 52.

Регулирование рынка воздействие может осуществляться через использование таких мер как:

Ведение потоварного налога *T*. Данная мера может вызвать сдвиг кривой предложения *SS* вверх влево и установление новой более высокой цены равновесия $P^{*}=P_e + T$ а также нового меньшего равновесного объема

$Q^{*}<Q_e$.

Государственные дотации - Т. Вызывают сдвиг кривой предложения вниз вправо, установление новой более низкой цены равновесия $P^{*} = P_e\text{-}T$ нового большего равновесного объема $Q^{*} > Q_e$.

Установление фиксированных цен. Последствия государственного вмешательства в рыночные цены, зависит от того, фиксируются ли цены выше или ниже точки равновесия, ниже цены равновесия (на социально значимые товары, в целях не допустить их чрезмерного роста) - в результате возникает дефицит, ибо при цене $P^{*} < P_e$ величина спроса превышает величину предложения и возникает товарный дефицит, выше цены равновесия (защита производителей какой-либо отрасли, сельского хозяйства) - избыток предложения, поскольку при цене $P^* > P_e$ величина спроса меньше величины предложения. Данный избыток покрывается государственными закупками, фиксируемыми в конечном свете за счет налогов.

Пример выполнения лабораторной работы.

Определить коэффициенты управления спроса и предложения методом наименьших квадратов.

1. Необходимо построить линейную модель $y = mx + b$, наилучшим образом описывающую наблюдаемые значения. Обычно m и b подбираются так, чтобы минимизировать сумму квадратов.

Необходимо построить линейную модель $y = mx + b$, наилучшим образом описывающие наблюдаемые значения. Обычно т и Ъ подбираются так, что бы минимизировать сумму квадратов разностей между наблюдаемыми и теоретическими значениями зависимой переменной y, т.е. минимизировать

$$Z = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b + mx_i))^2 \to \min,$$

где n число наблюдений (в данном случае n =15).

Рис. 53.

Для решения этой задачи отведем под переменные Ъ и т ячейки R2 и S2, соответственно, а в ячейку T2 введем минимизируемую функцию =

СуММКВРАЗН(R2*Bl:Pl+S2;B2:P2)

Используя сервис Поиск решения (Сервис-Поиск решения), найдем значения коэффициентов.

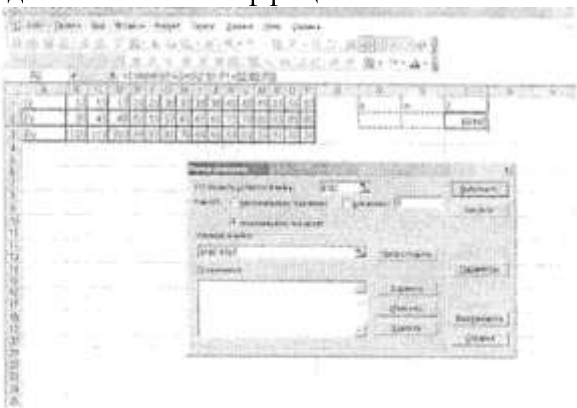


Рис. 54.

В результате получаем уравнение: $Q_s = 26{,}7 + 11P_t$ *-1*
Произведем аналогичные расчеты и определим второе уравнение $Q_d = 131{,}8 - 1{,}6P_t$

2. Построить в координатной плоскости.

Для построения вызываем мастер диаграмм, выбираем «точечная». Следует добавить 2 ряда данных (отдельно для спроса, отдельно для предложения). После этого следует добавить две линии тренда (линейные)

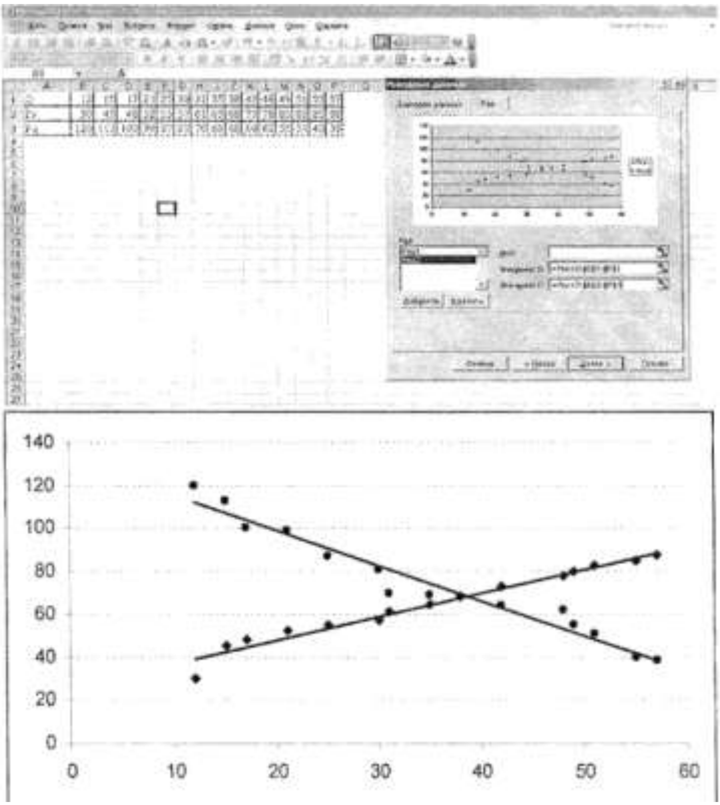


Рис. 55.

3. Определить углы наклона

Исходя из полученных расчетов коэффициенты угла наклона составляют $\alpha = 1{,}1$ и $\beta = -1{,}6$.

П4 и П5 студент выполняет самостоятельно, исходя из предложенного теоретического материала в лабораторной работе.

Паутинообразная модель рыночного равновесия может с достаточной степенью применяться лишь к определенной продукции, так как не учитывает ряд важных факторов (климатические условия, изменение спроса потребителей). Однако, она показывает зависимость функционирования рынка от времени реакции в сфере предложения и формы кривой предложения и спроса. Достижение устойчивого равновесия не означает остановки в развитии производства, поэтому устойчивость рыночного равновесия носит относительный характер.

	2	5	7	1	5	0	1	5	8	2	8	9	1	5	7
s	0	5	8	2	5	7	1	5	8	3	8	0	3	5	8
d	20	13	00	9	7	1	0	9	8	4	2	5	1	0	8

Исходя представленных данных, построить уравнения спроса и предложения. Рассчитать равновесную цену и определить углы наклона спроса и предложения. Исходя из полученных данных, определить к какому типу относится рассматриваемая ситуация. Предложить конкретные мероприятия по регулированию рынка.

Этапы выполнения работы:

1. Определить коэффициенты уравнения спроса и предложения методов наименьших квадратов.

Построить уравнения в координатной плоскости.

Определить углы наклона.

Идентифицировать вид графика.

Разработать рекомендации по регулированию рынка.

Отчет по работе должен содержать:

Название и цель работы.

Основные и теоретические и методические положения.

Исходные данные для расчета.

Результаты расчета.

Выводы по результатам регулирования.

9. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Номер Вашего варианта соответствует последней цифре зачетной книжки.

Задача 1

Используя **Поиск решения,** решить задачу оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости. Ресурсы сырья, норма его расхода на единицу продукции и цена продукции заданы в соответствующей таблице.

В каждой задаче требуется определить:

1. План выпуска продукции из условия максимизации ее стоимости.
2. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении **задачи** увеличения запаса ресурсов.
3. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.
4. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?
5. На сколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?
6. На сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли.
7. Интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.
8. На сколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?
9. Кроме того, в каждом варианте необходимо выполнить еще два пункта задания.

Вариант 1

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в табл. 10.

9а. Как изменяется общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I и II вида на 4 и 3 ед. соответственно и уменьшении на 3 ед. сырья III вида?

9б. Целесообразно ли включать в план изделие *Д* ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

Таблица 10

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Вариант 2

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в табл.11.

Таблица 11

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	*Г*	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена изделия	9	6	4	7	

9а. Как изменяются общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I и II вида на 120 и 160 ед. соответственно и одновременном уменьшении на 60 ед. запасов сырья I вида?

9б. Целесообразно ли включать в план изделие *Д* ценой 12 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

Вариант 3

Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в табл.12.

9а. Как изменится общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I и II вида на 4 ед. каждого?

9б. Целесообразно ли включать в план изделие *Г* ценой 13 ед., на изготовление которого расходуется соответственно 1, 3 и 2 ед. каждого вида сырья, и изделие *Д* ценой 12 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

Таблица 12

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	800
Цена изделия	10	14	12	

Вариант 4

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в табл. 13.

