

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

В.А. Шунина В.В. Пешков С.А. Кострюков

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ,
ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКУ**

Воронеж 2021

Шунина В.А. Введение в математический анализ, теорию вероятности и статистики: учеб. пособие / В.А. Шунина, В.В. Пешков, С.А. Кострюков. – Воронеж : ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2014. – 133 с. – Электронный ресурс кафедры высшей математики и физико-математического моделирования.

Пособие содержит краткое изложение основных понятий математического анализа, теории вероятности и статистики для самостоятельной работы студентов по курсу «Математика» для студентов направления 22.03.02 «Металлургия» очной формы обучения

Учебное пособие указания подготовлено в электронной форме и содержатся в файле Введение в МА.pdf.

Ил. 12. Библиогр.: 5 назв.

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Публикуется по решению методического семинара кафедры высшей математики и физико-математического моделирования.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1.1 МАТЕМАТИКА КАК ЧАСТЬ ОБЩЕЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СТАНОВЛЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Мы живем в век математики. Математическое образование важно с различных точек зрения: логической, познавательной, прикладной, исторической, философской.

Слово «математика» произошло от греческого «μαθημα» (матэма) – наука, знание. Кант писал: «Учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена к ней математика».

Математика является не только универсальным языком науки, но также и частью современной культуры. «Тот, кто не знает математики, – говорил в XIII веке известный английский философ Роджер Бэкон, – не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». «Математика ум в порядок приводит», авторитетно заявлял М.В. Ломоносов.

Известны два подхода к определению *предмета* математики. Первая точка зрения утверждает, что математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах окружающего мира. Примером для такой точки зрения может служить геометрия Евклида с ее содержательной аксиоматикой.

Другая точка зрения отражает методологический подход Бурбаки (коллектив французских ученых), которые определяют математику как скопление математических структур, не имеющих к действительности никакого отношения, так как одни и те же аксиомы могут описывать отношения различных по своему конкретному содержанию объектов. Они выделяют три основных типа структур.

Алгебраические структуры (группы, кольца, поля). Элементами могут выступать как математические объекты, так и нематематические.

Структуры порядка. На рассматриваемом множестве задается отношение порядка (сравнение).

Топологические структуры. Каждому элементу множества относят семейства подмножеств, называемых окрестностями этого элемента.

Кроме этих порождающих структур рассматриваются и более сложные.

Когда из аксиом структуры выводят логические следствия, отказавшись от всяких гипотез относительно «природы» рассматриваемых элементов, то говорят о построении *аксиоматической теории структуры*.

Два приведенных подхода дополняют друг друга, а не находятся в антагонизме, в чем можно убедиться, анализируя историю развития математики.

Академик Колмогоров выделяет 4 периода истории.

1) Зарождение математики (до VI в. до н.э.). Математика не является самостоятельной отраслью знания. В Египте, Вавилоне, Индии и Китае появляются начатки арифметики, геометрии, алгебры и тригонометрии.

2) Элементарная математика (VI в. до н.э. – XVII в.). В Древней Греции возникает математика как самостоятельная наука. Математика развивается в арабских странах. Дедуктивное изложение элементарной геометрии, возникновение теории чисел, понятия действительного числа, создание алгебры как буквенного исчисления. Основное понятие – величина.

3) Математика переменных величин (XVII – XIX вв.). Появление математического и функционального анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, проективной и аналитической геометрии. Основное понятие – функция.

4) Современная математика (с XIX в.). Взрывное развитие математики и проникновение ее во все области науки и практической деятельности. Планомерное изучение математикой самой себя: количественных отношений и пространственных форм. Обоснование математики: возникновение теории множеств и математической логики. Развитие теории вероятностей и вычислительной математики.

Зарождение математики

Восточная математика возникла как прикладная наука, имевшая целью облегчить календарные расчеты, распределение урожая, организацию общественных работ и сбор налогов. В ней не было попыток дать то, что называется доказательством; имеются только предписания, алгоритмы: «делай то-то и так-то».

Самой развитой была вавилонская математика. Именно ей человечество обязано как шестидесятеричной системой счисления, используемой в настоящее время при измерении времени и углов (градусы измеряются от 0° до 360° , в минуте 60 секунд, в часе 60 минут), так и атрибутом современной десятичной системы счисления – позиционностью, благодаря которой в Вавилоне был изобретен нуль как принцип записи чисел. Значение позиционности для человечества сродни значению алфавита.

Первое упоминание о комбинаторных вопросах встречается в китайских рукописях XII–XIII вв. до н.э. «Же-ким» («Книга перемен (перестановок)»). Там же писалось, что все в мире является сочетанием двух начал: мужского *ян* и женского *инь*.

Период элементарной математики

Самая важная роль в развитии западной математики принадлежит античной греческой цивилизации. Находясь в постоянном контакте с народами Востока, Вавилоном и Египтом, греки не довольствовались усвоением их знаний и создали абстрактную и дедуктивную математику. В VI в. до н.э. в период расцвета греческих торговых полисов Малой Азии сложилась форма абстрактного мышления, ставшая основой всей западной науки. Впервые они поставили не только восточный вопрос «как?», но и вопрос «почему?».

Согласно преданию отцом греческой математики является купец Фалес из Милета, который в первой половине VI в. основал братство религиозного, философского и научного характера. Основу всего он видел в числе, о чем свидетельствует его девиз: «Всё есть число».

Пифагорейская школа (570-471 гг. до н.э.) открыла уже иррациональные числа и сокрушила точку зрения о представимости мира целыми числами, вызвав первый кризис в истории математики.

Элеаты не приняли доктрину «всё есть число». Если дискретные объекты можно представить целыми числами, то иначе обстоит дело в случае непрерывных величин – длин, площадей, объемов. Зенон Элейский около 450 г. до н.э. сформулировал несколько парадоксов, или апорий (тупиков). Это было первое столкновение двух концепций: континуалистской, трактовавшей число и материю как бесконечно делимые, и атомистской, провозглашающей существование первичных неделимых элементов.

Около 377 г. до н. э. Платон основал философскую школу – Академию, в течение века руководившей всей интеллектуальной жизнью Афин. Не будучи математиком, Платон уделял математике важное место в своей воспитательной системе. Согласно легенде, при входе в свою школу он написал: «Пусть никто не знающий геометрии не входит сюда». Платон ставил вопрос о природе и структуре математики. Его ученики первыми осознали абстрактный характер математических объектов.

Аристотель (384-322 гг. до н. э.) – самый известный ученик Платона, воспитатель Александра Македонского. «Знать – это установить при помощи доказательства», – писал Аристотель. Обладать знанием – означает не созерцать, как у Платона, а провести рассуждение, подчиняющееся некоторым правилам. Аристотель стал основоположником логики. Классифицировав знания, Аристотель заложил деление науки на отдельные дисциплины.

В III в. до н. э. появились профессиональные ученые. В Александрии непосредственный преемник Александра – Птолемей – построил большой научный центр – Музей со знаменитой библиотекой, насчитывающей 700 000 томов. Евклид, влиятельнейший математик всех времен, преподавал там геометрию. На просьбу Птолемея быстро обучить его математике он заявил, что

к геометрии «нет царского пути». Его наиболее знаменитое произведение – 13 книг «Начал». В истории Запада «Начала», после Библии, наибольшее число раз изданная и более всего изучаемая книга. Большая часть школьной геометрии заимствована буквально из первых 6 книг «Начал».

Величайшим математиком эпохи эллинизма и всего древнего мира был Архимед (287-212 до н.э.), Наиболее важный вклад в математику он внес теоремами о площадях плоских фигур и об объемах тел.

Арабская цивилизация. Меньше чем через сто лет после смерти Магомета (632) объединенные им древние кочевые племена Аравии под началом его последователей – халифов – завоевали обширные территории от Испании до Индии, где с VII по XIII вв. развивалась арабская цивилизация. В течение восьми веков арабы играли роль хранителей мудрости и просветителей. Арабская математика достигла своего апогея в работах Самаркандской школы. Но после смерти Улутбека в 1449 г. школа распалась.

Первым знаменитым ученым багдадской школы был уроженец Хивы Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми. В латинских переводах этот автор именовался как Algorithmus, откуда в современном математическом языке появился термин «алгоритм». Алгебра, арабский текст которой сохранился, была озаглавлена «Хисаб ал-джабр ва-л-мукабала». От латинского перевода слова «ал-джабр» – «алгебра» и произошел современный термин.

Наиболее известным достижением *индийской* математики является современная десятичная позиционная система счисления.

Крупнейший математик христианского средневековья – Леонардо Пизанский (ок. 1170 – после 1250), которого прозвали Фибоначчи. После путешествия по Востоку в качестве купца написал математическую «Книгу абака» (Liber abaci, 1202), возникшую под влиянием «Начал» Евклида, трудов ал-Хорезми и др.

Период математики переменных величин

После арабов арифметику возродил Пьер де Ферма (1601-1665), юрист из Тулузы (Франция). Ферма вдвоем с Блезом Паскалем (1623-1662) в 1654 г. установил некоторые из основных положений теории вероятностей. Паскаль первым изобрел в 1641 году счетную суммирующую машину, поэтому в его честь назвали распространенный язык программирования Паскаль.

Рене Декарт (1596-1650) искал общий метод мышления, который бы позволял быстро делать изобретения и выявлять истину в науке. Декарт опубликовал свою «Геометрию» в качестве применения своего общего метода объединения алгебры и геометрии. Декарт первым применил развитую алгебру арабов к геометрии древних, и под влиянием этой книги развилась аналитическая геометрия.

Ньютон открыл свою «теорию флюксий», как он называл анализ, в течение 1665-1666 гг., спасаясь от чумы в Кембридже у себя в родной деревне.

Лейбниц – изобретатель математических символов. Анализ – результат его поисков универсального языка, в частности, языка, выражающего изменение и движение.

Из Базеля (Швейцария) вышел самый плодовитый математик XVIII столетия, если только не всех времен, – Леонард Эйлер (1707-1783). Он работал в Петербургской академии. Хотя он потерял в 1735 г. один глаз, а в 1766 г. – второй, ничто не могло ослабить его огромную продуктивность. Слепой Эйлер, пользуясь своей феноменальной памятью, продолжал диктовать свои открытия. В течение его жизни увидели свет 530 его книг и статей.

Период современной математики

Со второй половины XIX века новые теории стали возникать не только в результате непосредственных запросов практики, но также из внутренних потребностей самой математики. Одновременно внимание математиков сосредотачивается на

вопросах обоснования исходных положений (аксиом) и на логических приемах доказательств, что привело к новому взгляду на аксиоматический метод.

В 1829 г. вышла книга «О началах геометрии» Николая Ивановича Лобачевского (1792-1856), профессора Казанского университета. Заменив постулат Евклида о параллельных его отрицанием, Лобачевский развил новую непротиворечивую геометрию. Как было установлено, система аксиом Евклида является неполной. К настоящему времени эта система существенно доработана, и имеется несколько систем аксиом евклидовой геометрии: аксиомы Гильберта, Вейля, Колмогорова, фон Неймана

Дальнейшее развитие геометрии связано с профессором Гёттингенского университета Бернгардом Риманом (1826-1866). Риманова геометрия или, другими словами, эллиптическая геометрия – это двумерная геометрия сферы в трехмерном евклидовом пространстве. Аналогом прямой линии здесь является геодезическая линия. Для перехода от геометрии Евклида к геометрии Лобачевского требуется замена только одной аксиомы – пятого постулата Евклида, но для перехода к геометрии Римана – вместе с пятым постулатом необходимо заменить еще некоторые аксиомы.

Идеи Римана составили математическую основу теории относительности. Развитие геометрии Римана привело к созданию тензорного анализа – современного метода исследования многомерных римановых пространств.

Подводя итог, можно заключить, что математика поднялась до изучения абстрактных структур и категорий. Она проникает в исследование все более сложных процессов, в том числе и неметрической природы.

К основным разделам математики относятся: теория чисел, аналитическая геометрия, алгебра, геометрия, математический анализ, дискретная математика, теория графов, топология, теория вероятностей, математическая статистика, математическая логика, вычислительная математика.

1.2 МНОЖЕСТВА И ПОДМНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Краеугольным камнем современной математики является теория множеств. Ее основателями в 19 веке явились Больцана, Кантор, Дедекинд. Бурбаки утверждали, что возможно вывести всю математику из единого источника – теории множеств.

Для теоретиков множественная аксиоматика является фундаментом современной теории вероятностей и других разделов.

Понятие множества вводится аксиоматически. Множество определяет совокупность объектов произвольной природы.

Множество – любое собрание, коллекция любых объектов. Обозначение: прописные латинские буквы $A, B, C, \dots$

Элемент множества – любой объект множества: $a \in A$. Обозначение не принадлежности: $i \notin A$.

Два множества *равны* в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

При записи математических рассуждений используют экономную символику, применяемую в логике.

Слово «любые» заменяется символом $\forall$ – *квантором всеобщности*, а слово «существует» – символом $\exists$ – *квантором существования*.

Запись $\forall x \in X \alpha(x)$ означает, что для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$.

Запись $\exists x \in X \alpha(x)$ означает, что существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$.

Если элемент $x \in X$, для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единственен, то пишут

$$\exists! x \in X \alpha(x).$$

Множество *конечно*, если оно содержит натуральное или нулевое число элементов, и *бесконечно*, если оно не является конечным.

Множество X называется *ограниченным сверху*, если существует действительное число a такое, что $x \leq a$ для всех $x \in X$. Всякое число, обладающее этим свойством, называется верхней гранью множества X .

Для заданного ограниченного сверху множества X множество всех его верхних граней имеет наименьший элемент, который называется *точной верхней гранью* множества X и обозначается символом $\sup X$.

Точная нижняя грань множества X обозначается символом $\inf X$.

Множество X , ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

К примеру, множество $[0, 1)$ имеет множество верхних граней $[1, +\infty)$, наименьший элемент которого равен 1. Поэтому $\sup[0, 1) = 1$, причем $1 \notin [0, 1)$; $\inf[0, 1) = 0$.

Множество A называется *подмножеством* множества B , или множество A *принадлежит* множеству B , если $\forall$ элемент A принадлежит также и B . Обозначение: $A \subset B$.

Множество A *не принадлежит* множеству B , если $\exists x$: $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \not\subset B$.

Пустым множеством, или *нуль-множеством*, называется множество $\emptyset = \{\forall x: x \notin \emptyset\}$

Существует только одно пустое множество.

Подмножества A и $\emptyset$ множества A называются *тривиальными*.

Булеаном множества A называется множество всех подмножеств множества A . Обозначается готической буквой $\mathfrak{B}(A)$.

Множество задают либо *перечислением* его элементов, либо *описанием свойств* его элементов. В последнем случае используется обозначение $A = \{x \in T: \alpha(x)\}$ или $A = \{x \in T \mid \alpha(x)\}$. То есть множество A – это совокупность тех, и только тех, элементов из некоторого основного множества T , которые обладают свойством α .

Двухэлементное множество $\{x, y\}$, в котором элемент x находится на первом, а элемент y на втором месте, называется *упорядоченной парой* (x, y) .

Элемент x называется первой координатой упорядоченной пары (x, y) , а y – второй координатой.

Две упорядоченные пары равны, если совпадают их координаты.

Пусть заданы два множества X и Y . Множество всевозможных упорядоченных пар $\{x, y\}$ таких, что $x \in X$ и $y \in Y$ называется *декартовым произведением* и обозначается $X \times Y$. Например, декартовым произведением является плоскость с двумя координатными осями, так как определяет множество пар вещественных чисел.

Пример 1. Описать перечислением элементов множество $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x - 3)(x^2 - 1) = 0 \text{ и } x \geq 0\}$.

Решение. A есть множество всех целых неотрицательных корней уравнения $(x - 3)(x^2 - 1) = 0$. Следовательно, $A = \{1, 3\}$.

Операции на множествах

Объединением или суммой множеств A и B называется множество $A \cup B = A + B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пересечением или произведением множеств A и B называется множество $A \cap B = A \cdot B = AB = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Имеют место законы *идемпотентности*: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

Разностью множеств B и A называется множество $B \setminus A = B - A = \{x: x \in B \text{ и } x \notin A\}$. Если $A \subset B$, то разность множеств $B \setminus A$ называется *дополнением множества* A до множества B .

Для изображения операций на множествах используют *диаграммы Венна* или *круги Эйлера*, которыми пользовался еще Аристотель (рис. 1).

Над множествами вводятся «внешние» операции, результатами которых могут быть не только новые множества, но и новые математические объекты.

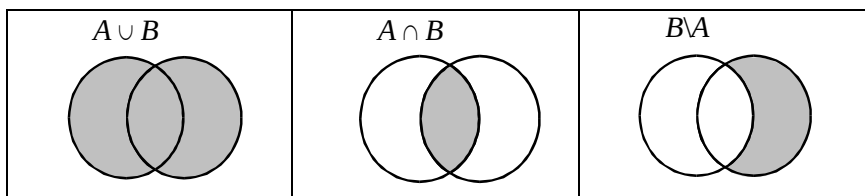


Рис. 1.

Если каждому элементу $x \in X$ по какому то правилу f поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X в множество Y .

В случае, когда множества X и Y нечисловые, отображение называется *оператором*; отображение нечислового множества X в числовое множество Y – *функционалом*; отображение числового множества X в числовое множество Y – *функцией*.

Пусть D – произвольное множество действительных чисел. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(x)$, то говорят, что на множестве D определена числовая функция f . Множество D называется *областью определения*, а множество

$$E = \{ y \in R \mid y = f(x), x \in D \}$$

– *множеством значений* числовой функции f . Символически функция записывается в виде

$$f: D \rightarrow E \text{ или } y = f(x).$$

Множества и отношения

В первом издании «Теории множеств» в 1939 году Бурбаки пишут: «Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящимися в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств».

Теория отношений удобный аппарат. Например, с его помощью понятие функции применяется не только к числовым множествам, но и к множествам объектов любой природы.

Отношение – множество упорядоченных пар, подмножество декартового произведения.

Отношения между парами объектов называются *бинарными* и обычно обозначаются буквой $\mathfrak{R}$.

Рассмотрим общие свойства бинарных отношений.

Рефлексивность. Отношения, при которых каждый элемент множества связан этим отношением сам с собою:

$$a \mathfrak{R} a.$$

Симметричность. Отношения, при которых из того, что элемент a связан с элементом b отношением $\mathfrak{R}$, вытекает, что и элемент b так же связан этим же отношением с элементом a :

$$a \mathfrak{R} b \rightarrow b \mathfrak{R} a.$$

Толерантность. Бинарные отношения называются толерантными, если они рефлексивны и симметричны. Два объекта считаются толерантными, если они обладают хотя бы одним общим признаком.

Транзитивность. Отношения, при которых из того, что элемент a связан с элементом b отношением $\mathfrak{R}$, а элемент b в свою очередь связан с элементом c этим же отношением, вытекает, что элемент a связан с элементом c отношением $\mathfrak{R}$:

$$a \mathfrak{R} b \text{ и } b \mathfrak{R} c \rightarrow a \mathfrak{R} c.$$

Эквивалентность. Бинарные отношения будут эквивалентными, если они обладают рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью. Эквивалентность является понятием равенства. Эквивалентность – это совпадение элементов только по существенным признакам. Эквивалентность разбивает заданное множество на не пустые, не пересекающиеся *подмножества* – классы эквивалентности.

Каждое из этих подмножеств состоит из эквивалентных между собой элементов и только из них. Эта операция называется *факторизацией*, а результат – *фактор множествами*.

Бинарные отношения можно задавать различными способами: таблицами, стрелками, сечениями.

Отношения удобно представлять графически. Каждой упорядоченной паре отношения $\{x, y\} \in \mathfrak{R}$ соответствует точка на плоскости с координатами x, y . Если нанести все точки, то получится график отношения. Так график рефлексивного отношения будет содержать точки биссектрисы I и III квадрантов. График симметричного отношения будет симметричен относительно этой биссектрисы.

Мощность множества

Мощность множества равна числу его элементов, если множество конечно.

Очевидно, что в то время как подсчет числа элементов возможен лишь для сравнения конечных множеств, то для сравнения бесконечных множеств нужно установить *взаимно-однозначное соответствие*, когда каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Если между множествами X и Y установлено взаимно-однозначное соответствие, то говорят, что эти множества *эквивалентны или равномощны*: $X \sim Y$.

Таким образом, понятие эквивалентности множеств есть обобщение понятия равночисленности на случай бесконечных множеств.

