

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

А. В. Останков

**ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
КОЛЕБАНИЙ И ЦЕПЕЙ**

Учебное пособие

Воронеж 2021

УДК 621.37
ББК 32.841я73
О-76

Рецензенты:

*кафедра основ радиотехники и электроники
Воронежского института ФСИН России
(нач. кафедры канд. техн. наук, доцент Р. Н. Андреев);
Ю. Э. Корчагин, д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры радиофизики
Воронежского государственного университета*

Останков, А. В.

Частотные характеристики колебаний и цепей:

О-76 учеб. пособие / А. В. Останков; ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет».
— Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. — 152 с.

ISBN 978-5-7731-0988-4

В адаптированном к восприятию студента учебном пособии изложены ключевые разделы теории электрических цепей, имеющие отношение к частотным характеристикам сигналов и линейных цепей.

Издание предназначено для студентов второго курса специальности «Радиоэлектронные системы и комплексы».

Ил. 85. Табл. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 621.37
ББК 32.841

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ISBN 978-5-7731-0988-4

© Останков А. В., 2021
© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2021

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии изложены ключевые разделы теории электрических цепей, имеющие отношение к частотным характеристикам сигналов и линейных цепей.

В первой главе введены понятия комплексной частотной, амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик цепи. Подробно изложена методика расчёта частотных характеристик, которая проиллюстрирована на примерах RC-цепей разной степени сложности. Рассмотрены логарифмические частотные характеристики цепи. Введены показатели, характеризующие частотную избирательность цепи, понятия о фильтрах с разными типами избирательности.

Во второй главе подробно изложена теория колебательных контуров, как цепей обладающих частотной избирательностью. Получены частотные характеристики последовательного и параллельного контуров, введено понятие и исследованы возможные типы резонансов в колебательных контурах. Изучено влияние на избирательные свойства контуров неидеальности источников электрической энергии и нагрузки, подключаемой к контурам.

В третьей главе сформулировано понятие о спектрах периодических и импульсных сигналов, изложен математический аппарат, позволяющий выполнить спектральный анализ и синтез сигналов. Дано понятие и изложены критерии оценки практической ширины спектра сигналов. Приведены примеры расчёта и анализа спектров типовых сигналов: периодической последовательности прямоугольных импульсов, одиночного прямоугольного импульса, дельта-импульса. Сформулированы теоремы о спектрах, как инструмент для прогнозирования частотных характеристик сигналов, подвергаемых типовым преобразованиям.

В четвертой главе введён частотный метод анализа линейных цепей, использование которого проиллюстрировано на

примере расчёта откликов простейших RC-цепей на прямоугольный импульс. Введены понятия и изучены частотные характеристики неискажающей, дифференцирующей, интегрирующей цепей, идеального фильтра нижних частот. Установлена связь между частотными и временными характеристиками цепей, частотным и временным методами анализа.

Пособие может быть использовано для закрепления материала, изложенного на лекциях, для подготовки к практическим и лабораторным занятиям по дисциплинам «Основы теории цепей» и «Теория электрических цепей», читаемым студентам, обучающимся на радиотехнических, радиоэлектронных и связных направлениях.

1. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ

1.1. Комплексная частотная, амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики цепи

Введём характеристики, описывающие частотные свойства линейных электрических цепей.

Представим линейную цепь в виде четырёхполюсника (рис. 1.1, *а*) либо двухполюсника (рис. 1.1, *б*). Зажимы 1-1' на рис. 1.1, предназначенные для подключения источника колебаний, назовём **входом** цепи, а зажимы 2-2' – **выходом** (к ним, как правило, подключают нагрузку). Внутри четырёхполюсник (двухполюсник) представляет собой некое соединение конечного числа линейных элементов R, L и C .

В качестве воздействующего на цепь колебания (или просто **воздействия**) примем сигнал $s_1(t)$, а в качестве **отклика** – колебание $s_2(t)$. В четырёхполюснике могут иметь место разные сочетания колебаний s_1 и s_2 :

- $s_1(t)$ – напряжение, $s_2(t)$ – ток;
- $s_1(t), s_2(t)$ – напряжения (рис. 1.1, *а*);
- $s_1(t), s_2(t)$ – токи;
- $s_1(t)$ – ток, $s_2(t)$ – напряжение.

В двухполюснике возможны лишь два варианта:

- $s_1(t)$ – напряжение, $s_2(t)$ – ток (рис. 1.1, *б*);
- $s_1(t)$ – ток, $s_2(t)$ – напряжение.

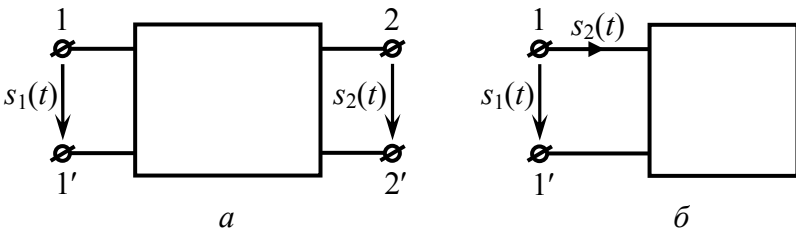


Рис. 1.1

Рассмотрим случай, когда на вход цепи (рис. 1.1, а) воздействует гармоническое колебание:

$$s_1(t) = A_{m1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_1). \quad (1.1)$$

Так как при прохождении через линейные электрические цепи гармоническое колебание не изменяет ни форму, ни частоту, то на выходе цепи появится гармоническое колебание вида

$$s_2(t) = A_{m2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_2), \quad (1.2)$$

амплитуда A_{m2} и начальная фаза ψ_2 которого могут существенно отличаться от амплитуды A_{m1} и начальной фазы ψ_1 входного колебания. Следовательно, количественные изменения гармонического колебания при его прохождении через цепь можно оценить по степени изменения амплитуды и начальной фазы отклика относительно воздействия. Информация об амплитуде и начальной фазе гармонического колебания, как известно, заложена в его комплексной амплитуде, из чего следует, что оценка изменений колебания может быть сведена к сравнению комплексных амплитуд отклика и воздействия:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{m2} &= A_{m2} \cdot e^{j\psi_2}, \\ \dot{A}_{m1} &= A_{m1} \cdot e^{j\psi_1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Назовём **комплексной частотной характеристикой (КЧХ)** цепи зависимость от частоты отношения комплексной амплитуды отклика цепи к комплексной амплитуде гармонического воздействия в установившемся режиме (по окончании переходных процессов в цепи):

$$\dot{H} = \frac{\dot{A}_{m2}}{A_{m1}}. \quad (1.4)$$

Частотная зависимость комплексной амплитуды отклика \dot{A}_{m2} связана с наличием в цепи реактивных элементов. С учётом зависимости от частоты величины комплексной частотной ха-

рактические характеристики она может быть обозначена одним из показанных ниже способов:

$$\dot{H} = \dot{H}(\omega) = H(j\omega).$$

Часто в обозначении комплексной частотной характеристики указываются индексы входных и выходных зажимов цепи, причём сначала – индекс выходных зажимов, а затем индекс входных. Так характеристика, обозначенная как \dot{H}_{21} , представляет собой КЧХ четырёхполюсника, у которого входными жимами являются выводы 1-1', а выходными – зажимы 2-2'. Если же комплексная частотная характеристика указана в виде \dot{H}_{11} , то это означает, что и отклик, и воздействие относятся к жимам 1-1'. Если в условии задачи чётко оговорены входные и выходные зажимы, то индексы в обозначении КЧХ могут отсутствовать.

Размерность и смысл КЧХ зависят от размерностей воздействия и отклика. Если воздействие представляет собой напряжение, а отклик – ток, то КЧХ измеряется в единицах проводимости, если же воздействие – ток, а отклик – напряжение, размерность КЧХ – сопротивление, если же и воздействие, и отклик представляют собой напряжение (или ток), то комплексная частотная характеристика безразмерна.

Подставив равенства (1.3), определяющие комплексные амплитуды отклика и воздействия, в выражение (1.4) для комплексной частотной характеристики цепи, можно получить

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{A}_{m2}}{A_{m1}} = \frac{A_{m2} \cdot e^{j\psi_2}}{A_{m1} \cdot e^{j\psi_1}} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} \cdot e^{j(\psi_2 - \psi_1)}. \quad (1.5)$$

Обозначим сочетанием символов $H(\omega)$ модуль комплексной частотной характеристики $|\dot{H}(\omega)|$, а набором символов $\varphi(\omega)$ – аргумент $\arg[\dot{H}(\omega)]$. Тогда модуль и аргумент КЧХ можно математически определить как

$$H(\omega) = \frac{A_{m2}}{A_{m1}}, \quad (1.6)$$

$$\varphi(\omega) = \psi_2 - \psi_1. \quad (1.7)$$

Модуль комплексной частотной характеристики цепи $H(\omega)$ называют **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)** цепи. Аргумент комплексной частотной характеристики $\varphi(\omega)$ есть **фазочастотная характеристика (ФЧХ)** цепи.

Из математического определения частотных характеристик цепи (АЧХ и ФЧХ) следует, что их аналитические выражения (или формулы) для конкретной цепи можно получить, представив найденное аналитическое выражение комплексной частотной характеристики $\dot{H}(\omega)$ в показательной форме комплексного числа.

Физический смысл введённых частотных характеристик цепи (АЧХ и ФЧХ) вытекает из выражений (1.6) и (1.7). Итак, *амплитудно-частотная характеристика цепи представляет собой зависимость от частоты в установившемся режиме отношения амплитуды отклика цепи к амплитуде внешнего гармонического воздействия*. На основании такого физического определения производится, например, экспериментальное измерение АЧХ цепи. *Фазочастотная характеристика определяется сдвигом фаз между откликом цепи и гармоническим воздействием на различных частотах*. ФЧХ также может быть экспериментально измерена в соответствии с её физическим смыслом.

Комплексные частотные характеристики цепи делятся на **входные** и **передаточные**. Различают два вида входных и четыре вида передаточных характеристик. Если внешнее воздействие на цепь представляет собой ток $i_1(t)$, а отклик – напряжение $u_1(t)$ на зажимах 1-1', то комплексная частотная характеристика есть не что иное, как комплексное входное сопротивление цепи относительно зажимов 1-1':

$$\dot{H}_{11}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_{m1}} = \underline{Z}_{11}.$$

Если же внешнее воздействие – напряжение на зажимах 1-1', а отклик – ток $i_1(t)$, то комплексная частотная характеристика имеет смысл комплексной входной проводимости относительно зажимов 1-1':

$$\dot{H}_{11}(\omega) = \frac{\dot{I}_{m1}}{\dot{U}_{m1}} = \underline{Y}_{11}.$$

К передаточным характеристикам цепи относятся:

– **комплексный коэффициент передачи** по напряжению

$$\dot{K}_{21}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}; \quad (1.8)$$

– комплексный коэффициент передачи по току

$$\dot{G}_{21}(\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{I}_{m1}};$$

– комплексное проходное сопротивление

$$\underline{Z}_{21}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_{m1}};$$

– комплексная проходная проводимость

$$\underline{Y}_{21}(\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}.$$

Представленный в настоящем разделе материал позволяет определять комплексные частотные характеристики, АЧХ и ФЧХ линейных цепей.

1.2. Частотные характеристики простейшей RC-цепи со съёмом напряжения с сопротивления

На рис. 1.2, *а* представлена схема RC-цепи, содержащей два элемента – ёмкость C и сопротивление R , соединённые последовательно. Такая схема соответствует, например, упрощённой схеме замещения на нижних частотах входной цепи апериодического усилителя.

Пусть на вход RC-цепи подаётся гармоническое напряжение $u_1(t)$, откликом является также напряжение $u_2(t)$, снимаемое с сопротивления. Так как цепь содержит помимо активного сопротивления R реактивный элемент (ёмкость C), то с изменением частоты входного колебания будет наблюдаться изменение соотношений между амплитудами и начальными фазами воздействия и отклика. Последнее может привести к линейным искажениям проходящего через цепь многочастотного колебания. Оценить такие искажения можно с использованием АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи.

Определим комплексный коэффициент передачи по напряжению цепи, полагая, что входное напряжение обладает комплексной амплитудой \dot{U}_{m1} , выходное – \dot{U}_{m2} . Для этого, прежде всего, составим комплексную схему замещения цепи, заменив все элементы их комплексными сопротивлениями, а все токи и напряжения – их комплексными амплитудами (рис. 1.2, *б*, где $\underline{Z}_C = 1/(j\omega \cdot C)$, $\underline{Z}_R = R$).