Таблица 13

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	*Г*	
I	2	1	3	2	200
II	1	2	4	8	160
III	2	4	1	1	170
Цена изделия	5	7	3	8	

9а. Как изменится общая стоимость продукции и план выпуска при увеличении запасов сырья I и П вида на 8 и 10 ед. соответственно, и одновременном уменьшении на 5 ед. запасов сырья Ш вида?

9б. Целесообразно ли включать в план изделие *Д* ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

Вариант 5

На основании информации, приведенной в табл.14, решена задача оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости.

9а. Как изменится общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья на 18 ед.?

9б. Целесообразно ли включать в план изделия IV вида, на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида ресурсов ценой 70 ед.?

Таблица 14

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов			Запасы ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд	1	4	3	200
Сырье	1	1	2	80
Оборудование	1	1	2	140
Цена изделия	40	60	80	

Вариант 6

На предприятии выпускается три вида изделий и используется при этом три вида сырья:

Таблица 15

Сырье	Нормы затрат ресурсов			Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	
I II III	18 6 5	15 4 3	12 8 3	360 192 180
Цена	9	10	16	

9а. Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 45 кг, а II вида - уменьшить на 9 кг?

9б. Целесообразно ли выпускать изделие *Г* ценой 11 ед., если нормы затрат сырья составляют 9, 4 и 6 кг?

Вариант 7

Для изготовления трех видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, нормы и цена каждого продукта приведены в табл.16.

9а. Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 24 кг?

9б. Целесообразно ли выпускать изделие IV вида ценой 11 ед., если нормы затрат ресурсов составляют 8, 4, 20 и 6 ед.?

Таблица 16

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов			Запасы ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд Сырье I Сырье I I Оборудовани е	3 20 10 0	6 15 15 3	4 20 20 5	2000 15000 7400 1500

Цена изделия	6	10	9	

Вариант 8

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Затраты на изготовление единицы продукции приведены в табл.17; там же указан общий фонд рабочего времени, а также цена изделия каждого вида.

Таблица 17

Тип оборудования	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Общий фонд раб. времени
	А	*Б*	*В*	*Г*	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	0	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	0	340
Цена изделия	8	3	2	1	

9а. Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если фонд времени шлифовального оборудования увеличить на 24 ч?

9б. Целесообразно ли выпускать изделие *Д* ценой 11 ед., если нор мы затрат оборудования составляют 8, 2 и 2 ед.?

Вариант 9

На предприятии выпускается три вида изделий и используются при этом три вида сырья (табл.18).

9а. Как изменятся общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 80 кг, а II вида- уменьшить на 10 кг?

9б. Целесообразно ли выпускать изделие Г ценой 7 ед., если нормы затрат сырья составляют 2, 4 и 3 кг?

Таблица 18

Тип сырья	Нормы расхода сырья			Запасы сырья, кг
	А	*Б*	*В*	
I II III	1 3 1	2 0 4	1 2 0	430 460 420
Цена изделия	3	2	5	

Вариант 10

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода на одно изделие и цена каждого продукта приведены в табл.19

Таблица 19

Тип сырья	Нормы расхода сырья на изделие				Запасы сырья
	А	*Б*	*В*	*Г*	
I II III	2 1 3	1 5 0	0,5 3 6	4 0 1	2400 1200 3000
Цена изделия	7,5	3	6	12	

9.а. Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 100 кг, а II вида - уменьшить на 150 кг?

9.б. Целесообразно ли выпускать изделие *Д* ценой 10 ед., если нормы затрат сырья составляют2, 4 и 3 кг?

Задача 3

Исходные данные транспортной задачи приведены схематически: внутри прямоугольника заданы удельные транспортные затраты на перевозку единицы груза, слева указаны мощности поставщиков, а сверху - мощности потребителей. Сформулировать экономико-математическую модель исходной транспортной задачи, найти оптимальный план закрепления поставщиков за потребителями, установить единственность или не единственность оптимального плана, используя **Поиск решения.**

Таблица 20

Вариант 1

	150	**40**	**110**	**50**
70	9	5	10	7
80	11	8	9	6
90	7	6	5	4
110	6	4	3	2

Вариант 2

	25	**10**	**20**	**30**	**15**
40	5	3	4	6	4
20	3	4	10	5	7
40	4	6	9	3	4

Вариант 3

	100	**140**	**100**	**60**
100	5	4	3	2
60	2	3	5	6
80	3	2	4	3
160	4	1	2	4

Вариант 4

	150	**350**	**200**	**100**	**100**
500	3	3	5	3	1
300	4	3	2	4	5
100	3	7	5	4	1

Вариант 5

	60	**40**	120	100
70	4	8	1	6
80	3	5	3	4
90	2	6	4	3

Вариант 6

	40	**30**	**90**	**80**	**50**

60 **90** **140**	4 2 6	2 4 5	3 3 4	4 5 6	1 6 2

Продолжение табл. 20

Вариант 7

	8	**9**	**13**	**8**	**12**
9	**5**	**15**	**3**	**6**	**10**
11	**23**	**8**	**13**	**27**	**12**
14	**30**	**1**	**5**	**24**	**25**

Вариант 8

	40	**30**	**20**	**50**
60 **70** **50**	2 2 8	4 3 4	5 9 2	1 4 5

Вариант 9

	11	**11**	**11**	**16**	**11**
15 **15** **15**	3 19 20	4 2 27	5 22 1	15 4 17	24 13 19

Вариант 10

	7	**7**	**7**	**7**	**2**
4 **6** **10** **10**	16 20 13 3	30 27 4 1	17 26 22 5	10 9 3 4	16 23 1 24
9	5	15	3	6	10
11	23	8	13	27	12
14	30	1	5	24	25

10 МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Номер Вашего варианта соответствует последней цифре зачетной книжки.

Задача 1

В табл. 21 для каждого варианта заданы три временных ряда: первый из них представляет нарастающую по кварталам прибыль коммерческого банка y_t , второй и третий ряд - процентные ставки этого банка по кредитованию юридических лиц x_{2t} и депозитным вкладам x_{1t} за этот же период.

Требуется:

1. Вычислить матрицу коэффициентов парной корреляции и проанализировать тесноту связи между показателями.
2. Построить линейную модель регрессии, описывающую зависимость y_t от факторов X_{1t} и x_{2t}
3. Оценить качество построенной модели. Вычислить для модели среднюю ошибку аппроксимации и коэффициент детерминации.
4. Проанализировать по модели влияния факторов на зависимую переменую (для каждого коэфициента регрессии вычислить коэфициент эластичности ,β- коэфициент,

Δ-коэфициент) и оценить их значимость при ($t_{Kp} = t_{0,7} =$ 1,12).

Таблица 21

Номер наблюдения (t=1,2……. ____________,10)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вариант 1

3	11	10	11	15	17	21	25	23	19
18	14	33	37	40	42	41	49	56	48
20	22	14	26	25	32	35	34	39	45

Продолжение табл. 21

Вариант 2

16	20	22	14	25	28	25	28	30	31
30	34	40	38	22	48	50	52	53	49
25	27	30	31	35	27	42	41	43	42

Вариант 3

11	15	10	16	22	17	26	28	33	34
88	85	78	86	81	80	83	78	76	69
75	77	73	67	66	63	67	63	44	60

Вариант 4

43	47	50	48	67	57	61	59	65	54
30	34	32	36	39	44	45	41	46	47
28	24	26	29	33	31	24	33	35	34

Вариант 5

15	20	22	14	25	28	25	28	30	31
32	34	41	38	42	48	50	52	54	51
32	28	26	24	25	23	19	27	22	20

Вариант 6

70	76	78	76	80	82	89	78	88	120
65	58	63	60	56	53	54	53	51	52
58	60	56	57	53	50	44	40	35	22

Вариант 7

4	12	10	11	15	17	21	25	23	19
15	20	22	14	25	28	25	28	30	32
45	38	40	36	38	34	25	28	27	26

Вариант 8

20	88	78	89	82	80	76	78	76	70
15	20	22	14	25	28	25	28	30	31
42	47	50	48	67	57	61	59	65	54

Вариант 9

16	14	33	37	40	42	41	49	56	48
28	34	40	38	22	48	50	52	53	49
87	85	78	86	81	80	83	78	76	69

Вариант10

24	22	15	26	25	32	35	34	39	45
62	58	63	60	56	53	54	53	51	52
30	28	26	24	25	23	19	27	22	20

11. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ

Задача 11.1. Построить и рассчитать временные характеристики сетевых графиков.

Номер Вашего варианта (номер задачи) соответствует последней цифре зачетной книжки.