Г. Кантор установил, что множества R и R^2 (плоскость) равномощны. В единичном квадрате точек не больше, чем на единичном отрезке.

Павел Флоренский писал: «Человек – малый мир, микрокосмос. Среда – большой мир... Так говорится обычно. Но ничто не мешает нам сказать и наоборот... Если и Человек, и природа бесконечны, то человек, как часть природы, может быть равномошен со своим целым, и то же должно сказать о природе, как части человека... Человек – в мире, но человек так же сложен, как и мир. Мир – в человеке, но и мир так же сложен, как человек».

1.3 МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В основе математики лежит понятие множества. Природа элементов абстрактного множества нас не интересует. От элементов требуется только одно, чтобы они подчинялись заданной системе аксиом. Ценность формального определения состоит в том, что оно выявляет общие свойства совершенно, казалось бы, различных математических объектов. Например, числовые множества имеют одинаковые алгебраические свойства. Напомним эти множества.

Натуральные числа. Леопольд Кронекер когда-то произнес: «Натуральное число создал господь Бог, все прочие – дело рук человеческих». *Натуральный ряд* – это числа 1, 2, 3 и т.д. до бесконечности. Обозначение натурального ряда: N .

Целые числа – это числа вида n , $-n$ и 0, где n – натуральное число. Все целые числа можно записать так: ..., -2 , -1 , 0, 1, 2, ... Отсюда следует, что любое натуральное число является также и целым. Обозначение: Z .

Рациональные числа – это числа вида p/q , где p и q – целые числа, причем $q \neq 0$. Обозначение: Q . Очевидно, что любое целое число является рациональным.

Действительные или вещественные числа (или континуум) получают из рациональных чисел с помощью некоего предельного процесса. Это наши обычные числа. Обозначение: R . Рациональное число всегда действительное. Таким образом,

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Иррациональные числа. Любая обыкновенная дробь может быть записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби. И наоборот, любая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой десятичную запись некоторой обыкновенной дроби. А какой смысл могут иметь бесконечные непериодические дроби?

Легко показать, что никакая дробь p/q не может быть корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$. Таким образом $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, то есть бесконечной периодической десятичной дробью. Действительные, но не рациональные числа называются *иррациональными числами*. Обозначение: J .

Комплексные числа. Не каждый многочлен с целыми коэффициентами имеет корни среди действительных чисел, например, квадратный двучлен $x^2 + 1$. Добавим к действительным числам некое число i , квадрат которого равен -1 : $i^2 = -1$. Число $i = \sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*.

Полученный таким образом набор чисел вместе с результатами арифметических операций над ними называется *комплексными числами*: C .

Комплексные числа записывают в виде $z = x + iy$, где x и y – вещественные числа, i – мнимая единица.

$x = \operatorname{Re} z$ называется *вещественной частью* комплексного числа z , $y = \operatorname{Im} z$ – *мнимой частью*.

Комплексно сопряженными называются числа, отличающиеся только знаком своей мнимой части $z^* = x - iy$.

Действительные числа – частный случай комплексных при $y = 0$. Не действительные числа, т. е. комплексные при $y \neq 0$, называются *мнимыми*.

Любой многочлен с коэффициентами из C имеет корень в C .

Комплексные числа наглядно изображают на координатной плоскости: на горизонтальной оси лежат вещественные числа $\operatorname{Re} z$, а на вертикальной – мнимые числа $\operatorname{Im} z$.

Модуль числа z равен расстоянию точки, изображающей это число от начала координат $|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Для комплексных чисел следующим образом определены операции сложения и умножения:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Частное комплексных чисел равно комплексному числу

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2}.$$

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

коммуникативности: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

ассоциативности: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$,
 $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

дистрибутивности: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Существует три формы представления комплексного числа $z = (x, y)$:

алгебраическая $z = x + iy$,

тригонометрическая $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

показательная $z = |z| \exp(i\varphi)$.

Здесь символ $\exp(i\varphi)$ обозначает комплексное число $(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, φ называется *аргументом* ($\arg z$) комплексного числа и является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \cos \varphi = x / \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = y / \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Все аргументы различаются на целые кратные 2π и обозначаются единым символом $\text{Arg } z$.

Комплексные числа часто встречаются в качестве корней полиномов.

Многочленом (полиномом) n -й степени называется выражение вида:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

где $z \in C$; $a_0, a_1, \dots, a_n \in C$; $a_n \neq 0$; $n \in N$.

Два многочлена $P_n(z)$ и $Q_m(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z^1 + b_0$ равны, если

$$a_n = b_m, \quad \dots, \quad a_0 = b_0, \quad m = n.$$

Многочлены можно складывать, перемножать, делить.

Существуют единственные многочлены $S_k(z)$ и $R_l(z)$ такие, что

$$P_n(z) = S_k(z)Q_m(z) + R_l(z) \quad \text{или} \quad \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = S_k(z) + \frac{R_l(z)}{Q_m(z)},$$

здесь $Q_m(z)$ – ненулевой многочлен; $n \geq m$; $l < m$ или $l = 0$; $k = n - m$.

$S_k(z)$ называют *частным* от деления $P_n(z)$ на $Q_m(z)$, а $R_l(z)$ – *остатком*.

Если $R_l(z) = 0$, то $P_n(z)$ делится на $Q_m(z)$ без остатка.

Число $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *корнем многочлена* $P_n(z)$, если $P_n(z_0) = 0$.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена на $(z - z_0)$ равняется значению этого многочлена в точке $z = z_0$.

Основная теорема алгебры (теорема Гаусса). Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень.

Пример 2. Решить уравнение $z^3 = 1$. Найти модули корней. Отобразить на декартовой плоскости решение уравнения.

Решение.

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0,$$

$$z_1 = 1, \quad z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

$$|z_1| = 1, \quad |z_{2,3}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

1.4 ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА R^n . ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ЗАДАННОМ БАЗИСЕ

С помощью системы координат удается отождествить вектор или (точку) на плоскости с упорядоченной парой действительных чисел, а в пространстве – с тройкой чисел. Современная физика имеет дело с четырехмерным пространством, где четвертая координата – время. Отвлекаясь от реальных геометрических представлений, можно рассмотреть упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и по аналогии назвать его n -мерным вектором. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *координатами* вектора $\vec{x}$. Количество координат вектора называется *размерностью*.

Можно исходить и из понятия множества. Декартово произведение множества действительных чисел R само на себя состоит из всевозможных упорядоченных числовых пар и его можно отождествить с плоскостью. Это множество обозначают R^2 . Множество $R \times R \times R = R^3$ состоит из упорядоченных троек и представляет собой трехмерное пространство. Если осуществить декартово произведение R само на себя n раз, то получим совокупность всех n -мерных векторов – пространство R^n .

Чтобы работать с математическими объектами, необходимо определить операции над ними. Операции над n -мерными векторами вводятся по аналогии с обычными и обладают теми же алгебраическими свойствами. Напомним их:

$$\begin{array}{ll} \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; & 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}); & \vec{a} + 0 = \vec{a}; \\ (k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}; & k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}; \\ \vec{a} + (-\vec{a}) = 0; & k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}. \end{array}$$

Всякое множество, для элементов которого определены операции сложения и умножения элементов на число таким

образом, что выполняются вышеперечисленные свойства, называется *векторным пространством*.

На случай n -мерного пространства R^n :

пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$. Тогда

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Скалярным произведением двух векторов называется число

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n).$$

Аналогично длине вектора в трехмерном пространстве определяется *норма* вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в R^n - пространстве:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Линейная независимость. Базис

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ будет называться *линейно зависимой*, если найдется набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не все из которых равны нулю, такой, что выполняется равенство

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0.$$

В противном случае (т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$) система $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ называется *линейно независимой*.

Два ненулевых вектора на плоскости линейно независимы тогда и только, когда они неколлинеарны.

Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

Аналогично для трех- и четырехмерного пространства.

Вообще, любые $n + 1$ векторов пространства R^n линейно зависимы. Так, легко проверить, что система векторов

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

линейно независима.

Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ – произвольный вектор. Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Говорят, что вектор $\vec{x}$ *разложен* по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Эта система векторов называется *базисом* пространства R^n .

Любые n линейно независимых векторов R^n образуют базис, причем любые $m < n$ линейно независимых векторов базиса R^n не образуют. Таким образом, минимальное количество векторов, которые могут составить базис R^n равно n .

Вектор в косоугольном базисе трех векторов

Пусть задано 4 вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в декартовой системе координат. Тогда вектор $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ может быть представлен в виде: $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$.

Если расписать это векторное равенство, то получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} d_x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x, \\ d_y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y, \\ d_z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z. \end{cases}$$

По правилу Крамера (см. параграф ниже) можно найти коэффициенты разложения $\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; i = 1, 2, 3$.

1.5 ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ. КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел или буквенных выражений, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором*.

Вектор пространства R^n можно представить как матрицу, состоящую из одной строки (если координаты расположить горизонтально) или одного столбца (при вертикальном расположении).

Действия над матрицами

Результатом *сложения матриц* является матрица, каждый элемент которой представляет собой сумму соответствующих элементов матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Складываются только матрицы одинаковой размерности.

Результатом *умножения матрицы на число* является матрица, каждый элемент которой умножен на это число:

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Результатом *умножения матриц*, будет матрица, каждый элемент которой является результатом перемножения соответствующей строки первой матрицы на соответствующий столбец второй матрицы:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}.$$

Перемножаются только такие две матрицы, у которых число столбцов первой равно числу строк второй матрицы.

Умножение не обладает перестановочным свойством.

Матрицы равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Определителем или *детерминантом* квадратной матрицы называется скаляр, образованный из элементов этой матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Порядком определителя называется число столбцов (строк) квадратной матрицы.

Минором M_{ik} называется определитель порядка $(n-1)$, полученный из основного определителя, вычеркиванием i -й строки и k -го столбца:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^3 (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Свойства определителя

1. Определитель n -го порядка сводится к вычислению определителя $(n-1)$ порядка, путем его разложения по какой-либо строке или столбцу (см. выше).

2. Если поменять в определителе местами какие-либо две строки или столбца, то определитель изменит знак.

3. Если какую-либо строку или столбец умножить на число, то полученный определитель будет отличаться от исходного на это же число.

4. Если все элементы какой-либо строки или столбца равны 0, то определитель равен 0.

5. Если в определителе какие-либо две строки или столбца равны между собой, то определитель равен 0.

6. Если к элементам какой-либо строки или столбца прибавить элементы другой строки или столбца, умноженные на любое число, то определитель не изменится.

Определители впервые были введены для решения системы уравнений первой степени. В 1750 г. швейцарский математик Г. Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные через определители, составленные из коэффициентов системы.

Пусть дана система n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы, x_j – неизвестные, b_i – свободные члены.

Систему можно записать в *матричной форме*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ или $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ называется *решением системы*, если она обращает все уравнения в тождества.

Система совместна, если она имеет хотя бы одно решение.

Если определитель системы n -го порядка

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то система имеет единственное решение:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Здесь Δ – определитель системы, Δ_i – дополнительные определители, которые образуются из определителя системы, заменой i -го столбца на столбец свободных членов.

Пример 3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-5) + (-2) \cdot (-4) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 -$$

$$- 3 \cdot 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 \cdot (-5) - 1 \cdot (-4) \cdot (-2) = -58.$$

Так как определитель системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то согласно теореме Крамера, система имеет единственное решение.

Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученные из определителя системы Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \cdot (-5) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 20 \cdot (-2) \cdot 3 -$$

$$- 6 \cdot 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 20 \cdot (-5) - 6 \cdot (-4) \cdot (-2) = -464.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 20 \cdot (-5) + 6 \cdot (-4) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 6 -$$

$$- 3 \cdot 20 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot (-5) - 1 \cdot (-4) \cdot 6 = -232.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 6 + (-2) \cdot 20 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) \cdot 2 -$$

$$- 3 \cdot 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 20 \cdot (-2) = -116.$$

Согласно формулам Крамера найдем решение системы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = 4; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2,$$

т.е. решение системы: (8; 4; 2). Рекомендуется сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения.

1.6 ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Топология – раздел математики, который занимается изучением пределов и непрерывностью функций. В соединении с алгеброй топология составляет общую основу математики.

Топологическое пространство или фигура – подмножество нашего однородного евклидова пространства, между точками которого задано некоторое отношение близости. Здесь рассматриваются фигуры не как жесткие тела, а как объекты, сделанные как бы из очень эластичной резины, допускающие непрерывную деформацию, сохраняющую их качественные свойства.

Взаимно-однозначное непрерывное отображение фигур называется *гомеоморфизмом*. Другими словами, фигуры *гомеоморфны*, если одну можно перевести в другую непрерывной деформацией.

Примеры. Гомеоморфны следующие фигуры (из разных групп фигуры не гомеоморфны), изображенные на рис. 2.

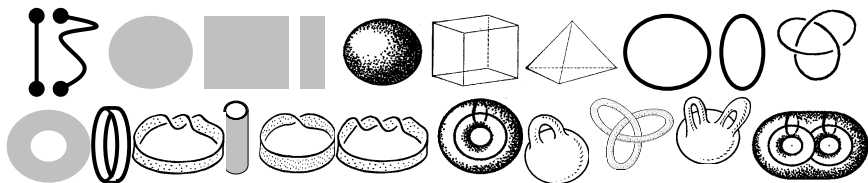


Рис. 2.

1. Отрезок и кривая без самопересечений.
2. Круг, внутренность квадрата, лента.
3. Сфера, поверхность куба и тетраэдра.
4. Окружность, эллипс и заузленная окружность.
5. Кольцо на плоскости (круг с дыркой), кольцо в пространстве, два раза перекрученное кольцо, боковая поверхность цилиндра.
6. Лист Мёбиуса, т.е. один раз перекрученное кольцо, и три раза перекрученное кольцо.

7. Поверхность тора (бублика), сфера с ручкой и заузленный тор.

8. Сфера с двумя ручками и крендель с двумя дырками.

В математическом анализе функции изучаются методом пределов. Переменная и предел – основные понятия.

В различных явлениях некоторые величины сохраняют свое численное значение, другие изменяются. Совокупность всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения этой переменной*.

Из разнообразных способов поведения переменной величины наиболее важен такой, при котором переменная величина стремится к некоторому пределу.

Постоянное число a называется *пределом переменной величины* x , если абсолютная величина разности между x и a ($|x - a|$) становится в процессе изменения переменной величины x сколь угодно малой: $\lim_{n \rightarrow \infty} x = a$.

Что значит «сколь угодно малой»? Переменная величина x стремится к пределу a , если для любого сколь угодно малого (произвольно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется такой момент в изменении переменной x , начиная с которого выполняется неравенство $|x - a| < \varepsilon$.

Определение предела имеет простой геометрический смысл: неравенство $|x - a| < \varepsilon$ означает, что x находится в ε -окрестности точки a , т.е. в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Таким образом, определение предела можно дать в геометрической форме:

Число a является пределом переменной величины x , если для любой сколь угодно малой (произвольно малой) ε -окрестности числа a можно указать такой момент в изменении переменной x , начиная с которого все ее значения попадают в указанную ε -окрестность точки a .

Замечание. Переменная величина x может по-разному приближаться к своему пределу: оставаясь меньше этого пре-

дела (слева), больше (справа), колеблясь около значения предела.

Предел последовательности

Функцией называется закон (правило) по которому каждому элементу x некоторого множества X соответствует единственный элемент y множества Y .

Функция может быть задана на множестве всех натуральных чисел: $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n = f(n) \in M$. Такая функция называется *функцией натурального аргумента* или *числовой последовательностью*.

Так как последовательность, как и всякое бесконечное множество, нельзя задать перечислением, то она задается общим членом: $\{x_n\} = x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, где x_n – общий член последовательности.

Дискретной переменной называется общий член последовательности x_n .

Для последовательности слова «начиная с некоторого момента» означают слова «начиная с некоторого номера».

Число a называется пределом последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, если для любого сколь угодно малого (произвольно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех членов последовательности с номером $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{или} \quad \lim x_n = a \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Геометрически определение предела последовательности означает следующее: для любой сколь угодно малой (произвольно малой) ε -окрестности числа a найдется такой номер, что все члены последовательности с большими, чем N , номерами, попадают в эту окрестность. Вне окрестности оказывается лишь конечное число начальных членов последовательности. Натуральное число N зависит от ε : $N = N(\varepsilon)$.

Запишем определение предела с помощью логических значков – кванторов:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall (\varepsilon > 0) \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
при $n \rightarrow \infty$.

Последовательность называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Последовательность называется *бесконечно большой* ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ при $n \rightarrow \infty$), если для любого числа $E > 0$ существует номер $N(E)$ такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > E$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны, то используют запись $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Над последовательностями можно осуществлять обычные арифметические операции, и выполняют их почленно.

Арифметические свойства предела

Пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ причем $y_0 \neq 0$ тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\lim(\alpha x_n) = \alpha x_0;$$

$$\lim(x_n \pm y_n) = x_0 \pm y_0;$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = x_0 \cdot y_0;$$

$$\lim(x_n / y_n) = x_0 / y_0.$$

Вопрос о существовании предела последовательности часто бывает сложным. Вычисление предела – это раскрытие неопределенности вида: $0/0$, ∞/∞ , $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, ∞^0 и т.д. При этом используются так называемые *замечательные пределы*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718...$$

Непрерывность функции и ее пределы

Приращением функции называется изменение функции при заданном приращении аргумента:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Функция $f(x)$ *непрерывна* в точке x_0 , если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности и приращение функции в этой точке стремится к нулю при стремлении к нулю приращения аргумента: $\Delta f(x_0) \rightarrow 0$, если $\Delta x \rightarrow 0$.

График непрерывной функции можно нарисовать, не отрывая пера от бумаги.

Точка, в которой при стремлении к нулю приращения аргумента приращение функции к нулю не стремится, называется *точкой разрыва* функции.

Будем считать, что функция $f(x)$ определена во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0 (т.е. в окрестности точки x_0), кроме, быть может, самой точки x_0 .

Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для произвольного (сколь угодно малого) положительного числа ε существует такое положительное число δ , зависящее от ε , что для всех точек x из δ -окрестности точки x_0 , исключая, быть может, саму точку x_0 (т.е. для всех, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$), будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Сказанное обозначают как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Запишем определение предела с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (\varepsilon > 0) \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall (0 < |x - x_0| < \delta) \\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называют пределом функции $f(x)$ на бесконечности (в бесконечно удаленной точке), если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $M > 0$, что при $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Для исследования поведения функции вблизи некоторых точек полезно знать, к чему стремится $f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, оставаясь левее x_0 (т.е. при $x < x_0$), и когда $x \rightarrow x_0$, оставаясь правее x_0 ($x > x_0$). Такие пределы называются левым и правым пределом функции в точке x_0 или *односторонними пределами*. Обозначения: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$.

Предел функции в точке x_0 существует, если предел справа равен пределу слева.

Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется *непрерывной в точке x_0* , если выполняются следующие три условия:

1. Функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 , т.е. $x_0 \in D$;
2. Существует предел функции в точке x_0 ;
3. Предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из трех приведенных условий, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *разрыв первого рода*, если пределы слева и справа конечны, но не равны друг другу.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *разрыв второго рода*, если хотя бы один из пределов слева или справа бесконечен или не существует.

Если функция не определена в точке x_0 или нарушено условие $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$.

Пример 5. Найти предел функции $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ ì ðè $x \rightarrow 2$.

Решение. Вычислим пределы числителя и знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 0.$$

Получили неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для раскрытия неопределенности преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $(x - 2)$. Это сокращение допустимо, так как при отыскании предела рассматриваются значения $x \neq 2$ (это подчеркивается в определении предела). Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(x - 1)} = \frac{4}{1} = 4.$$

1.7 ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Источником дифференциального исчисления были две проблемы:

1. О нахождении касательной к произвольной линии;
2. О нахождении скорости при произвольном законе движения.

Обе они привели к одной и той же вычислительной задаче. Она состоит в том, чтобы по данной функции $f(x)$ отыскать другую функцию $f'(x)$, представляющую скорость изменения функции $f(x)$ относительно изменения аргумента. В таком общем виде задача была поставлена в XVII веке Ньютоном и Лейбницем. Они ввели символику, развили аппарат дифференциального исчисления и применили его к решению многих задач геометрии и механики.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю.

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Наряду с обозначением $f'(x)$, $f'(x_0)$ для производной употребляются и другие обозначения, например: y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$, $\dot{x}(t)$, $y'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$.

Производная имеет следующие механический и геометрический смыслы.

- скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t_0 есть производная от пути по времени $v = s'(t_0)$.

– угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0 : $k = f'(x_0)$.

Значит уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормалью в точке $M_0(x_0, y_0)$ к линии называется перпендикуляр к касательной в точке M_0 . Ее уравнение имеет вид

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

так как угловой коэффициент нормали k_H связан с угловым коэффициентом касательной $k = f'(x_0)$ условием перпендикулярности

$$k_H = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Для одной и той же функции $y = f(x)$ производную можно вычислять в различных точках.

Функция $y = f(x)$, имеющая конечную производную в точке x_0 , называется *дифференцируемой* в этой точке. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в интервале (a, b)* , если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Справедлива следующая теорема о связи между дифференцируемостью и непрерывностью.

Теорема: если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Обратная теорема неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми, например функция $y = |x|$.

Пример 6. Найти производную функции $y = \cos \ln^{12} 2x$.

Решение. $\frac{dy}{dx} = (\cos \ln^{12} 2x)' = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot (\ln^{12} 2x)' =$
 $= -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12(\ln^{11} 2x) \cdot (\ln 2x)' =$
 $= -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12(\ln^{11} 2x) \cdot \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = -\frac{12}{x} (\ln^{11} 2x) \cdot \sin(\ln^{12} 2x).$

Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда ее производная $f'(x)$ является функцией от x . Пусть эта производная также имеет производную. Эта производная называется второй производной или производной второго порядка функции $f(x)$. Она обозначается символом y'' , $f''(x)$ или $\frac{d^2 y}{d^2 x}$.

Вообще, *производной n -го порядка* функции $y = f(x)$ называется первая производная от производной $(n - 1)$ порядка

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Механический смысл второй производной: ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени.

Правила Лопиталья. Понятие производной применимо для раскрытия неопределенностей типа $\left[\frac{0}{0} \right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Правило 1. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$, (или $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$).

Тогда, если существует предел отношения производных

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ (или $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$), то существует предел от-

ношения функций, и эти пределы равны между собой, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K \text{ (или } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \text{)}.$$

$$\text{Правило 2. Пусть } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ (или } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{)}.$$

Тогда, если существует предел отношения производных

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (или } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{)}, \text{ то существует предел от-}$$

ношения функций, и они равны между собой, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ (или } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{)}.$$

Дифференциал

Пусть имеем функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке D и непрерывную в точке $x_0 \in D$. Тогда приращению аргумента Δx отвечает приращение функции

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

бесконечно малое вместе с Δx .

Большую важность имеет вопрос: существует ли для Δy такая линейная однородная относительно Δx бесконечно малая $A \cdot \Delta x$ ($A = \text{const}$), что их разность оказывается, по сравнению с Δx , бесконечно малой высшего порядка малости

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad (1)$$

где $o(\Delta x)$ есть величина, стремящаяся к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$ быстрее, чем Δx .

При $A \neq 0$ равенство (1) показывает, что бесконечно малая $A \cdot \Delta x$ (главная часть приращения Δy) эквивалентна бесконечно малой Δy . В этом случае выражение $A \cdot \Delta x$ называется

дифференциалом функции и обозначается символом dy или $df(x_0)$.

Доказывается, что для того, чтобы функция $y = f(x)$ в точке x_0 имела дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в точке x_0 (т.е. имела в этой точке конечную производную $y' = f'(x_0)$). При этом $A = f'(x_0) = y'_x$ и формула (1) имеет вид $\Delta y = y'_x \Delta x + o(\Delta x)$.

Итак, дифференциал всегда равен $dy = y'_x \cdot \Delta x$.

Дифференциал аргумента $dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$. То есть приращение аргумента тождественно равно дифференциалу аргумента. Тогда производную функции можно выразить через дифференциалы функции и аргумента:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

Геометрический смысл дифференциала: в то время как Δy есть приращение ординаты кривой $y = f(x)$, dy является приращением ординаты касательной.

В приложениях часто бывает более удобно работать с дифференциалом, чем с производной в точке. Кроме того, дифференциал – главная часть приращения функции и может быть вычислен сравнительно просто. Дифференциал является источником приближенных формул, так как при $\Delta x \rightarrow 0$ $\Delta y \approx dy$. Подробнее:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x,$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Например, надо найти приближенно $\sqrt{3654}$. Легко вычисляются значения $f(x)$ и $f'(x)$ при $x_0 = 3600$. Тогда

$$\sqrt{3654} \approx 60 + \frac{1}{2 \cdot 60} 54 \approx 60,45.$$

1.8 ПЕРВООБРАЗНАЯ, НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА

Интегральные вычисления возникли из потребности создать общий метод нахождения площадей, объемов и центров тяжести. Способ вычисления площади уходит корнями в III в. до н.э., когда Архимед изобрел метод «исчерпывания». Этот метод через две тысячи лет преобразовался в метод интегрирования.

Пусть в некоторой области определены функции $f(x)$ и $F(x)$. Пусть $F'(x) = f(x)$. Тогда $f(x)$ называется производной функции $F(x)$, а $F(x)$ – *первообразной* функции $f(x)$. Любая функция имеет множество первообразных.

По отношению к дифференцированию интегрирование является обратным действием.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее произвольная первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

если $F'(x) = f(x)$, $C = \text{const}$, где x – переменная интегрирования, а $f(x)$ – подынтегральная функция.

Геометрически неопределенный интеграл представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль вертикальной оси.

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$$

2. Неопределенный интеграл дифференциала функции равен самой функции с точностью до произвольной постоянной

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянная выносится из под знака интеграла

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx.$$

4. Интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

5. Под знаком интеграла можно проводить замену переменной

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f(u)du.$$

Таблица основных интегралов получается из основных формул дифференциального исчисления путем прямого их обращения.

Так как интегрирование – действие обратное дифференцированию, то его можно проверить дифференцированием.

Всякое обратное действие сложнее прямого. Поэтому прежде чем воспользоваться таблицей интегралов приходится заданный интеграл преобразовывать к табличному. Наиболее часто используемые методы преобразования: метод разложения, метод подстановки (замена переменной), интегрирования по частям.

Определенный интеграл и его свойства

Определенный интеграл отличается от неопределенного тем, что это либо число, либо первообразная с определенной постоянной.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно представить как предел некоторой суммы

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Здесь весь отрезок $[a, b]$ разбит на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, причем $\xi_i = x_i$ (или $\xi_i = x_{i+1}$, или $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$). Тогда $S_i = f(\xi_i) \Delta x_i$ – площадь прямоугольника.

Интуитивно ясно, что при $n \rightarrow \infty$ интегральная сумма стремится к площади криволинейной трапеции.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы при стремлении максимального частичного отрезка разбиения к нулю.

Числа a и b носят название, соответственно, нижнего и верхнего пределов интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница

Определенный интеграл находится по формуле:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b M dx = M(b - a).$
2. $\int_a^b [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)] dx = A_1 \int_a^b f_1(x) dx + A_2 \int_a^b f_2(x) dx.$
3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in [a; b].$
4. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

$$5. \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx, \text{ если } f(x) \geq g(x) > 0 \text{ на } [a, b].$$

Геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Механический смысл определенного интеграла: на графике ускорения отображает скорость, а на графике скорости отображает путь, пройденный телом при равноускоренном движении от $t = 0$ до момента t , если в начальный момент скорость и путь равны нулю.

Пример 7. Вычислить площадь, ограниченную параболami $y = 2x^2 - x - 2$ и $y = -x^2 + x - 1$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Решая квадратное уравнение, определим его корни: $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$. Тогда искомая площадь будет равна:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 [(-x^2 + x - 1) - (2x^2 - x - 2)] dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 (-3x^2 + 2x + 1) dx = \left(-3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^1 = 1 \frac{5}{27}. \end{aligned}$$

1.9 ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ. ЗАДАЧА КОШИ

Дифференциальные уравнения – это уравнения, связывающие неизвестную функцию и ее производные.

В самом общем виде дифференциальное уравнение записывается так

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения, называется *порядком уравнения*.

Многие физические (и не только) уравнения имеют вид дифференциальных уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

1. *Уравнение механического движения*: $mx'' = F$, где $x = x(t)$ – неизвестная функция, m и F – известные величины. В зависимости от условий задачи получают различные дифференциальные уравнения:

а) сила постоянна. Уравнение движения примет вид

$$x'' = \frac{F}{m} = a, \quad a = \text{const};$$

б) сила периодически изменяется со временем, например по закону $F = F_0 \sin \omega t$. Уравнение движения $x'' = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$;

в) сила пропорциональна смещению (движение идеально упругой пружины): $F = -kx$ ($k > 0$). Уравнение движения:

$$x'' = -\frac{k}{m} x;$$

г) сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния, $F = -\frac{km}{x^2}$ (свободный полет). Уравнение движения: $x'' = -\frac{k}{x^2}$;

д) постоянная сила тяжести $F_1 = -mg$ и сила трения $F_2 = -kx'$, пропорциональная скорости, действующие одновременно (падение с трением). Уравнение движения:

$$x'' = -g - \frac{k}{m} x'.$$

Все приведенные уравнения – дифференциальные уравнения второго порядка.

2. *Радиоактивный распад*. Экспериментальные данные показывают, что скорость изменения массы пропорциональна массе вещества в данный момент: $\frac{dm}{dt} = -km$.

3. *Электрическая цепь*. Если в цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора R и конденсатора C , произошло короткое замыкание, то напряжение U на конденсаторе будет меняться по закону $\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U$.

4. *Народонаселение*. Представим число жителей страны в момент времени t как функцию $L = L(t)$. Допустим, что за единицу времени народонаселение увеличивается на определенный процент. Тогда за период времени $[t, t + dt]$ появится новых жителей $\Delta L \approx kL(t)dt$. Для скорости роста L , таким образом, можно записать дифференциальное уравнение $\frac{dL}{dt} = kL$.

По такому же закону (закон естественного роста) размножаются и бактерии, и нейтроны в ядерных реакциях.

За триста лет существования дифференциального и интегрального исчисления появились многие тысячи дифференциальных уравнений. Однако замечательно то, что многие уравнения похожи друг на друга, например, последние три выше приведенные, т.е. совершенно разные процессы привели к одной и той же математической модели. В них скорость изменения искомой функции пропорциональна значению этой функции $\frac{dy}{dx} = \alpha y$.

Процесс нахождения решений называется интегрированием дифференциального уравнения. Методы решения разнообразны и зависят от вида этих уравнений.

Общим решением дифференциального уравнения называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. Если постоянным C_i придать конкретные числовые значения, то полученная функция будет называться *частным решением*.

Нахождение частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, называется *задачей Коши*.

В том случае, когда уравнение не имеет элементарного решения, используют численные методы.

Решение уравнения $\frac{dy}{dx} = y$ (или $y' = y$) хорошо известно:

$y = Ce^x$, где C – произвольная постоянная. При различных значениях C получается семейство кривых, которые все удовлетворяют заданному уравнению. Если в дополнение к дифференциальному уравнению задать значение y для некоторого значения x , то можно определить постоянную C . Например, предположим, что решение должно проходить через точку $x = 0, y = 1$, то есть $y(0) = 1$. Легко найти, что $C = 1$ и что из всего семейства кривых только одна удовлетворяет одновременно и уравнению и условию.

Пример 8. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $y' \cdot \cos^2 x = \frac{y}{\ln y}$.

Решение. Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, перепишем уравнение в виде $\cos^2 x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}$. Разделим переменные: $\frac{\ln y}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Проинтегрируем обе части уравнения: $\int \frac{\ln y}{y} \frac{dy}{dx} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C$.

Общее решение будет иметь вид: $\frac{1}{2} \ln^2 y = \operatorname{tg} x + C$.

2 ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

2.1 Предмет теории вероятности. Случайные события. Действия над случайными событиями.

Марк Аврелий в своих «Размышлениях» писал о двух возможностях: либо мир является огромным хаосом, либо в нем царствует закономерность. И ошибался. Случайное и необходимое выступают вместе. Фундаментальность случайного не приводит к беспорядочности нашего мира.

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные. Многие явления окружающего мира не всегда находят объяснения в рамках *детерминированных* законов, поскольку носят *случайный* (заранее непредсказуемый) характер. Каждое случайное событие есть следствие действия очень многих случайных причин. Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их велико и законы их действия неизвестны. Для математического описания таких явлений удобно считать, что неопределенные факторы имеют случайную природу.

Однако достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным, т.е. хотя для таких событий отсутствует детерминированная регулярность, но имеет место *статистическая регулярность*, проявляющаяся при рассмотрении массовых явлений.

Теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единственное событие или нет.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных величин.

Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики.

Зарождение теории вероятностей и формирование первых понятий этой ветви математики произошло в середине XVII века, когда Паскаль, Ферма, Бернулли попытались осуществить анализ задач связанных с азартными играми новыми методами.

Общепринятый сегодня аксиоматический подход к вероятности был разработан академиком А.Н. Колмогоровым в 1933 г.

Случайным (стохастическим) экспериментом или испытанием называется осуществление какого-либо комплекса условий, который можно практически или мысленно воспроизвести сколь угодно большое число раз.

Явления, происходящие при реализации этого комплекса условий, называются *элементарными исходами*. Считается, что при проведении случайного эксперимента реализуется только один из возможных элементарных исходов.

Если монету подбросить один раз, то элементарными исходами можно считать выпадение герба (Г) или цифры (Ц). Если случайным экспериментом считать троекратное подбрасывание монеты, то элементарными исходами можно считать следующие: ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ.

Между понятиями теории множеств и теории вероятностей устанавливается соответствие. Так, *пространством элементарных исходов* называется *множество* всех элементарных исходов.

Обозначим пространство элементарных исходов буквой Ω (омега большая); i -й элементарный исход будем обозначать ω_i (ω – омега малая). Если пространство элементарных исходов содержит n элементарных исходов, то

$$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Для троекратного подбрасывания монеты

$$\Omega = (\text{ГГГ}, \text{ГГЦ}, \dots, \text{ЦЦЦ}).$$

Если случайный эксперимент – подбрасывание игральной кости, то $\Omega = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Если Ω *конечно* или *счетно*, то *случайным событием* или просто *событием* называется любое подмножество Ω . Множе-

ство называется *счетным*, если между ним и множеством N натуральных чисел можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Приведем примеры событий. Пусть бросается игральная кость, и элементарным исходом считается выпавшее число очков: $\Omega = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$. A – событие, заключающееся в том, что выпало четное число очков: $A = (2, 4, 6)$; B – событие, заключающееся в том, что выпало число очков, не меньшее трёх: $B = (3, 4, 5, 6)$.

Говорят, что те исходы, из которых состоит событие A , благоприятствуют событию A .

События удобно изображать в виде рисунка, который называется *диаграммой Венна*. На рис. 3 пространство элементарных исходов Ω изображено в виде прямоугольника, а множество элементарных исходов, благоприятствующих событию A , заключено в эллипс.

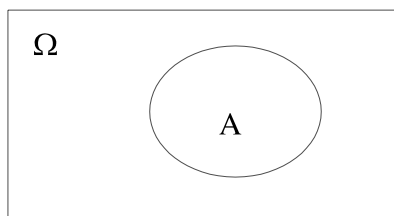


Рис. 3.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A \cup B$ или $A + B$) называется событие, состоящее из всех элементарных исходов, влекущих событие A или событие B (рис. 4). Событие $A \cup B$ происходит, если происходит по крайней мере одно из событий A или B .

Пример объединения событий. Пусть два стрелка стреляют в мишень одновременно, и событие A состоит в том, что в мишень попадает 1-й стрелок, а событие B – в том, что в мишень попадает 2-й. Событие $A \cup B$ означает, что мишень поражена, или, иначе, что в мишень попал хотя бы один из стрелков.

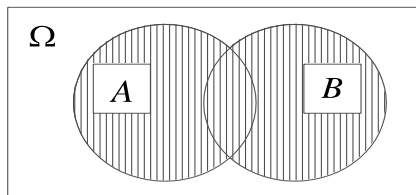


Рис. 4.

Произведением (пересечением) событий A и B называется событие, обозначаемое $A \cap B$ или AB , состоящее из всех тех элементарных исходов, из которых следуют оба события A и B . На рис. 5 пересечение множеств, соответствующих событиям A и B , изображено в виде заштрихованной области.

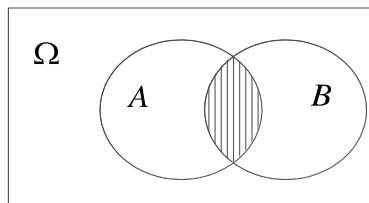


Рис. 5.

В условиях приведенного выше примера событие $A \cap B$ заключается в том, что в мишень попали оба стрелка.

Разностью $A \setminus B$ или $A - B$ событий A и B называется событие, состоящее из всех исходов события A , не благоприятствующих событию B . Диаграмма Венна разности событий A и B изображена на рис. 6. В условиях рассмотренного выше примера событие $A \setminus B$ заключается в том, что первый стрелок попал в мишень, а второй промахнулся.

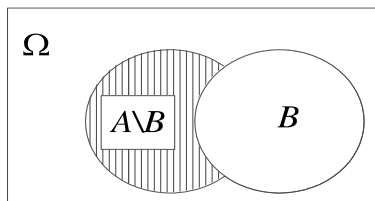


Рис. 6.

Событие Ω называется *достоверным*, если оно обязательно происходит в результате случайного эксперимента.

Пустое множество $\emptyset$ называется *невозможным* событием.

Событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ называется *противоположным* событию A или *дополнением* события A .

События A и B называются *несовместными*, если нет исходов, принадлежащих и A и B , то есть $A \cap B = \emptyset$. На рис. 7 изображены несовместные события A и B .

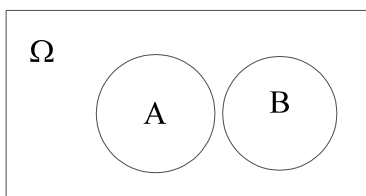


Рис. 7.

Непосредственно из введенных определений следуют равенства:

$$A \cup \bar{A} = \Omega; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset; \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

На случайные события распространяются свойства множеств. Поэтому можно не делать различия между событиями и соответствующими им множествами.

Вероятностное пространство

(случай конечного или счетного числа исходов)

Введем аксиому (для случая конечного или счетного пространства элементарных исходов). Каждому элементарному исходу ω_i пространства Ω соответствует некоторая неотрицательная числовая характеристика P_i шансов его появления, называемая вероятностью исхода ω_i , причем

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots = \sum_{i: \omega_i \in \Omega} P_i = 1$$

(здесь суммирование ведется по всем i , для которых выполняется условие: $\omega_i \in \Omega$). Отсюда следует, что $0 \leq P_i \leq 1$ для всех i .

Вероятность любого события A определяется как сумма вероятностей всех элементарных исходов, благоприятствующих событию A . Обозначим ее $P(A)$.

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\omega_i) = \sum_{i: \omega_i \in A} P_i \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$P(\Omega) = 1;$$

$$P(\emptyset) = 0.$$

Будем говорить, что задано *вероятностное пространство*, если задано пространство элементарных исходов Ω и определено соответствие

$$\omega_i \rightarrow P(\omega_i) = P_i.$$

Возникает вопрос: как определить из конкретных условий решаемой задачи вероятность $P(\omega_i)$ отдельных элементарных исходов?

2.2 Классическое определение вероятности. Комбинаторика

Вычислять вероятности $P(\omega_i)$ можно, используя *априорный* подход, который заключается в анализе специфических условий данного эксперимента (до проведения самого эксперимента). Классическое определение вероятностей основано на понятии равновероятных событий.

Два или несколько событий называются *равновозможными*, если условия их появления одинаковы и нет оснований считать, что какое-либо из них имеет больше шансов появиться в результате опыта, чем другое.

Возможна ситуация, когда пространство элементарных исходов состоит из конечного числа N элементарных исходов,

причем случайный эксперимент таков, что вероятности осуществления *каждого* из этих N элементарных исходов представляются *равными*.

Примеры таких случайных экспериментов: подбрасывание симметричной монеты, бросание правильной игральной кости, случайное извлечение игральной карты из перетасованной колоды. В силу введенной аксиомы вероятности каждого элементарного исхода в этом случае равны $\frac{1}{N}$. Из этого следует, что если событие A содержит N_A элементарных исходов, то

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

В данном классе ситуаций вероятность события определяется как отношение числа благоприятных исходов к общему числу всех несовместных равновозможных исходов.

Чтобы пользоваться этим классическим определением вероятности, нужно уметь подсчитывать общее число исходов эксперимента и число благоприятных исходов. Такой подсчет сводится к перебору вариантов. Раздел математики, в котором исследуются различные задачи на перебор, называется *комбинаторикой*.

