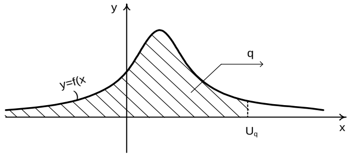
ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации самостоятельной работы
по изучению дисциплины «Теория вероятностей и
математическая статистика»
для студентов специальности
230104 «Системы автоматизированного проектирования»
очной формы обучения
Часть 1



Воронеж 2011

Составители: канд. физ.-мат. наук Е.Г. Глушко,
канд. физ.-мат. наук А.П. Дубровская

УДК 517.9

Методические указания для организации самостоятельной работы по изучению дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальности 230104 «Системы автоматизированного проектирования» очной формы обучения Часть 1 / ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Е.Г. Глушко, А.П. Дубровская. Воронеж, 2011. 65 с.

В методических указаниях содержатся основные теоретические положения по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Приводится большое количество решенных типовых задач, задач для самостоятельного решения.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS Word 2003 и содержатся в файле Теор.вер.doc.

Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой
д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

Справочный материал и принципы решения задач

Занятие №1. Элементы комбинаторики

Пусть имеется k групп элементов, причем i-тая группа состоит из n_i – элементов. Сколькими способами можно составить новое множество, взяв из каждого исходного множества по одному элементу? Ответ на этот вопрос дает *основной комбинаторный принцип*:

Если некоторый первый выбор можно сделать n_1 способами, для каждого первого выбора некоторый второй можно сделать n_2 способами, для каждой пары первых двух - третий выбор можно сделать n_3 способами и так далее, то число способов для последовательности таких выборов равно

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Комбинаторные формулы в прикладных задачах теории вероятностей обычно связывают с выбором m элементов («выборкой объема m») из совокупности, состоящей из n элементов (элементов «генеральной совокупности»). Различают два способа выбора:

а) *повторный*, при котором выбранный элемент возвращается в генеральную совокупность и может быть выбран вновь;

б) *бесповторный*, при котором выбранный элемент в генеральную совокупность не возвращается и выборка не содержит повторяющихся элементов

При повторном выборе выборку объема m можно сделать n^m способами. Например, повторную выборку объема два из трех элементов $\{a,b,c\}$ можно сделать $3^2 = 9$ способами: $aa, ab, ba, bb, bc, cb, ac, ca, cc$.

При бесповторном выборе выборку объема m можно сделать $A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$ способами. Число A_n^m называют *числом размещений* из n элементов по m. Размещения отличаются либо *составом* элементов, либо *порядком* их расположения. Например, размещений из трех элементов $\{a,b,c\}$ по два можно составить $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$: ab, ba, ac, ca, bc, cb. Число размещений вычисляется по формуле $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Выборки объема m, которые отличаются друг от друга только составом, можно сделать $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ способами.

Число C_n^m называют *числом сочетаний* из n элементов по m. Например, сочетаний из трех элементов $\{a,b,c\}$ по два существует $C_3^2 = 3$: ab, ac, bc.

При повторном выборе из n элементов число выборок объема m, которые отличаются только составом равно C_{n+m-1}^m.

Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов.

Число различных перестановок из n элементов P_n вычисляется по формуле $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Совокупность из n элементов разделить на m групп по $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов соответственно ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$) можно $\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$ способами**.**

Порядок элементов внутри каждой из этих m групп не имеет значения.

Пусть $A_1, A_2, ..., A_k$ - множества, число элементов в каждом из которых равно соответственно $n_1, n_2, ..., n_k$. Составить множество В из m_1 элементов множества A_1, m_2 элементов множества $A_2, \ldots, m_k$ элементов множества A_k, можно согласно основному комбинаторному принципу,

$$C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{m_k}$$

способами.

Для безошибочного выбора комбинаторной формулы достаточно последовательно ответить на вопросы в следующей схеме:

<table>
<tr><td rowspan="6">Откуда выбор?
(n-?)

Сколько выбираем?
(m-?)</td><td rowspan="2">Состав</td><td>Бесповторный</td><td>C_n^m</td></tr>
<tr><td>Повторный</td><td>C_{n+m-1}^m</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Состав и порядок</td><td>Бесповторный</td><td>A_n^m</td></tr>
<tr><td>Повторный</td><td>n^m</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Порядок</td><td>Бесповторный</td><td>$n!$</td></tr>
<tr><td>Повторный</td><td>$\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$</td></tr>
</table>

Пример 1. Сколько сообщений можно послать посредством семи знаков точек и тире?

Решение. Выбор знака производится из множества двух элементов: точка и тире (n=2). Повторным способом выбирается семь элементов (m=7). Поэтому число различных сообщений равно $2^7 = 128$.

Пример 2. Сколько комбинаций из четырех букв можно составить? Сколько из них содержат только разные буквы?

Решение. Из совокупности 33 букв (n=33) необходимо выбрать четыре буквы (m=4). Если запрета на повторение букв нет, то выбор повторный и общее число комбинаций равно $(33)^4 = 1185921$. Если необходимо иметь только разные буквы, то выбор бесповторный и общее число комбинаций равно

$$A_{33}^4 = 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = 982080.$$

Пример 3. Сколькими способами можно разложить восемь книг на две пачки по четыре книги в каждой? Сколькими способами можно разложить эти книги на четыре пачки по две книги в каждой? Сколькими способами можно разослать эти книги восьми различным адресатам?

Решение. 1. Для распределения книг на две равные пачки достаточно из восьми книг (n=8) выбрать бесповторным образом любые четыре (m=4) для первой пачки, причем нас интересует только состав выбора, а остальные книги оставить для второй пачки. Поэтому общее число способов равно числу сочетаний из восьми элементов по четыре, то есть $C_8^4 = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$.

2. Для комплектации четырех пачек по две книги в каждой необходимо сначала бесповторным способом выбрать состав первой пачки ($C_8^2 = 28$ способов), затем из оставшихся шести книг выбрать две книги для второй пачки ($C_6^2 = 15$ способов), после этого из оставшихся четырех книг выбрать две книги для

третьей пачки ($C_4^2 = 6$ способов), а оставшиеся две книги составят четвертую пачку (формально, $C_2^2 = 1$ способ). Заметим, что при каждом выборе мы интересовались только составом. По комбинаторному принципу для описанной последовательности выборов существует $28 \cdot 15 \cdot 6 = 2520$ способов.

3. Рассылка восьми адресатам по одной книге каждому означает перестановку из восьми элементов, то есть имеется $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ способов.

Замечание. Для способов разделить *n* элементов на *m* групп по $k_1, k_2, \ldots k_m$ соответственно в каждой ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$) известна формула $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$.

По этой формуле решение примера 3 (2) можно получить сразу $\dfrac{8!}{2!2!2!2!} = 2520$.

Пример 4. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Для составления трехцветного флага нужно из пяти цветов (n=5) выбрать три различных цвета (m=3) , иначе флаг не будет трехцветным. При выборе нас интересует состав выбора и последовательность цветов. Поэтому число трехцветных флагов в нашем случае равно числу размещений из пяти по три, то есть равно $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Пример 5. Каких чисел от 1 до 10000000 больше - тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых нет ни одной единицы?

Решение. Для того чтобы записать семизначное число, в записи которого нет ни одной единицы, необходимо повторным способом из девяти цифр (0,2,3,4,5,6,7,8,9) выбрать семь цифр. Это можно сделать $9^7 = 4769847 < 5 \cdot 10^6$ способами. Следовательно, среди первых 10 миллионов чисел больше тех, в записи которых единица есть.

Пример 6. Каждый из 10 студентов может явиться на зачет в любой из двух назначенных дней. Сколькими способами могут студенты распределиться по дням явки на зачет? Сколькими способами могут распределиться студенты по дням явки на зачет, если каждый день должны сдавать зачет по пять студентов?

Решение. При распределении по дням явки каждый из 10 студентов производит выбор между двумя возможностями. По комбинаторному принципе всего способов выбора имеется $2^{10} = 1024$. Если же в каждый из дней должно явиться на зачет по пять студентов, то достаточно выбрать студентов для первого дня зачета, а остальные будут сдавать зачет во второй день. Из 10 студентов (n=10) следует выбрать бесповторным способом пять студентов (m=5) , причем нас интересует только состав выбора. Поэтому возможных комбинаций будет $C_{10}^5 = 252$.

Пример 7. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какой может быть наибольшая численность населения в этом государстве?

Решение. В отношении каждого из 32 зубов может быть две возможности: есть этот зуб или его нет. Выбор из этих двух возможностей нужно произвести 32 раза. Поэтому число всех мыслимых комбинаций равно $2^{32} = 4294967296$.

Пример 8. Сколькими различными способами можно переставить между собой буквы:

а) A_1, A_2, B_1, B_2, B_3; б) A, A, B_1, B_2, B_3; в) A, A, B, B, B ?

Решение. а) Так как все буквы различны, то число перестановок из них равно 5!=5·4·3·2·1=120.

б) В этом случае каждая пара перестановок отличающаяся только порядком расположения букв, например, A_1, B_1, A_2, B_2, B_3 и A_2, B_1, A_1, B_2, B_3, сливается в одну перестановку A, B_1, A, B_2, B_3. Поэтому различных перестановок будет $120/2 = 60$.

в) Итак, имеется 60 перестановок, которые отличаются друг от друга либо местами расположения букв B_1, B_2, B_3, либо порядком расположения этих букв на данных местах. Всего перестановок букв B_1, B_2, B_3 на заданных трех местах существует 3!=6. Поэтому при потере индексов у букв B_1, B_2, B_3 различимых комбинаций будет 60/6=10.

Заметим, что число различимых перестановок равно числу способов выбора из пяти мест любых двух и постановки на них буквы *A*. На остальные места ставим буквы *B*. Это число равно $C_5^2 = 10$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Перечислите все перестановки из элементов А, В, С, Д. Перечислите все размещения по два элемента и все сочетания по два элемента из элементов А, В, С, Д.

2. Сколькими способами можно из колоды карт (36 штук) выбрать пять карт так, чтобы среди них было два туза?

3. Сколькими способами можно из колоды карт (36 штук) выбрать четыре карты разных мастей?

4. Сколько различимых перестановок можно сделать из букв слова: а) наука; б) математика?

5. Сколько автомобильных номеров можно составить из трех букв и трех цифр?

6. Сколькими способами можно переставить между собой цифры 1,2,3,4,5,6 так, чтобы на четных по порядку местах стояли четные цифры, а на нечетных - нечетные?

7. Сколькими способами можно расставить шесть книг по трем полкам? Сколько способов расставить книги так, чтобы ни одна полка не пустовала?

8. Сколько четырехзначных чисел состоят только из разных цифр?

9. Сколькими способами можно поставить на полку шесть книг так, чтобы три заданные книги оказались рядом (в произвольном порядке)?

10. Сколькими способами можно разделить 15 команд на три подгруппы в каждой по пять команд?

11.Сколько различных частных производных третьего порядка имеет функция трех переменных?

12. Сколькими способами можно расселить девять студентов в трех комнатах, рассчитанных на трех человек каждая? Сколькими способами это можно сделать, если какие-либо два из этих студентов отказываются поселиться в одной комнате?