11.1. Проект разработки и внедрения нового вида продукта включает в себя следующие работы (табл.22).

Таблица 22

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	—	1
A_2	—	5
A_3	A_1	3
A_4	A_1	2
A_5	A_2, A_3	6
A_6	A_2, A_3	5
A_7	A_4, A_5	5
A_8	A_6	3

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5. построить линейный график выполнения работ проекта.

11.2. Фирма «Астра» запланировала реконструкцию своего офиса. Перечень работ, которые необходимо для этого выполнить, представлены в табл.23

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5. построить линейный график выполнения работ проекта.

Таблица 23

Работа	Содержание	Предшествующие работы	Продолжительность, дн.
A_1	Определение объема реконструкции	–	5
A_2	Составление сметы затрат	A_1	10
A_3	Выбор проекта реконструкции	A_1	5
A_4	Выбор строительной организации	A_2	3
A_5	Получение финансового обеспечения	A_2	5
A_6	Составления договора на выполнение работ	A_4	3
A_7	Экономическое обоснование проекта	A_3	4
A_8	Привязка проекта к условиям фирмы	A_7	5

A_9	Работа по реконструкции	A_5 A_6 A_8	39

11.3. Подготовка и проведение экскурсионного тура требует выполнения следующих работ (табл. 24).

Таблица 24

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
A	—	6
A_2	—	8
A_3	—	2
A_4	A	3
A_5	A	4
A_6	A_3	6
A_7	A	3
A_8	A_2, A_5, A_6	4
A_9	A_2, A_5, A_6	4
A_{10}	A_4, A_8	2
A_{11}	A_7	3

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5. построить линейный график выполнения работ проекта

11.4 Комплекс работ по организации спортивно-оздоровительного мероприятия для детей туристской школы приведен в табл. 25.

Таблица 25

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы
A_1	—	4
A_2	—	6
A_3	A_1	2
A_4	A_1	6
A_5	A_2, A_3	3
A_6, A_7	A_2, A_3 A_4, A_5	3 5

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3. рассчитать временные параметры свершения событий;
4. определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5. построить линейный график выполнения работ проекта.

11.5. Осуществление проекта требует выполнения ряда работ, перечень которых задан в табл. 26.

Таблица 26

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность
A_1	—	5
A_2	—	3
A_3	A_1	7
A_4	A_1	6

A_5	A_2	7
A_6	A_4, A_5	3
A_7	A_4, A_5	10
A_8	A_3, A_6	8

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;

2. определить:

а) сколько времени потребуется для завершения проекта;

б) можно ли отложить выполнение работы A_4 без отсрочки завершения проекта в целом;

в) на сколько месяцев можно отложить выполнение работы A_3 без отсрочки завершения проекта в целом?

11.6. Проект подготовки нового экскурсионного тура состоит из восьми работ (табл. 27)

Таблица 27

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, дн.
A_1	—	3
A_2	—	6
A_3	A_1	2
A_4	A_2, A_3	5
A_5	A_4	4
A_6	A_5	3
A_7	A_2, A_3	9
A_8	A_6, A_7	3

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;

2. рассчитать минимальное время выполнения проекта;

3. рассчитать временные параметры свершения событий;

4. можно ли отложить выполнение работы A_3 без отсрочки завершения проекта в целом;

5. на сколько дней можно отложить выполнение работы A_6 без отсрочки завершения проекта в целом.

11.7. Университет рассматривает предложение о строительстве новой турбазы. Работы, которые следует выполнить перед началом строительства, представлены в табл. 28.

Таблица 28

Работа	Содержание работы	Предшествующие работы	Продолжительность работы
A_1	Определить место строительства	—	6
A_2	Разработать первоначальный проект	A_1	8
A_3	Получить разрешение на строительство	A_1	12
A_4	Выбрать архитектурную мастерскую	A_3	4
A_5	Разработать смету затрат на строительство	A_3	12
A_6	Закончить разработку проекта	A_4, A_5	15
A_7	Получить финансовое обеспечение	A_2, A_5	12
A_8	Нанять подрядчика	A_6, A_7	8

Требуется:

1. построить сетевой график проекта;
2. найти критический путь;
3. определить, реально ли начать работу по строительству здания турбазы через год после принятия решения о начале проекта;
4. определить сроки свершения событий, пользуясь четырехсекторной схемой;
5. определить сроки выполнения работ и их резервы времени.

Задача 11.2. Провести оптимизацию проекта по времени. Номер Вашего варианта (номер задачи) соответствует последней цифре зачетной книжки.

11.8- 11.9. Проект представлен сетевым графиком (рис 56). Продолжительность t_{tj} работ *(i, j)* и минимальное время их выполнения $d_{i\ j}$ *,* а также технологические коэффициент использования дополнительных средств A_j - приведены в табл. 29.

Необходимо определить, сколько дополнительны: средств x_{ij} нужно вложить в каждую работу, чтобы время выполнения проекта не превосходило t_0 а сумма дополнительно вложенных средств была минимальной.

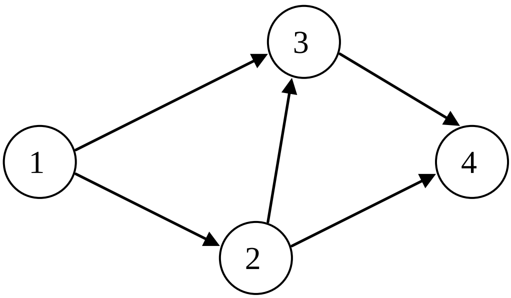


Рис. 56

Таблица 29

Номер задачи	Пара-метры	Работа (1,2)	Работа (1,3)	Работа (2,3)	Работа (2,4)	Работа (3,4)	Срок вы-полнения
11.8	t_{ij}	10	20	15	10	25	35
	d_{ij}	7	10	9	5	14	
	k_{ij}	0,05	0,3	0,4	0.1	0,2	
11.9	t_{ij}	10	20	0	10	25	30
	d_{ij}	7	10	0	5	14	

	k_{ij}	0,05	0,3	0	0.1	0,2	

11.10-11.14. Параметры проекта, заданного сетевым графиком (рис.57), приведены в табл.30.

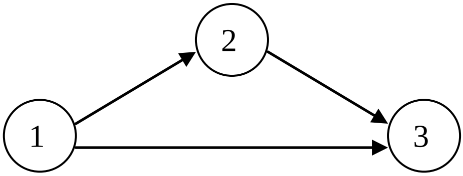


Рис. 57.

Определить величину дополнительных вложений в каждую работу, при которых время выполнения комплекса работ не превышает t_0, а сумма дополнительных вложений минимальна

Таблица 30

Номер задачи	Пара-метры	Работа			Сроки выполнения комплекса работ, t_0
		(1.2)	(1.3)	(2.3)	
11.10	t_{ij}	7	5	4	8
	d_{ij}	4	2	3	
	k_{ij}	0.3	0.4	0.7	
11.11	t_{ij}	10	20	8	11
	d_{ij}	6	7	2	
	k_{ij}	0.1	0.2	0.3	
11.12	t_{ij}	14	25	10	21
	d_{ij}	12	7	8	
	k_{ij}	0.1	0.4	0.2	
11.13	t_{ij}	15	17	9	20
	d_{ij}	10	14	5	
	k_{ij}	0.1	0.7	0.4	
11.14	t_{ij}	11	15	19	23
	d_{ij}	4	6	12	

	k_{ij}	0,2	0,3	0,1	

11.15-11.19. Определить оптимальные дополнительные вложения в выполнение работ проекта, представленного сетевым графиком (рис. 58) с параметрами из табл. 31, если общая сумма дополнительных средств составляет Б ден. ед., а время выполнения проекта должно быть как можно меньше.

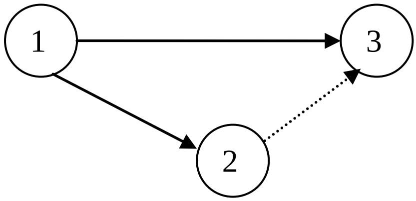


Рис.58

Таблица 31

Номер задачи	Параметры	Работа				Дополнительные средства
		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(3,4)	
11.15	t_{ij}	20	10	0	7	190
	d_{ij}	11	6	0	4	
	k_{ij}	0.1	0.8	0	0.4	
11.16	t_{ij}	11	17	0	9	210
	d_{ij}	5	8	0	4	
	k_{ij}	0.07	0.02	0	0.05	
11.17	t_{ij}	9	12	0	17	210
	d_{ij}	4	8	0	5	
	k_{ij}	0.08	0.1	0	0.06	
11.18	t_{ij}	15	5	0	6	250
	d_{ij}	8	2	0	3	

	k_{ij}	0,2	0,3	0	0,4	
11.19	t_{ij}	19	14	0	11	150
	d_{ij}	9	7	0	6	
	k_{ij}	0,02	0,03	0	0,15	

12. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Цель работы: изучение использования возможностей инструмента Поиск решений для определения параметров уравнения регрессии методом наименьших квадратов, закрепление навыков аппроксимации с помощью линейных и нелинейных функций и использования экстраполяции найденного тренда для прогнозирования.