Элементы комбинаторики

Пусть имеется множество U_n , состоящее из n элементов.

Перестановкой из n элементов называется заданный порядок во множестве U_n :

$$P_n = n!$$

Размещением из n элементов по k элементов будет называться любое упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов множества U_n :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сочетаниями из n элементов по k элементов называются подмножества, состоящее из k элементов множества U_n . Одно сочетание от другого отличается только составом выбранных элементов (но не порядком их расположения, как у размещений).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 9. В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места?

Решение. Иными словами, необходимо найти число всех подмножеств, состоящих из трех элементов, отличающихся составом (номерами команд) или порядком их размещения. Таким образом, необходимо определить число размещений из 16 по 3:

$$\begin{aligned} A_{16}^3 &= \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} = \\ &= 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360. \end{aligned}$$

2.3 Статистическое определения вероятности.

Частота и вероятность

Рассмотрим случайный эксперимент, где нет симметрии, предопределяющей равновозможные исходы. Например, подбрасывается кубик, сделанный из неоднородного материала. Из физики известно, что кубик более часто будет падать на ту грань, которая ближе к центру тяжести. Как определить вероятность выпадения, например, трех очков? Вычислить вероятность, используя классическое определение, в этом случае нельзя. (Почему?) Наверное, чтобы проявилась вероятность, надо подбросить этот кубик n раз (где n – достаточно большое число, скажем $n = 1000$ или $n = 5000$), подсчитать число выпадений трех очков n_3 и считать вероятность исхода, заключающегося в выпадении трех очков, равной n_3/n .

Это отношение называется *относительной частотой* или *эмпирической вероятностью*.

Аналогичным образом можно определить вероятности остальных элементарных исходов – единицы, двойки, четверки и т.д.

Если повторять серию бросаний, увеличивая n в каждой серии, то можно убедиться, что частота появления трех очков начнет колебаться возле одной определенной величины (вероятности события).

Говорят, что относительная частота *стабилизируется* около этого значения. Такое поведение характерно для любого случайного события и называется *законом статистической устойчивости*:

При неограниченном возрастании числа случайных экспериментов относительная частота каждого исхода имеет тенденцию к стабилизации.

Итак, случайное событие характеризуется тремя особенностями:

- неопределенностью исхода единичного эксперимента;
- возможностью неограниченного повторения в одинаковых условиях;
- стабилизацией относительной частоты.

Немецкий математик Р. Мизес предлагал определить вероятность $P(A)$ случайного события A через предел его эмпирической вероятности:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}.$$

Однако, можно ли на практике выполнить бесконечно большое число однотипных испытаний? К тому же предел, строго говоря, не существует. Следовательно, частотное определение вероятности оказалось несостоятельным.

Уточнение понятия вероятности произошло на основе аксиоматического подхода, разработанного А.Н.Колмогоровым.

2.4 Геометрическое определение вероятности

Дадим определение вероятности события для случайного эксперимента с *несчетным* множеством исходов.

Если между множеством Ω элементарных исходов случайного эксперимента и множеством точек некоторой плоской фигуры Σ (сигма большая) можно установить взаимно-однозначное соответствие, а также можно установить взаимно-однозначное соответствие между множеством элементарных исходов, благоприятствующих событию A , и множеством точек плоской фигуры σ (сигма малая), являющейся частью фигуры Σ , то

$$P(A) = \frac{S_{\sigma}}{S_{\Sigma}},$$

где S_{σ} – площадь фигуры σ , S_{Σ} – площадь фигуры Σ .

Пример 10. Два человека обедают в столовой, которая открыта с 12 до 13 часов. Каждый из них приходит в произвольный момент времени и обедает в течение 10 минут. Какова вероятность их встречи?

Пусть x – время прихода первого в столовую, а y – время прихода второго ($12 \leq x \leq 13$, $12 \leq y \leq 13$).

Если первый пришел не позже второго ($y \geq x$), то встреча произойдет при условии $0 \leq y - x \leq 1/6$ (10 мин. – это $1/6$ часа). Если второй пришел не позже первого ($x \geq y$), то встреча произойдет при условии $0 \leq x - y \leq 1/6$. Между множеством исходов, благоприятствующих встрече, и множеством точек области σ , изображенной на рис. 8 в заштрихованном виде, можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Искомая вероятность p равна отношению площади области σ к площади всего квадрата. Площадь

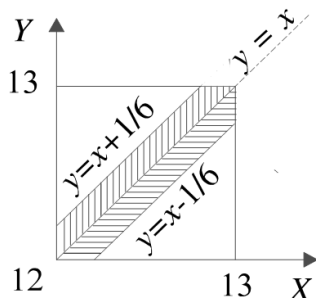


Рис. 8.

квадрата равна единице, а площадь области σ можно определить как разность единицы и суммарной площади двух треугольников, изображенных на рис. 6. Отсюда следует: $p = 1 - 25/36 = 11/36$.

2.5 Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий

Если A и B – *несовместные* события, (т.е. появление одного из них исключает появления другого в одном и том же испытании), то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Если A и B – *совместные* события, то $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, причем очевидно, что $A \setminus B$ и B – несовместные события.

Отсюда следует:

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B). \quad (2)$$

Далее очевидно: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, причем $A \setminus B$ и $A \cap B$ – несовместные события, откуда следует:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B).$$

Найдем из этой формулы выражение для $P(A \setminus B)$ и подставим его в правую часть формулы (2). В результате получим *формулу сложения вероятностей*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

или, в другой встречающейся в литературе записи,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Из последней формулы легко получить формулу сложения вероятностей для *несовместных* событий, положив $A \cdot B = \emptyset$:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Условные вероятности. Теорема умножения
вероятностей (вероятность произведения событий)

Рассмотрим задачу. Студент перед экзаменом выучил из 30 билетов билеты с номерами с 1 по 5 и с 26 по 30. Известно, что студент на экзамене вытащил билет с номером, не превышающим 20. Какова вероятность, что студент вытащил выученный билет?

Определим пространство элементарных исходов: $\Omega = (1, 2, 3, \dots, 28, 29, 30)$. Пусть событие A заключается в том, что студент вытащил выученный билет: $A = (1, \dots, 5, 25, \dots, 30)$, а событие B – в том, что студент вытащил билет из первых двадцати: $B = (1, 2, 3, \dots, 20)$. Событие $A \cap B$ состоит из пяти исходов: $(1, 2, 3, 4, 5)$, и его вероятность равна $5/30$. Это число можно представить как произведение дробей $5/20$ и $20/30$. Число $20/30$ – это вероятность события B . Число $5/20$ можно рассматривать как вероятность события A при условии, что событие B произошло (обозначим её $P(A/B)$). Таким образом, решение задачи определяется формулой

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B),$$

которая называется *формулой умножения вероятностей*, а вероятность $P(A/B)$ – *условной вероятностью события A* .

В другом способе записи эта формула имеет вид

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Тем самым вопрос о вычислении условной вероятности $P(A/B)$ сводится к вычислению двух безусловных вероятностей $P(A \cdot B)$ и $P(B)$, определенных на заданном вероятностном пространстве.

Вероятность произведения n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна произведению одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое произошло, на условную вероятность третьего при условии, что и первое и второе произошло и т.д.

Событие A называется *независимым* от события B (иначе: события A и B называются *независимыми*), если $P(A/B) = P(A)$.

За определение независимых событий можно принять следствие последнего равенства и формулы умножения:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

или

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно независимы, то вероятность наступления хотя бы одного из них проще вычисляется не по формуле сложения, а по формуле умножения вероятностей:

$$P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Пример 11. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероятностями 0.851, 0.751, и 0.701. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя:

- а) только один элемент;
- б) хотя бы один элемент.

Решение. Испытание, т.е. работу за время T , нужно рассмотреть на двух уровнях: на уровне устройства и на уровне элементов. Вероятности элементарных событий заданы.

а) Обозначим за A_1 событие, когда за время T выходит из строя только один элемент;

B_1 – первый элемент выходит из строя;

B_2 – второй элемент выходит из строя;

B_3 – третий элемент выходит из строя;

$\bar{B}_1$ – первый элемент не выходит из строя;

$\bar{B}_2$ – второй элемент не выходит из строя;

$\bar{B}_3$ – третий элемент не выходит из строя;

$$A_1 = (B_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3).$$

Учитывая независимость элементов устройства, а также несовместность событий B_i и $\bar{B}_i$, получаем следующую формулу:

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(B_3).$$

По условию $P(\bar{B}_1) = 0.851$, $P(\bar{B}_2) = 0.751$, $P(\bar{B}_3) = 0.701$, следовательно $P(B_1) = 0.149$, $P(B_2) = 0.249$, $P(B_3) = 0.299$. Таким образом,

$$P(A_1) = 0.149 \cdot 0.751 \cdot 0.701 + 0.851 \cdot 0.249 \cdot 0.701 + 0.851 \cdot 0.751 \cdot 0.299 = 0.418.$$

б) A_2 – событие, когда за время T выходит из строя хотя бы один элемент; событие определяется словами “хотя бы”, значит, используем противоположное событие $\bar{A}_2$ – за время T все элементы работают безотказно.

$$\bar{A}_2 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3;$$

$$P(\bar{A}_2) = P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3) = 0.851 \cdot 0.751 \cdot 0.701 = 0.448;$$

$$P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - 0.448 = 0.552.$$

Пример 12. В кармане лежит n ключей, из которых только один подходит к замку. Ключи по одному достают из кармана. Какова вероятность того, что нужный ключ будет вынут при k -м извлечении?

Решение. Обозначим через A_k событие, состоящее в том, что нужный ключ вынули на k -м шаге, соответственно $\bar{A}_k$ состоит в том, что на этом шаге достали не тот ключ. Событие, вероятность которого требуется найти, есть произведение $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1} \cdot A_k$ (первые $k-1$ раз достали не тот ключ, а на k -й раз вынули нужный).

Очевидно, что

$$P(\bar{A}_1) = \frac{n-1}{n},$$

т.е. $(n-1)$ ненужных из n ключей;

$$P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) = \frac{n-2}{n-1},$$

если в первый раз достали неправильный ключ, в кармане осталось $(n-1)$ ключей, из них $(n-2)$ не подходят;

$$P(\bar{A}_3 / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = \frac{n-3}{n-2},$$

и так далее:

$$P(A_k / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1}) = \frac{1}{n-k+1}.$$

Если $(k-1)$ раз доставали неправильный ключ, то в кармане осталось $(n-k+1)$ ключей, из них один подходящий. Значит

$$P(\bar{A}_{k-1} / \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-2}) = \frac{n-k+1}{n-k+2}.$$

Итак,

$$P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1} \cdot A_k) = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

2.6 Формула полной вероятности

Пусть имеется группа событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, обладающая следующими свойствами:

- 1) Все события попарно несовместны: $H_i \cap H_j = \emptyset$; $i, j = 1, 2, \dots, n$; $i \neq j$;
- 2) Их объединение образует пространство элементарных исходов Ω :

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n.$$

В этом случае будем говорить, что $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий. Такие события принято называть гипотезами.

Пусть A – некоторое событие: $A \subset \Omega$. Тогда имеет место формула полной вероятности:

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \dots + P(A/H_n)P(H_n) = \sum_i P(A/H_i)P(H_i).$$

Доказательство.

Очевидно, что $A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$, причем все события $A \cap H_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) попарно несовместны. Отсюда по теореме сложения вероятностей получаем

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n).$$

Если учесть, что по теореме умножения $P(A \cap H_i) = P(A/H_i)P(H_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то из последней формулы легко получить приведенную выше формулу полной вероятности.

Пример 13. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине лампа окажется бракованной, если лампы поступают в магазин от трех производителей? Причем 30% всех ламп поставляют первый производитель, 50% – второй, 20% – третий. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 3% и 2%.

Решение. Пусть событие H_1 состоит в том, что выбранная лампа поступила от первого производителя, H_2 – от второго, H_3 – от третьего. Очевидно, что

$$P(H_1) = 3/10, \quad P(H_2) = 5/10, \quad P(H_3) = 2/10.$$

Определим событие A как то, что выбранная лампа оказалась бракованной, а A/H_i как событие, состоящее в том, что выбранная бракованная лампа из ламп i -го производителя. Из условия задачи следует

$$P(A/H_1) = 5/100, \quad P(A/H_2) = 3/100, \quad P(A/H_3) = 2/100.$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{100} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{100} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{100} = \frac{17}{500}.$$

Пример 14. Какова вероятность роста стоимости акций компании в следующем году, если экономист полагает эту вероятность равной 0,75 при экономическом подъеме страны и равной 0,30 при спаде. При этом по его оценке вероятность экономического подъема равна 0,80.

Решение. Имеем две гипотезы: H_1 – подъем экономики, H_2 – спад экономики. Примем за событие A ситуацию – «стоимость акций компании в будущем году поднимется». Очевидно, события H_1 и H_2 образуют полную группу ($P(H_1) + P(H_2) = 1,00$), отсюда $P(H_1) = 0,80$ и $P(H_2) = 0,20$. Числа 0,75 и 0,30 являются условными вероятностями события A при условии гипотез H_1 и H_2 соответственно, т.е. $P(A/H_1) = 0,75$ и $P(A/H_2) = 0,30$. По формуле полной вероятности находим

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) = \\ &= 0,80 \cdot 0,75 + 0,20 \cdot 0,30 = 0,60 + 0,06 = 0,66. \end{aligned}$$

2.7 Формула Байеса

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа событий и $A \subset \Omega$ – некоторое событие. Тогда по формуле для условной вероятности

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} \quad (3)$$

Здесь $P(H_k / A)$ – условная вероятность события (гипотезы) H_k или вероятность того, что H_k реализуется при условии, что событие A произошло.

По теореме умножения вероятностей числитель формулы (3) можно представить в виде

$$P(H_k \cap A) = P(A \cap H_k) = P(A/H_k) P(H_k).$$

Для представления знаменателя формулы (3) можно использовать формулу полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/H_i)P(H_i).$$

Теперь из (3) можно получить формулу, называемую *формулой Байеса*:

$$P(H_k/A) = \frac{P(A/H_k)P(H_k)}{\sum_i P(A/H_i)P(H_i)}.$$

По формуле Байеса исчисляется вероятность реализации гипотезы H_k при условии, что событие A произошло. Формулу Байеса еще называют *формулой вероятности гипотез*.

Пример 15. Из трех урн с шарами вынимается наугад 1 шар, который оказался белым. Найти послеопытную вероятность того, что шар вынут из первой урны, если в первой урне 3 белых шара и 1 черный, во второй – 2 белых и 3 черный, в третьей – 3 белых.

Решение. Обозначим за H_1 гипотезу – «шар выбран из 1-й урны», соответственно H_2 – «шар выбран из 2-й урны» и H_3 – «шар выбран из 3-й урны». Гипотезы равновероятны и равны $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Определим вероятность гипотезы H_1 при условии, что событие A = «вынут белый шар» уже произошло, т.е.

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{(1/3) \cdot (3/4)}{(1/3) \cdot (3/4) + (1/3) \cdot (2/5) + (1/3) \cdot 1} = \frac{15}{43}.$$

2.8 Схема испытаний Бернулли

Пусть в результате некоторого случайного испытания может произойти или не произойти определенное событие A . Испытание повторяется n раз. При этом соблюдаются условия: вероятность успеха $P(A) = p$ в каждом испытании одна и та же;

результат любого испытания не зависит от исходов предыдущих испытаний.

Такая последовательность испытаний с двумя исходами (успех/неудача) называется *последовательностью независимых испытаний Бернулли* или *схемой Бернулли*.

Вероятность k успехов в n независимых испытаниях вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Здесь C_n^k – число сочетаний из n по k : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

В практических задачах часто приходится вычислять вероятности различных событий, связанных с числом успехов в n испытаниях при больших значениях n . В этих случаях вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. В отдельных случаях при больших n удастся заменить формулу Бернулли приближенными формулами. Такие формулы, которые получаются при условии $n \rightarrow \infty$ называются асимптотическими.

Если n достаточно велико, а p – величина очень малая, для формулы Бернулли имеет место приближенная (асимптотическая) формула

$$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \approx \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Здесь $\lambda = np$ (λ – греческая буква "лямбда"). Эта формула называется *формулой Пуассона*.

По формуле Пуассона вычисляются вероятности числа появлений очень редких событий в массовых испытаниях.

2.9 Понятие случайной величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Часто результатом случайного эксперимента является число. Например, можно подбросить игральную кость и получить одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Можно подъехать к бензоко-

лонке и обнаружить определённое число автомашин в очереди и т.д. В таких случаях будем говорить, что имеем дело со случайной величиной.

Каждому исходу случайного эксперимента поставим в соответствие единственное число x_k – значение случайной величины. Тогда естественно рассматривать *случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов случайного эксперимента*.

Случайная величина, которая может принимать лишь конечное или счётное число значений, называется *дискретной*.

Значения случайной величины ξ (или X) будем записывать в виде конечной или бесконечной последовательности: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Если говорится, что задана случайная величина ξ , это значит, что каждому исходу ω_k случайного эксперимента поставлено в соответствие единственное число x_k , что записывается в виде равенства $x_k = \xi(\omega_k)$. Некоторые из значений x_k могут совпадать, то есть различным исходам $\{\omega_k\}$ может соответствовать одно и то же число x . Если все значения случайной величины совпадают, то будем говорить, что случайная величина *постоянна*.

Каждому значению x_k случайной величины ξ можно поставить в соответствие вероятность $p_k = P(A_k)$ события A_k . Если такое соответствие определено, то говорят, что задан *закон распределения* дискретной случайной величины ξ .

Обычно закон распределения дискретной случайной величины представляется в виде таблицы

ξ	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Закон распределения содержит всю информацию о случайной величине и задать случайную величину можно просто представив её закон распределения.

Во многих случаях на практике знание вероятностей не обязательно. Достаточно знать две наиболее важные характеристики случайной величины – ее математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание
дискретной случайной величины

Пусть задан закон распределения случайной величины ξ . Математическое ожидание $M[\xi]$ случайной величины ξ определяется формулой

$$M[\xi] \equiv M\xi \equiv m_{\xi} = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

Таким образом, *математическое ожидание есть среднее значение случайной величины*. Усреднение производится по большому числу испытаний.

Следует отметить, что случайная величина может вообще не принимать значения, равного её математическому ожиданию. Так, например, случайная величина, принимающая только значения 1 и -1 , каждое – с вероятностью 0,5, имеет математическое ожидание, равное нулю.

Говорят, что математическое ожидание – характеристика положения или центральных тенденций.

Свойства математического ожидания

1. Если случайная величина ξ принимает одно и то же значение при всех исходах случайного эксперимента, то её математическое ожидание равно ей самой.

2. Константу можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[k\xi] = k M[\xi].$$

3. Математическое ожидание суммы (разности) любых случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий:

$$M[\eta + \xi] = M[\eta] + M[\xi].$$

4. Для любой случайной величины справедливо равенство:

$$M[\xi - M[\xi]] = 0.$$

5. Математическое ожидание произведения *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M[\eta \cdot \xi] = M[\eta] \cdot M[\xi].$$

Дисперсия дискретной случайной величины

Зная характеристику среднего поведения случайной величины – математическое ожидание, хорошо было бы оценить, насколько случайная величина отклоняется от среднего, насколько велик ее *разброс*. С этой целью вводится понятие дисперсии.

Дисперсия случайной величины — это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D[\xi] = D\xi = M[(\xi - M[\xi])^2].$$

Используя определение дисперсии, для дискретной случайной величины формулу вычисления дисперсии можно представить в таком виде:

$$D[\xi] = \sum_{i=1}^n (x_i - M[\xi])^2 \cdot p_i.$$

Можно вывести ещё одну формулу для вычисления дисперсии:

$$\begin{aligned} D[\xi] &= \sum_{i=1}^n (x_i - M[\xi])^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i M[\xi] + (M[\xi])^2) p_i = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2M[\xi] \sum_{i=1}^n x_i p_i + (M[\xi])^2 \sum_{i=1}^n p_i = \\ &= M[\xi^2] - 2M[\xi] \cdot M[\xi] + (M[\xi])^2 = M[\xi^2] - (M[\xi])^2. \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Дисперсия характеризует степень рассеяния значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Если все значения случайной величины тесно сконцентрированы около её математического ожидания и большие отклонения от математического ожидания маловероятны, то такая случайная величина имеет малую дисперсию. Если значения случайной величины рассеяны и велика вероятность больших отклонений от математического ожидания, то такая случайная величина имеет большую дисперсию.