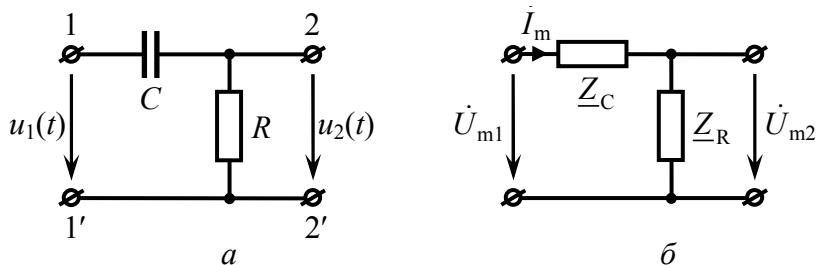


Рис. 1.2

Далее выразим на основе закона Ома в комплексной форме комплексные амплитуды входного и выходного напряжений через комплексную амплитуду тока \dot{I}_m :

$$\begin{aligned}\dot{U}_{m2} &= \dot{I}_m \cdot \underline{Z}_R, \\ \dot{U}_{m1} &= \dot{I}_m \cdot (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C).\end{aligned}$$

Тогда комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению, определяемый по формуле (1.8), будет иметь вид

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}.$$

Заменив в последней формуле обозначения комплексных сопротивлений соответствующими выражениями, получим

$$\dot{K}(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega \cdot C}} = \frac{j\omega \cdot RC}{1 + j\omega \cdot RC}. \quad (1.9)$$

Чтобы определить аналитические выражения АЧХ и ФЧХ цепи, необходимо представить комплексный коэффициент передачи в показательной форме, для чего числитель и знаменатель комплексной дроби (1.9) следует перевести из алгебраической формы записи в показательную форму:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\omega \cdot RC \cdot e^{j\pi/2}}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2} \cdot e^{j\arctg(\omega \cdot RC)}} = \frac{\omega \cdot RC}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}} \cdot e^{j[\pi/2 - \arctg(\omega \cdot RC)]}.$$

Аналитическое выражение АЧХ цепи определяется модулем комплексного коэффициента передачи:

$$K(\omega) = \frac{\omega \cdot RC}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}}, \quad (1.10)$$

а ФЧХ – аргументом комплексного коэффициента передачи:

$$\varphi(\omega) = \pi/2 - \text{arctg}(\omega \cdot RC). \quad (1.11)$$

Для построения графика АЧХ цепи по аналитическому выражению достаточно выполнить несколько стандартных операций:

1) указать диапазон значений частоты ω (область определения функции $K(\omega)$); частота, как правило, изменяется в пределах от нуля до бесконечности;

2) рассчитать значения АЧХ на границах области определения; из выражения АЧХ (1.10) видно, что на нулевой частоте $K(0)=0$; для расчёта $K(\omega)$ при $\omega=\infty$ необходимо найти предел:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega \cdot RC}{\sqrt{1+(\omega \cdot RC)^2}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+[1/(\omega \cdot RC)]^2}} = 1;$$

3) отыскать экстремумы функции $K(\omega)$; как известно, точки экстремумов функции можно определить, взяв производную от функции и приравняв её нулю; в данном случае производная $K(\omega)$

$$\frac{dK(\omega)}{d\omega} = \frac{RC}{\sqrt{1+(\omega \cdot RC)^2}} \cdot \left(1 - \frac{(\omega \cdot RC)^2}{1+(\omega \cdot RC)^2} \right)$$

обращается в нуль лишь при $\omega \rightarrow \infty$;

4) определить приближённое поведение функции $K(\omega)$ на разных интервалах частоты; для этого следует условно разбить частотный диапазон на три области: область I, в которой $\omega \cdot RC \ll 1$, область II – $\omega \cdot RC \approx 1$ и область III – $\omega \cdot RC \gg 1$; тогда применительно к области I в знаменателе $K(\omega)$ можно пренебречь слагаемым $(\omega \cdot RC)^2$ под корнем и получить приближённое выражение

$$K(\omega) \approx \omega \cdot RC,$$

которое указывает на линейность функции $K(\omega)$ в этой области (тангенс угла наклона такой прямой к оси абсцисс определяется RC); в области III разумно пренебречь единицей под корнем знаменателя, тогда $K(\omega) \approx 1$; в области II имеет место сопряжение кривых первой и третьей областей.

На основании информации, полученной о поведении АЧХ RC-цепи со съёмом напряжения с сопротивления, на рис. 1.3, *а* получен её график. График ФЧХ (рис. 1.3, *б*) построить не представляет особого труда, поскольку его форма определяется стандартной функцией $y = \arctg(x)$.

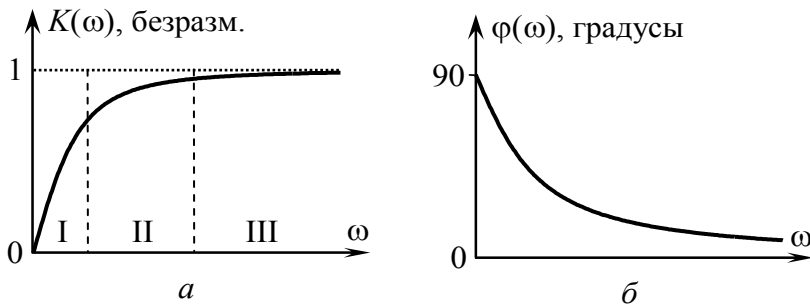


Рис. 1.3

Полученные кривые несложно проверить, рассуждая логически, по крайней мере, в окрестности двух точек – нулевой и бесконечно большой частоты. Если частота действующего на входе напряжения мала, то реактивное сопротивление ёмкости, имеющейся в цепи, велико, так что ёмкость можно заменить разрывом цепи (рис. 1.4, *а*). Очевидно, что ток в цепи при этом будет равен нулю и напряжение, снимаемое с сопротивления, также будет нулевым. Последнее означает, что в окрестности нулевой частоты АЧХ цепи должна быть равна нулю. Если частота по-прежнему мала, но отлична от нуля, в цепи протекает ток малой величины. Его начальная фаза в силу малости сопротивления R по сравнению с сопротивлением ёмкости отличается от фазы входного напряжения практически

точно на 90° , следовательно, сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями (ФЧХ) составляет 90° . Если частота входного колебания велика, сопротивление ёмкости мало: ёмкость можно заменить коротким замыканием (рис. 1.4, б). Напряжение на выходе при этом совпадает по амплитуде и фазе со входным: АЧХ равна единице, ФЧХ – нулю.

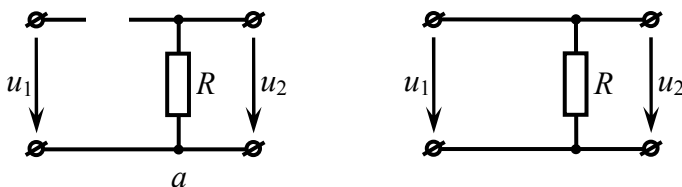


Рис. 1.4

Из графика АЧХ RC-цепи (рис. 1.3, а) видно, что на больших частотах амплитуды входного и выходного напряжений практически одинаковы, сдвиг фаз между этими напряжениями близок к нулю. RC-цепь пропускает колебания больших частот практически «один к одному». В области малых частот, близких к нулевой частоте, амплитуда выходного колебания практически равна нулю. Цепь ослабляет (подавляет, задерживает) колебания малых частот. Разный характер поведения частотных характеристик цепи говорит о том, что прохождение через цепь колебания, содержащего в своём составе как малые, так и большие частоты, будет сопровождаться искажениями.

Частотная избирательность рассмотренной RC-цепи должна учитываться при проектировании цепей, имеющих похожую схему замещения, например аperiodического усилителя. Пусть, например, по техническому заданию требуется, чтобы АЧХ усилителя в области рабочих частот превышала значение 0,9, а расчёты показывают, что при минимальной частоте усиливаемого колебания значение АЧХ меньше этого уровня. Чтобы обеспечить выполнение технического задания следует увеличить значение $R \cdot C$, например, за счёт ёмкости C ;

при этом уровень АЧХ на заданной частоте согласно формуле (1.10) должен возрасти.

1.3. Частотные характеристики простейшей RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости

В радиоэлектронных устройствах очень часто используется цепь, схема которой представлена на рис. 1.5, а. Она представляет собой RC-цепь, выходное напряжение у которой снимается с ёмкости. Такая цепь относится к *фильтрам нижних частот* (ФНЧ).

Найдём АЧХ и ФЧХ рассматриваемого фильтра нижних частот. Для этого определим комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению $\dot{K}(\omega)$. Сначала составим комплексную схему замещения исследуемой цепи (рис. 1.5, б), заменив все её элементы комплексными сопротивлениями ($R \rightarrow \underline{Z}_1 = R$, $C \rightarrow \underline{Z}_2 = 1/(j\omega \cdot C)$), а напряжения и ток – комплексными амплитудами ($u_{1,2}(t) \rightarrow \dot{U}_{m1,2}$, $i(t) \rightarrow \dot{I}_m$).

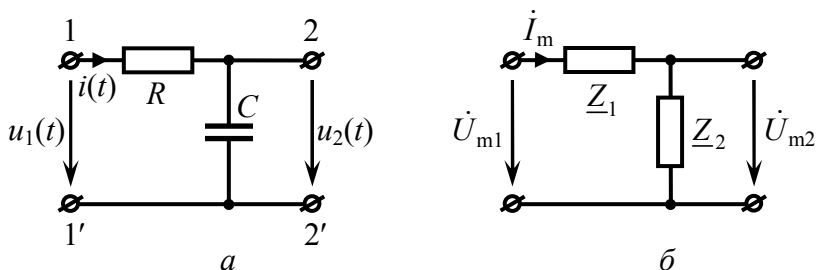


Рис. 1.5

Схему на рис. 1.5, б можно отнести к *делителю напряжения*. В делителе напряжения выходное напряжение составляет такую же часть от входного, что и сопротивление, с которого снимается выходное напряжение, от полного сопротивления делителя. Для делителя напряжения на рис. 1.5, б справедливо отношение

$$\frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (1.12)$$

Такое выражение несложно получить, если использовать закон Ома в комплексной форме для полной цепи:

$$\dot{U}_{m1} = \dot{I}_m \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2),$$

и участка цепи с сопротивлением \underline{Z}_2 :

$$\dot{U}_{m2} = \dot{I}_m \cdot \underline{Z}_2.$$

Так как в схеме $\underline{Z}_1 = R$, а $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega \cdot C)$, то

$$\frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1/(j\omega \cdot C)}{R + 1/(j\omega \cdot C)} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC},$$

то есть

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}} \cdot e^{-j \arctg(\omega \cdot RC)}. \quad (1.13)$$

Отсюда следует, что выражение для АЧХ и ФЧХ RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости имеют вид

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}}, \quad (1.14)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega \cdot RC). \quad (1.15)$$

Кривые, соответствующие выражениям (1.14) и (1.15), показаны соответственно на рис. 1.6, а и б.

Для построения АЧХ цепи выполним описанные выше стандартные операции; в частности, выясним, что:

1) область значений частоты (область определения АЧХ) находится в пределах от нуля до бесконечности;

2) значение АЧХ на нулевой частоте $K(0)=1$, а на бесконечно большой частоте $K(\omega \rightarrow \infty)=0$;

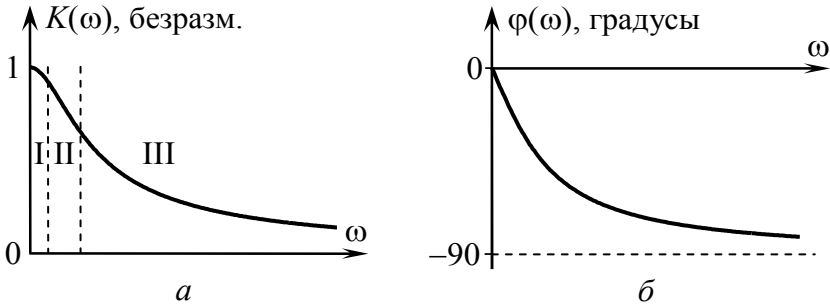


Рис. 1.6

3) АЧХ не имеет экстремумов; максимальное значение АЧХ $K_{\max}(\omega)=1$ приходится на частоту $\omega=0$;

4) в области частот I (рис. 1.6, а), где $\omega \cdot RC \ll 1$, амплитудно-частотная характеристика $K(\omega) \approx 1$, а на частотах, принадлежащих области III ($\omega \cdot RC \gg 1$), $K(\omega) \approx 1/(\omega \cdot RC)$, что соответствует поведению гиперболической функции.

Из графика АЧХ видно, что цепь пропускает практически без изменения колебания, частоты которых приходится на область I, а колебания с частотами, относящимися к области III, – задерживаются (подавляются) цепью, что соответствует понятию фильтра нижних частот.

Проверка полученных формул (1.14) и (1.15) для АЧХ и ФЧХ легко выполняется в окрестности нулевой и бесконечно большой частоты на основе схем замещения, представленных на рис. 1.7.

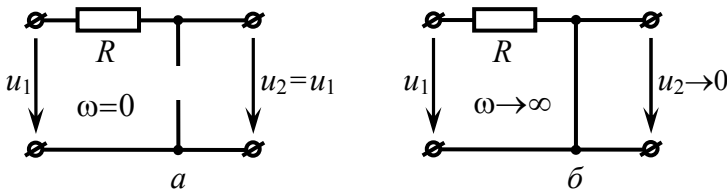


Рис. 1.7

1.4. Частотные характеристики делителя напряжения моста Вина

Цепь, схема которой показана на рис. 1.8, *а*, часто называют делителем напряжения моста Вина и используют в качестве частотно-избирательной нагрузки в RC-автогенераторах гармонических колебаний [1]. Исследуем частотные характеристики такой цепи.