Рассмотрим задачу построения регрессионной модели. С помощью средства поиска решений решим задачу нахождения уравнения регрессии для одной зависимой и одной независимой переменных. Данный подход позволяет исследовать любое уравнение регрессии. Используем функции рабочего листа, непосредственно вычисляющие различные характеристики линейного уравнения регрессии и экспоненциального уравнения регрессии, которые позволяют значительно упростить процедуру регрессионного анализа для наиболее часто встречающихся на практике моделей.

1. Общий подход к построению уравнения регрессии на примере линейной модели

Рассмотрим, как решается задача нелинейной оптимизации с помощью средства поиска решений на примере построения линейного уравнения регрессии. Имеются две наблюдаемые величины ***x*** и ***y***, например, объем реализации фирмы, торгующей подержанными автомобилями, за шесть недель ее работы. Значения этих наблюдаемых величин приведены на рис. 59, где ***x*** - отчетная неделя, а ***y*** - объем реализации за эту неделю.

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	Теор.знач y			
2	1	7	7,29	b	m	Z
3	2	9	9,17	5,400003	1,886	1,771
4	3	12	11,06			
5	4	13	12,94			
6	5	14	14,83			
7	6	17	16,71			

Рис. 59. Исходные данные для построения линейной модели

Необходимо построить линейную модель $y = mx + b$, наилучшим образом описывающую наблюдаемые значения. Обычно m и b подбираются так, что бы минимизировать сумму квадратов разностей между наблюдаемыми и теоретическими значениями зависимой переменной y, т.е. минимизировать

$$Z = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (b + m x_i))^2 \to min,$$

где n - число наблюдений (в данном случае $n = 6$).

Для решения этой задачи отведем под переменные b и m ячейки D3 и E3, соответственно, а в ячейку F3 введем минимизируемую функцию

{ = СУММКВРАЗН (B2 **:** B7**;** E3 **+** D3*****A2 **:** A7) }

Функция СУММКВРАЗН (SUMSQ) вычисляет сумму квадратов разностей для элементов указанных массивов.

Теперь выберем команду *Сервис, Поиск решения* (Too1s, So1ver) и заполним открывшееся диалоговое окно *Поиск решения* (So1ver) как показано на рис. 60.

Отметим, что на переменные b и m ограничения не налагаются. В результате вычислений средство Поиска решений найдет: b = 5,400003 и m = 1,886.

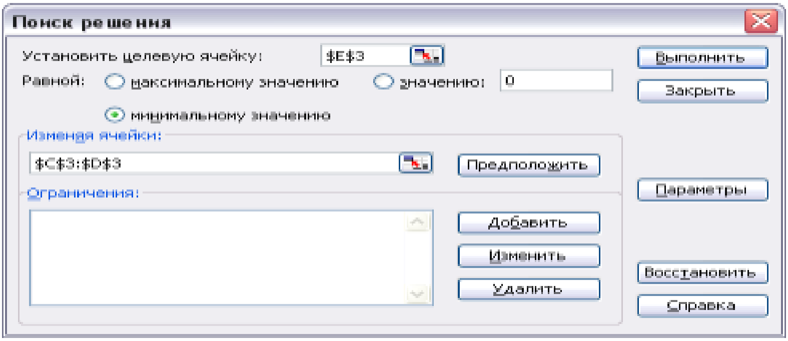


Рис. 60. Диалоговое окно *Поиск решения* для расчета уравнения регрессии

2. Функции рабочего листа для уравнения линейной регрессии

Параметры ***m*** и ***b*** линейной модели ***y = mx + b*** из предыдущего раздела можно определить с помощью функций НАКЛОН (SLOPE) и ОТРЕЗОК (INTERCEPT).

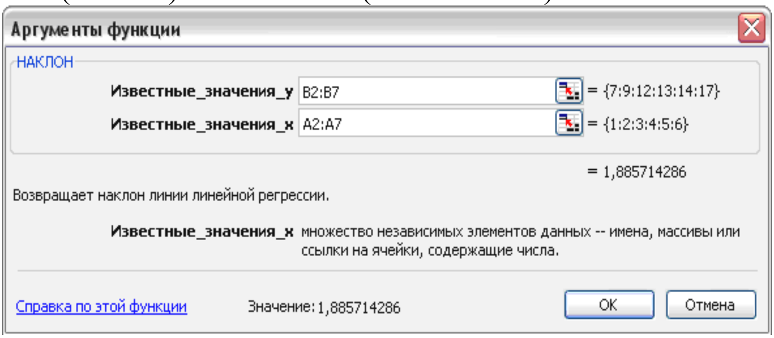


Рис. 61. Диалоговое окно функции НАКЛОН

Функция НАКЛОН (SLOPE) определяет коэффициент наклона линейного тренда.

Синтаксис

НАКЛОН (известные_значения_ y; известные_значения_x)

Функция ОТРЕЗОК (INTERCEPT) определяет точку пересечения линии линейного тренда с осью ординат.

Синтаксис:

ОТРЕЗОК (известные_значения_x; известные_значения_y)

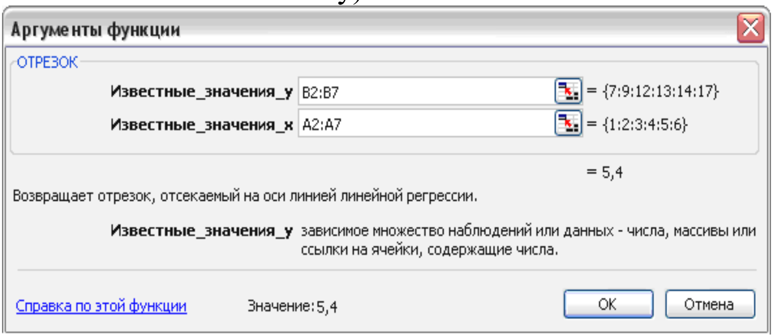


Рис. 62. Диалоговое окно функции ОТРЕЗОК

Аргументы функций НАКЛОН (SLOPE) и ОТРЕЗОК (INTERCEPT):

*известные_значения_**y*** - Массив известных значений зависимой наблюдаемой величины

*известные_значения_**x*** - Массив известных значений независимой наблюдаемой величины. Если аргумент на *известные_значения_**x*** опущен, то предполагается, что это массив {1 2; 3;...} такого же размера, как и аргумент *известные_значения_**y***

Функции НАКЛОН и ОТРЕЗОК вычисляются по следующим формулам:

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad b = \bar{y} - m\bar{x},$$

где $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

В ячейках D2 и E2 (рис. 1) найдены m и b, соответственно, по формулам:

= НАКЛОН (B2 **:** B7 **;** A2 **:** A7)

= ОТРЕЗОК (B2 **:** B7 **;** A2 **:** A7)

Коэффициенты m и b можно найти и другим способом. Постройте точечный график по диапазону ячеек A2**:**B7, выделите точки графика двойным щелчком, а затем щелкните их правой кнопкой мыши. В раскрывшемся контекстном меню выберите команду *Линии тренда* (Trendline) (рис. 63).

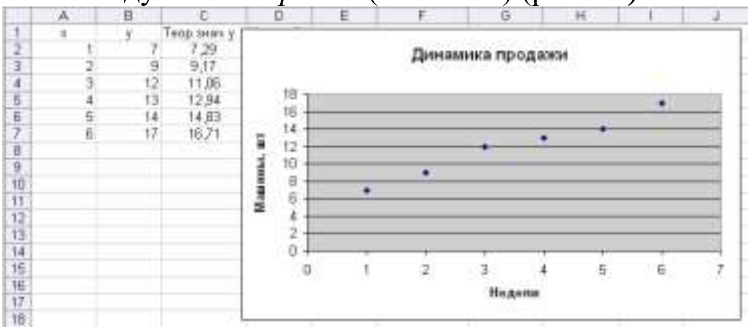


Рис. 63. Начало построения линии тренда

В диалоговом окне *Линия тренда* (Trendline) на вкладке *Тип* (Type) в группе *Построение линии тренда* (аппроксимация и сглаживание) (Trend/Regression type) выберите параметр *Линейная* (Linear) (рис. 64), а на вкладке параметры (Options) установите флажки *Показывать уравнение на диаграмме* (Display Equation on Chart) и *Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации* (R^2) (Display R-squared) (т. е. на диаграмму необходимо поместить значение квадрата коэффициента корреляции) (рис. 65).