Если $\xi = \text{const}$ (т.е. ξ не случайна), то $D[\xi] = 0$.

Чтобы привести характеристику разброса к единицам измерения ξ , нужно извлечь из нее квадратный корень. Полученное неотрицательное число $\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]}$ называется *среднеквадратичным* или *стандартным отклонением* случайной величины

Свойства дисперсии

1. Если k – число, то $D[k\xi] = k^2 D[\xi]$, т.е. константа выносится из-под знака дисперсии с квадратом.

Докажем это.

$$\begin{aligned} D[k\xi] &= M[(k\xi - M[k\xi])^2] = M[(k\xi - k M[\xi])^2] = M[k^2 (\xi - m_\xi)^2] = \\ &= k^2 M[(\xi - m_\xi)^2] = k^2 D[\xi]. \end{aligned}$$

2. Сдвиг на константу не меняет дисперсии:

$$D[k + \xi] = D[\xi].$$

Свойства (1) и (2) объединяются в одно:

$$D[c + k\xi] = k^2 D[\xi].$$

3. Для попарно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ справедливо равенство

$$D\left[\sum_{i=1}^n \xi_i\right] = \sum_{i=1}^n D[\xi_i].$$

Пример 16. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Дисперсию можно вычислить исходя из ее определения, однако мы воспользуемся формулой $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$, которая быстрее ведет к цели. Найдем математическое ожидание X :

$$M[X] = -5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3.$$

Напишем закон распределения X^2 :

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2 :

$$M[X^2] = 25 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,2 = 15,3.$$

Вычислим искомую дисперсию:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 15,3 - (-0,3)^2 = 15,21.$$

и, наконец, искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]} = \sqrt{15,21} = 3,9.$$

2.10 Основные законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальный закон

Рассмотрим в качестве случайной величины X число наступлений некоторого события в n независимых испытаниях. Случайная величина X будет распределена по биномиальному закону с параметрами n и p , если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$, с соответствующими вероятностями:

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} p^m q^{n-m},$$

где $0 < p < 1$; $q = 1 - p$; $m = 0, 1, \dots, n$.

Вероятность каждого значения вычисляется по формуле Бернулли. Согласно этой формуле можно записать функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{m < x} C_n^m p^m q_n^m, & 0 < x \leq n, \\ 1, & n < x. \end{cases}$$

Среднее значение биномиального распределения и дисперсия принимают вид:

$$M[X] = np, \quad D[X] = npq.$$

Пример 17. Торговый агент встретился с тремя потенциальными покупателями. Из опыта известно, что вероятность покупки равна 0,3. Какова вероятность того, что покупку совершит один покупатель, двое, все трое или ни один из них?

Решение. Задача подходит под условия биномиального эксперимента, так как: три испытания идентичны, независимы, и каждое испытание имеет лишь два исхода (успех-неуспех). По формуле Бернулли рассчитаем вероятности биномиального распределения:

$$P_{3,0} = 0,343; \quad P_{3,1} = 0,441; \quad P_{3,2} = 0,189; \quad P_{3,3} = 0,027.$$

Математическое ожидание

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) = 0 \cdot 0,343 + 1 \cdot 0,441 + 2 \cdot 0,189 + 3 \cdot 0,027 = 0,9,$$

или

$$M[X] = n \cdot p = 3 \cdot 0,3 = 0,9.$$

и дисперсия

$$D[X] = npq = 3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,63.$$

Распределение Пуассона

Это предельное распределение биномиального закона, когда n велико ($n \rightarrow \infty$) и p мало ($p \rightarrow 0$), то есть закон распределения вероятностей массовых и редких событий.

Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = n \cdot p$, если ее возможные значения $0, 1, 2, \dots$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле Пуассона

$$p_{n,m} = P\{X = m\} = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Существуют специальные таблицы распределения Пуассона. Математическое ожидание и дисперсия совпадают и равны параметру λ , который определяет этот закон:

$$M[X] = D[X] = \lambda.$$

Этот параметр характеризует среднюю интенсивность, с которой случайные события появляются независимо друг от друга.

Часто случайные события, происшедшие за фиксированный промежуток времени или в фиксированной области пространства подчиняются пуассоновскому распределению. Ими могут быть число поступивших вызовов на телефонную стан-

цию за время t , число частиц радиоактивного распада, зарегистрированных счетчиком в течение некоторого времени t , число опечаток в большом тексте и т.д.

Пример 18. Прибытие машин на автостоянку может быть описано распределением Пуассона, если предположить, что вероятность прибытия в любые два равных промежутка времени одинакова и эти события независимы.

Решение. Пусть среднее число прибывающих машин за час равно 10. Тогда $\lambda = 10$ и

$$P(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = \frac{10^m \cdot e^{-10}}{m!}, \text{ для } m = 0, 1, 2 \dots$$

Чтобы узнать вероятность прибытия в течение часа, например, пяти машин ($m = 5$) достаточно рассчитать

$$P(5) = \frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!} = 0,0378.$$

Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X будет распределена по геометрическому закону, если ее возможные значения $m = 1, 2, 3, 4, \dots$, а вероятности этих значений определяются формулой

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1}p.$$

Это распределение рассматривает обычный биномиальный эксперимент, только вместо вычисления числа успехов, случайная величина определяет число испытаний до первого успеха.

Математическое ожидание и дисперсия равны соответственно

$$M[X] = \frac{1}{p}, \quad D[X] = \frac{q}{p^2}.$$

Пример 19. Пусть 1% населения обладает, например, экстрасенсорными способностями. Сколько людей в среднем надо опросить, чтобы набрать 10 экстрасенсов?

Решение. Каждый опрос – независимое испытание с вероятностью $p = 0,01$. Число опрошенных до встречи с первым экстросенсом – геометрическая случайная величина X , среднее значение которой оценивается математическим ожиданием $MX = \frac{1}{p} = 100$. Для того, чтобы встретить 10 экстросенсов, надо опросить в среднем в 10 раз больше людей (на основании свойства аддитивности математического ожидания).

Гипергеометрический закон распределения

По формулам Бернулли и Пуассона вычисляют вероятности появления события ровно m раз в n независимых повторных испытаниях. Если эти повторные испытания *зависимы* (осуществляются без возвращения и, следовательно, схема Бернулли не применима), то вероятность появления интересующего нас события m раз в n испытаниях определяется по формуле

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $m = 0, 1, \dots, \min(n, m), \quad M \leq N, \quad m \leq n, \quad n \leq N$.

Параметры распределения: N, M, n .

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины X равны соответственно:

$$M[X] = n \cdot \frac{M}{N}, \quad D[X] = n \cdot \frac{M}{N-1} \cdot \frac{(N-M) \cdot (N-n)}{N^2}.$$

Событие, вероятность которого мы хотим определить, состоит, например, в следующем.

В лотерее разыгрывается N билетов, из которых M – выигрышные. Некто приобрел n билетов. Найти вероятность того, что из них m – выигрышные. Случайная величина X – число выигрышных билетов.

Пример 20. В торговый салон поступают партии машин по 10 штук. Обычно 2 из 10 машин не отвечают стандарту качества. Для контроля выбирают всегда 5 машин. Чему равна вероятность того, что хотя бы две машины из проверяемых будут забракованы?

Решение. Случайная величина X – число забракованных машин, принимает значение 2. Вероятность этого значения при $N = 10$, $M = 2$, $N - M = 8$, $n = 5$, $m = 2$ будет

$$P_2 = P\{X = 2\} = C_8^3 \cdot C_2^2 / C_{10}^5 = 0,2122.$$

2.11 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Случайная величина, значения которой сплошь заполняют некоторый промежуток, называется *непрерывной*.

В частных случаях это может быть не один промежуток, а объединение нескольких промежутков. Промежутки могут быть конечными, полубесконечными или бесконечными, например: $(a; b]$, $(-\infty; a)$, $[b; \infty)$, $(-\infty; \infty)$.

При описании непрерывной случайной величины принципиально невозможно выписать и занумеровать все её значения, принадлежащие даже достаточно узкому интервалу. Эти значения образуют несчётное множество, называемое «континуум».

Вероятность каждого конкретного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Равную нулю вероятность имеют невозможные события. Оказывается, что и возможные события могут иметь нулевую вероятность.

Это не парадокс. Например, возьмем тело объемом V и массой M . Выделим внутри тела точку A и рассмотрим некоторый объем, включающий эту точку. Начнем стягивать этот объем к точке A : $V, V_1, V_2, V_3, \dots$ Получим последовательность соответствующих этим объемам уменьшающихся масс: $M_1, M_2, M_3, \dots$ В пределе при стягивании объема к точке A масса обра-

тится в нуль. То есть, ненулевая масса тела есть сумма бесконечного числа нулевых масс его отдельных точек. Эти затруднения можно обойти, используя понятие *плотности*.

Пусть ξ – непрерывная случайная величина. Рассмотрим для некоторого числа x вероятность реализации значений случайной величины в промежутке $x < \xi < x + \Delta x$, то есть $P(x < \xi < x + \Delta x)$. Здесь Δx – малый интервал.

Очевидно, что если $\Delta x \rightarrow 0$, то $P(x < \xi < x + \Delta x) \rightarrow 0$. Обозначим $f_\xi(x)$ предел отношения $P(x < \xi < x + \Delta x)$ к Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, если такой предел существует:

$$f_\xi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Функция $f_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* случайной величины ξ .

Если такая функция нашлась, можно считать, что случайная величина полностью определена: ведь в этом случае можно вычислить вероятность ее попадания в любой промежуток числовой оси:

$$P(\xi \in [a, b]) = \int_a^b f_\xi(x) dx.$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает значения из отрезка $[a; b]$, равна площади под графиком плотности вероятности на этом отрезке.

Плотностью распределения вероятностей может служить любая интегрируемая функция $f_\xi(x)$, удовлетворяющая двум условиям:

- 1) $f_\xi(x) \geq 0$ для всех x ;
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1$ (условие нормировки).

Пусть ξ – непрерывная случайная величина. Функция $F_\xi(x)$, которая определяется равенством

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x),$$

называется *интегральной функцией распределения* или просто *функцией распределения* случайной величины ξ .

Таким образом, при каждом фиксированном значении аргумента x значение этой функции равно вероятности выполнения неравенства $\xi < x$ (случайная величина ξ меньше x). Непосредственно из определения следует равенство

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt.$$

Производная определённого интеграла по верхнему пределу приводит к соотношению

$$F'_{\xi}(x) = f_{\xi}(x).$$

Плотность распределения $f_{\xi}(x)$ называют *дифференциальной функцией распределения*.

Функция распределения $F_{\xi}(x)$ непрерывной случайной величины ξ имеет следующие свойства:

1. $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty.$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x) = 1.$

3. $F_{\xi}(x)$ непрерывная неубывающая функция на всей числовой оси.

Свойства 1–3 вытекают непосредственно из определения функции $F_{\xi}(x)$.

4. Приращение $F_{\xi}(x)$ на промежутке $(x_1; x_2)$ равно вероятности того, что случайная величина ξ принимает значение из этого промежутка:

$$F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = P(x_1 \leq \xi < x_2).$$

Доказательство.

$$F_{\xi}(x_2) = P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2) = F_{\xi}(x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2).$$

Отсюда

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1), \text{ ч. т. д.}$$

Заметим, что для непрерывной случайной величины ξ справедливы равенства

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 < \xi \leq x_2) = P(x_1 \leq \xi \leq x_2),$$

т.к. вероятность попасть в точку равна нулю: $P(x_1) = P(x_2) = 0$.

Следует отметить, что можно рассматривать функцию распределения не только для непрерывных, но и для дискретных случайных величин. В случае дискретной случайной величины ξ , функция распределения представляет собой функцию накопленных вероятностей

$$F_{\xi}(x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i),$$

где суммирование распространяется на все значения индекса i , для которых $x_i < x$.

Функция распределения дискретной случайной величины не является непрерывной; она испытывает скачки в тех точках, для которых существует положительная вероятность события $\{\xi = x_k\}$. Таким образом,

$$F_{\xi}(x_k + 0) - F_{\xi}(x_k) = P(\xi = x_k) = p_k,$$

где $\{x_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ – множество возможных значений случайной величины ξ .

Свойства 1, 2 и 4 функции распределения F_{ξ} , рассмотренные для непрерывных случайных величин, остаются в силе и для дискретных величин.

Отметим еще раз, что *плотность* распределения вероятностей $f_{\xi}(x)$ может быть введена только для *непрерывных* величин.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ определяется равенством

$$M[\xi] \equiv m_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi}(x) dx.$$

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Все свойства математического ожидания, указанные выше для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Если $\eta = \varphi(\xi)$ – функция случайного аргумента ξ , возможные значения которого принадлежат всей оси Ox , то

$$m_{\eta} = M[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f_{\xi}(x) dx.$$

Если математическое ожидание $M[\xi]$ существует и кривая плотности распределения симметрична относительно прямой $x = C$, то $M[\xi] = C$.

Модой Mo непрерывной случайной величины ξ называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения вероятностей. В частности, если распределение имеет два одинаковых максимума, то его называют *бимодальным*.

Медианой Me непрерывной случайной величины ξ , называют то ее возможное значение, которое определяется равенством

$$P[\xi < Me] = P[\xi \geq Me].$$

Геометрически медиану можно истолковать как точку, в которой ордината $f_{\xi}(x)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения.

Дисперсия непрерывной случайной величины ξ определяется равенством

$$D[\xi] \equiv D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[\xi])^2 \cdot f_{\xi}(x) dx$$

или равносильным равенством

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\xi}(x) dx - (M[\xi])^2.$$

Все свойства дисперсии, указанные выше для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины:

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D_{\xi}}.$$

Если $\eta = \varphi(\xi)$ – функция случайного аргумента, то

$$\begin{aligned} D_{\eta} = D[\varphi(\xi)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_{\eta}]^2 \cdot f_{\xi}(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 \cdot f_{\xi}(x) dx - m_{\eta}^2. \end{aligned}$$

Начальный момент порядка k непрерывной случайной величины ξ определяется равенством

$$\alpha_k = M[\xi^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f_{\xi}(x) dx.$$

Центральный момент порядка k непрерывной случайной величины ξ определяется равенством

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[\xi])^k \cdot f_{\xi}(x) dx$$

Очевидно, что если $k = 1$, то $\alpha_1 = M[\xi]$, $\mu_1 = 0$; если $k = 2$, то $\mu_2 = D[\xi]$.

Пример 21. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности вероятности (дифференциальной функцией распределения)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/2, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить для X математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, моду Mo , медиану Me .

Решение. Функцию распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X найдем по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$.

Если $x \leq 0$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx = 0$.

Если $0 < x \leq 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^x \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}$.

Если $x > 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^{\infty} 0 \cdot dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1$.

Итак, искомая функция распределения примет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M[X]$ вычисляем по формуле:

$$M[X] = \int_0^2 x \cdot f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = 1\frac{1}{3}.$$

Для нахождения дисперсии $D[X]$ воспользуемся формулой

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Тогда $M[X^2] = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 = 2$ и $D[X] = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

Функция $f(x)$ достигает максимума в точке $x = 2$ (предлагается построить график функции $f(x)$) и, значит, $M_0 = 2$.

Для нахождения медианы Me нужно решить уравнение $\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}$ (так как медиана делит область значений случайной

величины на две равные по вероятности части). Получим $x = \pm\sqrt{2}$. Случайная величина по условию задачи определена только на интервале $[0, 2]$, значит $Me = 1.414$.

2.12 Основные законы распределения непрерывных случайных величин. Нормальное распределение

Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина ξ , *равномерно* распределена на промежутке $[a; b]$, если ее плотность вероятности $f_{\xi}(x)$ постоянна внутри этого промежутка (см. рис. 9).

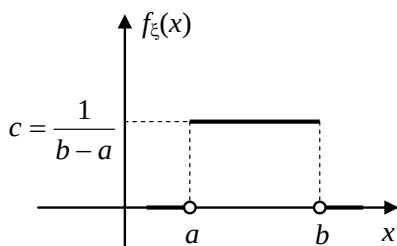


Рис. 9.

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} c, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a; x > b. \end{cases}$$

По свойству функции $f_{\xi}(x)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} c dx = c(b-a) = 1, \text{ откуда } c = \frac{1}{b-a}.$$

Равномерное распределение случайной величины X на участке $[a, b]$ обозначают как $X \sim R[a, b]$.

Для равномерного распределения функция $F_{\xi}(x)$ примет вид

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

График функции $F_{\xi}(x)$ представлен на рис. 10.

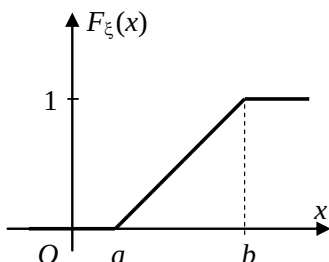


Рис. 10.

Закон распределения непрерывной случайной величины можно определить заданием либо функции $f_{\xi}(x)$, либо функции $F_{\xi}(x)$.

Легко показать, что $M[X] = \frac{a+b}{2}$ и $D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Пример 22. Пусть длина стандартных труб, выпускаемых заводом, колеблется от 2,950 до 3,005 м., то есть является случайной величиной. Предположим, что распределение этой случайной величины подчиняется равномерному распределению. Определить среднюю длину трубы и среднее квадратическое отклонение.

Решение.

$$M[X] = \frac{3,005 + 2,950}{2} = 2,9775;$$

$$\sigma[X] = \frac{3,005 - 2,950}{\sqrt{12}} = 0,1588.$$

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Непрерывная случайная величина ξ , имеет показательный (или экспоненциальный) закон распределения, если ее плотность вероятности $f_{\xi}(x)$ задается функцией:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь параметр распределения $\lambda > 0$.

Функция рассматриваемого распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

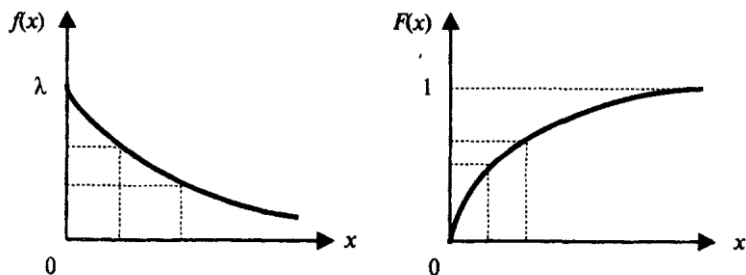


Рис. 11. Графики плотности вероятности и функции распределения показательного распределения.

Для математического ожидания и дисперсии получают выражения: $M[X] = \frac{1}{\lambda}$ и $D[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

Показательное распределение и распределение Пуассона тесно связаны. Если последний – это распределение числа появления событий в заданный интервал времени, то в первом случае нас интересует длина промежутка времени.

Пример 23. Пусть в порт под погрузку в течении часа обычно прибывают в среднем 5 грузовиков. Порт работает с 8 утра. Какова вероятность того, что в промежуток времени с 8.15 до 8.30 прибудет грузовик?

Решение. Для временного интервала в 15 минут получим $\lambda = (5/60) \cdot 15 = 1,25$.

Если рассмотреть 15 минут как единицу времени, то для указанного в вопросе задачи промежутка времени полагаем $\alpha = 1$ и $\beta = 2$. Тогда, учитывая, что $F(\alpha) = 1 - e^{-\lambda\alpha}$, $F(\beta) = 1 - e^{-\lambda\beta}$, получим $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$. Подставив сюда λ , α , β , получим искомую вероятность.

Нормальный закон распределения

В теории вероятностей вводится случайная величина, которая не имеет себе равных по возможности описания действительности. В *центральной предельной теореме* доказывается, что плотность вероятности всех непрерывных случайных величин, разброс значений которых обусловлен множеством разнообразных факторов, действующих примерно в одинаковой степени и независимо друг от друга, определяется функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

В этом случае говорят, что случайная величина имеет *нормальное (гауссово) распределение* плотности вероятности и записывается как $X \sim N(a, \sigma)$.

Здесь a и σ – параметры: $a = M[X]$, $\sigma = \sqrt{D[X]}$, $-\infty < X < \infty$.

Функция нормального распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Если $a=0$, $\sigma=1$, то нормальное распределение называется *стандартным (нормированным)* с плотностью и функцией распределения соответственно:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Эти функции протабулированы и для них имеются обширные статистические таблицы.

$\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа*. Она связана с нормированной функцией Лапласа $\Phi_0(x)$ соотношением

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + 0,5.$$

График кривой стандартного нормального распределения представлен на рис.12.