13. Студенту нужно выбрать два факультативных курса из шести возможных. Сколькими способами он может это сделать?

14. Два города А и В соединены четырьмя различными дорогами. Сколькими способами можно проехать из А в В и обратно? Сколько существует таких способов, если на обратном пути непременно выбирать новую дорогу?

15. В соревнованиях принимают участие 16 равносильных

команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

16. Сколькими способами можно выбрать путь из начала координат в точку с координатами (6,4), если каждый шаг равен 1, и его можно совершать только вправо и вверх?

Ответы: 2. 29760; 3. 6561; 4. а) 60; б) 151200;
5. 35937000, 23569920; 6. 20; 7. 729, 540; 8. 4536; 9. 144;
10. 756756; 11. 10; 12. 1680, 1260; 13. 15; 14. 16, 12; 15. 240;
16. 210.

Занятие № 2. Непосредственное вычисление вероятностей

2.1. Классическое определение вероятности

Классическая схема служит моделью тех случайных явлений, для которых представляется естественным предположение о равновозможности (равновероятности) конечного числа элементарных событий. Общепринята следующая формулировка классического определения вероятности: *вероятностью* события A называется отношение числа m исходов опыта, благоприятствующих появления события А, к общему числу n равновозможных исходов опыта.

То есть вероятность события A определяется как $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Пример 1. Какова вероятность появления герба по крайней мере один раз при двукратном бросании монеты?

Решение. Пространство равновозможных элементарных событий данного опыта состоит из следующих событий: $\Omega=\{(г,г),(г,ц),(ц,г),(ц,ц)\}$, $n=4$. Событие A, состоящее в том, что при двукратном бросании монеты герб появится по крайней мере один раз, происходит при появлении одного из несовместных элементарных событий $(г,г)$, $(г,ц)$, $(ц,г)$. Следовательно, $A = \{(г,г), (г,ц), (ц,г)\}$, $m = 3$. Таким образом, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Пример 2. Технический контроль проверяет из партии в 500 деталей 20 деталей, взятых наудачу. Партия содержит 15 нестандартных деталей. Какова вероятность того, что среди проверяемых деталей будет ровно две нестандартные?

Решение. Так как по условию задачи 20 деталей из 500 извлекаются наудачу, то все возможные варианты извлечения 20 деталей из 500 естественно считать равновозможными и для нахождения требуемой вероятности воспользоваться классической схемой (классическим определением вероятности).

Так как порядок следования стандартных и нестандартных деталей в извлекаемых 20 не играет роли, а играет роль только количество стандартных и нестандартных деталей, то количество всех возможных способов, которыми это можно сделать, равно C_{500}^{20}, то есть $n = C_{500}^{20}$.

Событию A, состоящему в том, что будут извлечены две нестандартные детали при извлечении 20 (следовательно, остальные 18 должны быть стандартными), будет соответствовать $C_{15}^{2} \cdot C_{485}^{18}$ исходов, то есть $m = C_{15}^{2} \cdot C_{485}^{18}$. Таким образом, $P(A) = \frac{C_{15}^{2} \cdot C_{485}^{18}}{C_{500}^{20}}$.

Пример 3. Трехзначное число составляется следующим образом: бросаются три игральные кости белая, синяя и красная; число выпавших очков на белой кости – это число сотен, число выпавших очков на синей кости – это число десятков, а число выпавших очков на красной кости – это число единиц трехзначного числа. Какова вероятность того, что полученное таким образом число будет больше 456?

Решение. Количество всех чисел, которые можно получить указанным способом – это число размещений с повторениями из 6 по 3. Следовательно, $n = \bar{A}_6^3 = 6^3$.

Числа большие 456 будут получаться, если число сотен будет больше 4, то есть 5 или 6 или число сотен будет равно 4, а число десятков будет больше чем 5, то есть 6. Количество таких чисел будет $2 \cdot \bar{A}_6^2 + 1 \cdot \bar{A}_6^1$. Следовательно, $m = 2 \cdot \bar{A}_6^2 + 1 \cdot \bar{A}_6^1 = 2 \cdot 6^2 + 6 = 78$ и $P\;A = \frac{78}{216} = \frac{13}{36}$.

2.2. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение обобщает классическое определение вероятности на случай, когда пространство элементарных событий Ω представляет собой подмножество пространства R^n.

При этом на прямой будем рассматривать лишь промежутки или их объединения, т.е. подмножества, которые имеют длину, на плоскости – те подмножества, которые имеют площадь и т.д.

Под мерой $mes(A)$ множества $A \in \Omega$ будем понимать его длину, площадь или объем, в зависимости от того к какому пространству принадлежит Ω R^1, R^2 или R^n. Будем считать, что $0 < mes\,\Omega < \infty$, и вероятность попадания случайно брошенной точки в любое подмножество Ω пропорционально мере этого подмножества и не зависит от его расположения и формы. В этом случае вероятность считается по формуле:

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

Пример 1. Телефонная линия длиной 2 км. соединяющая пункты А и В порвалась в неизвестном месте. Считая обрыв равновозможным в любой точке линии, найти вероятность того, что обрыв находится не далее чем 450 м. от пункта А.

Решение. Точка x – место обрыва линии может с одинаковой вероятностью занимать любое положение на отрезке длиной 2000м. Следовательно, множество Ω непрерывно и его мера равна 2000. Событие C, состоящее в том, что обрыв произошел на расстоянии не более 450 от пункта А состоит из точек отрезка длиной 450 м. Следовательно, $mes(C)=450$ и

$$P(C)=\frac{450}{2000}=0,225.$$

Пример 2. В эллипс с полуосями 2 и 3 наудачу ставится точка. Какова вероятность того, что она попадет во вписанную в эллипс окружность, центр которой совпадает с центром эллипса?

Решение. Точка (x,y) может с одинаковой вероятностью занимать любое положение в области ограниченной эллипсом. Следовательно, множество Ω непрерывно и может быть записано в виде $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\le 1$. $mes(\Omega)=\pi\cdot 2\cdot 3=6\pi$. Событие А, состоящее в том, что точка попадет в круг, вписанный в эллипс, состоит из точек множества Ω, для которых выполняется условие $x^2+y^2\le 2^2$. $mes(A)=\pi\cdot 2^2=4\pi$. Следовательно, $P(A)=\frac{4\pi}{6\pi}=\frac{2}{3}\approx 0,67.$

Пример 3. На отрезок $[0,l]$ длины l наудачу поставлены две точки x и y. Наблюдаемый результат – три отрезка. Какова вероятность того, что из полученных отрезков можно построить треугольник?

Решение. Точки x и y могут с одинаковой вероятностью занимать любое положение на отрезке $[0,l]$. Следовательно, множество Ω непрерывно и может быть записано в виде $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x, y < l\}$. Геометрически Ω – квадрат со стороной l.

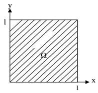
При постановке точек x и y на отрезок $[0,l]$ возможны два принципиально различных случая: $x < y$ и $y < x$.

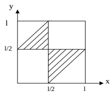
Если $x < y$, то для того, чтобы из отрезков $[0, x]$, $[x, y]$, $[y, l]$ можно было построить треугольник, необходимо, чтобы $x < l/2, y - x < l/2, l - y < l/2$ (каждый из отрезков должен быть меньше $l/2$).

Если $y < x$, то должны выполняться аналогичные условия $y < l/2,\ x - y < l/2,\ l - x < l/2$.

Если A – событие состоящее в том, что из полученных отрезков можно построить треугольник, то это событие будет состоять из точек области Ω, удовлетворяющим записанным выше условиям.

Области, соответствующие пространству элементарных событий Ω и событию A: из полученных отрезков можно построить треугольник, изображены на рисунке





Естественно, что $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{l^2/4}{l^2}=\dfrac{1}{4}.$

Пример 4. Для поражения точечной воздушной цели достаточно разрыва снаряда на расстоянии 10 м. от неё. Из-за ошибок прицеливания разрыв снаряда равновозможен в любой точке эллипсоида с центром в точки цели и полуосями 20, 20 и 60 м. Какова вероятность того, что цель будет поражена?

Решение. Точка (x,y,z) может с одинаковой вероятностью занимать любое положение в области ограниченной эллипсоидом. Следовательно, множество Ω непрерывно и может быть записано в виде $\dfrac{x^2}{20^2}+\dfrac{y^2}{20^2}+\dfrac{z^2}{60^2}\le 1$.

$$mes|\Omega|=\frac{4}{3}\pi\cdot 20\cdot 20\cdot 60=32000\pi\,.$$

Событие А, состоящее в том, что точка попадет в сферу радиуса 10 состоит из точек множества Ω, для которых выполняется условие $x^2+y^2+z^2\le 10^2$. $mes|A|=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 10^3=\dfrac{4000}{3}\cdot\pi$.

Следовательно, $P(A)=\dfrac{4000\pi}{3\cdot 32000\pi}\approx 0{,}04$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Десять команд случайным образом (по жребию) разбиваются на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что

две сильнейшие команды попадут в разные подгруппы? ….в одну подгруппу? …в первую подгруппу?

2. Из полной колоды карт (52 штуки) наугад выбраны три карты. Какова вероятность того, что это «тройка», «семерка», «туз»? Какова вероятность того, что эти карты выбраны в указанной последовательности?

3. На отрезок OA длины L брошены «наугад» две точки B и C, причем точка C расположена правее точки B. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB.

4. Десять билетов с номерами от 1 до 10 перемешаны на столе экзаменатора. Какова вероятность того, что эти билеты будут вытянуты студентами в порядке их номеров?

5. Четыре человека вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Считая, что равновозможен выход каждого пассажира на любом из этажей со второго по девятый, найти вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на разных этажах; б) все пассажиры выйдут выше пятого этажа; в) на третьем этаже не выйдет ни одного пассажира.

6. Наугад выбираются четыре цифры и расставляются в случайном порядке. Какова вероятность того, что поручится четырехзначное число? Какова вероятность того, что это четырехзначное число делится на 5?

7. Имеется 20 экзаменационных билетов, расположенных на столе в случайном порядке. Десять студентов один за другим выбирают наугад по одному билету. Какова вероятность того, что билеты с номерами 1 и 2 не будут выбраны?

8. Из урны, в которой лежат, шесть белых, четыре черных и два красных шара, наудачу выбирают четыре шара. Какова вероятность того, что среди них только черные и красные шары?

9. Десять книг, из них три красные, в случайном порядке поставлены на полку. Какова вероятность того, что три красные книги в любом порядке стоят рядом?

10. Бросаются три игральные кости. Найдите вероятности следующих событий: A={кости выпадут разными гранями}; B={на всех костях выпадет одинаковой число очков}.

11. В шкафу лежат вперемешку пять пар ботинок. Наугад выбирается два ботинка. Какова вероятность того, что они образуют пару?

12. Каждый из шести призов в результате жеребьевки разыгрывается между десятью участниками. Какова вероятность того, что данные шесть участников получат по одному призу каждый?

13. Группа из четырех юношей и четырех девушек по жребию делится на две подгруппы по четыре человека. Какова вероятность того, что в каждую подгруппу попадет поровну юношей и девушек?

14. Внутрь круга радиусом наугад брошена точка. Какова вероятность того, что она попадет внутрь вписанного в круг : а) квадрата, б) правильного треугольника?