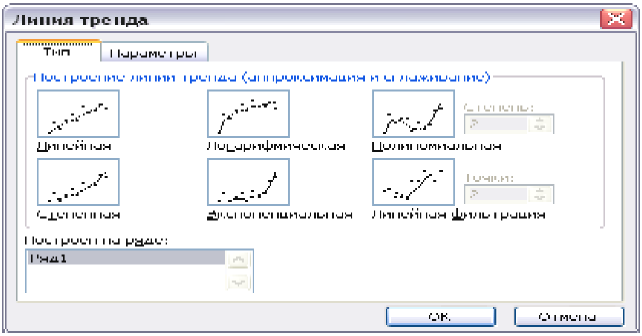


Рис. 64. Вкладка *Тип* диалогового окна *Линия тренда*

По коэффициенту корреляции можно судить о правомерности использования линейного уравнения регрессии. Если он лежит в диапазоне от 0 до 1, то данную зависимость можно использовать для предсказания результата. Чем ближе к единице коэффициент корреляции, тем более обоснованно это указывает на линейную зависимость между наблюдаемыми величинами. Если коэффициент корреляции близок к -1, то это говорит об обратной зависимости между наблюдаемыми величинами.

Флажок *Пересечение кривой с осью Y в точке* (Set Intercept) (рис. 21) устанавливается только в случае, если эта точка известна. Например, если этот флажок установлен и в его поле введен 0, это означает, что ищется модель $\boldsymbol{y = mx}$.

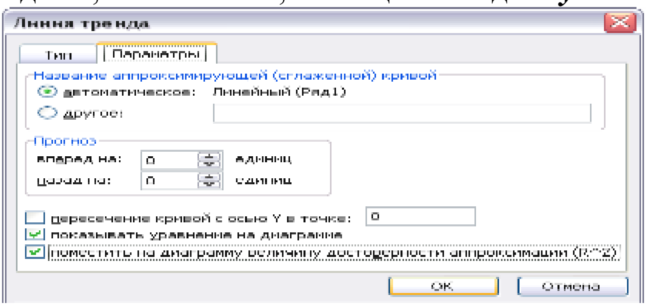


Рис. 65. Вкладка *Параметры* диалогового окна *Линия тренда*

Результат выполнения команды *Линии тренда* (Trendline) приведен на рис. 66.

Как видно из рисунка, квадрат коэффициента корреляции равен 0,9023, следовательно, линейная модель может быть использована для предсказания результатов.

На основе найденных коэффициентов уравнения регрессии можно определить теоретическое значение наблюдаемой величины $\boldsymbol{y}$. Вычислим теоретическое значение $\boldsymbol{y}$ в ячейке С2 (рис. 59) при $\boldsymbol{x}$ из А2 по формуле = $D$2*A2+$E$2 .

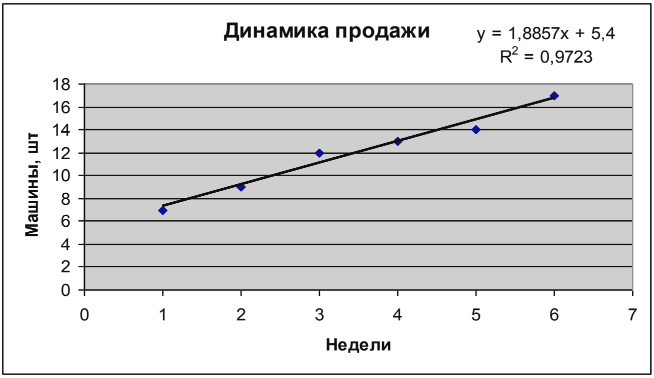


Рис. 66. График линии тренда

Однако теоретическое значение $\boldsymbol{y}$ в фиксированной точке можно вычислить и без предварительного определения коэффициентов линейной модели с помощью функции

ПРЕДСКАЗ (FORECAST).

Синтаксис:

= ПРЕДСКАЗ (t; известные_значения_ y; известные_значения_x)

Аргументы:

t - Точка данных, для которой предсказывается значение

*известные_значения_**y*** - Массив известных значений зависимой наблюдаемой величины

*известные_значения_**x*** - Массив известных значений независимой наблюдаемой величины. Если аргумент *известные_значения_**x*** опущен, то предполагается, что это массив (1 2; 3; ...} такого же размера, как и массив *известные_значения_**y***.

Например, теоретическое значение в ячейке С2 (рис. 66) можно также определить по формуле

= ПРЕДСКАЗ (А2; $B$2 : $B$7; $A$2 : $A$7)

Функция ТЕНДЕНЦИЯ (TREND) вычисляет значения уравнения линейной регрессии для целого диапазона значений независимой переменной как для одномерного, так и для многомерного уравнения регрессии. Многомерная линейная модель регрессии имеет вид:

$$\boldsymbol{y = m_1x_1 + \ldots + m_nx_n + b.}$$

Свитаксис:

= ТЕНДЕНЦИЯ (известные_значения_ у;
известные_значения_х;
новые_значения_х; конст)

Аргументы:

*известные_значения_**y*** - Массив известных значений зависимой наблюдаемой величины

*известные_значения_**x*** - Массив известных значений независимой наблюдаемой величины. Если аргумент *известные_значения_**x*** опущен, то предполагается, что это массив {1; 2; 3;..} такого же размера, как и массив *известные_значения_**y***

*новые_значения_**x*** - Новые значения ***x***, для которых функция ТЕНДЕНЦИЯ возвращает соответствующие значения **y**

конст - Логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа ***b*** была равна 0. Если аргумент *конст* имеет значение ИСТИНА или опущен, то ***b*** вычисляется обычным образом. Если *конст* имеет значение ложь, то ***b*** полагается равным 0.

Если строится многомерная линейная модель, то аргументы *известные_значения_**x*** и *новые_значения_**x*** должны содержать столбец (или строку) для каждой независимой переменной. Если аргумент *новые_значения_**x*** опущен, ***b*** то предполагается, что он совпадает с аргументом *известные_значения_**x.***

Функция ЛИНЕЙН (LINEST) возвращает массив $\{m_n, ..., m_1, b\}$ значений параметров уравнения многомерной линейной регрессии.

Синтаксис:

= ЛИНЕЙН (известные_значения_y; известные_значения_x; конст; статистика)

Аргументы:

*известные_значения_**y*** - Массив известных значений зависимой наблюдаемой величины

*известные_значения_**x*** - Массив известных значений независимой наблюдаемой величины. Если аргумент *известные_значения_x* опущен, то предполагается, что это массив {1; 2: 3;...} такого же размера, как и *известные_значения_**y***

конст - Логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа ***b*** была равна 0. Если аргумент *конст* имеет значение ИСТИНА или опущен, то ***b*** вычисляется обычным образом. Если *конст* имеет значение ложь, то ***b*** полагается равным 0

статистика - Логическое значение, которое указывает, требуется ли вывести дополнительную статистику по регрессии, на пример, коэффициент корреляции. Если *статистика* имеет значение ИСТИНА, то функция ЛИНЕЙН возвращает дополнительную регрессионную статистику. Если аргумент *статистика* имеет значение ЛОЖЬ или опущен, то функция ЛИНЕЙН возвращает только значения коэффициентов

3. Экспоненциальная модель

Другой часто встречающейся на практике регрессионной моделью является экспоненциальная модель, которая описывается уравнением

$$\boldsymbol{y = bm^x}$$

Значения экспоненциального тренда можно предсказывать с помощью функции РОСТ (GROWTH).