После составления комплексной схемы замещения цепи (заменой $R \rightarrow \underline{Z}_R$, $C \rightarrow \underline{Z}_C$, $u(t) \rightarrow \dot{U}_m$, рис. 1.8, *б*), её можно свести к рассмотренной выше схеме делителя напряжения (рис. 1.5, *б*), если положить

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_C \cdot \underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{R}{j\omega \cdot C \cdot [R + 1/(j\omega \cdot C)]} = \frac{R}{1 + j\omega \cdot RC}, \quad (1.16)$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_C + \underline{Z}_R = R + 1/(j\omega \cdot C). \quad (1.17)$$

Подставляя в (1.12) равенства (1.16) и (1.17), получим

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= \frac{R}{1 + j\omega \cdot RC} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega \cdot C} + \frac{R}{1 + j\omega \cdot RC}} = \frac{R}{(1 + j\omega \cdot RC) \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega \cdot C} + \frac{R}{1 + j\omega \cdot RC} \right)} = \\ &= \frac{R}{3R + j\omega \cdot R^2 C + 1/(j\omega \cdot C)} = \frac{1}{3 + j[\omega \cdot RC - 1/(\omega \cdot RC)]}. \end{aligned}$$

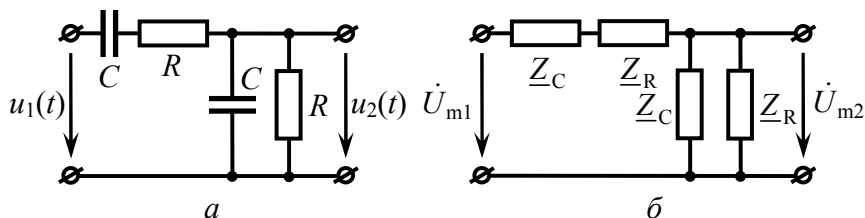


Рис. 1.8

Представляем комплексный коэффициент передачи в показательной форме комплексного числа:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + [\omega \cdot RC - 1/(\omega \cdot RC)]^2}} \cdot e^{-j \arctg\{[\omega \cdot RC - 1/(\omega \cdot RC)]/3\}}. \quad (1.18)$$

Из (1.18) получаем аналитическое выражение АЧХ

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + [\omega \cdot RC - 1/(\omega \cdot RC)]^2}} \quad (1.19)$$

и ФЧХ делителя напряжения моста Вина

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left[\frac{1}{3} \cdot \left(\omega \cdot RC - \frac{1}{\omega \cdot RC}\right)\right]. \quad (1.20)$$

Кривые, построенные по выражениям (1.19) и (1.20), показаны на рис. 1.9.

Сначала проанализируем по формуле (1.19) поведение АЧХ (рис. 1.9, а):

1) значения частотной функции $K(\omega)$ на нулевой и бесконечно большой частоте равны нулю;

2) максимум АЧХ, очевидно, приходится на такую частоту ω_0 , при которой второе слагаемое под корнем в знаменателе (1.19) будет равно нулю: $\omega_0 \cdot RC - 1/(\omega_0 \cdot RC) = 0$;

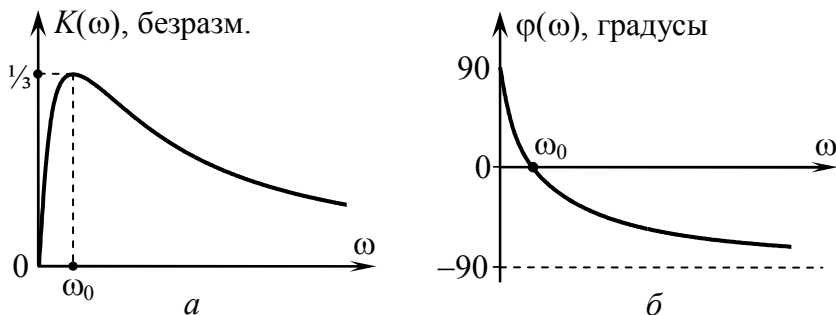


Рис. 1.9

из последнего равенства получим, что максимум АЧХ приходится на частоту

$$\omega_0 = 1/(RC), \quad (1.21)$$

причём значение АЧХ на этой частоте равно $\frac{1}{3}$;

4) если частота колебания ω меньше характерной частоты ω_0 , т. е. выполняется неравенство $\omega \cdot RC \ll 1$, то выражение для АЧХ принимает вид

$$K(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{9 + [1/(\omega \cdot RC)]^2}} \approx \frac{\omega \cdot RC}{\sqrt{1 + 9 \cdot (\omega \cdot RC)^2}},$$

аналогичный АЧХ простейшей RC-цепи со съёмом напряжения с сопротивления (см. выражение (1.10) и рис. 1.3, а);

5) если частота колебания ω больше частоты ω_0 так, что $\omega \cdot RC \gg 1$, то АЧХ приближённо описывается формулой

$$K(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{9 + (\omega \cdot RC)^2}},$$

характерной для RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости (см. (1.14)), АЧХ которой показана на рис. 1.6, а.

Из кривой АЧХ видно, что делитель напряжения моста Вина пропускает колебания с частотами, близкими к частоте ω_0 , и ослабляет колебания с частотами, меньшими и большими частоты ω_0 .

Анализ ФЧХ приводит к кривой, показанной на рис. 1.9, б. Для малых и больших частот также наблюдается соответствие с характеристиками рассмотренных ранее RC-цепей. Кроме того, из ФЧХ видно, что на частоте ω_0 сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями равен нулю.

Итак, делитель напряжения моста Вина на малых частотах (по сравнению с частотой ω_0) работает подобно RC-цепи, показанной на рис. 1.2, а, на больших частотах – аналогично RC-цепи, представленной на рис. 1.5, а.

1.5. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности АЧХ цепи

Ниже будет изложен строгий вывод условия неискаженного прохождения многочастотного колебания через линейную цепь. Забегая вперёд, укажем, что колебание, проходящее через цепь, не будет искажаться, если АЧХ цепи является равномерной в пределах частот такого колебания.

Положим, что напряжение $u(t)$, представляющее собой сумму двух гармонических колебаний (рис. 1.10)

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_{m1} \cdot \cos(\omega \cdot t - 90^\circ) + \frac{1}{3} \cdot U_{m1} \cdot \cos(3\omega \cdot t - 90^\circ)$$

подаётся на вход цепи, АЧХ которой представлена на рис. 1.11. Пусть ФЧХ такой цепи условно равна нулю.

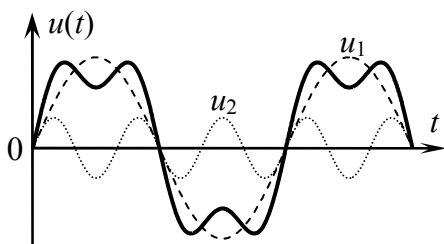


Рис. 1.10

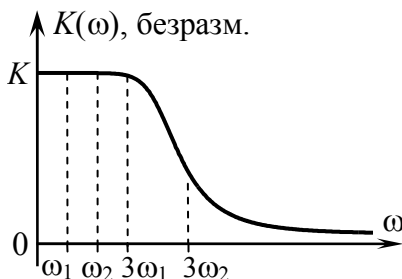


Рис. 1.11

Покажем, как цепь с такой АЧХ будет влиять на прохождение колебания $u(t)$ при различных значениях частоты ω входящих в него гармонических напряжений. Сначала рассмотрим вариант, когда частота $\omega = \omega_1$ (рис. 1.11). В этом случае колебания с обеими частотами ω_1 и $3\omega_1$ попадают в область частот, где АЧХ цепи является практически постоянной. Амплитуды обоих колебаний изменяются в одно и то же число раз. Это позволяет сделать вывод о том, что отклик на выходе по форме будет совпадать с входным колебанием (искажения

в цепи практически отсутствуют). Если же частота $\omega = \omega_2$, то колебание с частотой 3ω на выходе цепи будет существенно ослаблено, так как $K(3\omega_2) \approx 0.4 \cdot K$ и, следовательно, сигнал на выходе цепи будет отличаться по форме от входного (рис. 1.12), т.е. цепь в этом случае заметно искажает сигнал. Очевидно, что можно указать область частот, занимая которую многочастотное колебание будет претерпевать незначительные (допустимые на практике) искажения при прохождении через цепь. Эта область частот соответствует так называемой **полосе пропускания** цепи [2].

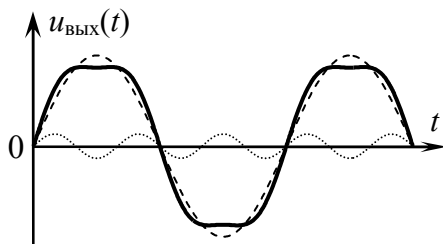


Рис. 1.12

В радио- и технике связи полосой пропускания цепи принято называть область частот, в пределах которой АЧХ цепи уменьшается не более чем $\sqrt{2}$ раз по сравнению с её максимальным значением. Полосу пропускания цепи будем обозначать русской буквой Π_ω (либо Π_f), индекс которой указывает на вид используемой частоты и соответственно единицу измерения (рад/с либо Гц).

На рис. 1.13 показан пример определения полосы пропускания по АЧХ фильтра нижних частот. Так как максимальное значение АЧХ равно K_{\max} , то уровень, в $\sqrt{2}$ раз меньший, чем K_{\max} , будет равен $K_{\max}/\sqrt{2} \approx 0.707 \cdot K_{\max}$. Область частот, на которых значения АЧХ превосходят указанный уровень, и является полосой пропускания Π_ω . Из рис. 1.13 видно, что полоса пропускания фильтра нижних частот снизу ограничена ну-

левой частотой, а сверху – некоторой не равной нулю и называемой верхней **граничной частотой полосы пропускания** (верхней частотой среза АЧХ) цепи (обозначена как $\omega_{гр}$).

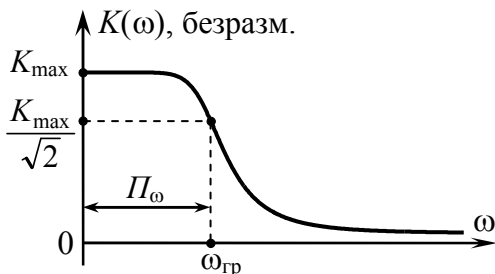


Рис. 1.13

Если имеется аналитическое выражение (формула) для АЧХ цепи, то полосу пропускания можно определить аналитически. Найдём выражение для полосы пропускания RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости (рис. 1.5, *a*). Поскольку такая цепь, как было ранее замечено, относится к классу фильтров нижних частот, нижней границей её полосы пропускания является нулевая частота (рис. 1.14, *a*). Тогда расчёт полосы пропускания сводится к определению верхней граничной частоты. Если в (1.14) положить $\omega = \omega_{гр}$, то соответствующее значение АЧХ должно составлять $1/\sqrt{2}$:

$$K(\omega_{гр}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{гр} \cdot RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.22)$$

Из (1.22) легко получить, что

$$\omega_{гр} = 1/(RC). \quad (1.23)$$

Если рассмотреть RC-цепь со съёмом напряжения с сопротивления (см. рис. 1.2, *a*) с целью определения полосы пропускания, то следует сразу заметить, что такая цепь характеризуется

неограниченной в области верхних частот АЧХ (рис. 1.14, б). Полоса пропускания такой цепи бесконечно велика. Однако её нижняя граничная частота отлична от нуля, и для оценки частотной избирательности цепи необходим её расчёт. Если в (1.10) частоту положить равной $\omega_{гр}$, то соответствующее значение АЧХ должно составлять $1/\sqrt{2}$:

$$K(\omega_{гр}) = \frac{\omega_{гр} \cdot RC}{\sqrt{1 + (\omega_{гр} \cdot RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (1.24)$$

откуда следует, что

$$\omega_{гр} = 1/(RC). \quad (1.25)$$

Итак, нижняя граничная частота полосы пропускания RC-цепи со съёмом напряжения с сопротивления совпадает по величине с верхней граничной частотой полосы RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости при одних и тех же значениях сопротивления и ёмкости.

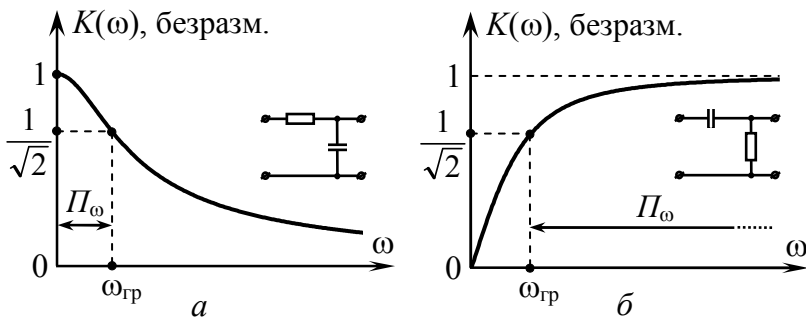


Рис. 1.14

Если максимальное значение АЧХ цепи фиксируется не на нулевой и не на бесконечно большой частоте, то у полосы пропускания цепи возможно наличие обеих границ – нижней и верхней. Тогда полоса пропускания цепи определяется как разница между верхней и нижней граничными частотами:

$$P_{\omega} = \omega_{гр2} - \omega_{гр1}. \quad (1.26)$$

Примером такой цепи может служить делитель напряжения моста Вина. Из рис. 1.15 видно, что его АЧХ обладает двумя граничными частотами $\omega_{гр1}$ и $\omega_{гр2}$, соответствующими абсциссам точек пересечения кривой АЧХ и уровня, определяемого как $K_{\max}/\sqrt{2} = 1/(3 \cdot \sqrt{2})$. Определим эти частоты, располагая выражением АЧХ делителя напряжения моста Вина. Если в выражение (1.19) вместо текущей частоты ω подставить граничные частоты $\omega_{гр1,2}$, несложно получить равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{9 + [\omega_{гр1,2} \cdot RC - 1/(\omega_{гр1,2} \cdot RC)]^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}}. \quad (1.27)$$

Возведя в квадрат правую и левую части равенства (1.27) и приравняв знаменатели дробей, придём к условию:

$$\omega_{гр1,2} \cdot RC - 1/(\omega_{гр1,2} \cdot RC) = \pm 3. \quad (1.28)$$

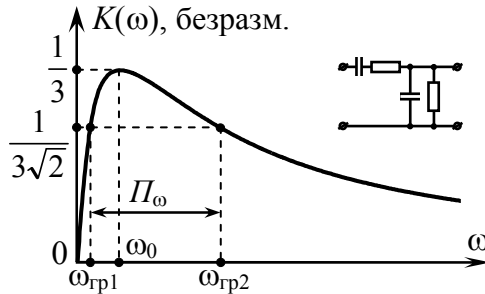


Рис. 1.15

При положительной правой части равенство (1.28) даёт квадратное уравнение вида

$$(RC)^2 \cdot \omega_{гр2}^2 - 3 \cdot RC \cdot \omega_{гр2} - 1 = 0,$$

решая которое, находим верхнюю граничную частоту:

$$\omega_{\text{гр}2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2 \cdot RC} \approx \frac{3.31}{RC}. \quad (1.29)$$

Второй корень квадратного уравнения следует отбросить, поскольку он даёт отрицательное значение частоты. При отрицательной правой части равенства (1.28) формируется другое квадратное уравнение:

$$(RC)^2 \cdot \omega_{\text{гр}1}^2 + 3 \cdot RC \cdot \omega_{\text{гр}1} - 1 = 0,$$

приводящее к выражению для частоты нижней границы полосы пропускания. Она будет равна

$$\omega_{\text{гр}1} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2 \cdot RC} \approx \frac{0.31}{RC}. \quad (1.30)$$

Второй корень последнего уравнения также приводит к отрицательному значению частоты и отбрасывается.