15. В течение суток к причалу независимо друг от друга должны подойти и разгрузиться два сухогруза. Одному из них требуется для разгрузки шесть часов, другому - восемь. Какова вероятность того, что ни одному из сухогрузов не придется ждать очереди для разгрузки?

Ответы: 1. 5/9, 4/9, 2/9; 2. 16/5525≈0,003, 8/16575≈0,0005; 3. ½, 4. 1/10!; 5. а) 105/256, б) 1/16, 2401/4096≈0.59
6. 0,9, 0,18; 7. 9/38; 8. 1/33; 9. 1/15; 10 5/9, 1/36; 11/ 1/9;
12. 0,0072; 13. 6/35; 14. а) 2/π≈2/3, б) $(3\sqrt{3})/(4\pi) \approx 0,41$;

15. 25/72≈1/3.

Занятие №3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$; $P(B)\neq 0$.

Из этого определения вытекает формула умножения вероятностей

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$$

для двух событий, которая допускает обобщение для n событий:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\ldots A_{n-1}).$$

События A и B называются *независимыми*, если $P(A/B)=P(A)$ или $P(AB)=P(A)P(B)$.

Для любых событий A и B имеет место формула

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Если события A и B несовместны, $AB=\varnothing$ (где Ø - невозможное событие), то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

При решении большинства задач теоремы сложения и умножения вероятностей используются вместе. При этом методика решения задач состоит в следующем: событие, вероятность которого требуется найти, выражается через элементарные или более простые события, вероятности которых известны или могут быть найдены; затем от равенства событий переходят к равенству вероятностей этих событий и, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, переходят к умножению, сложению вероятностей элементарных или более простых событий, то есть чисел.

В тех случаях, когда событие, вероятность которого требуется найти, громоздко выражается через простые события, удобнее переходить к противоположному событию, находить его вероятность, а затем, используя формулу $P(A)=1-P(\overline{A})$ получать требуемый результат.

Пример 1. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95; для второго сигнализатора эта вероятность равна 0,9. Какова вероятность того, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор?

Решение. Введем в рассмотрение события:

A_1 – событие, состоящее в том, что при аварии сработает первый сигнализатор;

A_2 – событие, состоящее в том, что при аварии сработает второй сигнализатор;

B – событие, состоящее в том, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

Тогда $B=A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2+A_1\cdot A_2$. Перейдем от равенства событий к равенству вероятностей этих событий $P(B)=P(A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2+A_1\cdot A_2)$. Так как события $A_1\cdot\overline{A}_2$, $\overline{A}_1\cdot A_2$ и $A_1\cdot A_2$ несовместны, то

$$P(B)=P(A_1\cdot\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\cdot A_2)+P(A_1\cdot A_2).$$

События A_1 и $\bar{A}_2$, $\bar{A}_1$ и A_2, A_1 и A_2 независимые (по условию задачи сигнализаторы работают независимо). Следовательно,
$P\ B\ = P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2) + P(A_1)\cdot P(A_2)$.

Подставляя в последнее равенство известные из условия вероятности $P\ A_1\ = 0{,}95$, $P\ A_2\ = 0{,}9$ и учитывая то, что

$P\ \bar{A}_1\ = 1 - P\ A_1\ = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ и

$P\ \bar{A}_2\ = 1 - P\ A_2\ = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Получим $P\ B\ = 0{,}95\cdot 0{,}1 + 0{,}05\cdot 0{,}9 + 0{,}95\cdot 0{,}9 = 0{,}995$.

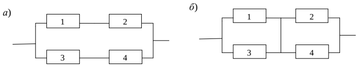
Пример 2. По каналу связи передаётся сообщение из трех символов, вероятности искажения которых при передаче сообщения соответственно равны 0,01, 0,005, 0,003. Сообщение считается принятым, если не искажено ни одного символа. Какова вероятность того, что сообщение не будет принято?

Решение. Введем в рассмотрение события A_1, A_2, A_3, состоящие в том , что при передаче будут искажены первый, второй и третий символы соответственно и событие B, состоящее в том, что сообщение не будет принято.

Тогда
$B = A_1\cdot A_2\cdot A_3 + \bar{A}_1\cdot A_2\cdot A_3 + A_1\cdot \bar{A}_2\cdot A_3 + A_1\cdot A_2\cdot \bar{A}_3 + + \bar{A}_1\cdot \bar{A}_2\cdot A_3 +$
$\bar{A}_1\cdot A_2\cdot \bar{A}_3 + + A_1\cdot \bar{A}_2\cdot \bar{A}_3$, $\bar{B} = \bar{A}_1\cdot \bar{A}_2\cdot \bar{A}_3$.

Очевидно, что находить вероятность события $\bar{B}$ проще, чем вероятность события B, поэтому
$P\ B\ = 1 - P\ \bar{B}\ = 1 - P(\bar{A}_1\cdot \bar{A}_2\cdot \bar{A}_3) = 1 - 0{,}99\cdot 0{,}995\cdot 0{,}997 \approx$
$\approx 1 - 0{,}97 = 0{,}03$.

Пример 3. Вероятность безотказной работы в течение заданного времени (надежность) каждого элемента равна 0,8. Из этих элементов составлены две системы:



Какая система надежнее? Иначе говоря, что выгоднее в системе дублировать каждый элемент отдельно или всю систему в целом?

Решение. Пусть событие A_i состоит в том, что i-тый элемент работает безотказно. Безотказная работа первой системы (событие B_1) равносильна безотказной работе первого элемента и второго или третьего элемента и четвертого. Символически это можно записать в виде $B_1 = A_1 \cdot A_2 + A_3 \cdot A_4$. События $A_1 \cdot A_2$ и $A_3 \cdot A_4$ совместны, а события A_i независимы. Поэтому

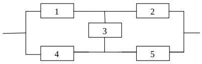
$$P(B_1) = P(A_1 \cdot A_2) + P(A_3 \cdot A_4) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) + P(A_3) \cdot P(A_4) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) =$$
$$= (0,8)^2 + (0,8)^2 - (0,8)^4 = 0,8704.$$

Безотказная работа второй системы (событие B_2) равносильна безотказной работе первого элемента или третьего и второго или четвертого, то есть $B_2 = (A_1 + A_3) \cdot (A_2 + A_4)$. Тогда

$$P(B_2) = P(A_1 + A_3) \cdot P(A_2 + A_4) = (P(A_1) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_3)) \cdot$$
$$\cdot (P(A_2) + P(A_4) - P(A_2) \cdot P(A_4)) = (0,8 + 0,8 - 0,64)^2 = 0,9216.$$

Результаты вычислений свидетельствуют о том, что выгоднее дублировать каждый элемент отдельно. Система *б*) надежнее.

Пример 4. Вероятность безотказной работы в течение заданного времени (надежность) каждого элемента равна 0,8. Из этих элементов составлена система.



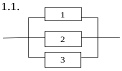
Какова надежность системы?

Решение. Сохраним обозначения примера 3. Если элемент №3 не работает, то система совпадает с системой *а*) из этого примера. Если же элемент №3 работает, то система совпадает с системой *б*) из предыдущего примера. Поэтому безотказная работа системы (событие D) равносильна событию $D = \bar{A}_3 \cdot B_1 + A_3 \cdot B_2$. События независимы, а события $\bar{A}_3 \cdot B_1$ и $A_3 \cdot B_2$ несовместны. Поэтому с учетом результатов предыдущей задачи имеем $P(D) = P(\bar{A}_3) \cdot P(B_1) + P(A_3) \cdot P(B_2) =$
$= 0,2 \cdot 0,8704 + 0,8 \cdot 0,91136.$

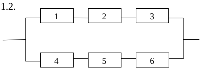
Задачи для самостоятельного решения

1. В следующих задачах приведены схемы соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Считается известной надежность p_k k-го элемента (соответственно $q_k = 1 - p_k$ - вероятность его отказа). Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вычислить надежность p каждой из схем.

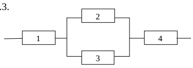
1.1.



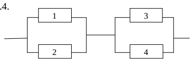
1.2.



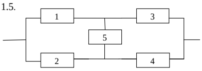
1.3.



1.4.

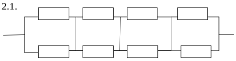


1.5.

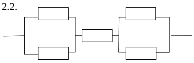


2. Вероятность безотказной работы в течение заданного времени (надежность) каждого элемента равна 0,8. Из этих элементов составлены три системы. Какова надежность каждой из систем?

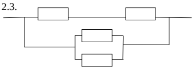
2.1.



2.2.



2.3.



3. Из урны, содержащей семь белых и три черных шара, наугад последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется извлечь четыре шара в предположении, что выбор производится:

а) с возвращением; б) без возвращения.

4. Из полного набора костей домино (28 штук) наугад выбирают семь костей. Какова вероятность того, что среди них окажется меньшей мере одна кость с шестью очками?

5. Подбрасываются три игральных кости. Какова вероятность того, что на них выпадут разные грани?

6. В урне пять белых, семь красных и восемь синих шаров. Наугад выбрано два шара. Какова вероятность того, что шары одного цвета?

7. Два дуэлянта одновременно стреляют друг в друга. Для каждого вероятность убить противника равна 0,2. Какова вероятность того, что дуэль закончится гибелью одного из дуэлянтов?

8. Двадцать футбольных команд, среди которых четыре призера предыдущего первенства, по жеребьевке разбиваются на четыре занумерованных подгруппы по пять команд в каждой. Какова вероятность того, что в каждую подгруппу попадет по одному призеру? Какова вероятность того, что в первую подгруппу не попадет ни одного призера?

9. В первой урне два белых и три черных шара, во второй один белый и два синих шара, в третьей три белых и один красный шар. Из каждой урны наугад вынули по одному шару. Найдите вероятность следующих событий: A={вынут только один белый шар}; B={вынут хотя бы один белый шар}; C={вынуты шары разных цветов}.

10. Из колоды в 36 карт выбрали наугад две. Какова вероятность того, что обе карты красной масти?

11. В ящике находятся три неисправных лампочки и семь исправных. Лампочки извлекают наугад по одной и проверяют,

пока не будут выбраны две исправные. Какова вероятность того, что придется проверить половину лампочек?

12. Из колоды карт одну за другой выбирают четыре карты. Какова вероятность того, что все они разных мастей? Какова вероятность того, что они все разного достоинства?

13. В ящике 10 теннисных мячей, в том числе семь новых и три побывавших в игре. Для игры наугад выбирают два мяча и после игры возвращают их обратно. Затем для второй игры также наугад извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет производиться новыми мячами?

14. На каждом крыле самолета по два мотора. Вероятность отказа в течение полета для каждого мотора равна p. Полет завершается благополучно, если на каждом крыле сохраняет работоспособность хотя бы один мотор. Какова вероятность благополучного полета?

15. Студент знает 20 вопросов из 30. Для сдачи экзамена достаточно правильно ответить на два предложенных вопроса или на один предложенный вопрос и один дополнительный. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?

16. Два белых и два черных шара распределяют по двум урнам так, чтобы в каждой урне был хотя бы один шар. Затем наугад выбирают урну и из нее- один шар. Как следует распределить шары по урнам, чтобы вероятность вынуть белый шар (событие А) была наибольшей и какова эта вероятность?