Синтаксис:

= РОСТ (известные_значения_ y; известные_значения_x; новые_значения_x; конст)

Аргументы:

*известные_значения_**y*** - Массив известных значений зависимой наблюдаемой величины

*известные_значения_**x*** - Массив известных значений независимой наблюдаемой величины. Если аргумент *известные_значения_**x*** опущен, то предполагается, что это массив {1; 2; 3...} такого же размера, как и *известные_значения_**y*** *новые_значения_**x***, для которых ТЕНДЕНЦИЯ возвращает соответствующие значения ***y***

конст - Логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа ***b*** была равна 0. Если аргумент *конст* имеет значение ИСТИНА или опущен, то ***b*** вычисляется обычным образом. Если *конст* имеет значение ЛОЖЬ то ***b*** полагается равным 0

Значения параметров зкспоненциальной модели определяются с помощью функции ЛГРФПРИБЛ (LOGRST)

Синтаксис:

=ЛГРФПРИБЛ (известные_значения_ y;

известные_значения_х; конст; статистика)

Аргументы:

*известные_значения_**y*** - Массив известных значений зависимой наблюдаемой величины

*известные_значения_**x*** - Массив известных значений независимой наблюдаемой величины. Если аргумент *известные_значения_**x*** опущен, то предполагается, что это массив {1; 2; 3;...} такого же размера, как и *известные_значения_**y***

конст - Логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа ***b*** была равна 0. Если аргумент *конст* имеет значение ИСТИНА или опущен, то ***b*** вычисляется обычным образом. Если *конст* имеет значение ЛОЖЬ то ***b*** полагается равным 0

статистика - Логическое значение, которое указывает, требуется ли вывести дополнительную статистику по регрессии, на пример, коэффициент корреляции. Если статистика имеет значение ИСТИНА, то функция ЛГРФПРИБЛ возвращает дополнительную регрессионную статистику. Если статистика имеет значение ЛОЖЬ или опущена, то функция ЛГРФПРИБЛ возвращает только значения коэффициентов

Кроме того, одномерную экспоненциальную модель можно построить графически (рис. 66). На рис. 67 приведены результаты построения экспоненциального уравнения тренда продажи подержанных автомобилей за 7, 8 и 9-ю недели торговли.

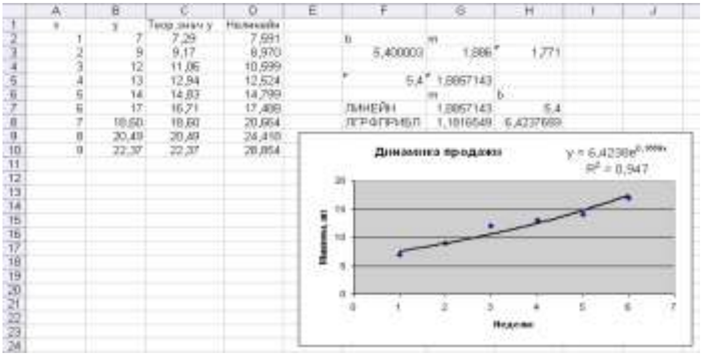


Рис. 67. Экспоненциальная линия тренда

В диапазоне ячеек B8:B10 введена формула построения линейного тренда

{= ТЕНДЕЦИЯ (B2 : B7; A2 : A7; A8 : A10)}

В диапазоне ячеек D2:D10 введена формула построения экспоненциального тренда

{= РОСТ (B2 : B7; A2 : A7; A2 : A10)}

Линейный и экспоненциальный тренды тесно связаны между собой. В диапазоне ячеек D2:D10 можно было бы получить такой же результат, введя формулу

{= EXP (ТЕНДЕНЦИЯ (LN (B2 : B7); A2 : A7; A2 : A10))}

В диапазоны ячеек G7: H7 и G8: H8 введены формулы

{= ЛИНЕЙН (B2 : B2; A2 : A7)}

{= ЛГРФПРИБЛ (B2 : B2; A2 : A7)}

для определения параметров линейной и экспоненциальной моделей.

Квадрат коэффициента корреляции экспоненциальной модели равен 0,947 (рис. 23) и меньше квадрата коэффициента корреляции линейной модели (0,9923) (рис. 22). Таким образом, в данном примере линейная модель более достоверно описывает зависимость между наблюдаемыми величинами.

Порядок выполнения работы

1.Получить у преподавателя данные для расчета.

2.Ввести исходные данные в таблицу Excel.

3.Провести на ЭВМ серию экспериментов с различными типами моделей регрессии с определением прогнозных значений зависимой переменной, параметров регрессионных моделей и коэффициентов детерминации.

4.Зафиксировать результаты расчетов в тетради.

5.Сделать выводы по результатам моделирования и записать в тетради.

Отчет по работе должен содержать

1.Название и цель работы.

2.Основные теоретические и методические положения.

3.Исходные данные для расчета.

4.Результаты расчета.

5.Выводы по результатам моделирования.

13 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ФОРМЕ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕМ

Цель работы: изучение порядка нахождения параметров уравнения нелинейной регрессии в форме, определенной пользователем и методики оценки достоверности уравнения и коэффициентов регрессии.

Исходные положения. Для нахождения параметров линейного уравнения регрессии используется функция ЛИНЕЙН, для нелинейного уравнения – функция ЛГРФПРИБЛ. Обычно анализ данных производят имея представления о форме зависимости. Если не подходит линейная форма, используют нелинейную функцию. Если же обе функции – ЛИНЕЙН и ЛГРФПРИБЛ не дают удовлетворительного результата, то в этом случае уравнение регрессии можно находить в виде функции, вид которой назначает пользователь. Например, уравнение нелинейной регрессии можно искать в виде полинома второй степени:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 + a_5x_1x_2.$$

Такую зависимость можно представить в линейной форме (линеаризовать) путем замены квадратов и произведений переменных другими переменными. Например, введем замену $x_3=x_1^2$, $x_4=x_2^2$, $x_5=x_1x_2$; тогда уравнение примет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5.$$

Оценка достоверности (α) величины R^2 уравнения регрессии производится с помощью *Статистической* функции FРАСП. В диалоговое окно ввести адрес ячейки, содержащей $F_{расч.}$; число степеней свободы, равное количеству аргументов уравнения (x_1, x_2 …); адрес ячейки, содержащей число степеней свободы (df).

$$\alpha = \text{FРАСП(A18;2;8)}$$

Величина $\boldsymbol{\alpha}$ - это вероятность того, что зависимость $\boldsymbol{y}$ от $\boldsymbol{x_i}$ отсутствует. Для оценки достоверности наличия зависимости $\boldsymbol{y}$ от $\boldsymbol{x_i}$ нужно из единицы вычесть значение, полученное с помощью функции FРАСП.

Достоверность значения определяемых величин b_0 и b_i оценивается с помощью вероятности, найденной из распределения Стьюдента. Для этого нужно вычислить величины $\boldsymbol{t_i=b_i/\sigma_i}$ ($\boldsymbol{i=\overline{0,n}}$). Далее определим δ-вероятность того, что значения $\boldsymbol{b_i}$ и $\boldsymbol{\sigma_i}$ не достоверны: вызвать статистическую функцию СТЬЮДРАСП и в диалоговое окно ввести адрес найденного значения $\boldsymbol{t_i}$ (для исключения отрицательных величин используем функцию абсолютной величины ABS); адрес ячейки, содержащей число степеней свободы (df) – число измерений минус число параметров модели; хвосты – 2 (это признак используемого двухстороннего распределения Стьюдента):

$$\delta = \text{СТЬЮДРАСП(ABS(A21);B18;2)}$$

Определим (1 - δ) – вероятность того, что значения $\boldsymbol{b_i}$ достоверны.

Пример выполнения работы. Введем исходные данные в таблицу 32:

Таблица 32

	A	B	C
1	x1	x2	y
2	17	2	50
3	15	17	250
4	13	12	400
5	12	14	500
6	10	10	550
7	9	20	600

Продолжение табл. 32

8	8	11	550
9	7	15	400
10	6	13	375
11	4	18	150
12	1	5	50

Используя функцию листа ЛИНЕЙН определим параметры уравнения регрессии, коэффициент детерминации и среднеквадратические отклонения:

Таблица 33

15	18.73282693	6.21542	61.32999
16	11.36621921	12.82976	203.4766
17	0.259628468	192.5387	#Н/Д
18	1.402692872	8	#Н/Д
19	103998.9033	296569.3	#Н/Д

Определим оценки достоверности коэффициента детерминации и коэффициентов уравнения регрессии:

Таблица 34

	A	B	C	D
15	18.73282693	6.21542	61.32999	
16	11.36621921	12.82976	203.4766	α
17	0.259628468	192.5387	#Н/Д	=FРАСП(A18;2;8)
18	1.402692872	8	#Н/Д	1 - α
19	103998.9033	296569.3	#Н/Д	=1-D17
20	t_2	t_1	t_0	
21	=A15/A16	=B15/B16	=C15/C16	
22	δ_2	δ_1	δ_0	
23	=СТЬЮДРАСП(ABS (A21); $B$18;2)	=СТЬЮДРАСП(ABS(B21); $B$18;2)	=СТЬЮДРАСП(ABS(C21); $B$18;2)	
24	1- δ_2	1- δ_1	1- δ_0	
25	=1-A23	=1-B23	=1-C23	

В результате получим: коэффициент детерминации R^2=0.259 , оценка достоверности по большинству параметров малозначима.