Исходя из (1.26), с учётом (1.29) и (1.30), получим, что полоса пропускания делителя напряжения моста Вина

$$P_{\omega} = 3/(RC). \quad (1.31)$$

Величина уровня – $1/\sqrt{2} \approx 0.707$, по которому определяется полоса пропускания цепи, принята исходя из практических соображений. Однако, очевидно, что подобные требования к АЧХ цепи весьма условны. Так, в радиолокации, где требования к сохранению формы импульса существенно ослаблены по сравнению со связными системами, часто принимают, что АЧХ в полосе пропускания уменьшается не более чем в 2 (!) раза. Далее будет использоваться определение полосы пропускания цепи, при котором уровень минимальных значений АЧХ цепи в пределах полосы пропускания составляет $0.707 \cdot K_{\text{max}}$, т.е. полоса пропускания всегда будет определяться по уровню 0.707 от максимального значения.

Полоса пропускания цепи не является единственной величиной, характеризующей частотную избирательность цепей.

О необходимости использования дополнительных показателей свидетельствует рис. 1.16, на котором приведены кривые АЧХ цепей, имеющих одинаковую полосу пропускания, но обладающих различной частотной избирательностью. Очевидно, лучшей избирательностью обладает цепь с АЧХ прямоугольной формы (кривая I), а худшей избирательностью – цепь, АЧХ которой имеет наиболее пологие скаты (кривая III).

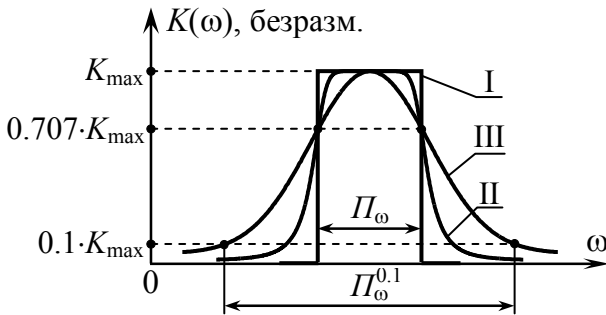


Рис. 1.16

Для количественной оценки частотной избирательности цепи часто используется **коэффициент прямоугольности АЧХ**. Коэффициентом прямоугольности АЧХ цепи (k_{Π}) называют число, равное отношению полосы пропускания, определяемой по уровню 0.707 от максимального значения АЧХ, к полосе пропускания по уровню $0.1 \cdot K_{\max}$:

$$k_{\Pi} = \Pi_{\omega} / \Pi_{\omega}^{0.1} \quad (1.32)$$

Из рис. 1.16, в частности, следует, что коэффициент прямоугольности АЧХ идеальной по избирательности цепи (кривая I) равен единице.

Очевидно, что для обеспечения наилучшей избирательности необходимо реализовать цепь, АЧХ которой была бы как можно ближе по форме к прямоугольной. Однако следует понимать, что подобное требование может привести к излишнему усложнению схемы цепи.

Определим коэффициент прямоугольности АЧХ делителя напряжения моста Вина (рис. 1.15). Ранее было получено выражение (1.31), которое определяло полосу пропускания цепи по уровню $0.707 \cdot K_{\max}$. Определим теперь полосу пропускания $P_{\omega}^{0.1}$ по уровню $0.1 \cdot K_{\max}$. Для этого найдем граничные частоты $\omega'_{гр1,2}$, на которых АЧХ, описываемая выражением (1.19), принимает значения $0.1 \cdot \frac{1}{3} = 1/30$:

$$\frac{1}{\sqrt{9 + [\omega'_{гр1,2} \cdot RC - 1/(\omega'_{гр1,2} \cdot RC)]^2}} = \frac{1}{30}. \quad (1.33)$$

Возведя в квадрат правую и левую части равенства (1.33) и приравнявая знаменатели дробей, получим

$$\omega'_{гр1,2} \cdot RC - 1/(\omega'_{гр1,2} \cdot RC) = \pm \sqrt{891},$$

откуда найдём

$$\omega'_{гр1,2} \frac{\sqrt{895} \pm \sqrt{891}}{2 \cdot RC} \approx \frac{15.0 \pm 14.9}{RC}. \quad (1.34)$$

Тогда из (1.34) легко получить

$$P_{\omega}^{0.1} \approx 30/(RC). \quad (1.35)$$

Итак, коэффициент прямоугольности АЧХ делителя напряжения моста Вина, у которого $P_{\omega} \approx 3/RC$, а $P_{\omega}^{0.1} \approx 30/(RC)$, равен $k_{\Pi} = 0.1$. Понятно, что коэффициент прямоугольности АЧХ такой цепи достаточно далёк от предельного значения.

1.6. Расчёт частотных характеристик цепей лестничного типа

Расчёт частотных характеристик рассмотренных ранее цепей производился достаточно просто, так как их схемы можно было свести к схеме делителя напряжения. Рассмотрим

цепь, ток на выходе которой не совпадает по величине с током на входе, а составляет лишь его некоторую часть, что в принципе нехарактерно для делителя напряжения. Цепь, в которой наблюдается одно- или многократное деление тока, можно условно отнести к классу *лестничных* цепей. Так, на рис. 1.17 показана схема, полученная из двух одинаковых RC-цепей непосредственным (цепочечным) соединением выходных зажимов первой со входными зажимами второй. Изложим методику определения комплексной частотной характеристики такой цепи и, соответственно, АЧХ и ФЧХ.

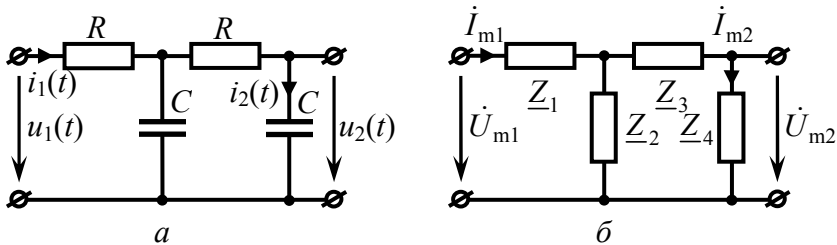


Рис. 1.17

Из комплексной схемы замещения цепи, приведённой на рис. 1.17, б, видно, что комплексные амплитуды выходного \dot{U}_{m2} и входного \dot{U}_{m1} напряжений определяются комплексными амплитудами разных токов – \dot{I}_{m2} и \dot{I}_{m1} :

$$\dot{U}_{m2} = \dot{I}_{m2} \cdot \underline{Z}_4,$$

$$\dot{U}_{m1} = \dot{I}_{m1} \cdot \underline{Z}_3,$$

где \underline{Z}_3 – эквивалентное сопротивление цепи со стороны входных зажимов; определяется исходя из следующих эквивалентных преобразований: последовательное соединение сопротивлений \underline{Z}_3 и \underline{Z}_4 заменяется эквивалентным $\underline{Z}_{34} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4$ (рис. 1.18, а), параллельное соединение \underline{Z}_2 и \underline{Z}_{34} в схеме на

рис. 1.18, *a* заменяется эквивалентным сопротивлением $\underline{Z}_{234} = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_{34} / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34})$ так, что схема сводится к последовательному соединению \underline{Z}_1 и \underline{Z}_{234} (рис. 1.18, *б*):

$$\underline{Z}_{\ominus} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{234} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_{34}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}}. \quad (1.36)$$

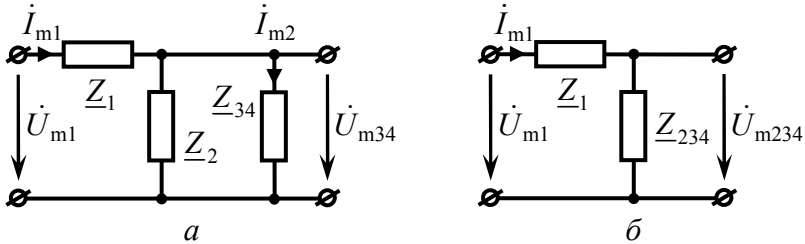


Рис. 1.18

Комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\dot{I}_{m2} \cdot \underline{Z}_4}{\dot{I}_{m1} \cdot \underline{Z}_{\ominus}} \quad (1.37)$$

может быть определён, если найти соотношение между комплексными амплитудами выходного и входного токов $\dot{I}_{m2} / \dot{I}_{m1}$. Если проанализировать схему на рис. 1.18, *a*, полученную из исходной, то её можно рассматривать как *делитель тока*, выходной ток которого \dot{I}_{m2} составляет такую же часть входного \dot{I}_{m1} , что и проводимость ветви, в которой протекает выходной ток, от суммарной проводимости ветвей, участвующих в делении тока. С учётом этого соотношение комплексных амплитуд токов \dot{I}_{m2} и \dot{I}_{m1} может быть определено как

$$\frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{I}_{m1}} = \frac{\underline{Y}_{34}}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_{34}} = \frac{1/\underline{Z}_{34}}{1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_{34}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}}. \quad (1.38)$$

Если в выражение (1.37) для комплексного коэффициента передачи подставить отношение токов (1.38), получим выражение, свободное от токов и напряжений:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}} \cdot \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3}$$

Заменим в последнем выражении эквивалентное сопротивление \underline{Z}_3 в соответствии с формулой (1.36):

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}} \cdot \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_{34}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}}} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}) + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_{34}}$$

Наконец, с учётом $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3 = R$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_4 = 1/(j\omega \cdot C)$ получим

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \frac{1}{j\omega \cdot C}}{R \cdot \left(\frac{2}{j\omega \cdot C} + R \right) + \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega \cdot C} \right)} = \frac{1}{1 - \omega^2 \cdot (RC)^2 + j3\omega \cdot RC}$$

Амплитудно-частотная характеристика цепи

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - \omega^2 \cdot (RC)^2]^2 + (3\omega \cdot RC)^2}} \quad (1.39)$$

показана на рис. 1.19, а, фазочастотная характеристика –

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{3\omega \cdot RC}{1 - \omega^2 \cdot (RC)^2} \quad (1.40)$$

на рис. 1.19, б.

При построении ФЧХ на частотах $\omega > 1/(RC)$ расчётные значения сдвига фаз φ , определяемые по формуле (1.40), следует скорректировать на «минус» 180° , так как знаменатель функции $\operatorname{arctg}(\cdot)$ при $\omega > 1/(RC)$ становится отрицательным.

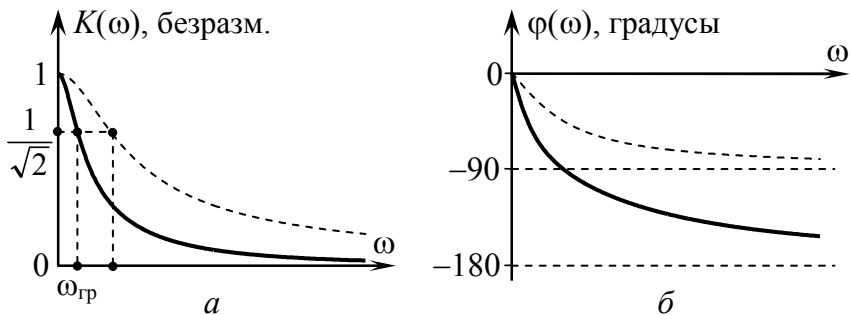


Рис. 1.19

На рис. 1.19 штриховой линией показаны частотные характеристики простейшей RC-цепи (элементарного звена) в составе рассматриваемой лестничной цепи. Видно, что при наличии в цепи двух элементарных звеньев одного вида, частотная избирательность цепи усиливается. Если рассчитать на основе формулы (1.39) полосу пропускания анализируемой двухзвенной RC-цепи, получим уравнение для верхней граничной частоты:

$$\frac{1}{\sqrt{[1-\omega_{\text{гр}}^2 \cdot (RC)^2]^2 + (3\omega_{\text{гр}} \cdot RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

из которого несложно найти единственный вещественный и положительный корень:

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{0.374}{RC}. \quad (1.41)$$

Таким образом, полоса пропускания двухзвенной RC-цепи почти в три раза уже полосы пропускания отдельного звена.