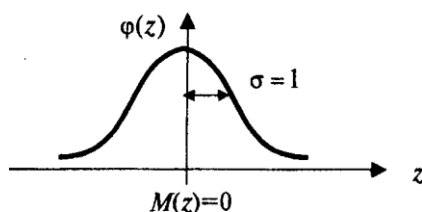


Рис. 12. График кривой стандартного нормального распределения.

Для преобразования любой нормально распределенной случайные величины X в стандартную Z , необходимо воспользоваться заменой переменных: $Z = \frac{x - a}{\sigma}$.

Можно показать, что для $X \sim N(a, \sigma)$ $M_0[X] = M_e[X] = a$.

Случайные величины с нормальным распределением используют при решении задач двух типов.

В первой задаче определяется вероятность того, что случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$ принимает значения в интервале $[\alpha, \beta]$. Эта вероятность находится по формуле:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

В задачах второго типа, по формуле приведенной ниже, ищется вероятность того, что случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$ отличается от своего среднего значения a по абсолютной величине не больше, чем на Δ :

$$P(|X - a| \leq \Delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

Так, если $\Delta = \sigma$, то получим $P = 0,68268$; при $\Delta = 2\sigma$ будет $P = 0,95450$; а если $\Delta = 3\sigma$, то $P = 0,99730$. Это значит, что случайная нормально распределенная величина практически не принимает значений, которые отличались бы от среднего значения по абсолютной величине больше, чем на 3σ (правило трех сигм).

Нормальное распределение иногда называют *законом ошибок*.

Пример 24. Распределение веса коробок конфет, выпускаемых кондитерской фабрикой, подчиняется закону нормального распределения со средним весом 250 г и средним квадратическим отклонением 5 г. Найти вероятность того, что отклонение веса коробок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 8 г.

Решение.

$$P(|X - 250| \leq 8) = 2\Phi_0\left(\frac{8}{5}\right) = 2\Phi_0(1,6) = 2 \cdot 0,4452 \approx 0,8904.$$

Значение нормированной функции Лапласа ищется по таблице в Приложении.

Пример 25. Высота саженцев представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 40 см и средним квадратическим отклонением 3 см. Найти вероятность того, что высота произвольно взятого саженца будет больше 34 см, но меньше 43 см; вероят-

ность того, что высота саженца отклонится от его математического ожидания не более чем на 1,5 см.

Решение. Обозначим за X высоту саженца. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность того, что высота произвольно взятого саженца будет больше 34 см, но меньше 43 см, будет

$$\begin{aligned} P(34 < x < 43) &= \Phi\left(\frac{43-40}{3}\right) - \Phi\left(\frac{34-40}{3}\right) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185. \end{aligned}$$

2.13 Зависимость двух случайных величин.

Коэффициент корреляции

Характеристикой зависимости между случайными величинами ξ и η служит математическое ожидание произведения отклонений ξ и η от их центров распределений (математических ожиданий случайных величин), которое называется *коэффициентом ковариации или просто ковариацией*.

$$\text{cov}(\xi; \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)).$$

Пусть $\xi = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, $\eta = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$. Тогда

$$\text{cov}(\xi; \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_i - M\xi)(y_j - M\eta) P((\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)) \quad (4)$$

Эту формулу можно интерпретировать так. Если при больших значениях ξ более вероятны большие значения η , а при малых значениях ξ более вероятны малые значения η , то в правой части формулы (4) положительные слагаемые доминируют, и ковариация принимает положительные значения.

Если же более вероятны произведения $(x_i - M\xi)(y_j - M\eta)$, состоящие из сомножителей разного знака, то есть исходы случайного эксперимента, приводящие к большим значениям ξ в основном приводят к малым значениям η и наоборот, то

ковариация принимает большие по модулю отрицательные значения.

В первом случае принято говорить о *прямой связи*: с ростом ξ случайная величина η имеет тенденцию к возрастанию.

Во втором случае говорят об *обратной связи*: с ростом ξ случайная величина η имеет тенденцию к уменьшению или падению.

Ковариацию удобно представлять в виде:

$$\text{cov}(\xi; \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta.$$

Ковариация двух случайных величин равна математическому ожиданию их произведения минус произведение математических ожиданий.

Для независимых случайных величин ξ и η $\text{cov}(\xi; \eta) = 0$.

Этому свойству можно придать более практическую формулировку: если $\text{cov}(\xi; \eta) \neq 0$, то случайные величины ξ и η зависимы.

Итак, ненулевая ковариация свидетельствует о зависимости случайных величин.

Обратное утверждение не верно. Можно привести примеры как независимых, так и зависимых случайных величин, ковариация между которыми равна нулю.

Величина $\text{cov}(\xi; \eta)$ зависит от единиц измерения, в которых выражаются ξ и η . Поэтому $\text{cov}(\xi; \eta)$ неудобно принимать за показатель связи. Чтобы иметь дело с безразмерным показателем, ковариацию делят на произведение среднеквадратических отклонений (СКО) ξ и η :

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\text{cov}(\xi; \eta)}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} = \frac{M(\xi\eta) - M\xi M\eta}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}};$$
$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}; \quad \sigma_{\eta} = \sqrt{D\eta}.$$

Полученное число $\rho_{\xi\eta}$ называется *коэффициентом корреляции* случайных величин ξ и η .

Для независимых ξ и η $\rho_{\xi\eta}=0$ (так как в этом случае $\text{cov}(\xi; \eta)=0$).

Обратного заключения сделать нельзя. Случайные величины могут быть связаны даже функциональной зависимостью, но коэффициент их корреляции будет равен нулю.

Свойства коэффициента корреляции:

- 1) $-1 \leq \rho_{\xi\eta} \leq 1$;
- 2) Если $\rho_{\xi\eta} = 1$, то $\eta = k\xi + b$, где k и b – константы, $k > 0$.
- 3) Если $\rho_{\xi\eta} = -1$, то $\eta = k\xi + b$, где $k < 0$.
- 4) Если $\eta = k\xi + b$, ($k \neq 0$) или $\xi = k_1\eta + b_1$, то $\rho_{\xi\eta} = 1$ при $k > 0$ или $\rho_{\xi\eta} = -1$ при $k < 0$.

Коэффициент корреляции $\rho_{\xi\eta}$ достигает своих предельных значений -1 и 1 в том и только в том случае, если совместное распределение ξ и η все концентрируется на некоторой прямой в плоскости $\xi; \eta$. Если $|\rho_{\xi\eta}| < 1$, то линейной зависимости между ξ и η нет. Все же по мере приближения $|\rho_{\xi\eta}|$ к единице величину $|\rho_{\xi\eta}|$ можно считать мерой близости к полной линейной зависимости между ξ и η .

Как правило, говоря о корреляционной зависимости, имеют в виду линейную корреляционную зависимость. Если имеется в виду нелинейная корреляционная зависимость, то это особо оговаривают

Можно говорить о *совместном распределении двух непрерывных случайных величин*.

В большинстве случаев возможен переход от непрерывных случайных величин к совместному распределению двух дискретных случайных величин следующим образом.

Нужно разбить отрезок $[a; b]$ изменения случайной величины ξ на равные отрезки $[c_0=a; c_1]; [c_1; c_2]; [c_2; c_3], \dots, [c_{n-1}; c_n=b]$. За значение случайной величины ξ принять середину каждого отрезка.

Так же надо поступить со случайной величиной η , разбив ее область значений $[e; f]$ на равные отрезки $[g_0=e; g_1]; [g_1; g_2], \dots, [g_{k-1}; g_k=f]$, и приняв за возможные значения η середины отрезков $[g_{k-1}; g_k]$.

Таким образом мы получили дискретные случайные величины $\xi^* = \{x_1; x_2; \dots x_n\}$ и $\eta^* = \{y_1; y_2; \dots y_k\}$, причем каждой паре $(x_i; y_j)$ ставится в соответствие вероятность

$$P_i^j = P((\xi \in [c_{i-1}; c_i]) \cap (\eta \in [g_{j-1}; g_j])).$$

2.14 Предельные теоремы теории вероятностей

Математическая статистика изучает массовые явления. В основе ее лежат предельные теоремы теории вероятностей. Эти теоремы рассматривают связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин, когда проводится большое число испытаний. «Законом больших чисел» называется группа теорем, которая доказывает, что в этом случае среднее значение перестает быть случайным результатом и может быть предсказано с достаточной точностью. «Центральная предельная теорема», названная так в силу особой важности, определяет условия, при которых закон распределения суммы случайных величин приближается к нормальному.

Неравенство Чебышева

Приведем рассуждение, впервые проведенное в XIX веке Чебышевым. Для чего запишем дисперсию случайной величины

$$D[\xi] = \sum_{i=1}^n (x_i - M[\xi])^2 \cdot p_i.$$

Пусть α – любое положительное число. Оставим в написанной сумме только те члены, для которых $|x_i - M[\xi]| > \alpha$,

одновременно заменив множители $(x_i - M[\xi])^2$ на меньшую величину α^2 . Получим неравенство

$$D[\xi] = \sigma_\xi^2 \geq \alpha^2 \sum_{|x_i - M[\xi]| > \alpha} p_i.$$

Правая часть неравенства представляет собой сумму вероятностей тех значений x_i , которые отстоят от $M[\xi]$ в ту или другую сторону больше, чем на α . А вся сумма (по правилу сложения вероятностей) есть вероятность того, что величина ξ получит какое-либо одно из этих значений. Это фактически означает, что полученное отклонение окажется больше, чем α . Таким образом

$$P(|\xi - M[\xi]| > \alpha) \leq \frac{D[\xi]}{\alpha^2}.$$

Это неравенство Чебышева позволяет рассчитать вероятность отклонений случайной величины от ее среднего значения (в ту или другую сторону) больших, чем любое заданное число α . Такая оценка, хотя и грубая, может быть использована практически.

Например, используя неравенство, можно оценить вероятность того, что отклонение случайной величины ξ от своего математического ожидания будет меньше $3\sigma_\xi$, т.е. меньше трех среднеквадратических отклонений (правило трех сигм). Действительно, так как $\alpha = 3\sigma_\xi$, то, записав неравенство Чебышева в несколько иной форме, получим

$$P(|\xi - M[\xi]| < 3\sigma_\xi) > 1 - \frac{\sigma_\xi^2}{(3\sigma_\xi)^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,8889.$$

Пример 26. Проводится 900 независимых испытаний некоторого события, вероятность наступления которого в каждом испытании равно 0,3. Оценить вероятность того, что число по-

явлений этого события находится в пределах от 240 до 300. Использовать неравенство Чебышева.

Решение.

$$M[\xi] = n \cdot p = 900 \cdot 0,3 = 270; \quad D[\xi] = n \cdot p \cdot q = 900 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 189;$$

$$\alpha = |240 - 270| = |300 - 270| = 30;$$

$$P(|\xi - 270| \leq 30) \geq 1 - \frac{D[\xi]}{\alpha^2} = 1 - \frac{189}{30^2} = 0,79.$$

Теорема Чебышева

Эта теорема относится к фундаментальным результатам теории вероятностей и содержит основное утверждение *закона больших чисел*. Закон открыт великим русским математиком в середине XIX века.

Предположим, проведено большое количество независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых наблюдается случайная величина одной и той же природы. С точки зрения математики наблюдается последовательность независимых случайных величин ξ_i . Тогда при условии существования такого числа $C > 0$, что $D[\xi_i] \leq C, i = 1, 2, \dots, n, \dots$, для любого $\alpha > 0$ будет выполняться сходимость по вероятности.

Заметим, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ можно рассматривать не только как значения наблюдаемой величины ξ в соответствующих независимых испытаниях, но и как независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение и такое же как у ξ . Применяя обратное неравенство Чебышева к среднему $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$, будем иметь

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[\xi_i]\right| < \alpha\right\} \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right)}{\alpha^2} \geq 1 - \frac{C}{n\alpha^2}. \quad (5)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим закон больших чисел в форме П.Л. Чебышева:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[\xi_i] \right| < \alpha \right\} = 1.$$

Если случайные величины ξ_i имеют одинаковое распределение, то их математические ожидания и дисперсии одинаковы: $M[\xi_i] = a$, $D[\xi_i] = \sigma^2$, и в этом частном случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a \right| < \alpha \right\} = 1.$$

То есть, среднее арифметическое всех значений случайных величин $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \bar{\xi}$, полученных в результате достаточно большого числа испытаний, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, приближается к неслучайному числу $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[\xi_i]$ (в частном случае равно a). Другими словами, разброс среднего арифметического по абсолютной величине сколь угодно мал.

Таким образом, как отдельная случайная величина может принимать значения, далекие от ее среднего значения (иметь значительное рассеяние), среднее арифметическое большого числа случайных величин ведет себя совершенно иначе, так как с подавляющей вероятностью принимает лишь значения, очень близкие к ее среднему (мало рассеяна). Объясняется это тем, что отклонения случайных величин в ту и в другую стороны при взятии среднего арифметического взаимно уничтожаются и суммарное отклонение оказывается малым в большинстве случаев.

Практическое применение теоремы Чебышева состоит в том, что о качестве большого количества однородного материала можно судить по сравнительно небольшой пробе (вы-

борке). Суждения, сделанные по выборке, обладают большой точностью. Так, по небольшому объему зерна (в сравнении со всей партией) согласно закону больших чисел можно достаточно точно судить о среднем весе одного зерна и, следовательно, о качестве всей партии зерна.

Пример 27. Для случайной величины X известна дисперсия $D[X] = 5$. Математическое ожидание (a) неизвестно. Полученное в 100 независимых испытаниях среднее значение этой случайной величины ($\bar{x}$), принимают за ее математическое ожидание. Определить с вероятностью не менее 0,8 допускаемую при этом максимальную ошибку.

Решение. В задаче требуется найти ошибку ε из неравенства $P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) \geq 0,8$. Используя формулу (5), получим

$$P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[X]}{n \cdot \varepsilon^2} = 0,8. \text{ Учитывая, что } n = 100, \text{ найдем}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{D[X]}{0,2 \cdot n} = \frac{5}{0,2 \cdot 100} = 0,25 \text{ и } \varepsilon = 0,5.$$

Центральная предельная теорема

Это второе важнейшее положение теории вероятностей, называемое также теоремой Ляпунова. Выдающийся русский математик объяснил, почему на практике чаще всего встречаются нормально распределенные величины. Дело в том, что явления, исход которых зависит от случая, подвержены воздействию огромного количества случайных величин. Если эти действия выражаются случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, то их суммарное влияние на явление можно выразить суммой $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Теорема утверждает, что если действующие причины взаимно независимы, их число очень велико и каждая из них ничтожно мало влияет на явление по сравнению с суммарным их действием, то закон распределения суммы в

S_n лишь незначительно может отличаться от нормального закона распределения.

Практическое значение теоремы обусловлено тем, что многие случайные величины (такие как ошибки различных измерений, валютные курсы, объемы прибыли от реализации однородного товара и другие) можно рассматривать как сумму отдельных независимых слагаемых. Например, рассеяние снарядов при стрельбе из орудия будет подчиняться нормальному закону, поскольку является результатом воздействия огромного числа факторов: ничтожные изменения в состояниях атмосферы, колебания количества взрывчатого вещества и в форме различных снарядов, незаметные для глаза ошибки в наводке орудия и многие другие. Эти факторы независимы и влияние каждого на траекторию заряда ничтожно мало.

На практике (ситуация характерна для математической статистики) чаще всего используется частный случай теоремы, когда члены суммы S_n имеют одинаковое распределение $M[\xi_i] = a$, $D[\xi_i] = \sigma^2$, $i = 1, \dots, n$. Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы этих величин $\frac{S_n - n \cdot a}{\sigma \sqrt{n}} = Z_n$ стремиться при $n \rightarrow \infty$ к функции распределения стандартной нормальной случайной величины

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Это означает, что $Z_n \sim N(0,1)$, $S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma)$.

Следствием центральной предельной теоремы являются локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

3 ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

3.1 Предмет математической статистики. Генеральная и выборочные совокупности

Математическая статистика – наука, решающая в некотором смысле обратные задачи по сравнению с задачами теории вероятности. В теории вероятностей вероятностное пространство задано и требуется предсказать возможное поведение случайной величины; в математической статистике, наоборот, известны лишь реализовавшиеся значения случайной величины, по которым реконструируется вероятностное пространство. Говорят, что по экспериментальным данным строится вероятностная модель явления, соответствующая этим данным.

В решении своих задач математическая статистика использует результаты теории вероятностей.

Итак, *основной задачей* математической статистики является разработка методов получения научно обоснованных выводов о *массовых явлениях* и процессах из данных наблюдений и экспериментов.

Эти выводы и заключения относятся не к отдельным испытаниям, а представляют собой утверждения об общих вероятностных характеристиках данного процесса.

Пусть мы располагаем сведениями (обычно довольно ограниченными), например, о числе дефектных изделий и т.п. Эти данные могут представлять непосредственный интерес в смысле информации о качестве партии продукции.

Статистические же проблемы возникают тогда, когда мы на основе той же информации начинаем делать выводы относительно более широкого круга явлений. Например, нас может интересовать качество технологического процесса, для этого мы оцениваем *вероятность* получения в нем дефектного изделия или среднюю долговечность изделия. В этом случае мы рассматриваем собранный материал не ради его самого, а лишь как некую пробную группу или *выборку*.

Выводы и оценки, основанные на материале наблюдений, отражают случайный состав пробной группы и поэтому считаются приблизительными *оценками вероятностного характера*. Во многих случаях теория указывает, как наилучшим способом использовать имеющуюся информацию для получения по возможности более точных и надежных характеристик, указывая при этом степень надежности выводов.

В математической статистике рассматриваются две основные категории задач: *оценивание* и *статистическая проверка гипотез*.

Первая задача разделяется на *точечное оценивание* и *интервальное оценивание* параметров распределения. Например, может возникнуть необходимость по наблюдениям получить точечные оценки параметров M_{ξ} и D_{ξ} . Если мы хотим получить некоторый интервал, с той или иной степенью достоверности содержащий истинное значение параметра, то это задача интервального оценивания.

Вторая задача – *проверка гипотез* – заключается в том, что мы делаем предположение о распределении вероятностей случайной величины (например, о значении одного или нескольких параметров функции распределения) и решаем, согласуются ли в некотором смысле эти значения параметров с полученными результатами наблюдений.

Выборочный метод

Пусть нам нужно обследовать количественный признак в партии экземпляров некоторого товара. Проверку партии можно проводить двумя способами:

- 1) провести сплошной контроль всей партии;
- 2) провести контроль только части партии.

При втором способе множество случайным образом отобранных объектов называется *выборочной совокупностью* или *выборкой*.

Все множество объектов, из которого производится выборка, называется *генеральной совокупностью*.

Число объектов в выборке называется *объемом выборки*. Обычно будем считать, что объем генеральной совокупности бесконечен.

Выборки разделяются на *повторные* (с возвращением) и *бесповторные* (без возвращения).

Выборка должна достаточно полно отражать особенности всех объектов генеральной совокупности, иначе говоря, выборка должна быть *репрезентативной* (представительной).

Выборки различаются по способу отбора.

1. *Простой случайный отбор.*

Все элементы генеральной совокупности нумеруются и из таблицы случайных чисел берут, например, последовательность любых 30 идущих подряд чисел. Элементы с выпавшими номерами и входят в выборку.

2. *Типический отбор.*

Такой отбор производится в том случае, если генеральную совокупность можно представить в виде объединения подмножеств, объекты которых однородны по какому-то признаку, хотя вся совокупность такой однородности не имеет. Тогда по каждому подмножеству проводят простой случайный отбор, и в выборку объединяются все полученные объекты.

3. *Механический отбор.*

Отбирают каждый двадцатый (сотый) экземпляр.

4. *Серийный отбор.*

В выборку подбираются экземпляры, произведенные на каком-то производстве в определенный промежуток времени.

В дальнейшем под генеральной совокупностью мы будем подразумевать не само множество объектов, а множество значений случайной величины, принимающей числовое значение на каждом из объектов.

Итак, отвлекаясь от понятия генеральной совокупности как множества объектов, обладающих некоторым признаком, будем рассматривать генеральную совокупность как случайную величину ξ , закон распределения и параметры которой определяются с помощью выборочного метода.

Рассмотрим выборку объема n , представляющую данную генеральную совокупность. Первое выборочное значение x_1 будем рассматривать как реализацию, как одно из возможных значений случайной величины ξ_1 , имеющей тот же закон распределения с теми же параметрами, что и случайная величина ξ .