Таблица 35

5	18.73283	6.2154196	61.32999	
16	11.36622	12.829756	203.4766	α
17	0.259628	192.53872	#Н/Д	0.300468
18	1.402693	8	#Н/Д	1 - α
19	103998.9	296569.28	#Н/Д	0,699532
20	t_2	t_1	t_0	
21	1.648114	0.4844535	0.301411	
22	δ_2	δ_1	δ_0	
23	0.137942	0.641049	0.770787	
24	1- δ_2	1- δ_1	1- δ_0	
25	0.862058	0.358951	0.229213	

Воспользуемся функцией листа ЛГРФПРИБЛ для определения параметров нелинейной модели и оценим значимость параметров:

Таблица 36

	A	B	C	D
27	1.119235523	1.033221055	48.65104965	
28	0.045577723	0.0514464	0.815926393	α
29	0.438003529	0.77206645	#Н/Д	=FРАСП(A29;2;8)
30	3.117482412	8	#Н/Д	1 - α
31	3.716579003	4.768692826	#Н/Д	=1-D29
32	t_2	t_1	t_0	
33	=ABS(LN(A27)/A28)	=ABS(LN(B27)/B28)	=ABS(LN(C27)/C28)	
34	δ_2	δ_1	δ_0	
35	=СТЬЮДРАСП(ABS(A33);$B$30;2)	=СТЬЮДРАСП(ABS(B33);$B$30;2)	=СТЬЮДРАСП(ABS(C33);$B$30;2)	
36	1- δ_2	1- δ_1	1- δ_0	
37	=1-A35	=1-B35	=1-C35	

При расчете параметра ***t*** при использовании формулы: $\boldsymbol{t_i}$**=abs(ln(b$_i$)/ln(σ$_i$))**, необходимо использовать натуральный логарифм в числителе, а в знаменателе использовать логарифм не следует, поскольку в данном случае функция возвращает натуральные логарифмы среднеквадратических отклонений.

Результат расчета представлен в следующем виде:

Таблица 37

	A	B	C	D
27	1.119235523	1.033221055	48.65104965	
28	0.045577723	0.0514464	0.815926393	α
29	0.438003529	0.77206645	#Н/Д	0,099755
30	3.117482412	8	#Н/Д	1 - α
31	3.716579003	4.768692826	#Н/Д	0,900245
32	t_2	t_1	t_0	
33	[illegible].471511891	0.635246794	4.761058615	
34	δ_2	δ_1	δ_0	
35	0.038619312	0.543005729	0.001424864	
36	1- δ_2	1- δ_1	1- δ_0	
37	0.961380688	0.456994271	0.998575136	

Как видно, коэффициент детерминации невелик, а значимость параметров выше, чем при использовании линейной функции.

Используем модель зависимости в форме, определенной пользователем. Введем исходные данные и преобразуем ряды данных, как это показано в таблице. Новые ряды данных получаются путем возведения рядов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ в квадрат и перемножения значений в этих рядах.

В результате получим:

Таблица 38

	E	F	G	H	I	J
1	x1	x2	x1^2	x2^2	x1x2	y
2	17	2	289	4	34	50
3	15	17	225	289	255	250
4	13	12	169	144	156	400
5	12	14	144	196	168	500
6	10	10	100	100	100	550
7	9	20	81	400	180	600
8	8	11	64	121	88	550
9	7	15	49	225	105	400
10	6	13	36	169	78	375
11	4	18	16	324	72	150
12	1	5	1	25	5	50

Анализ результатов полученных с помощью последней модели, показывает, что коэффициент детерминации в данном случае значительно выше, чем для линейной и нелинейной зависимостей. Оценки достоверности также более значимы для модели, определенной пользователем.

Таблица 39

	E	F	G	H	I	J	K
15	2.437183	2.413082	-11.5036	-91.5865	188.9164	255.8772	
16	0.354402	0.449605	0.687025	13.85134	11.11549	66.93317	α
17	0.990664	27.3488	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	4,529E-05
18	106.11	5	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	1- α
19	396828.4	3739.784	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	0,999954
20	t_5	t_4	t_3	t_2	t_1	t_0	
21	6.876886	5.367111	-16.7441	-6.61211	16.99578	3.822876	
22	δ_5	δ_4	δ_3	δ_2	δ_1	δ_0	
23	0.000995	0.003022	1.39-05	0.00119	1.29-05	0.012337	
24	1- δ_5	1- δ_4	1- δ_3	1-δ_2	1- δ_1	1- δ_0	
25	0.999005	0.996978	0.999986	0.99881	0.999987	0.987663	

Порядок выполнения работы

1.Получить у преподавателя данные для расчета.

2.Ввести исходные данные в таблицу Excel.

3.Провести на ЭВМ серию расчетов по определению параметров множественной корреляционной зависимости для линейной, нелинейной модели и модели, определяемой пользователем.

4.Определить оценку достоверности коэффициентов корреляции и детерминации.

5.Зафиксировать результаты расчетов в тетради.

6.Сделать выводы по результатам моделирования и записать в тетради.

Отчет по работе должен содержать

1.Название и цель работы.

2.Основные теоретические и методические положения.

3.Исходные данные для расчета.

4.Результаты расчета.

5.Выводы по результатам моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимость предвидеть будущее осознавалась во все времена. Но особенно сильно роль прогнозирования возросла в наши дни, при стремительных темпах развития общества, науки и техники, производства и производственных отношений. Сегодня прогнозов, основанных на интуиции, уже явно недостаточно. Теперь необходимо прогнозирование, основанное на объективных закономерностях, на использовании математического аппарата, приводимое на основе научных методов и моделей, на обработке первичных данных с помощью информационных технологий. Поэтому в настоящее время прогнозирование – это уже самостоятельная отрасль науки в области познания закономерностей развития общества, выяснении тенденций социально-экономического и технологического прогресса. Важная роль в совершенствовании экономического прогнозирования, повышения достоверности разрабатываемых прогнозов принадлежит также прикладной научной дисциплине, изучающей закономерности и способы разработки прогнозов развития объектов любой природы, - прогностике, в том числе экономической прогностике. В научной литературе прогностика определяется как наука о принципах, методах и средствах (инструментах) научного прогнозирования.

В учебном пособии представлены методы, механизмы и инструменты прогнозирования. Рассмотрены факторы, определяющие качественное развитие экономических систем с точки зрения их стратегического развития. Даны алгоритмы построения количественных прогнозов, позволяющих оценить перспективу развития социально-экономических систем.

В учебном пособии представлены основные разделы экономико-математического прогнозирования, необходимые экономистам и менеджерам (руководителям и специалистам) для обоснования управленческих решений и сложных производственно-экономических ситуаций и проверки их на моделях процессов, проходящих в экономике и менеджменте.

При изложении материала используется компьютерно ориентируемый подход с использованием математических функций и надстроек Excel, а также пакета прикладных математических программ для персональных компьютеров

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андрейчиков, А.В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике [Текст] / А.В. Андрейчиков, О.Н. Андрейчикова. - М.: Финансы и статистика, 2000. - 368 с.

2. Бешелев, С. Д. Математико-статистические методы экспертных оценок [Текст] / С.Д. Бешелев, Ф.Г. Гурвич. - М.: Статистика, 1980. - 263 с.

3. Винн, Р. Введение в прикладной эконометрический анализ [Текст]: пер. с анг. / Р. Винн. - М: Финансы и статистика, 1981.- 294с

4. Давние, В.В. Основы эконометрического моделирования [Текст] : учеб. пособие / В.В. Давние, В.И. Тинякова. - Воронеж: АОНО «ИММиФ», 2003. - 155с.

5. Джонстон, Д.Ж. Эконометрические методы. Пер. с англ. [Текст] / Д.Ж. Джонстон. - М.: Статистика, 1980. - 444с.

6. Дубровский, С.А. Прикладной многомерный статистический анализ [Текст] / С.А. Дубровский. - М.: Финансы и статистика, 1982. - 216с.

7. Евланов, Л.Г. Теория и практика принятия решений [Текст] / Л.Г. Евланов. - М.: Финансы и статистика, 1989. - 206с.

8. Енина, Е. П. Методы моделирования и прогнозирования в экономике [Текст] : учеб. пособие ВГТУ / Е.П. Енина. - изд. ВГТУ, 2013. - 212с.