Из рис. 1.19 также следует, что наращивание звеньев в составе лестничной цепи приводит к увеличению разности фаз между выходным и входным сигналами.

1.7. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика цепи

Для удобства совмещения и наблюдения на графике АЧХ быстро нарастающих (например, в области малых частот) и медленно спадающих (в области больших частот) участков используют **логарифмическую АЧХ (ЛАЧХ)**. Логарифмическая АЧХ, таким образом, применяется для наглядности отображения амплитудно-частотной характеристики цепи с относительно большой полосой рабочих частот.

При построении логарифмических частотных характеристик ось частот изображают в логарифмическом масштабе, откладывая значения частот по декадам (реже – по октавам). Заметим, что декада – интервал, соответствующий изменению частоты в 10 раз; октава – в два раза. На рис. 1.20 показано соответствие линейного и логарифмического декадного масштаба оси частот. Обратите внимание, что нулевой частоты на логарифмической оси частот не наблюдается, соответствующая ей точка располагается в «минус» бесконечности.

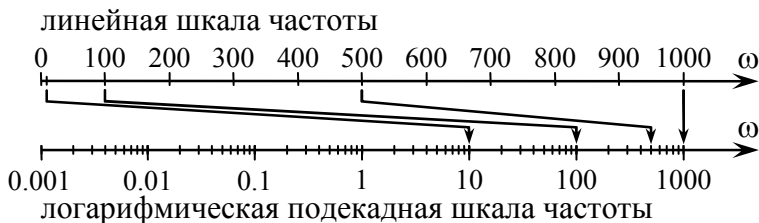


Рис. 1.20

Значения АЧХ откладываются по вертикальной оси в децибелах (дБ). Если на какой-то частоте ω значение АЧХ цепи составляет $K(\omega)$, то это соответствует следующему значению АЧХ в децибелах:

$$K_{\text{дБ}}(\omega) = 20 \cdot \lg[K(\omega)]. \quad (1.42)$$

Значения, рассчитываемые по формуле (1.42), определяют так называемый логарифмический модуль АЧХ (АЧХ в децибелах). Отметим, для АЧХ равной $K(\omega) = 10^N$ логарифмический модуль равен $K_{дБ}(\omega) = 20 \cdot N$. В таблице приведены некоторые значения коэффициента передачи (АЧХ) в децибелах.

Таблица

K , безразм.	0.001	0.01	0.1	0.707	1	$\sqrt{2}$	10	100	1000
K , дБ	-60	-40	-20	-3	0	3	20	40	60

Следует обратить внимание, что при единичном значении АЧХ её значение в децибелах равно нулю. При возрастании АЧХ относительно этого уровня ЛАЧХ принимает положительные значения, а при уменьшении – отрицательные.

Текущие значения ФЧХ, которая сопровождает ЛАЧХ, откладывают по вертикали в абсолютных значениях (градусах или радианах), частоты – подекадно.

На рис. 1.21 приведены АЧХ и ЛАЧХ делителя напряжения моста Вина при $RC = 10^3$ Ом·Ф. Поскольку масштабы по осям ЛАЧХ взяты логарифмическими, форма ЛАЧХ и АЧХ не совпадают: существенно растянут диапазон малых частот и сжат интервал больших частот. Граничные частоты полосы пропускания, как это следует из таблицы, определяются по уровню «минус» 3 дБ от максимального значения ЛАЧХ, дБ.

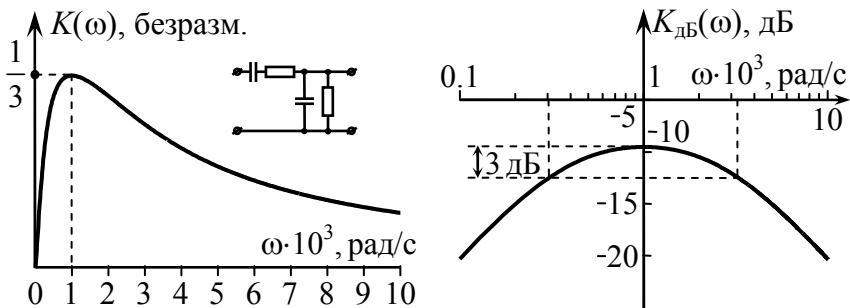


Рис. 1.21

1.8. Понятие о частотных фильтрах

Ранее было установлено, что АЧХ частотно-избирательной цепи не постоянна по частоте. Колебания с частотами из полосы пропускания проходят через цепь практически без изменения, колебания же с другими частотами задерживаются (ослабляются) и имеют на выходе цепи существенно меньшие мгновенные значения. Исходя из этого частотно-избирательные цепи нередко называют **частотными фильтрами** [3].

Фильтры можно классифицировать по относительному расположению на оси частот полос пропускания и задерживания. Напомним, что полосой пропускания цепи называют частотный интервал, в пределах которого АЧХ цепи отличается от максимального значения не более чем в $\sqrt{2}$ раз. Тогда **полоса задерживания** цепи – оставшая часть оси частот, где значения АЧХ меньше 0.707 от максимального значения. Заметим, что часто полосу задерживания определяют по другому уровню, например 0.1 - 0.001 от максимального значения.

На рис. 1.22 приведены разные варианты АЧХ, отличающиеся взаимным расположением полос пропускания (ПП) и задерживания (ПЗ). На рис. 1.22, *а* показана АЧХ **фильтра нижних частот (ФНЧ)**. Такой фильтр пропускает колебания нижних частот и задерживает колебания с верхними частотами. На рис. 1.22, *б* приведена АЧХ цепи, которая, напротив, пропускает колебания из области верхних частот и задерживает нижние частоты. Такой фильтр называют **фильтром верхних частот (ФВЧ)**. Фильтры, АЧХ которых выглядят аналогично кривой, представленной на рис. 1.22, *в*, называются **полосно-пропускающими фильтрами (ППФ)** или полосовыми фильтрами. В таких фильтрах полоса пропускания располагается между двумя граничными частотами конечной величины. Примером полосно-пропускающего фильтра может служить делитель напряжения моста Вина. И, наконец, если полоса задерживания располагается между двумя граничными частота-

ми, то такой фильтр относят к **полосно-заграждающим фильтрам (ПЗФ)** или режекторным фильтрам (рис. 1.22, *з*).

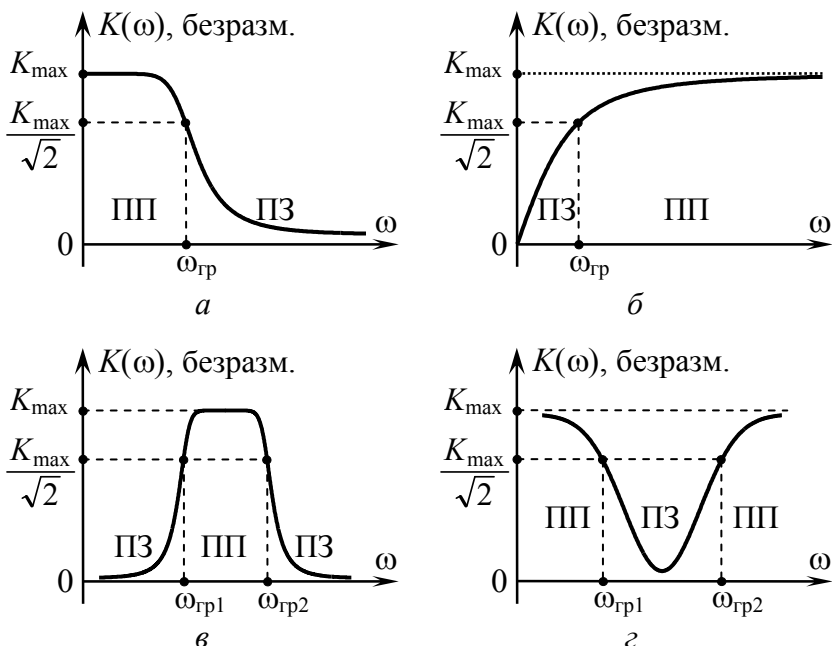


Рис. 1.22

Все разновидности фильтров находят широкое применение в радиоэлектронных цепях, но мы особое внимание уделим полосно-пропускающим фильтрам. Связано это с тем, что посредством ППФ осуществляется частотная избирательность (**селективность**) радиоприёмников. Для уяснения сущности проблемы селективности представим себе, что в антенне приёмника наводится несколько колебаний от разных радиостанций. Каждое из таких колебаний представляет собой либо гармоническое колебание одной частоты ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$), либо совокупность нескольких гармоник различных частот в окрестности $\pm \frac{1}{2} \Delta \omega_k$ частоты ω_k (рис. 1.23, *а*). Чтобы из множества радиостанций приёмник выделил только одну – требуемую

(например, с частотами $\omega_2 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega_2$), необходимо осуществить селекцию колебания этой станции. Сделать это можно, если АЧХ входной цепи приёмного устройства соответствует АЧХ полосно-пропускающего фильтра с полосой пропускания, равной или несколько большей интервала частот, занятого нужной станцией (рис. 1.23, б). Для гармонических колебаний с частотами в пределах полосы пропускания отклик приёмника будет иметь неискажённый вид, а вне этой полосы реакция приёмника практически равна нулю. Если, например, полоса пропускания АЧХ приходится на частоты $\omega_2 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega_2$, то входная цепь приёмника избирает лишь колебание второй станции. Отклик на воздействие всех остальных станций будет отсутствовать, если коэффициент прямоугольности АЧХ полосно-пропускающего фильтра близок к единице, а форма АЧХ – к прямоугольной. Так как в приёмнике должна быть предусмотрена возможность перестройки с одной станции на другую, то необходимо перемещать полосу пропускания входной цепи по частоте, причём перестройка не должна быть сложной.

Реализовать цепи с прямоугольной АЧХ физически не представляется возможным. Однако удаётся в известной степени приблизиться к подобному виду АЧХ, если использовать для этой цели, например, **колебательные системы**.

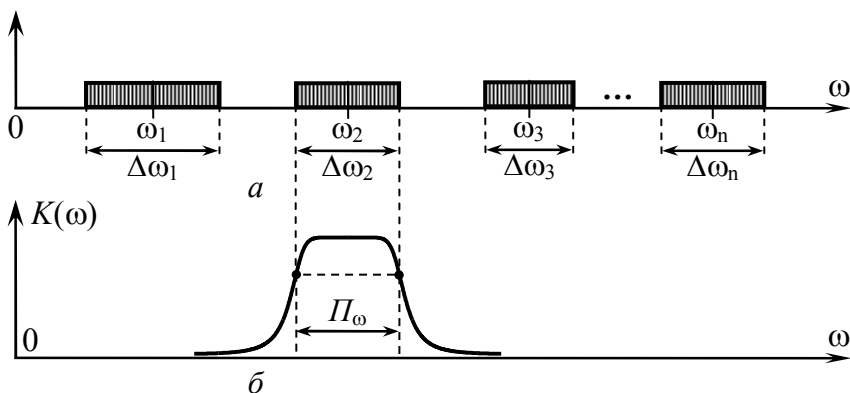


Рис. 1.23

2. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

Простейшей колебательной системой является одиночный контур в виде соединения конденсатора и катушки индуктивности. Колебательный контур имеет неравномерную АЧХ и относится к полосно-пропускающим фильтрам. Подтвердить это можно, используя понятие **резонанса**.

Если в какой-то системе амплитуда вынужденных колебаний существенно возрастает по сравнению с амплитудой приложенных к системе колебаний, то имеет место резонанс. Резонанс проявляется при совпадении частот собственных и вынужденных колебаний в системе. Таким образом, если частота источника совпадает с частотой собственных колебаний, то амплитуда вынужденных колебаний в системе – самая большая. Чем больше частота источника отличается от частоты собственных колебаний, тем меньше амплитуда колебаний. Следовательно, зависимость амплитуды колебаний от частоты аналогична АЧХ полосно-пропускающего фильтра, поэтому в качестве ППФ можно использовать цепь, поддерживающую собственные колебания – колебательный контур.

2.1. Собственные колебания в колебательном контуре

Пусть колебательный контур состоит только из реактивных элементов – индуктивности и ёмкости (рис. 2.1). Элементы, расходующие энергию в контуре, отсутствуют; такой контур называют **идеальным**.