Второе выборочное значение x_2 — одно из возможных значений случайной величины ξ_2 с тем же законом распределения, что и случайная величина ξ .

То же самое можно сказать о значениях $x_3, x_4, \dots, x_n$.

Таким образом, на выборку будем смотреть как на совокупность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, распределенных так же, как и случайная величина ξ , представляющая генеральную совокупность. Выборочные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ — это значения, которые приняли эти случайные величины в результате 1-го, 2-го, ..., n -го эксперимента.

Вариационный ряд

Пусть для объектов генеральной совокупности определен некоторый *признак или числовая характеристика*, которую можно измерить (размер детали, удельное количество нитратов в дыне, шум работы двигателя). Эта характеристика — случайная величина ξ , принимающая на каждом объекте определенное числовое значение. Из выборки объема n получаем значения этой случайной величины в виде ряда из n чисел:

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (6)$$

Эти числа называются *значениями признака*.

Среди чисел ряда (6) могут быть одинаковые числа. Если значения признака упорядочить, то есть расположить в порядке возрастания или убывания, написав каждое значение лишь один раз, а затем под каждым значением x_i признака написать число m_i , показывающее, сколько раз данное значение встречается в ряду (6):

x_1	x_2	x_3		x_k
m_1	m_2	m_3		m_k

то получится таблица, называемая *дискретным вариационным рядом*.

Число m_i называется *частотой* i -го значения признака.

Очевидна справедливость равенства $\sum_{i=1}^k m_i = n$.

Если промежуток между наименьшим и наибольшим значениями признака в выборке разбить на несколько интервалов одинаковой длины, каждому интервалу поставить в соответствие число выборочных значений признака, попавших в этот интервал, то получим *интервальный вариационный ряд*.

Если признак может принимать любые значения из некоторого промежутка, то есть является непрерывной случайной величиной, приходится выборку представлять именно таким рядом.

Если в вариационном интервальном ряду каждый интервал $[\alpha_i; \alpha_{i+1})$ заменить лежащим в его середине числом $(\alpha_i + \alpha_{i+1})/2$, то получим *дискретный вариационный ряд*. Такая замена вполне естественна, так как, например, при измерении размера детали с точностью до одного миллиметра всем размерам из промежутка $[49,5; 50,5)$, будет соответствовать одно число, равное 50.

3.2 Эмпирическое распределение. Точечные оценки параметров распределения генеральной совокупности

Во многих случаях мы располагаем информацией о виде закона распределения случайной величины (нормальный, бернуллиевский, равномерный и т. п.), но не знаем параметров этого распределения, таких как $M[\xi]$, $D[\xi]$. Для определения этих параметров применяется выборочный метод.

Пусть выборка объема n представлена в виде вариационного ряда. Назовем *выборочной средней* величину

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_k}{n}$$

Величина $p_i^* = \frac{n_i}{n}$ называется *относительной частотой*

значения признака x_i .

Если значения признака, полученные из выборки, не группировать и не представлять в виде вариационного ряда, то для вычисления *выборочной средней* нужно пользоваться формулой

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Естественно считать величину $\bar{x}$ выборочной оценкой параметра M_ξ .

Выборочная оценка параметра, представляющая собой число, называется *точечной оценкой*.

Выборочную дисперсию

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$$

можно считать точечной

оценкой дисперсии $D[\xi]$ генеральной совокупности.

Используя выборочный метод можно сделать некоторые выводы о наличии или глубине корреляционной связи случайных величин ξ и η , даже не зная закона совместного их распределения. Выборку объема n в этом случае представим в виде таблицы, где i -й отобранный объект ($i = 1, 2, \dots, n$) представлен парой чисел x_i, y_i :

x_1	x_2	...	x_n
y_1	y_2	...	y_n

Выборочный коэффициент корреляции рассчитывается по формуле

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Здесь

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Выборочный коэффициент корреляции можно рассматривать как точечную оценку коэффициента корреляции $\rho_{\xi\eta}$, характеризующего генеральную совокупность.

Выборочные параметры $\bar{x}, \sigma_x, r_{xy}$ или любые другие зависят от того, какие объекты генеральной совокупности попали в выборку и различаются от выборки к выборке. Поэтому они сами являются *случайными величинами*.

Пусть выборочный параметр δ рассматривается как выборочная оценка параметра Δ генеральной совокупности и при этом выполняется равенство

$$M[\delta] = \Delta.$$

Такая выборочная оценка называется *несмещенной*.

Для доказательства несмещённости некоторых точечных оценок будем рассматривать выборку объема n как систему n независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, каждая из которых имеет тот же закон распределения с теми же параметрами, что и случайная величина ξ , представляющая генеральную совокупность. При таком подходе становятся очевидными равенства:

$$M[x_i] = M[\xi_i] = M[\xi]; \quad D[x_i] = D[\xi_i] = D[\xi]$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Теперь можно показать, что выборочная средняя $\bar{x}$ есть несмещенная оценка средней генеральной совокупности или, что то же самое, математического ожидания интересующей нас случайной величины ξ :

$$M[\bar{x}] = M\left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right] = \frac{1}{n} (M[\xi_1] + M[\xi_2] + \dots + M[\xi_n]) = \frac{1}{n} n M[\xi] = M[\xi].$$

Выведем формулу для дисперсии выборочной средней:

$$D[\bar{x}] = D\left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} (D[\xi_1] + D[\xi_2] + \dots + D[\xi_{n1}]) =$$

$$= \frac{1}{n^2} n D[\xi] = \frac{D[\xi]}{n}.$$

Найдем теперь, чему равно математическое ожидание выборочной дисперсии σ^2 . Сначала преобразуем σ^2 следующим образом:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M[\xi] + M[\xi] - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((x_i - M[\xi])^2 - 2(x_i - M[\xi])(\bar{x} - M[\xi]) + (\bar{x} - M[\xi])^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M[\xi])^2 - (\bar{x} - M[\xi])^2.$$

Здесь использовано преобразование:

$$\sum_{i=1}^n 2(x_i - M[\xi])(\bar{x} - M[\xi]) = 2(\bar{x} - M[\xi]) \sum_{i=1}^n (x_i - M[\xi]) =$$

$$= 2(\bar{x} - M[\xi]) \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n M[\xi] \right) = 2(\bar{x} - M[\xi])(n\bar{x} - nM[\xi]) =$$

$$= 2n(\bar{x} - M[\xi])^2.$$

Теперь, используя полученное выше выражение для величины σ^2 , найдем ее математическое ожидание.

$$M[\sigma^2] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M[\xi])^2 - (\bar{x} - M[\xi])^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i - M[\xi]]^2 - M[\bar{x} - M[\xi]]^2 =$$

$$= \frac{1}{n} n D[\xi] - D[\bar{x}] = D[\xi] - \frac{D[\xi]}{n} = \frac{n-1}{n} D[\xi].$$

Так как $M[\sigma^2] \neq D[\xi]$, то выборочная дисперсия не является несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности.

Чтобы получить несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности, нужно умножить выборочную дисперсию на $\frac{n}{n-1}$. Тогда получится величина

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2 \quad \text{или} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

называемая *исправленной выборочной дисперсией*.

Пусть имеется ряд несмещенных точечных оценок одного и того же параметра генеральной совокупности. Та оценка, которая имеет наименьшую дисперсию, называется *эффективной*.

Полученная из выборки объема n точечная оценка δ_n параметра Δ генеральной совокупности называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к Δ . Это означает, что для любых положительных чисел ε и γ найдется такое число $n_{\varepsilon\gamma}$, что для всех чисел n , удовлетворяющих неравенству $n > n_{\varepsilon\gamma}$ выполняется условие

$$P((\delta_n - \Delta) < \varepsilon) > 1 - \gamma.$$

S^2 и $\bar{x}$ являются несмещёнными, состоятельными и эффективными оценками величин $D[\xi]$ и $M[\xi]$.

Пример 28. Приведенная ниже таблица представляет собой случайную выборку значений признака X . Объем выборки $n = 100$.

50,2	54,0	41,0	42,0	58,2	59,3	84,8	45,0	76,5	58,3
21,0	55,0	45,0	21,5	46,0	44,0	42,5	49,0	48,7	75,0
15,3	55,0	23,8	46,5	53,0	62,8	78,5	67,0	34,5	49,9

49,7	63,0	30,0	32,0	42,4	22,4	52,0	70,4	57,2	50,0
23,0	47,8	47,4	50,8	78,3	27,0	56,6	51,3	58,6	28,4
51,7	50,0	48,8	49,4	57,5	47,4	33,5	27,0	39,7	57,5
18,4	35,6	28,4	37,6	49,5	26,7	54,0	68,6	29,3	62,7
43,8	44,0	69,1	46,3	76,7	37,1	69,2	39,3	30,0	43,0
85,0	63,0	30,0	43,8	64,8	22,0	38,8	42,3	64,8	41,0
30,0	10,0	63,0	48,8	71,2	54,4	47,8	31,2	46,1	17,8

Найти закон распределения, точечные оценки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения признака X .

Решение. Значения X в таблице почти не повторяются, поэтому построим интервальное распределение X . Определим длину каждого частичного интервала (I_n), предварительно найдя по таблице размах выборочных значений (R):

$$x_{\min} = 10, \quad x_{\max} = 85, \quad R = x_{\max} - x_{\min} = 75.$$

$$l = \frac{R}{(1 + 3,322 \cdot \lg n)} = \frac{75}{(1 + 3,322 \cdot \lg 100)} = 9,81 \approx 10,$$

где $n = 100$ – объем выборки.

Нижняя граница первого интервала принимается равной

$$x_0 = x_{\min} - \frac{l}{2} = 10 - 5 = 5, \quad \text{а его верхнюю границу}$$

$x_1 = x_0 + l = 5 + 10 = 15$; второй интервал будет (15; 25), третий (25; 35) и так далее. Если повторяющееся выборочное значение совпадает с границей двух соседних интервалов, то договоримся относить его к левому интервалу. Так число 55 дважды

будет отнесено к интервалу (45; 55) и ни разу – к интервалу (55; 65).

В итоге этих действий получаем следующее интервальное распределение исходной выборки, куда внесены не только частоты n_i , но и относительные частоты $p_i^* = \frac{n_i}{n}$ выборочных значений признака, попавшего в i -й частичный интервал:

$x_{i-1}-x_i$	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
n_i	1	9	14	19	29	15	7	6
p_i^*	0,01	0,09	0,14	0,19	0,29	0,15	0,07	0,06

Для проверки правильного заполнения таблицы нужно убедиться, что сумма элементов второй строки равна объему выборки (в нашем примере $n = 100$), а сумма элементов третьей строки равна единице.

Распределение непрерывной случайной величины характеризуется функцией плотности вероятностей. В статистике ее оценкой является *гистограмма относительных частот*. Это ступенчатая фигура, для построения которой по горизонтальной оси откладываются частичные интервалы, по вертикальной –

плотности относительных частот $h_i = \frac{p_i^*}{l}$. В нашем примере

h_i	0,001	0,009	0,014	0,019	0,029	0,015	0,007	0,006
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

От интервального распределения выборки можно перейти к *точечному* (дискретному) распределению, взяв за новые выборочные значения признака середины частичных интервалов. В рассматриваемом примере такое распределение будет иметь вид следующей таблицы:

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80
n_i	1	9	14	19	29	15	7	6
p_i^*	0,01	0,09	0,14	0,19	0,29	0,15	0,07	0,06

Для наглядности можно построить *полигон* относительных частот. Это ломаная линия, вершины которой находятся в точках (x_i, p_i^*) .

Для точечного распределения выборки можно построить *эмпирическую функцию распределения* $F^*(x)$. Она является статистической оценкой функции распределения вероятностей признака X (интегрального закона распределения) и строится по формуле $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n – объем выборки, а n_x – сумма частот выборочных значений признака X , меньших x . Ясно, что эмпирическую функцию распределения характеризует процесс накопления относительных частот. В нашем примере

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10, \\ 0,01, & 10 < x \leq 20, \\ 0,10, & 20 < x \leq 30, \\ 0,24, & 30 < x \leq 40, \\ 0,43, & 40 < x \leq 50, \\ 0,72, & 50 < x \leq 60, \\ 0,87, & 60 < x \leq 70, \\ 0,94, & 70 < x \leq 80, \\ 1, & x > 80. \end{cases}$$

Аналогом эмпирической функции распределения является кумулята относительных частот, представляющую собой для точечного (дискретного) выборочного распределения ломаную линию с вершинами в точках $\left(x_i, \frac{n_x}{n}\right)$, где n – объем выборки, а n_x – сумма частот выборочных значений признака X , меньших x_i .

Точечные статистические оценки генеральных параметров распределения признака X вычислим по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i, \quad D_{\text{выб}} = \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad S_{\text{выб}}^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_n^2,$$

где x_i – выборочное значение признака X , n_i – частоты этих значений, n – объем выборки.

Получим

$$\bar{x} = \frac{1}{100} (10 \cdot 1 + 20 \cdot 9 + 30 \cdot 14 + 40 \cdot 19 + 50 \cdot 29 + 60 \cdot 15 + 70 \cdot 7 + 80 \cdot 6) = 46,9.$$

$$D_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} = \frac{1}{100} [(10 - 46,9)^2 \cdot 1 + (20 - 46,9)^2 \cdot 9 + (30 - 46,9)^2 \cdot 14 + (40 - 46,9)^2 \cdot 19 + (50 - 46,9)^2 \cdot 29 + (60 - 46,9)^2 \cdot 15 + (70 - 46,9)^2 \cdot 7 + (80 - 46,9)^2 \cdot 6] = 259,39.$$

$$\sigma_n = \sqrt{259,39} \approx 16,11, \quad s_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} = \sigma_{n-1} = \sqrt{262,01} \approx 16,19.$$

3.3 Интервальные оценки. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Точечные оценки параметров генеральной совокупности могут быть приняты в качестве ориентировочных, первоначальных результатов обработки выборочных данных. Их недостаток заключается в том, что неизвестно, с какой точностью оценивается параметр. Если для выборок большого объема точность обычно бывает достаточной (при условии несмещенности, эффективности и состоятельности оценок), то для выборок небольшого объема вопрос точности оценок становится очень важным.

Введем понятие *интервальной оценки* неизвестного параметра генеральной совокупности (или случайной величины ξ , определенной на множестве объектов этой генеральной совокупности). Обозначим этот параметр через Δ .

По сделанной выборке по определенным правилам найдем числа Δ_1 и Δ_2 , так чтобы выполнялось условие:

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = P(\Delta \in (\Delta_1; \Delta_2)) = \gamma.$$

Числа Δ_1 и Δ_2 называются *доверительными границами*, интервал (Δ_1, Δ_2) – *доверительным интервалом* для параметра Δ .

Число γ называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* сделанной оценки.

Сначала задается *надежность*. Обычно ее выбирают равной 0.95, 0.99 или 0.999. Тогда вероятность того, что интересующий нас параметр попал в интервал (Δ_1, Δ_2) достаточно высока.

Число $(\Delta_1 + \Delta_2)/2$ – середина доверительного интервала – будет давать значение параметра Δ с *точностью* $(\Delta_2 - \Delta_1)/2$, которая представляет собой половину длины доверительного интервала.

Границы Δ_1 и Δ_2 определяются из выборочных данных и являются функциями от случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, а следовательно – сами случайные величины.

Отсюда – *доверительный интервал* (Δ_1, Δ_2) *тоже случаен*. Он может покрывать параметр Δ или нет. Именно в таком смысле нужно понимать случайное событие, заключающееся в том, что доверительный интервал покрывает число Δ .

Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Пусть случайная величина ξ (определенная на множестве объектов генеральной совокупности) распределена по нормальному закону, для которого известна дисперсия $D[\xi] = \sigma^2$ ($\sigma > 0$). Из генеральной совокупности делается выборка объема n : $x_1, x_2, \dots, x_n$. Чтобы подчеркнуть случайный характер величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, будем рассматривать их как совокупность n независимых случайных величин, распределенных так же, как ξ :

$$Mx_1 = Mx_2 = \dots = Mx_k = M\xi = a,$$

$$Dx_1 = Dx_2 = \dots = Dx_k = D\xi.$$

Можно доказать, что случайная величина $\bar{x}$ (выборочное среднее) также распределена по нормальному закону с математи-

ческим ожиданием $M\bar{x} = M\xi = a$ и дисперсией $D\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, т.е.

$$\bar{x} \in N\left(a, \sigma/\sqrt{n}\right).$$

Обозначим неизвестную величину $M\xi$ через a и подберем по заданной надежности γ число $\Delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие:

$$P(|\bar{x} - a| < \Delta) = \gamma. \quad (7)$$

Как известно, вероятность того, что случайная величина $\xi \in N(a, \sigma)$ принимает значение в интервале $(a-l, a+l)$, симметричном относительно центра рассеяния a , вычисляется по формуле:

$$P(a-l < \xi < a+l) = P(|\xi - a| < l) = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1.$$

Используя вышеприведенную формулу, получаем

$$P(|\bar{x} - a| < \Delta) = P(a - \Delta < \bar{x} < a + \Delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(t_\gamma).$$

Осталось подобрать Δ так, чтобы выполнялось равенство $2\Phi_0(t_\gamma) = \gamma$.

Для любого $\gamma \in [0; 1]$ по таблице «Значение функции Лапласа» можно найти аргумент (число t_γ), чтобы $\Phi_0(t_\gamma) = \gamma/2$.

Теперь из равенства $\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma} = t_\gamma$ определим значение Δ :

$$\Delta = \frac{\sigma t_\gamma}{\sqrt{n}}.$$

Окончательный результат получим, представив формулу (7) в виде:

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma t_\gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{\sigma t_\gamma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Смысл последней формулы состоит в следующем: с надежностью γ доверительный интервал

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma t_{\gamma}}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\sigma t_{\gamma}}{\sqrt{n}} \right)$$

покрывает неизвестный параметр $a = M\xi$ генеральной совокупности.

Можно сказать иначе: точечная оценка $\bar{x}$ определяет значение параметра $M\xi$ с точностью $\Delta = \frac{\sigma \cdot t_{\gamma}}{\sqrt{n}}$ и надежностью γ .

Пример 29. Среднее содержание вредных примесей, определенных на основании выборки, равно 18,307 мг; найти доверительный интервал для a – истинного содержания вредных примесей с надежностью $(1 - \alpha) = 0,95$. Среднее квадратическое отклонение известно и равно $\sigma = 0,0029$ мг. Объем выборки $n = 5$.

Решение. Учитывая, что $\gamma = (1 - \alpha) = 0,95$ и $\Phi_0(t_{\gamma}) = \gamma/2 = 0.475$, по таблице «значение функции Лапласа» выясняем, что $t_{\gamma} = 1,96$. Тогда предельная погрешность интервального оценивания $\Delta = \frac{\sigma t_{\gamma}}{\sqrt{n}} = \frac{0,0029 \cdot 1,96}{\sqrt{5}} = 0,0025$.

Искомый доверительный интервал равен

$18.307 - 0.0025 < a < 18.307 + 0.0025$, или $18.3015 < a < 18.3095$.

Следуя полученному результату, можно утверждать, что если будет произведено достаточно большое число выборок, то только в 5 случаях из 100 содержание вредных примесей может выйти за границы доверительного интервала.

Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии

Пусть ξ – случайная величина, распределенная по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием $M\xi$ (которое обозначим буквой a) и неизвестным σ . Произве-

дем выборку объема n . Определим среднюю выборочную $\bar{x}$ и исправленную выборочную дисперсию $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Рассмотрим случайную величину $T_\gamma = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{S}$, которая (доказывается) будет распределена по закону *Стьюдента* с $(n - 1)$ степенями свободы.

Задача заключается в том, чтобы по заданной надежности γ и по числу степеней свободы $(n - 1)$ найти такое число T_γ , чтобы выполнялось равенство

$$P(|T_\gamma| < t_\gamma) = \gamma \quad \text{или} \quad P\left(\frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{S} < t_\gamma\right) = \gamma, \quad (8)$$

или эквивалентное равенство

$$P\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Здесь в скобках – условие того, что значение неизвестного параметра a принадлежит некоторому промежутку, который и является доверительным интервалом. Его границы зависят от надежности γ , а также от параметров выборки $\bar{x}$ и S .