17. Монету подбрасывают до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной стороной. Найдите вероятность событий: A={опыт закончится до шестого броска}; B={понадобится более четырех бросков}.

18. Из колоды карт (36 штук) одну за другой наугад выбирают карты. Найдите вероятности следующих событий

A={первый туз появится при третьем извлечении карты}; B={первый туз появится не ранее третьего извлечения карты}.

19. Из колоды карт (36 штук) выбирают карты по одной, пока не будет выбрана карта красной масти. Какова вероятность того, что придется выбрать более трех карт?

20. В урне восемь белых, шесть черных и два синих шара. Один за другим извлекаются наугад три шара. Какова вероятность того, что первый шар будет белым, второй- черным, третий – синим? Ответить на вопрос задачи в предположении: а) повторного выбора шаров; б) бесповторного выбора.

21. В первой урне четыре белых и два черных шара, а во второй урне три белых и пять черных шаров. Сначала подбрасывают монету и в зависимости от результата (герб или цифра) выбирают одну из урн, из которой затем наугад извлекают шар. Какова вероятность того, что шар окажется белым?

Ответы: 1.1. $1-q_1q_2q_3$; 1.2. $1-(1-p_1p_2p_3)(1-p_4p_5p_6)$;
1.3. $p_1p_4(1-q_2q_3)$; 1.4. $(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)$;
1.5. $p_5(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)+q_5(p_1p_3+p_2p_4-p_1p_2p_3p_4)$;
2.1. ≈0,85; 2.2. ≈0,74; 2.3. ≈0,98; 3. а) 1029/10000≈0,1, б) 1 /8; 4. 7/9; 5. 5/9; 6. 63/90≈1/3; 7. 0,32; 8. 125/969, 91/323;
9. $P(A)=5/12$, $P(B)=0,9$, $P(C)=31/60$; 10. 17/70; 11.3/20;
12. 3/32, 128/255; 13. ≈0,29; 14. $(1-p^2)^2$; 15. 152/203≈3/4;
16. Следует в одну урну положить белый шар, а остальные - во вторую урну; тогда $P(A)=2/3$. 17. $P(A)=15/16$, $P(B)=1/8$.
18. $P(A)=67/315\approx 0,21$, $P(B)=496/5355\approx 0,09$; 19. 4/35;
20. а) 3/128; б) 1/35. 21. 25/48.

Занятие № 4. Формула полной вероятности и формулы Байеса

Формула полной вероятности является формулой, объединяющей теоремы сложения и умножения вероятностей:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right),$$

где H_i $(i=1,2,3,...,n)$ такие, что $\sum_{i=1}^{n}H_i=\Omega$ и $H_i\cdot H_j=\varnothing$, $i,j=1,2,3,...,n$, $i\neq j$, $P(H_i)>0$.

События H_i часто называют *гипотезами (предположениями)*.

Естественно, что практическое использование формулы полной вероятности необходимо тогда, когда описание опыта содержит неопределенность, о которой можно сделать предположения $H_1,H_2,H_3,...,H_n$ (ввести в рассмотрение гипотезы).

Пример 1. На складе имеется 1000 изделий: 700 из одной партии и 300 из другой. Вероятность брака в первой партии равна 0,06, во второй – 0,04. Какова вероятность того, что одно наудачу взятое изделие окажется бракованным?

Решение. В условии задачи не указано: из какой партии наудачу берется изделие. Поэтому возможны следующие гипотезы (предположения):

H_1 – изделие принадлежит первой партии, H_2 – изделие принадлежит второй партии.

Вероятности этих гипотез легко найти, используя классическое определение вероятности:

$P(H_1)=\frac{700}{1000}=0,7$, $P(H_2)=\frac{300}{1000}=0,3$.

Обозначим через А событие, состоящее в том, что наудачу извлеченное изделие окажется бракованным. Тогда из условия задачи ясно, что $P\left(A/H_1\right)=0,06$, а $P\left(A/H_2\right)=0,04$.

Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)=0,7\cdot 0,06+0,3\cdot 0,04=0,054.$$

Пример 2. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приемника передается сигнал, состоящий из символов 0 и 1. Из-за помех символы независимо друг от друга могут искажаться: 0 переходит в 0 с вероятностью 0,96 и в 1 с вероятностью 0,04 на участке передатчик – ретранслятор и 0 переходит в 0 с вероятностью 0,95 и в 1 с вероятностью 0,05 на участке ретранслятор – приемник; 1 переходит в 1 с вероятностью 0,95 и в 0 с вероятностью 0,05 на участке передатчик – ретранслятор и 1 переходит в 1 с вероятностью 0,96 и в 0 с вероятностью 0,04 на участке ретранслятор – приемник. Какова вероятность того, что отправленный передатчиком сигнал 01 будет принят как 01?

Решение. В условии задачи не указано, искажаются ли символы или нет. Возможно 16 вариантов передачи сигнала 01, значит, введем в рассмотрение 16 гипотез:

$H_1:\ (01\to 01\to 01)$, $H_2:\ (01\to 01\to 00)$,

$H_3:\ (01\to 01\to 11)$, $H_4:\ (01\to 01\to 10)$,

$H_5:\ (01\to 00\to 01)$, $H_6:\ (01\to 00\to 10)$,

$H_7:\ (01\to 00\to 00)$, $H_8:\ (01\to 00\to 11)$,

$H_9:\ (01\to 11\to 10)$, $H_{10}:\ (01\to 11\to 01)$,

$H_{11}:\ 01 \to 11 \to 00$, $H_{12}:\ 01 \to 11 \to 11$,

$H_{13}:\ 01 \to 10 \to 11$, $H_{14}:\ 01 \to 10 \to 10$,

$H_{15}:\ 01 \to 10 \to 00$, $H_{16}:\ 01 \to 10 \to 01$.

Вероятности этих гипотез находятся как вероятности произведения независимых событий:

$P\ H_1\ = 0,96 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,96 = 0,831744$,

$P\ H_2\ = 0,96 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,04 = 0,034656$.

Аналогично:

$P\ H_3\ = 0,043776$, $P\ H_4\ = 0,001824$, $P\ H_5\ = 0,00228$,

$P\ H_6\ = 0,090228$, $P\ H_7\ = 0,04332$, $P\ H_9\ = 0,0014592$,

$P\ H_{10}\ = 0,0014592$, $P\ H_{11}\ = 0,0006608$, $P\ H_{12}\ = 0,0350208$,

$P\ H_{13}\ = 0,000096$, $P\ H_{14}\ = 0,001824$, $P\ H_{15}\ = 0,000076$,

$P\ H_{16}\ = 0,000004$.

Правильность введения гипотез и вычисления их вероятностей можно проконтролировать.

Должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n} P\ H_i\ = 1$.

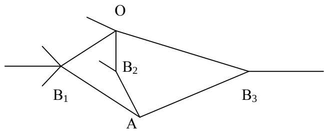
Если А – событие, состоящее в том, что приемником будет принят сигнал 01, то

$P\ A/H_1\ = P\ A/H_5\ = P\ A/H_{10}\ = P\ A/H_{16}\ = 1$, остальные $P\ A/H_k\ = 0$.

Таким образом, по формуле полной вероятности

$P(A) = 0,831744 + 0,0228 + 0,0014592 + 0,000004 = 0,8560072 \approx$
$\approx 0,86.$

Пример 3. Представим себе путника, который выходит из пункта O и на разветвлении дорог выбирает наугад один из возможных путей. Схема дорог изображена на рисунке. Какова вероятность того, что путник, двигаясь описанным образом, попадет в пункт A?



Решение. Обозначим прибытие путника в пункт той же буквой, что и сам пункт. Легко видеть, что $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/4.$ Так как равновозможен выбор любого из путей, ведущих из пункта О. Путник попадет в пункт А, если он выберет дорогу в пункт B_1 и оттуда дорогу в пункт А, или он выберет дорогу в пункт B_2 и оттуда дорогу в пункт А, или он попадет сначала в пункт B_3 и оттуда – в пункт А. Символически это рассуждение можно записать в виде $A=B_1\cdot A+B_2\cdot A+B_3\cdot A.$ Из чего следует, что

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)=$$
$$=(1/4)\cdot(1/4)+(1/4)\cdot(1/2)+(1/4)\cdot(2/3)=17/48\approx 1/3,$$

Где вероятности $P(A/B_1),P(A/B_2),P(A/B_3)$ определены с учетом числа равновозможных путей, ведущих из соответствующего пункта.

Введенные, если этого требует условие задачи, гипотезы $H_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ до опыта имеют определенные вероятности (априорные вероятности). Наблюдение результата опыта (появление события А) дает дополнительную информацию о гипотезах. Это приводит к перераспределению вероятностей гипотез.

Послеопытные (апостериорные) вероятности гипотез $P(H_i / A)$ могут быть найдены по формуле Байеса

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)} = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)},$$

$P(A) > 0$, где $P(H_i)$ и $P(A / H_i)$ – априорные вероятности.

Пример 4. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем первый завод поставляет 30% всех изделий, второй – 20%, а третий – 50%. Среди изделий первого завода 80% первосортных, второго – 90%, третьего – 70%. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Какова вероятность того, что купленное изделие выпущено вторым заводом?

Решение. Так как неизвестно, изделие какого завода куплено, то введем в рассмотрение гипотезы:

H_1 – куплено изделие первого завода,

H_2 – куплено изделие второго завода,

H_3 – куплено изделие третьего завода.

Обозначим через А событие, состоящее в том, что куплено первосортное изделие.

Априорные вероятности гипотез равны $P(H_1) = 0,3$,

$P\left(H_2\right)=0,2$, $P\left(H_3\right)=0,5$.

Априорные условные вероятности появления события А при выполнении той или иной гипотезы равны $P\left(A/H_1\right)=0,8$,

$P\left(A/H_2\right)=0,9$, $P\left(A/H_3\right)=0,7$.

Апостериорная вероятность того, что купленное первосортное изделие выпущено вторым заводом, найдем по формуле Байеса:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}=\frac{0,2\cdot 0,9}{0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,9+0,5\cdot 0,7}=$$
$$=18/77\approx 0,23.$$

Пример 5. По каналу связи «0» и «1» с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно. Под действием помех возникают ошибки приема сигнала. Вероятность принять «1», если передавался «0», равна 0,05. Вероятность принять «0», если передавалась «1», равна 0,1. Какова вероятность правильного приема сигнала? Если принята «1», то какова вероятность того, что действительно передавалась «1»?