Рассмотрим процессы, протекающие в контуре при подключении к индуктивности L ёмкости C , предварительно заряженной до напряжения U_C с полярностью, показанной на рис. 2.1, *а*. Энергия, запасённая в ёмкости, заряженной до напряжения U_C , равна

$$W_C = C \cdot U_C^2 / 2.$$

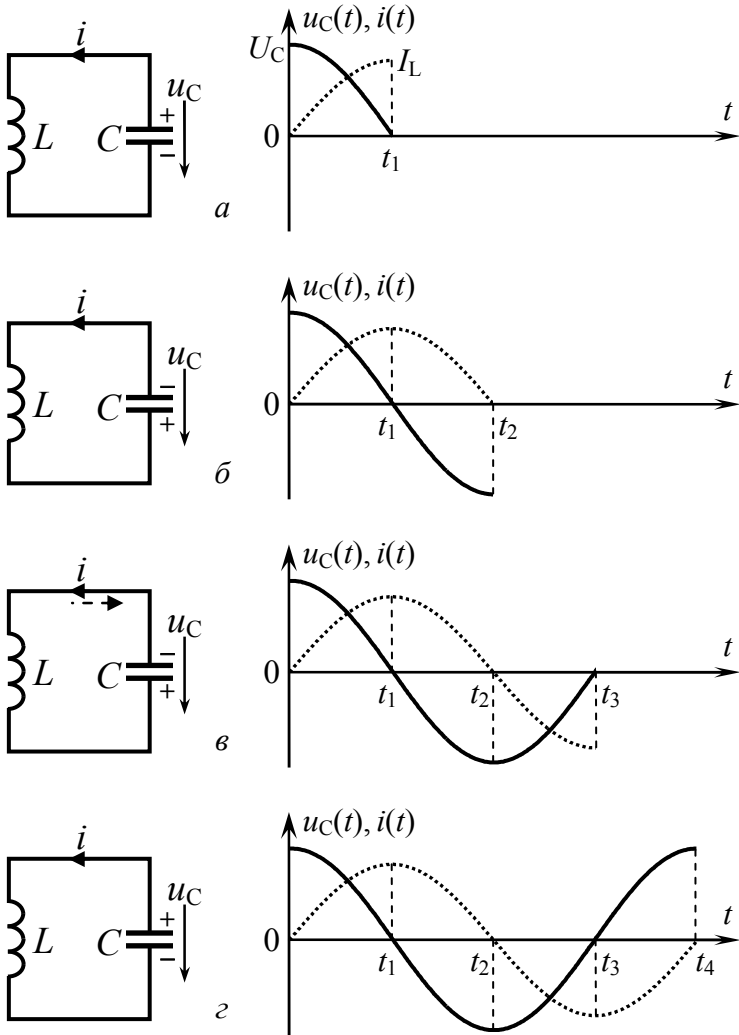


Рис. 2.1

В начальный момент времени (предположим, при $t=0$) начинается разряд ёмкости. Поскольку разряд происходит через индуктивность, ток в цепи не может мгновенно увеличиться до максимума, так как в индуктивности наводится ЭДС са-

моиндукции. Последняя, как известно, препятствует изменению (в данном случае, нарастанию) тока. Однако по мере разряда ёмкости напряжение $u_C(t)$ уменьшается (на диаграмме, см. рис. 2.1 показано сплошной), а ток в цепи $i(t)$ (штрих) постепенно возрастает. Энергия, запасённая ёмкостью, со временем убывает, а энергия, аккумулируемая в магнитном поле индуктивности, растёт. Наблюдается преобразование электрической энергии ёмкости в энергию магнитного поля индуктивности. К моменту времени t_1 (см. рис. 2.1, *a*) ёмкость полностью разряжается и напряжение на ней становится равным нулю. Ток в цепи $i(t)$ достигает наибольшего значения I_L . В этот момент времени в магнитном поле катушки индуктивности запасается максимальная энергия, равная

$$W_L = L \cdot I_L^2 / 2.$$

Несмотря на то, что напряжение на ёмкости в момент t_1 стало равным нулю, ток продолжает течь через цепь. ЭДС самоиндукции теперь препятствует уменьшению тока: направление тока остаётся тем же самым, а его величина с момента t_1 начинает уменьшаться (см. рис. 2.1, *б*). Поскольку ток не изменил своего направления, ёмкость перезаряжается, напряжение на ёмкости увеличивается, но оно уже другой полярности по сравнению с исходной. В результате такого процесса энергия магнитного поля индуктивности уменьшается, наблюдается её преобразование в энергию электрического поля ёмкости.

К моменту времени t_2 энергия, запасённая индуктивностью, становится равной нулю, а энергия электрического поля ёмкости напротив – максимальной. Так как потеря энергии в идеальном контуре нет, то $W_{C\max} = W_{L\max}$. В промежутке времени от t_2 до t_3 (см. рис. 2.1, *в*) вновь наблюдается разряд ёмкости, но направление тока разряда изменяется на противоположное. В остальном процессы изменения тока и напряжения в контуре (см. рис. 2.1, *в* и *г*) не отличаются от описанных выше. К моменту времени t_4 восстанавливается исходное состоя-

ние контура, а затем весь цикл повторяется и продолжается неограниченно долго.

Таким образом, в идеальном контуре можно наблюдать периодические изменения тока и напряжения, называемые **собственными** (или свободными) колебаниями. Эти колебания подчиняются гармоническому закону с некоей частотой $\omega_{\text{св}}$, причём сдвиг фаз между напряжением и током равен 90° . Амплитуда колебаний напряжения равна первоначальному напряжению на ёмкости ($U_m = U_C$), а амплитуда тока $I_m = I_L$.

Зависимость частоты собственных колебаний $\omega_{\text{св}}$ от параметров контура можно определить из условия равенства максимальных энергий магнитного и электрического полей:

$$W_{C_{\text{max}}} = W_{L_{\text{max}}} = C \cdot U_m^2 / 2 = L \cdot I_m^2 / 2. \quad (2.1)$$

Так как мгновенные значения колебаний подчиняются гармоническому закону, то для амплитуд тока и напряжений на ёмкости и на индуктивности справедлив закон Ома:

$$I_m = U_m \cdot \omega_{\text{св}} \cdot C = U_m / (\omega_{\text{св}} \cdot L).$$

Подставив последнее выражение для амплитуды I_m тока в равенство (2.1), получим **формулу Томсона** [2]:

$$\omega_{\text{св}} = 1 / \sqrt{L \cdot C}. \quad (2.2)$$

Из формулы (2.2) следует, что частота собственных колебаний зависит от величины L и C контура, в частности, с увеличением L и C частота собственных колебаний уменьшается. Это согласуется с физикой происходящих в контуре процессов. Действительно, чем больше индуктивность, тем больше возникающая в нем ЭДС самоиндукции и тем сильнее она препятствует изменению тока в цепи, что приводит к увеличению времени разряда ёмкости. С другой стороны, чем больше ёмкость, тем больше времени требуется для её разряда. Итак, *при увеличении L и C контура период свободных колебаний увеличивается, а их частота уменьшается.*

Если в контуре имеется не одна, а несколько индуктивностей и (или) ёмкостей, то для определения частоты собственных колебаний необходимо учитывать эквивалентные индуктивность и ёмкость контура. Например, в схеме на рис. 2.2, *а* эквивалентная ёмкость равна $C_{\text{Э}} = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$. Тогда

$$\omega_{\text{св}} = 1 / \sqrt{L \cdot C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)}.$$

В схеме на рис. 2.2, *б* эквивалентная ёмкость $C_{\text{Э}} = C_1 + C_2$, а эквивалентная индуктивность $L_{\text{Э}} = L_1 + L_2$. В этом случае

$$\omega_{\text{св}} = 1 / \sqrt{(L_1 + L_2) \cdot (C_1 + C_2)}.$$

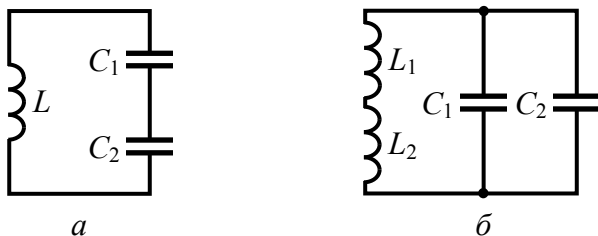


Рис. 2.2

Найдём теперь соотношение ρ между амплитудами напряжения и тока собственных колебаний в контуре. Из выражения (2.1) следует, что

$$\rho = U_m / I_m = \sqrt{L/C}. \quad (2.3)$$

Соотношение ρ имеет размерность сопротивления и называется **характеристическим сопротивлением контура**. Чтобы уяснить физический смысл характеристического сопротивления, сначала разделим равенство (2.3) на (2.2). Получим

$$\rho = \omega_{\text{св}} \cdot L. \quad (2.4)$$

Затем умножим равенства (2.2) и (2.3), откуда имеем

$$\rho = 1 / (\omega_{\text{св}} \cdot C). \quad (2.5)$$

Из формул (2.4) и (2.5) следует, что *характеристическое сопротивление контура* в точности равно реактивному сопротивлению, либо индуктивности, либо ёмкости на частоте собственных колебаний:

$$\rho = X_{L0} = X_{C0}.$$

При расчете характеристического сопротивления необходимо учитывать эквивалентные индуктивность и ёмкость контура.

В реальном контуре индуктивность представлена катушкой, ёмкость – конденсатором; в них часть электромагнитной энергии теряется безвозвратно, переходя в тепло и излучение. Необратимый расход энергии следует учитывать, используя уточнённые схемы замещения конденсаторов и катушек. На рис. 2.3, *а* представлены последовательные схемы замещения конденсатора (C, R_C) и катушки (L, R_L). Поскольку сопротивления R_L и R_C соединены последовательно, то схему замещения реального колебательного контура можно представить в виде, показанном на рис. 2.3, *б*, где сопротивление $R = R_L + R_C$ носит название **сопротивление потерь контура** [3].

Свободные колебания в реальном контуре происходят аналогично колебаниям в идеальном контуре. Принципиальная разница заключается в том, что в процессе колебаний не вся энергия электрического поля преобразуется в энергию магнитного поля и наоборот. Часть энергии необратимо теряется в сопротивлении потерь, поэтому амплитуда свободных колебаний в контуре постепенно уменьшается (рис. 2.4). Убытие амплитуды колебаний происходит по экспоненте.

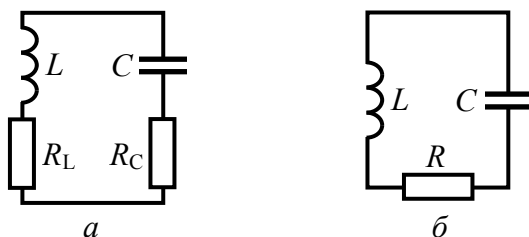


Рис. 2.3

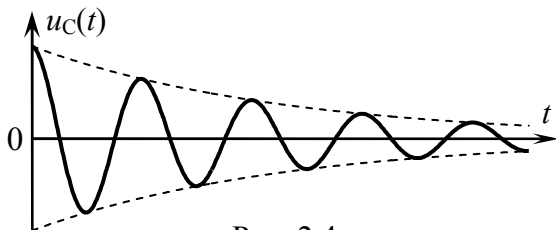


Рис. 2.4

Оценить потери энергии в контуре можно по величине параметра, который называется **добротностью**. Рассмотрим соотношение максимальной энергии, запасаемой в реактивном элементе, к энергии, расходуемой в сопротивлении потерь за половину периода собственных колебаний:

$$\frac{W_{L\max}}{W_R(0, T_{\text{св}}/2)} = \frac{L \cdot I_m^2 / 2}{R \cdot I_m^2 / 2 \cdot T_{\text{св}} / 2} = \frac{L}{R \cdot T_{\text{св}} / 2}.$$

Из последнего выражения с учетом (2.4) получим

$$\frac{W_{L\max}}{W_R(0, T_{\text{св}}/2)} = \pi \cdot \frac{\rho}{R}. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) видно, что количественно отношение энергий (запасаемой и расходуемой) можно оценить величиной

$$Q = \rho / R, \quad (2.7)$$

которая и носит название добротности контура.

2.2. Вынужденные колебания в контуре

Чтобы обеспечить существование в реальном контуре незатухающих колебаний, необходимо периодически вносить в контур определённое количество энергии, которая компенсировала бы потери в его активном сопротивлении. Для этой цели к контуру подключают внешний источник электрической энергии. Источник может быть подключен к контуру разными

способами, например, последовательно с реактивными элементами L и C – такой контур называют **последовательным**. Схема последовательного колебательного контура показана на рис. 2.5. Если же внешний источник подключается параллельно реактивным элементам, то такой контур называют **параллельным**.

Параллельный контур имеет несколько разновидностей. На рис. 2.6 показана схема реального контура, в которой катушки индуктивности и конденсаторы представлены последовательными схемами замещения. Если внешний источник подключается к зажимам 0-1, то эквивалентная схема параллельного контура имеет вид, показанный на рис. 2.7, а. В этой схеме контура эквивалентная индуктивность равна $L = L_1 + L_2$, ёмкость – $C = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$, сопротивления потерь в ветвях – $R_1 = R_{C1} + R_{C2}$, $R_2 = R_{L1} + R_{L2}$. Такой контур называют *параллельным контуром первого вида* или *простым параллельным*. Если же внешний источник энергии подключён к зажимам 0-2, то из обобщённой схемы формируется контур, эквивалентная схема которого показана на рис. 2.7, б.