9. Енина, Е. П. Методы и модели в экономике и управлении [Текст] : учеб. пособие ВГТУ / Е.П. Енина, СВ. Амелин. - изд. ВГТУ, 2011, -232с.

10. Енина, Е.П. Финансовый анализ [Текст]: учеб. Пособие / Е. П. Енина. - изд. ВГТУ, 2010. - 247с.

11 Замков, О.О. Математические методы в экономике [Текст] - М.:ДИС, 1997. - 208 с.

12. Захарченко, Н.И. Бизнес-статистика и

программирование в MS Excel [Текст] / Н.И. Захарченко. -М.: Издательский дом «Вильяме», 2004. - 208 с.

13. Зуб, А. Т. Принятие управленческих решений. Теория и практика [Текст] : учеб. пособие / А.Т. Зуб. - М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2010. - 400с.

14. Иванов, А.И. Разработка управленческих решений [Текст] : учеб. Пособие / А.И. Иванов, А.В. Малявина. - М.: МАЭП, ИИК «Калита», 2000.- 392с.

15. Карданская, Н.Л. Принятие управленческого решения [Текст] : учебник для вузов / Н.Л. Карданская. - М.: ЮНИТИ, 1999. - 407 с.

16. Карлберг, К. Прогнозирование продаж в Excel / К. Карлберг. М.: ООО "И.Д. Вильяме", 2006. 368 с.

17. Карпов, А.В. Психология принятия управленческих решений [Текст] / А. В. Карпов; под ред. В. Д. Шадрикова.- М.: Юристъ, 1998.-440 с.

18. Кини, Р. Принятие решений при многих критериях [Текст] / Р. Кини, Х. Райфа. - М.: Радио и связь, 1984. - 270с.

19. Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В.А. Кколемаев. - М.: Статистика, 1991.

20. Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование [Текст] / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. - Мн.: Вышэйшая школа, 1994. -287с.

21. Кулагин, ОА. Принятие решений в организациях [Текст] : учеб. пособие. / ОА. Кулагин. - СПб.: Изд. дом «Сентябрь», 2001. - 148с.

22. Курицкий, Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 [Текст] / Б.Я. Курицкий. - СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997. - 384 с.

23. Ларичев, О.И. Наука и искусство принятия решений [Текст] / О.И. Ларичев. - М.: Наука, 1979.- 200с.

24. Ларичев, О.И. Объективные модели и субъективные решения [Текст] / О.И. Ларичев. - М.: Наука, 1987. - 204с.

25. Ларичев, О.И. Теория и методы принятия решений [Текст]: учебник. - М.: Логос, 2002. - 392с.

26. Ларичев, О.И. Качественные методы принятия решений [Текст] / О.И. Ларичев, Е.М. Мошков. - М: Наука, 1996.- 387с.

27. Лафта, Дж.К. Управленческие решения [Текст] : учеб. пособие / Дж. К. Лафта. - М.: Центр экономики и маркетинга, 2002. - 304с.

28. Лескин, А.А. Системы поддержки управленческих и проектных решений [Текст] / А.А. Лескин, В.Н. Мальцев. - М.: Машиностроение, 1990. - 167с.

29. Литвак, Б.Г. Разработка управленческого решения [Текст]: учебник / Б.Г. Литвак. - М.: Дело, 2000. - 392с.

30. Мангус, Я.Р. Эконометрика. Начальный курс [Текст]: учеб./ Я.Р. Мангус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. - М.: Дело, 2001. -400с.

31. Мескон, М.Х. Основы менеджмента [Текст]: пер. с англ. / М.Х. Мескон, М. Альберт, Ф. Хедоури. - М.: Дело, 1998. - 799с.

32. Мильнер, Б.З. Системный подход к организации управления [Текст] / Б.З. Мильнер, Л.И. Евенко, В.С. Рапопорт. - М.: Экономика, 1983. - 224с.

33. Модели анализа данных и принятия решений [Текст] / под ред. Б.Г. Миркина. - Новосибирск: ИЭИОПП, 1980. - 165с.

34. Мушик, Э. Методы принятия технических решений [Текст]: пер. с нем. / Э. Мушик, П. Мюллер. - М.: Мир, 1990.- 208с.

35. Орлов, А.И. Эконометрика [Текст]: учебник для вузов / А.И. Орлов. - М.: Экзамен, 2003.- 576с.

36. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXEL практикум [Текст]: учеб. пособие для вузов / И.В. Орлова. - М: ЗАО «Финстатинформ», 2000. -136с.

37. Орловский, С.А. Проблемы принятия решений при

нечеткой исходной информации [Текст] / С.А. Орловский. -М.: Наука, 1981. – 230 с.

38. Плаус, С. Психология оценки и принятия решений [Текст]: пер. с англ. / С. Плаус. - М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», 1998.- 368с.

39. Попов, В.М. Ситуационный анализ бизнеса и практика принятия решений [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.М.Попов, С.И.Ляпунов, В.В.Филиппов, Г.В.Медведев. - М.: КноРус, 2001.-384с.

40. Раппопорт, Б.М. Оптимизация управленческих решений [Текст] / Б.М. Раппопорт. - М.: ТЕИС, 2001.- 264с.

41. Рейльян, Я.Р. Аналитическая основа принятия управленческих решений [Текст] / Я.Р. Рельян. - М.: Финансы и статистика, 1989.-206с.

42. Ременников, В.Б. Разработка управленческого решения [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.Б. Ременников.- М.: ЮНТИ-ДАНА, 2000. -140с.

43. Розанова, В.А. Психология управления [Текст]: учебно-практ. пособие / В.А. Розанова. - М.: ЗАО «Бизнес-школа», «Интел-Синтез». 1997. - Ч I и Ч II - 176с.

44. Салманов, О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel [Текст] / О.Н. Салманов. - СПб.: БХВ-Петербург, 2003. - 464с.

45. Сборник задач по эконометрике: учеб. пособие для студ. эконом, вузов [Текст] / Е.Ю. Дорохина. - М.: Экзамен, 2003. - 224с.

46. Симов, В.Б. Принятие решений в нечеткой обстановке [Текст] / В.Б. Симонов. - М.: ИНПРО-РЕС, 1999. - 255с.

47. Смирнов, Э.А. Разработка управленческих решений [Текст]: учеб. для вузов / Э.А. Смирнов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.- 271с.

48. Спицин, О.Г. Принятие решений в управлении [Текст] / О.Г. Спицин. - М.: ИНФРА-М, 1998. - 303с.

49. Спицнадель, В.Н. Теория и практика принятия оптимальных решений [Текст]: учеб. пособие / В.Н. Спицнадель. - СПб.: Изд. дом «Бизнес-пресса», 2002. - 395с.

50. Тихомиров, Н.П. Эконометрика [Текст]: учебн. / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. - М.: Экзамен, 2003. - 512с.

51. Трахтенгерц, Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений [Текст] / Э.А. Трахтенгерц. - М.: Синтег, 1998. - 376с.

52. Трахтенгерц, Э.А. Методы генерации, оценки и согласования решений в распределительных системах поддержки принятия решений [Текст] / Э.А. Трахтенгерц // Автоматизация и технология, - 1995.-№ 4.-С. 33 -52.

53. Фатхутдинов, Р.А. Управленческие решения [Текст]: учебник / Р.А. Фатхутдинов. - М.: ИНФРА - М.- 2006.- 344с.

54. Хайниш, СВ. Нестандартные ситуации [Текст]: практикум для хозяйственных руководителей / СВ. Хайниш. - М.: Экономика, 1992. -206с.

55. Цыгичко, В.Н. Руководителю - о принятии решений [Текст] / В.Н. Цыгичко.- М.: ИНФРА-М, 1996. - 272с.

56. Эддоус, М. Методы принятия решений [Текст]: пер. с англ. / М. Эддоус, Р. Стенфилд; под ред. И.И. Елисеевой. - М.: ЮНИТИ, 1997.-590с.

57. Эконометрика [Текст] / под ред. И.И.Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2001.

58. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие [Текст] / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др. -Мн.: БГЭУ, 1999.-413с.

59. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие [Текст] / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др. - Мн.: БГЭУ, 1999. - 413с.

60. Экономико-математические модели и методы. Методические указания, программа и контрольные задания по дисциплине «Экономико-математические модели и методы в экономике» для студентов экономических специальностей

заочной формы обучения / сост. С.А. Поттосина. - Мн.: БГУИР, 1999. -40 с.

61. Юкаева, В.С. Управленческие решения [Текст]: учеб. пособие / В.С. Юкаева. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2006. - 324с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Енина Елена Павловна

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ: ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Подписано к изданию 27.11.2013.

Объем данных 7,68 Мб.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14