Решение. Обозначим передачу сигнала «1» через B_1, а сигнала «0» через B_2. Сигнал будет принят правильно (событие A), если будет передана «1» и она будет принята правильно или будет передан «0» и он будет принят правильно. Тогда $A=B_1\cdot A+B_2\cdot A$. В силу несовместности событий B_1 и B_2 имеем

$$P(A)=P(B_1\cdot A)+P(B_2\cdot A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)=$$
$$=0,7\cdot 0,9+0,3\cdot 0,95=0,915.$$

Пусть событие C означает, что принят сигнал «1». При этом условии вычислим вероятность того, что действительно была передана «1», то есть вероятность $P(B_1 / C)$. По формуле Байеса

$$P(B_1 / C) = \frac{P(B_1) \cdot P(C / B_1)}{P(B_1) \cdot P(C / B_1) + P(B_2) \cdot P(C / B_2)} =$$

$$= \frac{0,7 \cdot 0,9}{0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,05} = 0,9767441 \approx 0,977.$$

Пример 6. Девяносто шесть процентов изделий некоторого производства удовлетворяют стандарту. Используется упрощенная схема проверки качества, дающая положительный результат с вероятностью 0,98, для стандартных изделий, для нестандартных изделий- с вероятностью 0,05. Изделие выдержало проверку. Какова вероятность того, что оно действительно стандартно?

Решение. Факт прохождения контроля обозначим через А. В отношении проверенного изделия можно выдвинуть два предположения: а) оно стандартно (событие B_1); б) оно нестандартно (событие B_2). По условию задачи необходимо найти вероятность $P(B_1 / A)$. По формуле Байеса

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A / B_1)}{P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2)} =$$

$$= \frac{0,96 \cdot 0,98}{0,96 \cdot 0,98 + 0,04 \cdot 0,05} = \frac{2352}{2355} \approx 0,9988.$$

Пример 7. По каналу связи передается одна из последовательностей букв АААА, ВВВВ, СССС с вероятностями соответственно 0,5, 0,4, 0,1. Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью 0,8 и с вероятностями 0,1 и 0,1 за две другие буквы. Предполагается, что искажаются буквы при передаче независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано АААА, если принято АВСА.

Решение. Для краткости записи формулы обозначим АААА через T_1, ВВВВ через T_2, ССССС через T_3. Тогда по формуле Байеса

$$P(T_1 / ABCA) =$$

$$\frac{P(T_1)\cdot P(ABCA/T_1)}{P(T_1)\cdot P(ABCA/T_1) + P(T_2)\cdot P(ABCA/T_2) + P(T_3)\cdot P(ABCA/T_3)} =$$

$$= \frac{0,5\cdot 0,8\cdot 0,1\cdot 0,1\cdot 0,8}{0,5\cdot 0,8\cdot 0,1\cdot 0,8 + 0,4\cdot 0,1\cdot 0,8\cdot 0,1 + 0,1\cdot 0,1\cdot 0,8\cdot 0,1} = \frac{8}{9}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Из условий примера 3 стало известно, что путник пришел в пункт А. Какова вероятность того, что он попал в пункт А через пункт B_1?

2. Известно, что в партии из 10 изделий с равными вероятностями может оказаться от 0 до 2 изделий со скрытым дефектом. Проверили пять изделий, взятых наугад из этой партии. Среди проверенных не оказалось изделий с дефектом. Какова вероятность того, что в оставшейся половине партии нет изделий со скрытыми дефектами?

3. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для этих стрелков соответственно равны 0,8,0,7, и 0,6. Какова вероятность того, что третий стрелок промахнулся, если в мишени оказалось две пробоины?

4. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что дефект обнаруживается с вероятностью 0,95. Вероятность того, что исправный транзистор будет признан дефектным, равна 0,03. Ка-

кова вероятность того, что выбранный наугад для проверки транзистор, будет признан дефектным?

5. В цехе болты изготавливают три автоматических станка А, В, и С. Станок А производит 25% болтов, станок В – 35% и станок С – 40% всех болтов. В продукции станков брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Наугад взятый болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен станком А?

6. Из урны с четырьмя белыми и двумя черными шарами два шара, взятые наугад перенесены в урну с двумя белыми и тремя черными шарами. Какова после этого вероятность вынуть белый шар из второй урны?

7. Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, наугад без возвращения выбирают три шара. Третий шар оказался белым. Какова вероятность того, что первые два шара были разного цвета?

8. Первая урна содержит один черный и один красный шар, а во второй урне два черных и три красных шара. Из первой урны вынули наугад один шар и переместили его во вторую урну. Затем вынули из второй урны наугад один шар. Какова вероятность того, что были вынуты шары одного цвета? Какова вероятность того, что из первой урны был вынут красный шар, если из второй урны был вынут черный шар?

9. Стрелок попадает в цель с вероятностью 1/при каждом выстреле. Монету подбрасывают три раза, и стрелку предоставляется столько выстрелов, сколько раз выпал герб. Найдите вероятность поражения цели.

10. Из урны, в которой было четыре белых и три черных шара, убрали один из шаров неизвестного цвета. Для определения состава урны наугад выбрали два шара. Они оказались

черными. Какова вероятность того, что первый вынутый шар был белым?

11. По каналу связи передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем вероятности этих комбинаций равны соответственно 0,7 и 0,3. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого символа 0 или 1 равна 0,6 независимо от правильности приема остальных символов. На приемном устройстве получена комбинация 10110. Какова вероятность того, что была передана комбинация 11111?

Ответы:

1. $P(B_1 / A) = 3/17,\ P(B_2 / A) = 6/17,\ P(B_3 / A) = 8/17;$
2. 18/31≈3/5; 3. 56/113≈1/2; 4. 0,122; 5. 25/69≈0,36; 6. 10/21; 7. 4/7; 8. 7/12, 2/5; 9. 0,261≈1/4; 10. 0,8; 11. 0,78.

Занятие № 5. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли

Самой простой моделью повторения испытаний являются независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления некоторого события A постоянна и равна p. Тогда вероятность того, что в n опытах событие A появится ровно m раз, определяется формулой Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p.$$

При больших n вычисления по формуле Бернулли становятся громоздкими и в этих случаях для вычисления вероятности появления события A ровно m раз в n независимых испытаниях используется локальная теорема Лапласа

$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x)$, где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

или формула Пуассона $P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$, где $a = np$.

Можно рекомендовать пользоваться теоремой Лапласа, если $npq > 9$, и формулой Пуассона, если $npq < 9$.

Если требуется найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее m_1, но не более чем m_2 раз, то используют формулы

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$,

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}.$$

Для функций $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ и $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ составлены таблицы.

Значение $m = m_0$, при котором вероятность $P_n(m)$ принимает наибольшее значение, называется *наивероятнейшим числом успехов*.

$m_0 = [(n+1)p]$, где $[\,.\,]$ – символ целой части числа.

Если $(n+1)p$ – целое число, то m_0 принимает два значения

$m_0^{(1)} = (n+1)p - 1$ и $m_0^{(2)} = (n+1)p$.

Пример 1. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,75. Какова вероятность того, что при пяти выстрелах будет ровно три попадания

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли.

$n = 5, m = 3, p = 0,75, q = 1 - 0,75 = 0,25.$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,75^3 \cdot 0,25^2 = \frac{135}{512} \approx 0,26.$$

Пример 2. Вероятность попадания в объект равна 0,75. Для разрушения объекта необходимо не менее трех попаданий. Произведено пять выстрелов. Какова вероятность того, что объект будет разрушен?

Решение. Вероятность события A, состоящего в том, что объект будет разрушен, равна

$$P(A) = P_5(3 \le m \le 5) = \sum_{m=3}^{5} C_5^m \cdot 0,75^m \cdot 0,25^{5-m} = C_5^3 \cdot 0,75^3 \cdot 0,25^2 +$$

$$+ C_5^4 \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^1 + C_5^5 \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^0 = \frac{459}{512} \approx 0,9.$$

Пример 3. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,012. Поступило 1000 вызовов. Какова вероятность 9 сбоев?

Решение. Так как число опытов $n = 1000$ велико, то воспользуемся локальной теоремой Лапласа

$$P_{1000}(9) \approx \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0,012 \cdot 0,988}} \cdot \phi\left(\frac{9 - 1000 \cdot 0,012}{\sqrt{1000 \cdot 0,012 \cdot 0,988}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{3,43} \cdot \phi(-0,875).$$

По таблице находим $\phi(-0,875) = \phi(0,875) = 0,2732.$

Окончательно $P_{1000}(9) \approx \frac{0,2732}{3,43} \approx 0,07965.$

Пример 4. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя от 14 до 26 конденсаторов.

Решение. Для этой задачи математической моделью является схема Бернулли. Здесь $n = 100$, $p = 0,2$, $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$, $npq = 100 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 16 > 9$.

Согласно теореме Муавра-Лапласа

$P\left(x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2\right) = F^*(x_2) - F^*(x_1)$, где

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Тогда

$$P(14 \le m \le 26) = \left| \begin{matrix} np = 100 \cdot 0,2 = 20 \\ \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4 \end{matrix} \right| =$$

$$= P(14 - 20 \le m - np \le 26 - 20) =$$

$$= P(-6 \le m - np \le +6) = P\left\{-\frac{6}{4} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{6}{4}\right\} =$$

$$= F^*(1,5) - F^*(-1,5) = \left|F^*(-x) = 1 - F^*(x)\right| = 2F^*(1,5) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,933 - 1 = 0,866.$$

Пример 5. Предположим, что 30% студентов нашего университета занимаются спортом. Какова вероятность того, что среди первых пяти встреченных студентов окажется только один спортсмен? Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы один спортсмен? Каково наиболее вероятное число спортсменов среди них?

Решение. Так как студентов в университете много (несколько тысяч), то по мере опроса нескольких из них пропорции в оставшейся части практически не изменяются. Поэтому можно считать опрос каждого студента независимым опытом. Всего опытов производится $n=5$, а вероятность положительного ответа $p=0,3$. По формуле Бернулли имеем $P_5(1)=C_5^1\cdot 0,3\cdot(0,7)^4=0,36015.$ Вероятность хотя бы одного правильного ответа проще вычислять, если перейти к противоположному событию:

$$P_5(k\geq 1)=1-P_5(0)=1-(0,7)^5=1-0,16807=0,83193.$$

Так как $(n+1)p=(5+1)0,3=1,8$ (целая часть числа равна 1), то наиболее вероятное число спортсменов среди пяти опрошенных $k_0=1.$

Пример 6. На каждый вопрос предлагается три ответа, среди которых следует выбрать один правильный. Задано пять вопросов. Какова вероятность того, что путем простого угадывания удастся правильно ответить на четыре вопроса? Какова вероятность угадать правильный ответ хотя бы на один вопрос?

Решение. Выбор ответа на вопрос можно рассматривать как независимый опыт. Всего таких опытов производится $n=5$, а вероятность успеха в каждом опыте равна $p=1/3$. Тогда вероятность путем простого угадывания правильно ответить на четыре вопроса равна

$$P_5(4)=C_5^4\cdot(1/3)^4\cdot(2/3)^1=10/243\approx 1/24.$$

Вероятность угадать хотя бы один правильный ответ равна

$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - (2/3)^5 = 1 - 32/243 \approx 7/8.$

Пример 7. Вероятность попадания в цель при выстреле равна 0,3. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы вероятность поражения цели была больше 0,9?

Решение. Каждый выстрел можно рассматривать как независимое испытание, и в каждом из них вероятность появления события (попадания в цель) равна $p = 0,3$ Цель будет поражена, если в n выстрелах будет хотя бы одно попадание, вероятность чего равна:

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) > 0,9 \Rightarrow 1 - (0,7)^n > 0,9 \Rightarrow (0,7)^n < 0,1 \Rightarrow n \geq 7.$$

Пример 8. Известно, что наборщик в среднем допускает одну ошибку на две страницы текста. В набранной книге взяли наугад страницу. Какова вероятность того, что на этой странице содержится более одной опечатки?