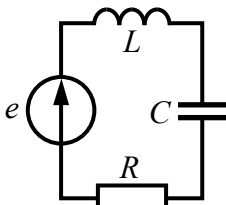


Рис. 2.5

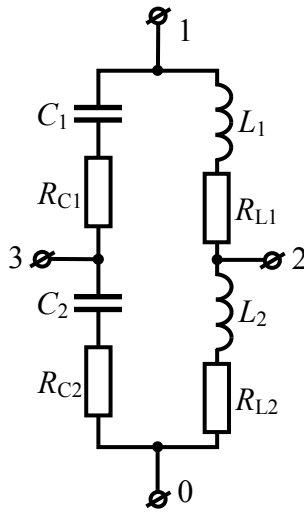


Рис. 2.6

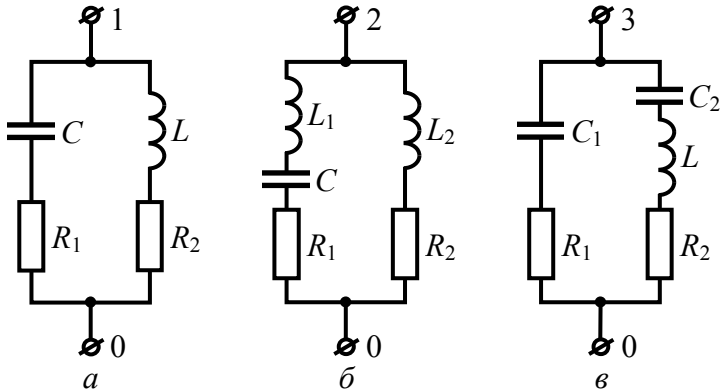


Рис. 2.7

Ёмкость такого контура равна по-прежнему $C = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$. Контур называют *параллельным контуром второго вида* (контуром с двумя индуктивностями). Наконец, при подключении источника колебаний к зажимам 0 - 3 образуется *параллельный контур третьего вида* (контур с двумя ёмкостями, рис. 2.7, в); его индуктивность $L = L_1 + L_2$. Параллельные контуры второго и третьего видов часто называют **сложными** контурами.

При одинаковых параметрах L , C и R все разновидности колебательного контура обладают одной и той же частотой собственных колебаний, и более того, – одинаковой избирательностью. Выбор схемы контура зависит от влияния на его избирательность подключаемых источников и нагрузки.

2.3. Комплексная проводимость, АЧХ и ФЧХ последовательного контура

Итак, последовательный контур представляет собой последовательное соединение элементов R , L , C и независимого источника электрической энергии. Пусть контур запитывается идеальным источником напряжения $e(t)$ с нулевым внутренним сопротивлением. Схема замещения контура с идеальным источником напряжения показана на рис. 2.8, а.

Чтобы исследовать частотные свойства последовательного контура, необходимо определить его комплексную частотную характеристику на основе комплексной схемы замещения (рис. 2.8, б). Из схемы подключения источника электрической энергии к зажимам 1 - 1' последовательного контура следует, что входным колебанием является ЭДС источника (e , рис. 2.3, а). В качестве выходного колебания можно принять одно из следующих колебаний: ток в контуре (i), напряжение на индуктивности (u_L), напряжение на ёмкости (u_C). Для последовательного контура, таким образом, имеется возможность определить как минимум три комплексные частотные характеристики:

а) комплексную (входную) проводимость контура относительно зажимов 1 - 1' $\underline{Y}_{11}(\omega) = \dot{I}_m / \dot{E}_m$;

б) комплексные коэффициенты передачи по напряжению, снимаемому с индуктивности $\dot{K}_L(\omega) = \dot{U}_{mL} / \dot{E}_m$ или с ёмкости $\dot{K}_C(\omega) = \dot{U}_{mC} / \dot{E}_m$.

Рассмотрим сначала комплексную (входную) проводимость контура \underline{Y}_{11} . Из схемы на рис. 2.8, а следует, что эквивалентное комплексное сопротивление контура равно сумме комплексных сопротивлений его элементов, тогда

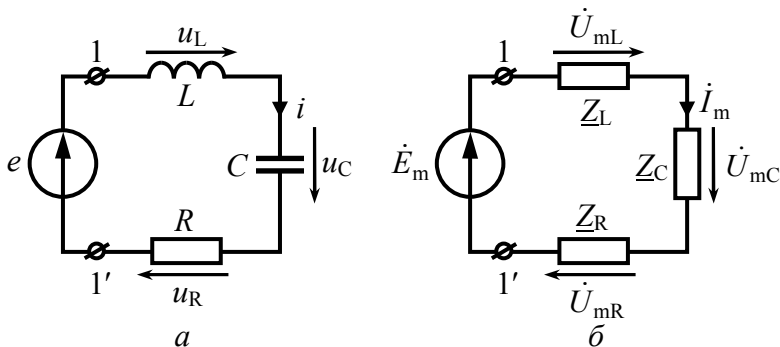


Рис. 2.8

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}_{11}} = \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{1}{R + j \cdot [\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)]}, \quad (2.8)$$

где \underline{Z}_{11} – комплексное сопротивление контура относительно зажимов 1 - 1'.

Чтобы определить АЧХ и ФЧХ комплексной проводимости, необходимо \underline{Y}_{11} представить в показательной форме:

$$\underline{Y}_{11}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + [\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)]^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctg \frac{\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)}{R}}. \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что АЧХ определяется выражением

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + [\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)]^2}}, \quad (2.10)$$

а фазочастотная характеристика –

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)}{R}. \quad (2.11)$$

На рис. 2.9 приведены АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи (проводимости) $\underline{Y}_{11}(\omega)$. Объясним поведение этих кривых.

Из формулы (2.10) следует, что максимум функции $Y(\omega)$ (рис. 2.9, а) приходится на частоту, при которой второе слагаемое подкоренного выражения обращается в ноль (обозначим её ω_0). При этом значение АЧХ (её максимум) составляет $1/R$ сименс. Чем больше отличается частота колебаний источника, запитывающего контур, от частоты ω_0 , тем меньше становится значение АЧХ. Ранее было сказано, что в резонансной системе максимальная амплитуда отклика приходится на резонансную частоту. Тогда можно предположить, что частота ω_0 является резонансной частотой последовательного контура.

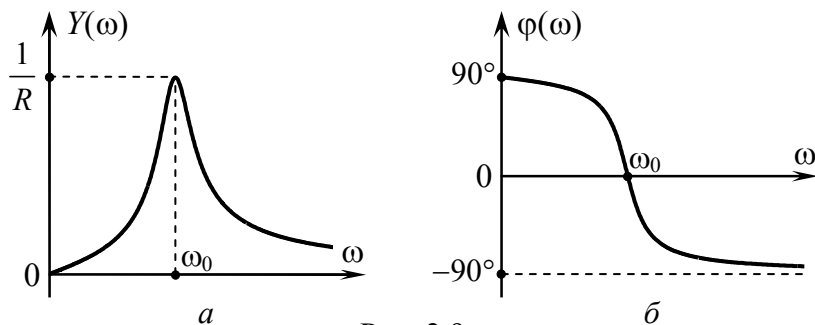


Рис. 2.9

Фазочастотная характеристика контура (формула (2.11), рис. 2.9, б) показывает, что на частоте ω_0 сдвиг фаз между током и напряжением на контуре равен нулю. На частотах, меньших ω_0 , значения $\varphi(\omega)$ положительные: при $\omega < \omega_0$ ток опережает по фазе напряжение на контуре, контур в этой области частот обладает ёмкостным характером сопротивления. На частотах выше резонансной ($\omega > \omega_0$) контур обладает индуктивным характером сопротивления.

Анализ частотных характеристик показывает, что последовательный контур при подключении к нему источника ЭДС является **полосно-пропускающим фильтром**. В частности, входная **проводимость** последовательного контура **на резонансной частоте максимальна** и равна $1/R$; контур при этом обладает **чисто активным характером сопротивления**.

2.4. Вторичные параметры последовательного контура

Ранее на основании анализа выражения (2.10) для АЧХ последовательного контура было показано, что на резонансной частоте ω_0 реактивное сопротивление последовательного соединения L и C равно нулю

$$\omega_0 \cdot L - 1/(\omega_0 \cdot C) = 0. \quad (2.12)$$

Из последнего уравнения (2.12) получаем

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}. \quad (2.13)$$

Резонансная частота последовательного контура совпадает с частотой собственных колебаний в идеальном колебательном контуре (см. формулу (2.2)).

Из (2.13) следует, что резонанс в последовательном контуре можно реализовать как минимум двумя способами:

a) изменяя частоту колебаний источника при фиксированных параметрах контура так, чтобы она оказалась равной резонансной частоте;

б) не меняя частоту источника, варьировать параметры контура L и (или) C так, чтобы частота собственных колебаний совпала с частотой источника.

Итак, варьируя, например, ёмкость контура, можно изменять положение АЧХ на частотной оси. Следовательно, введя в контур переменный конденсатор, последовательный контур можно использовать в качестве ППФ с перестраиваемой центральной частотой полосы пропускания.

Из (2.12) видно, что реактивные сопротивления индуктивности и ёмкости на резонансной частоте равны друг другу

$$\omega_0 \cdot L = 1/(\omega_0 \cdot C). \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13) в (2.14), получим

$$\omega_0 \cdot L = 1/(\omega_0 \cdot C) = \sqrt{L/C} = \rho. \quad (2.15)$$

Как показано выше, контур с потерями в режиме свободных колебаний характеризуется добротностью (см. (2.7)). Следовательно, качество последовательного контура при вынужденном характере колебаний можно также оценивать добротностью Q . Добротность колебательных контуров в современной радиоаппаратуре принимает значения в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен.

2.5. Резонанс напряжений в последовательном контуре

Воспользовавшись комплексной схемой замещения последовательного контура (рис. 2.8, б), определим его входное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z}_{11} = R + j[\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)] = R + j \cdot (X_L - X_C) = R + j \cdot X,$$

где $X = X_L - X_C$ – реактивная составляющая входного сопротивления, а R – активная составляющая. На рис. 2.10, а представлена зависимость от частоты реактивной составляющей X сопротивления контура, из которой видно, что на частотах меньших резонансной реактивное сопротивление отрицательно, а на частотах больших резонансной – положительно.

Модуль комплексного сопротивления, называемый полным сопротивлением контура, равен

$$Z = \sqrt{R^2 + [\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)]^2}. \quad (2.16)$$

Зависимость полного сопротивления контура от частоты приведена на рис. 2.10, б. Из неё видно, что на резонансной частоте сопротивление контура минимально, является чисто активным и равно по величине R . При отклонении частоты от резонансной частоты полное сопротивление монотонно увеличивается вплоть до бесконечно большой величины.

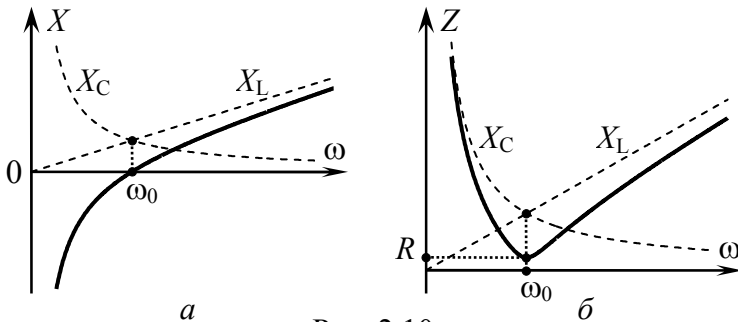


Рис. 2.10

Поскольку сопротивление контура на частоте резонанса определяется только величиной активного сопротивления R , следовательно, амплитуда тока в контуре при резонансе может быть найдена как

$$I_{m0} = E_m / R, \quad (2.17)$$

где E_m – амплитуда напряжения на зажимах 1 - 1', равная амплитуде ЭДС источника напряжения, запитывающего контур. Амплитуда тока в контуре при резонансе, очевидно, максимальна. Однако считать, что в последовательном контуре проявляется резонанс тока, нельзя, поскольку ток в контуре равен току источника. А резонанс, как известно, характеризуется ростом амплитуды колебаний в цепи по сравнению с соответствующими колебаниями источника.

Амплитуды напряжений на ёмкости и на индуктивности, определяемые на резонансной частоте, можно рассчитать, вычислив произведение характеристического сопротивления (см. (2.15)) на амплитуду тока:

$$U_{mC0} = U_{mL0} = I_{m0} \cdot \rho. \quad (2.18)$$

Тогда на основе выражений (2.18) и (2.17) легко получить отношение амплитуды напряжения на реактивном элементе (или L , или C) к амплитуде напряжения, приложенного к контуру:

$$\frac{U_{mC0}}{E_m} = \frac{U_{mL0}}{E_m} = \frac{\rho}{R} = Q. \quad (2.19)$$

Соотношение (2.19) показывает, что *при резонансе в последовательном контуре амплитуды напряжений на ёмкости и индуктивности равны между собой и в Q раз больше амплитуды напряжения источника*, подключенного к контуру. Итак, в последовательном контуре проявляется **резонанс напряжений**. Так как в радиотехнических цепях добротности контуров значительно больше единицы, то при резонансе амплитуды напряжений на любом реактивном элементе во много раз превышают амплитуду напряжения источника.

2.6. Уравнение резонансной кривой контура. Обобщённые АЧХ и ФЧХ контура

АЧХ контура можно получить, определив на разных частотах (теоретически или экспериментально) отношение амплитуды отклика контура (например, тока I_m) к амплитуде воздействия (напряжения E_m на контуре). Если амплитуда воздействия фиксирована, то частотная зависимость амплитуды отклика совпадает по форме с АЧХ цепи.

Зависимость амплитуды отклика от частоты при неизменной амплитуде воздействия называется **резонансной кривой** колебательного контура. Из выражения (2.16) следует, что на разных частотах амплитуда тока I_m в контуре при фиксированной амплитуде напряжения E_m на контуре определяется выражением

$$I_m = \frac{E_m}{Z} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + (X/R)^2}}. \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) и является уравнением резонансной кривой.