Чтобы определить значение t_γ по величине γ , равенство (8) преобразуем к виду:

$$P\left(\frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{S} \geq t_\gamma\right) = 1 - \gamma.$$

Теперь по таблице «Квантили распределения Стьюдента» для случайной величины t_γ , распределенной по закону Стьюдента, по вероятности $1 - \gamma$ и числу степеней свободы $n - 1$ находим t_γ и, следовательно, искомый доверительный интервал:

$$\left(\bar{x} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

Пример 30. По условию примера 29, найти для истинного содержания вредных примесей доверительный интервал с надежностью 0,95, считая неизвестной дисперсию генеральной совокупности. Рассчитанное по выборке исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 0,0029$ мг.

Решение. По таблице «Квантили t – распределения Стьюдента» определим критические точки по заданной доверительной вероятности $\gamma = (1 - \alpha) = 0,95$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 5 - 1 = 4$. Получим $t_\gamma = 2,78$. Вычислим предельную погрешность интервального оценивания

$$t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 2,78 \frac{0,0029}{\sqrt{5}} = 0,0036.$$

Искомый доверительный интервал равен
 $18.307 - 0.0036 < a < 18.307 + 0.0036$, или $18.3034 < a < 18.3106$.

Сравнивая доверительные интервалы, накрывающие с одной и той же доверительной вероятностью 0,95 истинное содержание вредных примесей, в случае, когда генеральная дисперсия известна и когда неизвестна, видим, что во втором случае доверительный интервал получается более широкий. Однако при объеме выборки $n > 30$ эти отличия станут незначительными.

Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения

Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону, для которого математическое ожидание $M\xi = a$ и дисперсия $D\xi = \sigma^2$ неизвестны. Делается выборка объема n . Из нее определяется исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Вводим случайную величину $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{D\xi}$, распределенную по закону χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы.

По заданной надежности γ можно найти сколько угодно границ χ_1^2 и χ_2^2 интервалов, таких, что

$$P(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2) = \gamma, \quad \gamma = 1 - \alpha.$$

Найдем χ_1^2 и χ_2^2 из следующих условий:

$$P(\chi^2 \leq \chi_1^2) = (1 - \gamma) / 2, \quad (9)$$

$$P(\chi^2 \geq \chi_2^2) = (1 - \gamma) / 2, \quad (10)$$

В таблице «Квантили $\chi_{\alpha,k}^2$ распределения χ_k^2 » для случайной величины χ^2 обычно дается решение уравнения $P(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$. Из такой таблицы по заданной величине α и по числу степеней свободы $n - 1$ можно определить значение χ_α^2 . Таким образом, сразу находится значение χ_2^2 в формуле (10).

Для определения χ_1^2 преобразуем (9):

$$P(\chi^2 \geq \chi_1^2) = 1 - (1 - \gamma) / 2 = (1 + \gamma) / 2.$$

Полученное равенство позволяет определить по названной таблице значение χ_1^2 .

Теперь, когда найдены значения χ_1^2 и χ_2^2 , представим исходное равенство в виде $P\left(\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{D\xi} < \chi_2^2\right) = \gamma$. Или

$$P\left(\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi_2^2} < D\xi < \frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi_1^2}\right) = \gamma.$$

Последнее равенство перепишем в такой форме, чтобы были определены границы доверительного интервала для неизвестной величины $D\xi$:

$$\left(\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi_2^2}, \frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi_1^2}\right).$$

Здесь $\chi_1^2 = \chi_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2$, $\chi_2^2 = \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2$, $\gamma = 1 - \alpha$.

Если математическое ожидание $M\xi = a$ известно, то доверительный интервал для неизвестной величины $D\xi$ будет иметь вид:

$$\left(\frac{n \cdot S_0^2}{\chi_2^2}, \frac{n \cdot S_0^2}{\chi_1^2} \right), \text{ где } S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Пример 31. Приняв числовые данные примера 29, найти доверительный интервал, накрывающий неизвестное средне-квадратическое отклонение σ с заданной надежностью 0,95.

Решение. По таблице «Квантили $\chi_{\alpha, k}^2$ распределения χ_k^2 » найдем значения хи-квадрат с k степенями свободы $k = n - 1 = 4$. Будем иметь $\chi_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2 = 11,1$; $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2 = 0,484$. Тогда искомый

доверительный интервал $\left(\sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}} \cdot S, \sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}} \cdot S \right)$ имеет вид:

$$\left(\sqrt{\frac{4}{11,1}} \cdot 0,0029 < \sigma < \sqrt{\frac{4}{0,484}} \cdot 0,0029 \right), \text{ или } 0,0017 < \sigma < 0,0084.$$

3.4 Проверка статистических гипотез.

Проверка гипотез о законе распределения

Информация, полученная по выборке, может быть использована для оценки правомерности некоторых предположений (гипотез) о генеральной совокупности.

Статистической гипотезой называют любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин.

Гипотезы о неизвестном параметре Θ распределения бывают простые ($\Theta = \Theta_0$) и сложные ($\Theta < \Theta_0$, $\Theta > \Theta_0$, $\Theta \neq \Theta_0$).

Проверяемую гипотезу обозначают H_0 , альтернативную – H_1 . Гипотезу проверяют на основании выборки. Случайный характер выборки может приводить к ошибкам. Ошибка *первого рода* имеет место тогда, когда отвергается верная гипотеза H_0 . Вероятность такой ошибки называется *уровнем значимости* и обозначается α . Чем меньше α , тем меньше вероятность отклонить верную гипотезу.

При ошибке *второго рода* отвергается верная на самом деле альтернативная гипотеза – H_1 (принимается неверная гипотеза H_0). Вероятность этой ошибки обозначают через β , а $(1-\beta)$ называется *мощностью критерия*. Обычно при заданном уровне значимости α отыскивается критерий с наибольшей мощностью.

Проверка статистической гипотезы состоит из следующих этапов:

- определение гипотез H_0 и H_1 ;
- выбор статистики критерия (испытывать гипотезу можно на основе любой статистики, имеющей любое вероятностное распределение) и задание уровня значимости α ;
- по статистике критерия и уровню значимости α определяют границу (квантиль), определяющую критическую область (т.е. область отклонения гипотезы H_0);
- по выборке подсчитывают значение критерия;
- если фактически наблюдаемое значение критерия попадает в критическую область, то основная гипотеза H_0 отклоняется и принимается H_1 .

Проверка гипотез о законе распределения

Рассмотрим, как можно проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности.

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – выборка из генеральной совокупности ξ с неизвестной функцией распределения, о которой выдвинута простая гипотеза $H_0: F_\xi(x) = F(x)$, где $F(x)$ полностью задана. Это распределение назовем теоретическим. Альтерна-

тивное распределение в данном случае не конкретизируется и речь идет просто о согласии данных и гипотезы H_0 .

Для проверки таких гипотез разработано несколько критериев согласия, наиболее известным является критерий Пирсона (χ^2 : хи-квадрат). При использовании χ^2 –критерия вся область изменения генеральной совокупности делится на m интервалов (которые могут иметь различную длину). По выборке по этим же интервалам составляется статистический ряд

($x_i \rightarrow n_i$, где n – объем выборки: $n = \sum_{i=1}^m n_i$) и вычисляются

оценки параметров теоретического распределения. Тем самым теоретическое распределение будет полностью определено. Теперь по теоретическому распределению подсчитывают вероятности p_i того, что случайная величина X принимает значения из i -го интервала по формуле

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

По найденным p_i ищутся теоретические частоты ($m_i = n \cdot p_i$).

Гипотеза H_0 верна, если теоретические (m_i) и эмпирические (n_i) частоты достаточно мало отличаются друг от друга. В 1900 году К. Пирсон предложил использовать в качестве меры отклонения эмпирических данных (n_i) от гипотетических значений (m_i) следующую статистику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{n_i^2}{n \cdot p_i} - n.$$

Согласно теореме Пирсона эта величина при $n \rightarrow \infty$ имеет χ^2 – распределение с числом степеней свободы ($k = m - r - 1$), m – число интервалов выборки, r – число параметров гипотетического распределения. Чем больше χ^2 , тем хуже согласованы теоретическое и эмпирическое распределения.

Поскольку относительная частота события является состоятельной оценкой его вероятности, то при больших n разности в сумме должны быть малы и, следовательно, значение

статистики не должно быть слишком большим. При достаточно большом значении χ^2 нужно отвергнуть гипотезу H_0 . Поэтому естественно задать только правостороннюю критическую область для гипотезы H_0 в виде $\chi^2 > t_\alpha$, где критическая граница t_α при заданном уровне значимости α должна быть выбрана из условия $P(\chi^2 > t_\alpha) = \alpha$.

Пример 32. Пользуясь критерием согласия Пирсона, проверить при уровне значимости $\alpha = 0,01$ гипотезу H_0 о том, что случайная величина X , статистический ряд которой приведен в таблице, распределена по нормальному закону.

Интервалы значений x_i	(-4, -3)	(-3, -2)	(-2, -1)	(-1, 0)
Относительные частоты p_i^*	0,012	0,050	0,144	0,266
Интервалы значений x_i	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)
Относительные частоты p_i^*	0,240	0,176	0,092	0,020

Решение. Для вычисления вероятностей p_i необходимо вычислить параметры, определяющие нормальный закон распределения (a и σ). Их оценки, рассчитанные по выборке объемом $n = 500$, дадут значения $\bar{x}_B = 0,168$ и $D_B = 2,098$.

Используя формулу

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

находим для каждого i -го интервала вероятность p_i (вероятность попадания в i -й интервал случайной величины X , подчи-

ненной нормальному закону распределения с параметрами $a = \bar{x}_B = 0,168$, $\sigma^2 = D_B = 2,098$) и результат оформим таблицей.

Интервалы значений x_i	(-4, -3)	(-3, -2)	(-2, -1)	(-1, 0)
Вероятности p_i	0,0126	0,0522	0,1422	0,2433
Интервалы значений x_i	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)
Вероятности p_i	0,2668	0,1789	0,0770	0,0212

По данным двух таблиц вычислим наблюдаемое значение статистики Пирсона χ^2 . Получим $\chi^2 = 3,99$.

Теперь определяем число степеней свободы k ; так как количество интервалов равно $m = 8$, а число параметров нормального распределения $r = 2$, то $k = 8 - 2 - 1 = 5$. По таблице распределения Пирсона для $k = 5$ и $\alpha = 0,01$ найдем $\chi^2_{\alpha,k} = 15,1$. Так как $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,k}$, то нет оснований отвергать проверяемую гипотезу.

4 ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Основная цель и задача современной математики, по-видимому, состоит в реализации универсального математического метода познания. Это предполагает в первую очередь построение новых математических моделей в биологии, мироздании, микромире, в экономических и социальных явлениях.

В сравнении с натуральным экспериментом математическое моделирование имеет следующие преимущества:

- экономичность;
- возможность моделирования гипотетических, то есть не реализованных в природе объектов;
- возможность реализации режимов, опасных или трудно воспроизводимых (критический режим ядерных реакторов и др.);
- возможность изменения масштабов времени;
- легкость многоаспектного анализа;
- большая прогностическая сила.

Постановка задачи (по Минскому): объект А является моделью объекта В, если наблюдатель с помощью А получает интересующие его сведения относительно В.

Модель концентрирует в себе записанную на определенном языке (естественном, алгоритмическом, математическом) совокупность наших знаний, представлений и гипотез о соответствующем объекте или явлении.

Модель лишь приближенно описывает поведение реальной системы, так как знания не бывают абсолютными, а гипотезы вынужденно или намеренно не учитывают некоторые эффекты.

С. Балтеру принадлежит высказывание: «Хотя аналогия часто вводит в заблуждение, это наименьшее из того, что вводит нас в заблуждение».

Это мысль подтверждается важнейшей особенностью модели, которая состоит в том, что знания об объекте можно неограниченно накапливать и при этом не терять целостного взгляда на него.

При исследовании сложных систем может потребоваться набор моделей, соответствующих различным уровням рассмотрения.

«Полная» модель будет полностью соответствовать оригиналу в смысле, что «наилучшей моделью кота является тот же самый кот».

Адекватность модели устанавливается проверкой для нее основных законов и сопоставлением результатов моделирования частных вариантов с известными для этих вариантов решениями (тестирование).

Модель всегда содержит параметры. *Задачей идентификации* является определение значений рабочих параметров модели. Они определяются в результате наблюдения над реальной системой. Решается задача по минимизации функционала отклонения траектории модели от траектории исследуемой системы. Традиционно применяются метод наименьших квадратов и наибольшего правдоподобия. Выявление значимых параметров и пренебрежение остальными позволяет уменьшить их число. Для этого считают коэффициенты чувствительности (регрессии) выходных показателей по отношению к входным.

При классификации методов моделирования и моделей различают *аналитические, имитационные и комбинированные модели*.

В *аналитическом моделировании* функционирование системы записывают в виде алгебраических, интегральных, дифференциальных и других соотношениях и логических условий.

Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

а) *качественным*, когда устанавливаются лишь некоторые свойства решения;

б) *аналитическим*, когда стремятся получить явные зависимости для искомых характеристик;

в) *численным*, когда получают числовые значения для заданных входных данных.

Математическая модель может использоваться традиционным способом, т.е. для получения какого-то частного решения, но и в сфере управления она успешно применяется для имитационного моделирования.

При *имитационном моделировании* алгоритм, реализующий модель, воспроизводит процесс функционирования системы во времени и в пространстве. Имитационное моделирование применимо к задачам, не поддающимся аналитическим и численным методам. Его иногда называют статистическим, поскольку заключительная обработка результатов выполняется методами математической статистики.

Имитационное моделирование позволяет оценить различные стратегии, обеспечивающие достижение цели данной системы.

Итак, модель нужна для того, чтобы:

- понять, как устроен конкретный объект (его структура, свойства, законы развития);
- определять наилучшие способы управления объектом или процессом при заданных целях и критериях;
- прогнозировать последствия воздействия на объект.

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Любая целенаправленная деятельность сопровождается принятием решений.

Под термином «*исследование операций*» понимают применение математических, количественных методов для обоснования принимаемых решений во всех областях человеческой деятельности.

Операцией называют комплекс мероприятий направленных на достижение поставленной цели. Операция является управляемым мероприятием.

Прежде всего это относится к планированию сложных систем, которые возникают в экономике, экологии, социальной сфере. Хотя экономисты, управленцы, военные и т.д. принимают решения каждый в своей сфере деятельности, методы и критерии, которыми они руководствуются, по существу, одни и те же. Эти методы и составляют предмет теории принятия решений.

Процесс принятия решения можно условно разбить на части:

1. определение цели и критериев,
2. построение моделей,
3. разработка методов поиска оптимального решения,
4. экспертиза моделей,
5. выбор приемлемых альтернативных вариантов и их сравнение,
6. нахождение линии оптимального поведения в рамках выбранного варианта,
7. распределение интеллектуальных и материальных ресурсов и т.д.

При анализе той или другой ситуации выбирают соответствующий критерий оценки, который называют *показателем эффективности* или *целевой функцией*. Это может быть, на-

пример, средняя прибыль предприятия, количество сбитых самолетов и т.п., но также и вероятность получения заданной средней прибыли, вероятность обнаружения самолета и т.п.

Затем строится математическая модель рассматриваемой ситуации или рассматриваемого объекта и ищется $\max$ (или $\min$) целевой функции при заданных ограничениях. Построение модели требует специальных знаний и хорошей математической подготовки. Методы математического программирования (планирования) предполагают компьютерную реализацию. Модель тестируется и корректируется до тех пор, пока не будет достигнуто соответствие между объектом и моделью. Полученное математическое решение облачается в содержательную форму и представляется в виде рекомендаций.

Окончательное решение остается за ответственным лицом, который должен наряду с рекомендациями математического расчета учесть и не вошедшие в расчет соображения.

Если известны все действующие в системе факторы, т.е. отсутствуют случайные воздействия, то это будет принятие решения *в условиях определенности*.

Если выбранное решение приводит с разной вероятностью к одному из возможных исходов, то принимающий решение рискует получить не тот результат, на который надеется. Этот случай называют принятием решений *в условиях риска*.

Если в момент принятия решения какие-либо факторы неизвестны, например погодные условия, действия противника и т.п., то такая задача называется принятием решений *в условиях неопределенности*. Природа неизвестных факторов различна. Если неизвестные факторы представляют собой случайные величины, для которых известны законы распределения вероятностей и другие статистические характеристики, то такие задачи исследования операций называются *стохастическими*.

В условиях неопределенности выбор варианта должен определяться двумя факторами:

- знанием вероятностей возможных исходов (последствий);
- знанием предпочтений, отдаваемых различным исходам.

В согласии с *теорией принятия решений* следует выделять следующие этапы:

1. определение альтернативных способов действия;
2. описание вероятностей возможных исходов;
3. ранжировка предпочтений возможных исходов через их полезность;
4. рациональный синтез информации, полученный на первых трех этапах.

Новые возможности ЭВМ позволили создать так называемые *системы поддержки принятия решений*. Эти системы содержат базы знаний об исследуемой области, набор ситуаций и рекомендуемых к ним вариантов решения, опыт других лиц, модели и правила.

Несмотря на объективность математических методов, полученное решение нельзя рассматривать как истину в последней инстанции, так как при отсутствии полной исходной информации математическая теория и научно обоснованные методы не дают точного решения. Можно сказать, что метод *исследования операций* – искусство давать плохие советы, когда другие методы дают еще худшие.

К тому же даже самый тщательный выбор решения не гарантирует успех навечно. Через определенный период времени каждое решение надо пересматривать. Научные методы лишь помогают принять решение. Никакая ЭВМ не сможет принять решение вместо человека и взять на себя ответственность за последствия этого решения.

Часто решения приходится принимать в конфликтных ситуациях, когда сталкиваются интересы и цели двух и более сторон. Математическая теория, анализирующая конфликтные ситуации, называется *теорией игр*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
Уровень значимости α (односторонняя критическая область)						

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Турецкий В.Я. Математика и информатика: учеб, пособие для вузов / В.Я. Турецкий. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА, 2006. – 560 с.

2. Козлов В.Н. Математика и информатика: учеб. пособие для вузов / В.Н. Козлов. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 266 с.

3. Елисеева И.И. Теория статистики с основами теории вероятностей: учеб. пособие для вузов / И.И. Елисеева, В.С. Князевский, Л.И. Новорожкина, З.А. Морозова; под ред. И.И. Елисеевой. – М.: ЮНИТА-ДАНА, 2001. – 446 с.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

5. Виленкин Н.Я. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистике: учеб. пособие для вузов / Н.Я. Виленкин, В.Г. Потапов. – М.: Просвещение, 1979. – 111 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	4
1.1 Математика как часть общечеловеческой культуры. Основные этапы становления современной математики. Аксиоматический подход	4
1.2 Множества и подмножества. Операции над множествами. Мощность множества	11
1.3 Множество действительных и комплексных чисел	17
1.4 Линейные пространства. Векторы и операции над ними. Координаты вектора в заданном базисе	21
1.5 Понятие матрицы. Квадратные матрицы и их определители. Формулы Крамера	24
1.6 Топологические понятия. Последовательности. Предел и непрерывность функции	29
1.7 Производная и дифференциал функции. Экстремум функции. Правила Лопиталя	36
1.8 Первообразная, неопределенный и определённый интегралы. Формула Ньютона–Лейбница	41
1.9 Понятие о дифференциальных уравнениях. Задача Коши	45
2 ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ	48
2.1 Предмет теории вероятности. Случайные события. Действия над случайными событиями	48
2.2 Классическое определения вероятности. Комбинаторика	53
2.3 Статистическое определения вероятности. Частота и вероятность	55
2.4 Геометрическое определения вероятности	57
2.5 Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий	58
2.6 Формула полной вероятности	62
2.7 Формула Байеса	64

2.8	Схема испытаний Бернулли	65
2.9	Понятие случайной величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин	66
2.10	Основные законы распределения дискретных случайных величин	72
2.11	Числовые характеристики непрерывных случайных величин	76
2.12	Основные законы распределения непрерывных случайных величин. Нормальное распределение	83
2.13	Зависимость двух случайных величин. Коэффициент корреляции	89
2.14	Предельные теоремы теории вероятностей	92
3	ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	98
3.1	Предмет математической статистики. Генеральная и выборочные совокупности	98
3.2	Эмпирическое распределение. Точечные оценки параметров распределения генеральной совокупности	102
3.3	Интервальные оценки. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения	110
3.4	Проверка статистических гипотез. Проверка гипотез о законе распределения	117
4	ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	122
5	ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ	125
	ПРИЛОЖЕНИЕ	128
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	132

Учебное издание

Шунина Валентина Алексеевна
Пешков Вадим Вячеславович
Кострюков Сергей Александрович

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ,
ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКУ**

В авторской редакции