Решение. Опечатки появляются по одной и независимо друг от друга. Условия простейшего потока приблизительно выполняются, и формула Пуассона приблизительно верна. На одну страницу приходится в среднем $\lambda = 1/2$ опечатки. Поэтому вероятность того, что на данной странице содержится более одной опечатки, равна

$$P(k>1) = 1 - P(k=0) - P(k=1) = 1 - \frac{(1/2)^0}{0!}e^{-1/2} - \frac{(1/2)^1}{1!}e^{-1/2} \approx 0,1.3$$

адачи для самостоятельного решения

1. Игральный кубик подброшен пять раз. Какова вероятность того, что два раза выпадет шесть очков?

2. Вероятность рождения мальчика равна ½. Какова вероятность того, что в семье с четырьмя детьми два мальчика и две девочки?

3. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 1/3 и производит четыре выстрела. Второй стрелок попадает в цель с вероятностью ½ и производит три выстрела. Для какого стрелка в этих условиях вероятнее попасть в цель дважды?

4. Прибор состоит из пяти блоков. Надежность (вероятность безотказной работы в течение заданного времени t) для каждого блока равна 0,9. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время t: а) откажет только один узел; б) откажет хотя бы один узел; в) откажут не менее двух узлов.

5. Вероятность выпуска детали со скрытым дефектом равна 0,02. Детали упаковываются в ящик по 100 штук. Какова вероятность того, что в данном ящике нет деталей со скрытым дефектом? Какова вероятность того, что в данном ящике больше двух деталей со скрытым дефектом? Каково наиболее вероятное число деталей со скрытым дефектом в дано ящике?

6. В крупной партии изделий 10% имеют низкое качество. Сколько нужно проверить изделий, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одно изделие низкого качества?

7. В течение часа на коммутатор поступает в среднем 120 телефонных вызовов. Какова вероятность того, что в течение заданной минуты поступит четыре вызова?

8. Вероятность того, что при перевозке изделие повредится, равна $p = 0,005.$ С завода отправлено четыреста изделий. Найдите вероятность того, что в пути повредится более двух изделий.

9. По каналу связи передается цифровой текст. Из-за помех каждая цифра может быть принята неправильно с вероятно-

стью $p = 0,0025$. Какова вероятность того, что в тексте, состоящем из 800 цифр, все цифры будут приняты правильно?

10. При стрельбе из зенитного орудия в среднем только один выстрел из 200 достигает цели. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах будет хотя бы одно попадание?

11. Дальтоники составляют 1% населения. Какова вероятность того, что среди пятидесяти студентов окажется по меньшей мере один дальтоник?

12. Двое бросают монету по пять раз каждый. Какова вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов?

13. Частица в начальный момент времени находится в начале координат. Каждую последующую секунду она сдвигается вправо с вероятностью 1/3 или влево с вероятностью 2/3 независимо от того, как она двигалась в предыдущие секунды. Какова вероятность того, что через пять секунд частица окажется на отрезке [-2;0]?

14. В биатлоне на каждом из трех огневых рубежей спортсмен должен поразить пять мишеней в пяти выстрелах. За каждую непораженную мишень спортсмен обязан пробежать штрафной круг. Пусть вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,95. Какова вероятность того, что спортсмен все три огневых рубежа пройдет без штрафных кругов? Какова вероятность того, что после каждого огневого рубежа спортсмен будет пробегать один штрафной круг?

15. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 1/3. Стрелок стреляет по цели до тех пор, пока не накопится три попадания. Какова вероятность того, что к этому моменту у стрелка будет два промаха?

Ответы: 1. 1250/7776≈0,16; 2. 3/8; 3. Для второго;

4. а) 0,328, б) $1-(0,9)^5 \approx 0,4$, в)$\approx 0,08$;

5. $e^{-2} \approx 0,14$, $1-5e^{-2} \approx 0,3$, $k_0 = 2$; 6. $n \geq 29$;

7. $(2e^{-2})/3 \approx 0,09$; 8. $1-5e^{-2} \approx 0,31$; 9. $e^{-2} \approx 0,136$;

10. $1-e^{-1/2} \approx 0,4$; 11. $1-e^{-1/2} \approx 0,4$; 12. 63/256≈1/4;

13. 80/243≈1/3; 14. ≈0,46, ≈0,008; 15. 8/81.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Расчетные задания

1.1. По линии связи в случайном порядке передаются все буквы русского алфавита. Найти вероятность того, что на ленте появится последовательность букв, которая начинается словом “радио”.

1.2. Из урны, содержащей 4 шара, четыре раза наудачу вынимается по одному шару с возвращением каждый раз обратно. Найти вероятность того, что в руке перебывают все шары.

1.3. Имеются пять отрезков длиной 1,3,4,7 и 9 см. Определить вероятность того, что из трех наугад взятых отрезков (из этих пяти) можно построить треугольник.

1.4. В партии из 22 изделий половина бракованных. Наудачу выбираются 5 изделий. Найти вероятность того, что выбранные изделия доброкачественные.

1.5. Трем радиостанциям разрешена работа на пяти частотах. Определить вероятность того, что по крайней мере две радиостанции будут работать на одинаковых частотах, если выбор частот производится наугад.

1.6. Какова вероятность того, что в январе наугад выбранного года окажется 5 воскресений?

1.7. Колода карт произвольным образом делится на две стопы по 26 карт в каждой. С какой вероятностью в каждой стопе окажется два туза?

1.8. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры номера и набрал их наугад. Определить вероятность того, что набраны нужные цифры.

1.9. В партии из 24 изделий 14 бракованных. Наудачу извлекают 4 изделия. Найти вероятность того, что выбранные изделия доброкачественные.

1.10. По линии связи в случайном порядке передаются все буквы русского алфавита. Найти вероятность того, что на ленте появится последовательность букв, которая начинается словом “столб”.

1.11. Из урны, содержащей 3 шара, три раза наудачу вынимается по одному шару с возвращением каждый раз обратно. Найти вероятность того, что в руке перебывают все шары.

1.12. Имеются пять отрезков длиной 2,4,5,8 и 10см. Определить вероятность того, что из трех наугад взятых отрезков (из этих пяти) можно построить треугольник.

1.13. В партии из 32 изделий половина стандартных. Наудачу выбираются 6 изделий. Найти вероятность того, что выбранные изделия нестандартные.

1.14. Трем радиостанциям разрешена работа на четырех частотах. Определить вероятность того, что по крайней мере две радиостанции будут работать на одинаковых частотах, если выбор частот производится наугад.

1.15. Какова вероятность того, что в апреле наугад выбранного года окажется 5 воскресений?

1.16. Колода карт произвольным образом делится на две стопы по 18 карт в каждой. С какой вероятностью в каждой стопе окажется два туза?

1.17. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры номера и, помня, что среди них нет 1, набрал их наугад. Определить вероятность того, что набраны нужные цифры.

1.18. Колода карт произвольным образом делится на две стопы по 18 карт в каждой. С какой вероятностью в каждой стопе окажется два короля?

1.19. Какова вероятность того, что в апреле наугад выбранного года окажется 4 вторника?

1.20. Какова вероятность того, что случайно названное двузначное число будет делиться на три без остатка?

1.21. Какова вероятность того, что правильная дробь, составленная из случайно выбранных цифр будет меньше чем 0,5?

1.22. Из натуральных чисел от 3 до 11 случайно выбираются два числа. Какова вероятность того, что сумма выбранных чисел окажется больше 10?

1.23. Какова вероятность того, что случайно названное двузначное число будет кратно семи?

1.24. Какова вероятность того, что случайно названное двузначное число будет делиться на девять без остатка?

1.25. Из натуральных чисел от 4 до 12 случайно выбираются два числа. Какова вероятность того, что модуль разности выбранных чисел окажется больше 6?

1.26. Какова вероятность того, что правильная дробь, составленная из случайно выбранных цифр будет меньше чем 0,75?

1.27. Какова вероятность того, что случайно названное двузначное число будет делиться на пять без остатка?

1.28. Какова вероятность того, что случайно названное двузначное число окажется простым числом?

1.29. Какова вероятность того, что случайно названное двузначное число будет кратно тринадцати?

1.30. Какова вероятность того, что в январе наугад выбранного года окажется 4 понедельника?

Задача 2. Коэффициенты b и c квадратного уравнения $x^2+bx+c=0$ наудачу выбираются из множества целых чисел $\alpha,...,\beta$. Какова вероятность того, что:

- полученное квадратное уравнение не имеет действительных корней? (для вариантов 1-15);
- полученное квадратное уравнение имеет действительные корни? (для вариантов 15-30).

Задача 3. Параметры a и b уравнения кривой второго порядка $ax^2+by^2=1$ наудачу выбираются из множества целых чисел $-\alpha,...,\beta$. Какова вероятность того, что:

- полученное уравнение является уравнением эллипса? (для вариантов 1-15);
- полученное уравнение является уравнением гиперболы? (для вариантов 15-30).

Задача 4. Элементы a_{21} и a_{12} матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & a_{12} \\ a_{21} & \beta \end{pmatrix}$ наудачу выбираются из множества целых чисел $\alpha,...,\beta$. Какова вероятность того, что определитель полученной матрицы будет:

- неотрицательным? (для вариантов 1-15);
- неположительным? (для вариантов 15-30).

Задача 5. Даны два вектора $\vec{a}\ \alpha;\beta-\alpha$ и $\vec{b}\ x;y$. Координаты вектора $\vec{b}$ наудачу выбираются из множества целых чисел $\alpha,...,\beta$. Какова вероятность того, что:

- модуль вектора $\vec{a}$ будет больше модуля вектора $\vec{b}$? (для вариантов 1-15);

- модуль вектора $\vec{a}$ будет меньше модуля вектора $\vec{b}$? (для вариантов 15-30).

Задача 6. Из колоды в 32 карты (для вариантов 1-15) или 36 карт (для вариантов 16-30) наудачу извлекают m карт. Какова вероятность того, что среди извлеченных карт окажутся:

а) n_1 туз? б) n_1 туз и n_2 королей? в) n_1 туз, n_2 королей и n_3 дам? г) хотя бы один туз?

Задача 7. В трех урнах находятся шары с номерами от 1 до 9. Трехзначное число составляется следующим образом: из первой урны наудачу извлекают шар, его номер – число единиц; номер шара наудачу извлеченного из второй урны – число десятков; номер шара наудачу извлеченного из третьей урны – число сотен. Какова вероятность того, что полученное число будет:

а) больше числа $\overline{n_1 n_2 n_3}$? (для вариантов 1 – 15); б) меньше числа $\overline{n_1 n_2 n_3}$? (для вариантов 16 – 30).

Задача 8. Варианты 1-15.

На отрезке $[0; a]$ наудачу появляется материальная точка. Определить вероятность того, что:

а) расстояние от точки до концов отрезка будет меньше чем a/b;

б) расстояние от точки до точки 0 будет больше чем a/b;

в) расстояние от точки до точки a будет меньше чем a/b;

г) расстояние от точки до середины отрезка будет больше чем a/b.

Задача 8. Варианты 16-30. На отрезке $0; a$ наудачу появляется материальная точка. Определить вероятность того, что:
а) расстояние от точки до концов отрезка будет больше чем a/b;
б) расстояние от точки до точки 0 будет меньше чем a/b;
в) расстояние от точки до точки a будет больше чем a/b;
г) расстояние от точки до середины отрезка будет меньше чем a/b.

Задача 9. На отрезке прямой $y = bx - a$, заключенном между осями координат, наудачу появляется точка. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до начала координат будет: а) меньше чем a/b (для вариантов 1 – 15)?; б) больше чем a/b (для вариантов 16 – 30)?

Задача 10. На дуге полукубической параболы $y = x^{3/2}$ $0 \le x \le b$ наудачу появляется точка. Какова вероятность того, что эта точка появится на дуге этой параболы для которой:
а) $0 \le x \le a$ (для вариантов 1 – 15)?; б) $a \le x \le b$ (для вариантов 16 – 30)?

Задача 11. Варианты 1-15. В круге радиуса R наудачу появляется точка. Какова вероятность того, что она попадет в правильный b-угольник, вписанный в этот круг?

Задача 11. Варианты 16-30. В правильном b-угольнике со стороной a наудачу появляется точка. Какова вероятность того, что она попадет в круг, вписанный в этот многоугольник?

Задача 12. Варианты 1-15. В параллелограмм со сторонами a и b вписан четырехугольник, вершины которого лежат на серединах сторон параллелограмма. В параллелограмме наудачу появляется точка. Какова вероятность того, что она попадет во вписанный в параллелограмм четырехугольник?

Задача 12. Варианты 16-30. В ромб со стороной a вписан треугольник так, что одна сторона треугольника совпадает со стороной ромба, а третья вершина треугольника лежит на середине противоположной стороны ромба. В ромбе наудачу появляется точка. Какова вероятность того, что она попадет во вписанный в ромб треугольник?

Задача 13. В области, ограниченной осью OX и параболой $y = -ax^2 + bx + \; a + b$ наудачу появляется точка. Какова вероятность того, что она попадет в область, ограниченную:

а) осью OX и прямой $y = ax + b$ (для вариантов 1 – 15)?

б) прямой $y = ax + b$ и параболой $y = -ax^2 + bx + \; a + b$ (для вариантов 16 – 30)?

Задача 14. В квадрат (для вариантов 1 – 15) или ромб (для вариантов 16 – 30) помещен круг радиуса $r < a$. В квадрате (ромбе) наудачу появляется точка. Каким должен быть радиус круга, чтобы вероятность попадания точки в круг была бы равна a / b?

Задача 15. В течение 10 единиц времени в устройство должны поступить два сообщения: одно длительностью a единиц, другое – b единиц. Устройство не может принимать второе сообщение, если не закончилось первое. Какова вероятность того, что: а) будет принято только одно сообщение (для вариантов 1 – 15)? б) будут приняты оба сообщения (для вариантов 16 – 30)?

Задача 16. Первое сообщение длительностью 1 может поступить в устройство в любой момент времени $0; a$, второе –

длительностью 2 в любой момент времени $0;b$. Устройство не может принимать второе сообщение, если не закончилось первое. Какова вероятность того, что: а) будут приняты оба сообщения (для вариантов 1 – 15)? б) будет принято одно сообщение (для вариантов 16 – 30)?

Задача 17. Коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ наудачу выбираются из интервалов $0;a$ и $0;b$ соответственно. Какова вероятность того, что:

а) квадратное уравнение не имеет действительных корней (для вариантов 1 – 15)?
б) квадратное уравнение имеет действительные корни (для вариантов 16 – 30)?

Задача 18. В цилиндр с радиусом основания a и высотой b вписан прямой круговой конус, основание которого лежит в основании цилиндра. Какова вероятность того, что точка, наудачу помещенная в цилиндр, попадет в конус?

Задача 19. В прямой круговой конус с радиусом основания a и высотой b вписан цилиндр, основание которого лежит в основании конуса. Какова вероятность того, что точка, наудачу помещенная в конус, попадет в цилиндр?

Задача 20. В области, ограниченной поверхностями $z = -x^2 - y^2 + b^2$ и $z = 0$, наудачу появляется точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в область, ограниченную поверхностями: а) $z = -x^2 - y^2 + a^2$ и $z = 0$ (для вариантов 1 – 15)?
б) $z = -x^2 - y^2 + a^2$; $z = -x^2 - y^2 + b^2$ и $z = 0$ (для вариантов 16 – 30)?

Задача 21. Варианты 1-15. В первой урне n_1+n_2 белых и n_3 черных шаров; во второй урне n_1+n_3 белых и n_2 черных шаров. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару. Какова вероятность того, что: а) оба извлеченные шары белые? б) оба извлеченные шары черные? в) один извлеченный шар белый, а другой черный?

Задача 21. Варианты 16-30. В первой урне n_1+n_3 белых и n_3 черных шаров; во второй урне n_1+n_2 белых и n_2 черных шаров. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару. Какова вероятность того, что: а) оба извлеченные шары белые? б) оба извлеченные шары черные? в) один извлеченный шар белый, а другой черный?

Задача 22. Варианты 1-15. В каждой из трех урн находится по 10 шаров, причем в первой урне n_1 белых, во второй n_2 черных, в третьей n_3 белых. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что: а) все извлеченные шары окажутся белыми?; б) все извлеченные шары окажутся черными?; в) среди извлеченных шаров будет один белый и два черных?; г) среди извлеченных шаров будет один черный и два белых?

Задача 22. Варианты 16-30. В каждой из трех урн находится по 10 шаров, причем в первой урне n_1 черных, во второй n_2 белых, в третьей n_3 черных. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что: а) все извлеченные шары окажутся белыми?; б) все извлеченные шары окажутся черными?; в) среди извлеченных шаров будет один белый и два черных?; г) среди извлеченных шаров будет один черный и два белых?

Задача 23. Варианты 1-15. В первой урне n_1 белых, n_2 синих и n_3 красных шаров, во второй урне n_1 белых, n_3 синих и n_2 красных шаров, в третьей урне n_3 белых, n_2 синих и n_1 красных шаров. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что среди извлеченных шаров: а) хотя бы один будет красный шар? б) будет только один красный шар? в) все извлеченные шары будут разного цвета?

Задача 23. Варианты 16-30. В первой урне n_1 белых, n_2 синих и n_3 красных шаров, во второй урне n_1 белых, n_3 синих и n_2 красных шаров, в третьей урне n_3 белых, n_2 синих и n_1 красных шаров. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что среди извлеченных шаров: а) будет хотя бы один синий шар? б) будет только один синий шар? в) все извлеченные шары будут разного цвета?

Задача 24. В сборочный цех поступила партия из 1000 деталей, из которых $100n_1$ изготовлены на первом станке, $100n_2$ – на втором станке и $100n_3$ – на третьем. Вероятность изготовления качественной детали для первого станка равна 0,85, для второго – 0,9, для третьего станка – 0,95. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется:
а) качественной (для вариантов 1 – 15)? б) некачественной (для вариантов 16 – 30)?

Задача 25. Варианты 1-15. В первой партии $100n_1$ деталей, 80% которых качественные, во второй – $100n_2$ деталей, 10%

которых бракованные, в третьей – $100n_3$ деталей, 95% которых качественные. Из каждой партии извлекли наудачу по одной детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей будут а) все качественные?, б) одна качественная и две бракованные?, в) хотя бы одна качественная?

Задача 25. Варианты 16-30. В первой партии $100n_1$ деталей, 80% которых качественные, во второй – $100n_2$ деталей, 10% которых бракованные, в третьей – $100n_3$ деталей, 95% которых качественные. Из каждой партии извлекли наудачу по одной детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей будут а) все бракованные?, б) одна бракованная две качественные?, в) хотя бы одна бракованная?

Задача 26. Вероятность отказа элемента работающего в системе равна $\dfrac{1}{n_1+n_2+n_3}$. Для повышения надежности работы системы этот элемент дублируется таким же, работающим вместе с основным. На сколько процентов повысилась надежность системы?

Задача 27. Вероятность отказа элемента работающего в системе равна $\dfrac{1}{n_1+n_2+n_3}$. Для повышения надежности работы системы этот элемент дублируется таким же, включаемым если вышел из строя основной элемент. На сколько процентов повысилась надежность системы?

Задача 28. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую урну. После этого из второй урны наудачу извлекли один шар. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется: белым (для вариантов 1 – 15)?; черным (для вариантов 16 – 30)?

Задача 29. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекли два шара и переложили во вторую урну. После этого из второй урны наудачу извлекли один шар. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется: белым (для вариантов 1 – 15)?; черным (для вариантов 16 – 30)?

Задача 30. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 черных шаров. Из первой и второй урн наудачу извлекли по одному шару и переложили в третью урну. После этого из третьей урны наудачу извлекли один шар. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, окажется: белым (для вариантов 1 – 15)?; черным (для вариантов 16 – 30)?

Задача 31. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекли один шар, из второй – два шара и переложили в третью урну. После этого из третьей урны наудачу извлекли два шара. Какова вероятность того, что шары, извлеченные из третьей урны окажутся: белыми (для вариантов 1 – 15)?; черными (для вариантов 16 – 30)?

Задача 32. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 черных шаров. Из первой урны и второй урны наудачу извлекли по два шара и переложили в третью урну. Какова вероятность того, что в третьей урне окажется: белых шаров больше, чем черных (для вариантов 1 – 15)?; черных шаров больше, чем белых (для вариантов 16 – 30)?

Задача 33. В первой урне n_1 белых и k_1 синих и m_1 красных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 синих и m_2 красных шаров, в третьей урне n_3, k_3, m_3 соответственно. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую урну, затем из второй урны наудачу извлекли один шар и переложили в третью урну. После этого из третьей урны наудачу извлекли два шара. Какова вероятность того, что шары, извлеченные из третьей урны, окажутся: белым и синим (для вариантов 1 – 15)?; красным и белым (для вариантов 16 – 30)?

Задача 34. Изделия изготавливаются тремя бригадами сборщиков. Первая бригада изготавливает $\dfrac{n_1}{n_1+n_2+n_3}$ всех изделий, вторая – $\dfrac{n_2}{n_1+n_2+n_3}$, третья – . Надежность изделия изготовленного первой бригадой $\dfrac{k_1}{k_1+k_2+k_3}$, второй – $\dfrac{k_2}{k_1+k_2+k_3}$, третьей – $\dfrac{k_3}{k_1+k_2+k_3}$. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие: не проработает гарантийное время (для вариантов 1 – 15)?; проработает гарантийное время (для вариантов 16 – 30)?

Задача 35. На складе имеются $100\cdot\ m_1+m_2+m_3$ деталей. Из них $100m_1$ изготовлены на первом станке, $100m_2$ – на втором и $100m_3$ – на третьем. Первый станок дает в среднем $n_1\%$ брака, второй – $n_2\%$ брака и третий $n_3\%$ брака. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется: доброкачественной (для вариантов 1 – 15)?; бракованной (для вариантов 16 – 30)?

Задача 36. Устройство состоит из трех блоков. Для сборки устройства наудачу из партии в k_1 деталей, среди которых 2% бракованных, берется первый блок, из партии в k_2 деталей, среди которых 3% бракованных, берется второй блок, из партии в k_3 деталей, среди которых 0,5% бракованных, берется третий блок. Какова вероятность того, что собранное изделие окажется: $\dfrac{n_3}{n_1+n_2+n_3}$

доброкачественным (для вариантов 1 – 15)?; бракованным (для вариантов 16 –30 n_2)? $m_1 : m_2 : m_3$.

Задача 37. На сборочный конвейер поступают однотипные детали, изготавливаемые на трех станках. Производительности станков относятся как Вероятность изготовления бракованной детали на первом станке $1/k_1\,\%$, на втором – $1/k_2\,\%$, на третьем – $1/k_3\,\%$. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется: доброкачественной (для вариантов 1 – 15)?; бракованной (для вариантов 16 –30)?

Задача 38. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – белых и k_2 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекли два шара и переложили во вторую урну. После этого из второй урны наудачу извлекли один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар извлеченный из второй урны, первоначально находился: во второй урне (для вариантов 1 – 15)?; в первой урне (для вариантов 16 – 30)?

Задача 39. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую урну. После этого из второй урны наудачу извлекли один шар. Он оказался черным. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, первоначально находился: в первой урне (для вариантов 1 – 15)?; во второй урне (для вариантов 16 – 30)?

Задача 40. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекли один шар, из второй – два шара и переложили в третью урну. После этого из третьей урны наудачу извлекли два черных шара. Какова вероятность того, что шары, извлеченные из третьей урны, находились: в первой урне (для вариантов 1 – 15)?; во второй урне (для вариантов 16 – 30)?

Задача 41. В первой урне n_1 белых и k_1 черных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 черных шаров. Из первой и второй урн наудачу извлекли по одному шару и переложили в третью урну. После этого из третьей урны наудачу извлекли один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, находился: в первой урне (для вариантов 1 – 15)?; во второй урне (для вариантов 16 – 30)?

Задача 42. В первой урне n_1 белых и k_1 синих и m_1 красных шаров, во второй – n_2 белых и k_2 синих и m_2 красных шаров, в третьей урне n_3, k_3, m_3 соответственно. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую урну, затем из второй урны наудачу извлекли один шар и переложили в третью урну. После этого из третьей урны наудачу извлекли белый и синий шар. Какова вероятность того, что шары, извлеченные из третьей урны находились первоначально: в первой и третьей урнах (для вариантов 1 – 15)?; во второй и третьей урнах (для вариантов 16 – 30)?

Задача 43. На складе имеются $100 \cdot \ m_1 + m_2 + m_3$ деталей. Из них $100m_1$ изготовлены на первом станке, $100m_2$ – на втором и $100m_3$ – на третьем. Первый станок дает в среднем $n_1\%$ брака, второй $n_2\%$ брака и третий $n_3\%$ брака. Наудачу взятая деталь оказалась доброкачественной. Какова вероятность того, что она изготовлена: на втором станке (для вариантов 1 – 15)?; на первом станке (для вариантов 16 – 30)?

Задача 44. Изделия изготавливаются тремя бригадами сборщиков. Первая бригада изготавливает $\dfrac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3}$ всех изделий, вторая – $\dfrac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3}$, третья – $\dfrac{n_3}{n_1 + n_2 + n_3}$. Надежность изделия изготовленного первой бригадой $\dfrac{k_1}{k_1 + k_2 + k_3}$, второй – $\dfrac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3}$, третьей – $\dfrac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$. Наудачу взятое изделие: не проработало гарантийное время. Какова вероятность того, что оно изготовлено первой бригадой (для вариантов 1 – 15)?; третьей бригадой (для вариантов 16 – 30)?

Задача 45. На сборочный конвейер поступают однотипные детали, изготавливаемые на трех станках. Производительности станков относятся как $m_1 : m_2 : m_3$. Вероятность изготовления бракованной детали на первом станке ${}^{1}\!/_{k_1}$ %, на втором – ${}^{1}\!/_{k_2}$ %, на третьем – ${}^{1}\!/_{k_3}$ %. Наудачу взятые две детали оказались доброкачественными. Какова вероятность того, что они изготовлены: на первом и третьем станках (для вариантов 1 – 15)?; на втором и третьем станках (для вариантов 16–30)?

Задача 46. Устройство состоит из трех блоков. Для сборки устройства наудачу из партии в k_1 деталей, среди которых 2% бракованных, берется первый блок, из партии в k_2 деталей, среди которых 3% бракованных, берется второй блок, из партии в k_3 деталей, среди которых 0,5% бракованных, берется третий блок. В собранном изделии оказался бракованным один блок. Какова вероятность того, что: это блок из первой партии (для вариантов 1 – 15)?; из второй партии (для вариантов 16 – 30)?

Задача 47. Вероятность, выиграть по одному лотерейному билету равна $\dfrac{1}{k_1 + k_2 + k_3}$. Какова вероятность, имея три билета, выиграть:

а) по одному билету (для вариантов 1 – 15)?; по двум билетам (для вариантов 16 –30)?

б) хотя бы по двум билетам (для вариантов 1 – 15)?; по крайней мере, по двум билетам (для вариантов 16 –30)?

в) хоть что-то (для вариантов 1 – 15)?; не выиграть ничего (для вариантов 16 –30)?

Задача 48. Для освещения производственного помещения требуется n_1 электролампа. Вероятность перегорания каждой электролампы в течение года равна $\frac{1}{k_1}$. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить:
а) все лампы (для вариантов 1 – 15)?; ни одной лампы (для вариантов 16 –30)?
б) одну лампу (для вариантов 1 – 15)?; две лампы (для вариантов 16 –30)?

Задача 49. Передается сообщение из m_1 символа. Каждый из символов при передаче может быть искажен с вероятностью $\frac{1}{k_1}$. Какова вероятность того, что: сообщение не будет искажено (для вариантов 1 – 15)?; будет искажено
(для вариантов 16 –30)?

Задача 50. Для разрушения объекта требуется не менее n_1 попаданий. Сделано n_1+n_2 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле $\frac{1}{m_1}$. Какова вероятность: разрушения объекта (для вариантов 1 – 15)?; не разрушения объекта (для вариантов 16 –30)?

Задача 51. Монета подбрасывается n_1+m_1 раз. Какова вероятность того, что “герб” выпадет:
четное число раз (для вариантов 1 – 15)?; нечетное число раз
(для вариантов 16 –30)?

Рекомендация: используйте формулу $1+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$ или $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

Задача 52. Вероятность отказа элемента, влияющего на работу системы равна 0,05. Для повышения надежности системы в неё включают еще два таких же элементов, работающих вместе с основным. Система выходит из строя, если отказали все три элемента. Какова вероятность того, что: система выйдет из строя (для вариантов 1 – 15)?; система не выйдет из строя (для вариантов 16 –30)?

Задача 53. Вероятность изготовления доброкачественной детали на станке автомате равна 0,95. изготовлена партия из 1000 деталей. Какова вероятность того, что среди изготовленных деталей:

а) n_1 бракованная деталь (для вариантов 1-15)? n_2 бракованных деталей (для вариантов 16 –30)?

б) число бракованных деталей составляет $|n_1-n_2|$ (для вариантов 1-15)? $|n_2-n_3|$ (для вариантов 16 –30)?

Задача 54. По каналу связи передается сообщение из 2000 символов. Вероятность искажения каждого символа при передаче сообщения равна 0,01. Какова вероятность того, что:

а) в принятом сообщении будет: n_2 искаженных символа (для вариантов 1-15)? n_1 искаженный символ (для вариантов 16 – 30)?

б) сообщение будет принято правильным, если для этого число искаженных символов не должно превышать n_1 (для вариантов 1-15)? n_2 (для вариантов 16-30)?

Задача 55. Всхожесть семян составляет 98%. Какова вероятность того, что из посаженных 10000 семян взойдут не менее чем $10000 - n_1$ (для вариантов 1-15)? $10000 - n_2$ (для вариантов 16-30)?

Задача 56. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна $\dfrac{1}{n_1 + n_2 + k_3 + m_3}$. Куплено k_1 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Исходные данные к задачам №2 – 5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
β	3	4	5	6	4	5	6	7	5	6	7	8	6	7	8

Исходные данные к задачам №6, №7

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m	9	10	12	9	10	12	9	10	12	13	10	13	10	13	10

n_1	3	3	4	2	3	3	2	3	3	4	2	4	2	3	2
n_2	2	3	3	2	2	4	2	2	3	4	3	3	3	4	4
n_3	2	2	3	3	3	3	3	3	4	3	3	4	4	4	3

Исходные данные к задачам №8 – 20

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	1	2	3	4	5	4	3	2	1	2	3	1	2	1	1
b	7	3	4	5	6	6	5	4	3	5	6	4	6	5	6

Исходные данные к задачам №21-56

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	16	17	18	19	20	21	22	23	24
n_1	1	2	3	4	5	6	6	5	4
n_2	7	5	5	2	3	2	1	2	3
n_3	2	3	2	4	2	2	3	3	3
k_1	3	4	5	6	3	4	5	6	3
k_2	4	5	6	3	4	5	6	3	4
k_3	5	6	3	4	5	6	3	4	5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	16	17	18	19	20	21	22	23	24
m_1	6	3	4	5	6	3	4	5	6
m_2	3	4	5	6	3	4	5	6	3
m_3	4	5	6	3	4	5	6	3	4

Вари-ант	10	11	12	13	14	15
	25	26	27	28	29	30
n_1	4	3	2	1	5	3
n_2	4	3	4	3	1	2
n_3	2	4	4	6	4	5
k_1	4	5	6	3	4	5
k_2	5	6	3	4	5	6
k_3	6	3	4	5	6	3

Вари-ант	10	11	12	13	14	15
	25	26	27	28	29	30
m_1	3	4	5	6	3	4
m_2	4	5	6	3	4	5
m_3	5	6	3	4	5	6

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теория вероятностей: Учеб. Для вузов / А.В. Печенкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.-М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.-456 с.

2. Петрушко И.М. Курс высшей математики. Теория вероятностей: Лекции и практические занятия/ И.М. Петрушко, В.И. Афанасьев, А.А, Бободжанов, В.Г. Крупин.-М.: Издательство МЭИ, 2004.-304 с.

3. Дубровская А.П. Курс теории вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие/ А.П. Дубровская, Е.Г. Глушко.- Воронеж: ВГТУ, 2004. 161 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике/ В.Е. Гмурман. -М: Высш. шк., 1997.-400 с.

5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. Пособ./ Под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука, 1990. 428 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации самостоятельной работы
по изучению дисциплины «Теория вероятностей и
математическая статистика»
для студентов специальности
230104 «Системы автоматизированного проектирования»
очной формы обучения
Часть 1

Составители:
Глушко Елена Георгиевна
Дубровская Алевтина Петровна

В авторской редакции

Компьютерный набор Е.Г. Глушко

Подписано к изданию 25. 05. 2011.
Уч.-изд.л. 4,1.

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14