Для сравнения частотных свойств разных контуров часто требуется сопоставлять их резонансные кривые. Если резонансные частоты исследуемых контуров различны, то задача сравнения посредством (2.20) становится громоздкой. Для наглядности отображения резонансных кривых (при сравнении различных контуров) по оси абсцисс откладывают не частоту, а так называемую **расстройку** контура. Различают три вида расстройек: абсолютную $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, относительную $\delta\omega = \Delta\omega/\omega_0$ и **обобщённую**

$$\xi = X/R = [\omega L - 1/(\omega C)]/R. \quad (2.21)$$

Если частота ω колебаний источника, подключенного к контуру, совпадает с резонансной частотой контура ω_0 , все расстройки равны нулю, следовательно, максимум резонансной кривой будет наблюдаться на нулевой расстройке. Наиболее

часто используется обобщённая расстройка контура; определим её связь с другими видами расстроек, имеющими понятный физический смысл:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)}{R} = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \cdot LC} \right) = \frac{\rho}{R} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \\ &= Q \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \cdot \omega} = Q \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cdot \frac{\omega + \omega_0}{\omega} = Q \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cdot (1 + \omega_0/\omega).\end{aligned}\quad (2.22)$$

На частотах вынужденных колебаний, близких к резонансной ($\omega \approx \omega_0$, условие, которое, как правило, характерно для контуров), в выражении (2.22) допустима замена одного из множителей $(1 + \omega_0/\omega) \approx 2$ так, что формула для обобщённой расстройки заметно упрощается:

$$\xi \approx 2Q \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2Q \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2Q \cdot \delta\omega.\quad (2.23)$$

Выражение (2.23), указывающее на пропорциональную связь относительной и обобщённой расстроек, широко применяется при решении практических задач. Заметим, что при $|\delta\omega| < 0.2$ погрешность расчётов по формуле (2.23) не превышает $\pm 10\%$.

Из уравнения (2.20) резонансной кривой последовательного контура с учётом (2.21) и (2.17) можно получить

$$I_m = I_{m0} / \sqrt{1 + \xi^2},$$

где I_{m0} – амплитуда тока в контуре на резонансной частоте.

Пронормировав последнее уравнение относительно I_{m0} , получим уравнение **обобщённой резонансной кривой** [2]

$$K(\xi) = \frac{I_m}{I_{m0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}},\quad (2.24)$$

определяющее зависимость нормированной амплитуды отклика контура от величины обобщённой расстройки при неизмен-

ной амплитуде воздействия. Из (2.11) и (2.21) видно, что фазо-частотная характеристика последовательного контура также может быть выражена через обобщённую расстройку

$$\varphi(\xi) = -\arctg(\xi). \quad (2.25)$$

Нормированная резонансная кривая и ФЧХ последовательного колебательного контура как функции обобщённой расстройки приведены на рис. 2.11. Эти кривые соответствуют характеристикам *любых последовательных контуров* с произвольными значениями резонансной частоты ω_0 и добротности Q , поэтому их часто называют **обобщёнными АЧХ** и ФЧХ колебательного контура.

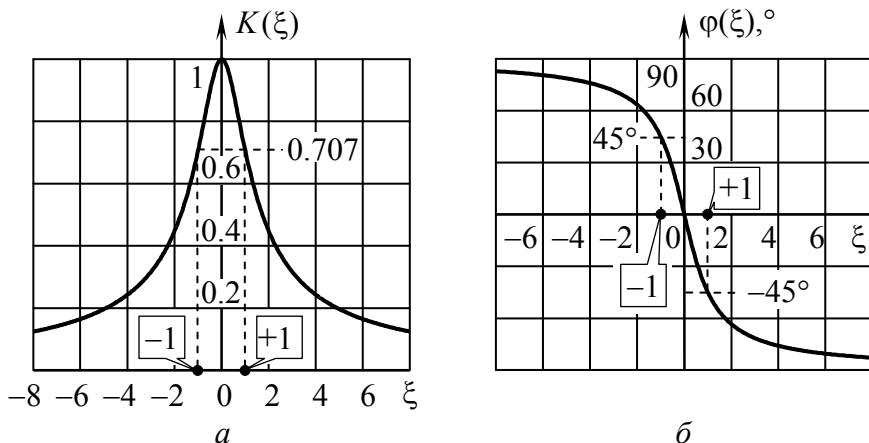


Рис. 2.11

Если в качестве аргумента в выражениях (2.24) и (2.25) принять относительную расстройку $\delta\omega$, форма нормированной АЧХ и ФЧХ будет существенно зависеть от величины добротности контура (рис. 2.12). Обратите внимание на то, что с увеличением добротности контура нормированная АЧХ становится более острой, а у ФЧХ увеличивается угол наклона в области расстроек, близких к нулевой.

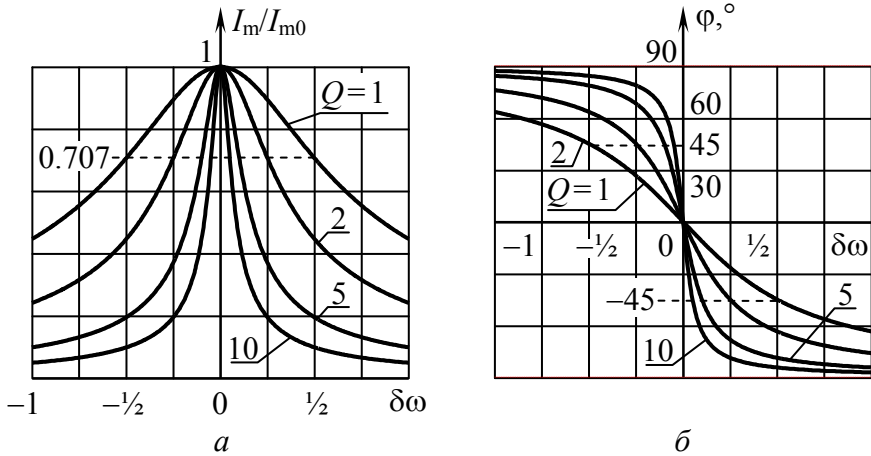


Рис. 2.12

2.7. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности колебательного контура

В предыдущем пункте было показано, что с увеличением добротности Q последовательного контура его АЧХ становится более острой, что соответствует уменьшению полосы пропускания контура. Определим количественную связь полосы пропускания с добротностью контура.

На рис. 2.13, *а* представлена нормированная АЧХ последовательного контура; здесь же показана полоса пропускания контура $\Pi_{\omega} = \omega_{гр2} - \omega_{гр1}$. А на рис. 2.13, *б* приведена нормированная обобщённая АЧХ этого же контура, на которой указаны обобщённые расстройки $\xi_{гр2}, \xi_{гр1}$, соответствующие граничным частотам полосы пропускания $\omega_{гр2}, \omega_{гр1}$. Поскольку согласно (2.23) $\xi = 2Q \cdot (\omega - \omega_0) / \omega_0$, то

$$\xi_{гр1} = 2Q \cdot (\omega_{гр1} - \omega_0) / \omega_0, \quad \xi_{гр2} = 2Q \cdot (\omega_{гр2} - \omega_0) / \omega_0. \quad (2.26)$$

Из уравнения обобщенной резонансной кривой найдём значения граничных обобщённых расстроек $\xi_{гр2}, \xi_{гр1}$.

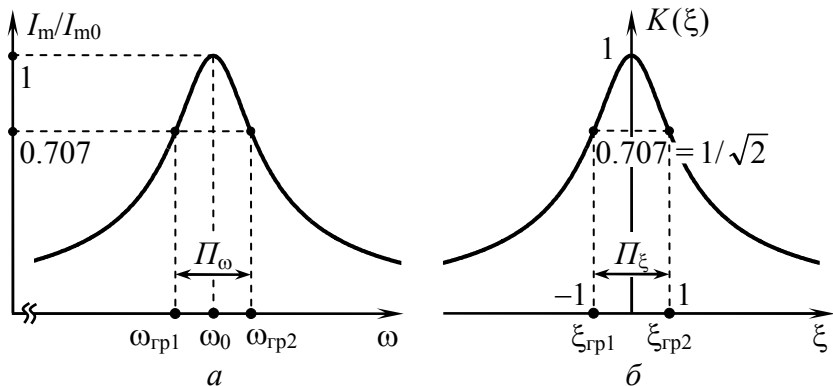


Рис. 2.13

Согласно (2.24) для расстроек $\xi_{гр2}$, $\xi_{гр1}$ выполняется равенство

$$1/\sqrt{2} = 1/\sqrt{1 + \xi_{гр1,2}^2},$$

откуда получаем

$$\xi_{гр1,2} = \mp 1. \quad (2.27)$$

Тогда из (2.27) и (2.26) следует, что

$$2Q \cdot (\omega_{гр1} - \omega_0) / \omega_0 = -1, \quad 2Q \cdot (\omega_{гр2} - \omega_0) / \omega_0 = 1. \quad (2.28)$$

Приравняв $(\omega_{гр1} - \omega_0) / \omega_0 = -(\omega_{гр2} - \omega_0) / \omega_0$, получим

$$\omega_0 = (\omega_{гр1} + \omega_{гр2}) / 2; \quad (2.29)$$

это означает, что резонансная частота является среднеарифметическим значением граничных частот полосы пропускания. Тогда полоса пропускания контура есть удвоенная разница между верхней граничной и резонансной частотой:

$$П_\omega = 2 \cdot (\omega_{гр2} - \omega_0), \quad (2.30)$$

откуда с учётом второго равенства в соотношении (2.28) определяем окончательную формулу для полосы пропускания последовательного контура

$$P_{\omega} = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (2.31)$$

Если полосу пропускания выразить в герцах, то расчётная формула принимает вид

$$P_f = f_0/Q.$$

Формула (2.31) часто используется для решения практических задач. Так, в частности, по экспериментально снятой резонансной кривой последовательного контура с помощью этого равенства можно оценить добротность контура.

Ранее при выводе выражения (2.23) полагалось, что частота колебаний источника, запитывающего контур, близка к резонансной. Это предположение теперь легко обосновать. Например, при обобщённой расстройке контура, равной $\xi=5$, амплитуда тока в контуре согласно (2.24) приблизительно в пять раз меньше амплитуды тока при резонансе; колебания при такой расстройке существенно ослабляются. В этом случае при средней добротности контура Q , равной 50, абсолютная расстройка контура $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \approx \xi \cdot \omega_0 / (2Q) = 0.05\omega_0$. Таким образом, даже при такой большой величине обобщённой расстройки выполняется условие $\omega \approx \omega_0$, что соответствует изначальному предположению.

Если в (2.31) подставить добротность, определяемую как $Q = \omega_0 L/R$, то формула для полосы пропускания контура принимает вид

$$P_{\omega} = R/L, \quad (2.32)$$

что означает постоянство величины полосы пропускания при неизменных L и R контура. Поэтому на практике для настройки контура в резонанс используют переменный конденсатор.

Для оценки избирательных свойств контура определим его коэффициент прямоугольности. Для этого в выражение

обобщённой резонансной кривой формально подставим граничную обобщённую расстройку $\xi_{0.1}$, соответствующую уровню 0.1 от максимального значения:

$$1/\sqrt{1+\xi_{0.1}^2}=1/10.$$

Решая последнее уравнение относительно $\xi_{0.1}$ и учитывая, что $P_{\omega}^{0.1} \approx \xi_{0.1} \cdot \omega_0 / Q$, приходим к соотношению $P_{\omega}^{0.1} \approx 10 \cdot \omega_0 / Q$. Тогда на основе (1.32) получаем, что коэффициент прямоугольности k_{Π} последовательного контура равен 0.1, что намного меньше единицы. Это свидетельствует о том, что избирательные свойства последовательного контура всё же далеки от избирательности идеального полосно-пропускающего фильтра.

2.8. Влияние неидеальности источника на частотные характеристики последовательного контура

Представленный выше анализ частотных характеристик последовательного контура проводился для случая идеального источника напряжения, запитывающего цепь. В случае подключения к контуру неидеального источника его внутреннее сопротивление может существенно влиять на частотные свойства контура.

Пусть внутреннее сопротивление источника напряжения, запитывающего контур, имеет чисто активный характер и равно R_i (рис. 2.14, а). Разумеется, что последовательное соединение сопротивлений R и R_i можно заменить эквивалентным сопротивлением $R_{\Sigma} = R + R_i$. Добротность контура с учётом внутреннего сопротивления источника (её часто называют **эквивалентной добротностью**) будет определяться согласно (2.19) выражением

$$Q_{\Sigma} = \frac{\rho}{R_{\Sigma}} = \frac{\rho}{R + R_i} = \frac{\rho}{R \cdot (1 + R_i/R)} = \frac{Q}{1 + R_i/R}, \quad (2.33)$$

где $Q = \rho/R$ – добротность контура без учёта внутреннего сопротивления источника.

Полоса пропускания контура с учётом внутреннего сопротивления источника может быть найдена из равенства (2.31) при замене добротности контура Q на эквивалентную добротность Q_{ω} :

$$P_{\omega\omega} = \frac{\omega_0}{Q_{\omega}} = \frac{\omega_0}{Q \cdot (1 + R_i/R)},$$

тогда

$$P_{\omega\omega} = \frac{P_{\omega}}{1 + R_i/R}, \tag{2.34}$$

где P_{ω} – полоса пропускания контура без учёта внутреннего сопротивления источника.

Как следует из выражений (2.33) и (2.34), наличие внутреннего сопротивления у источника напряжения приводит к уменьшению эквивалентной добротности контура и к увеличению его полосы пропускания. Поэтому *для сохранения неизменной полосы пропускания желательно, чтобы внешний источник энергии имел как можно меньшее внутреннее сопротивление*. То есть по своим свойствам источник должен приближаться к **идеальному источнику напряжения**. Более того, при подключении к последовательному контуру идеального источника тока, внутреннее сопротивление которого бесконечно велико (рис. 2.14, б), последовательный контур

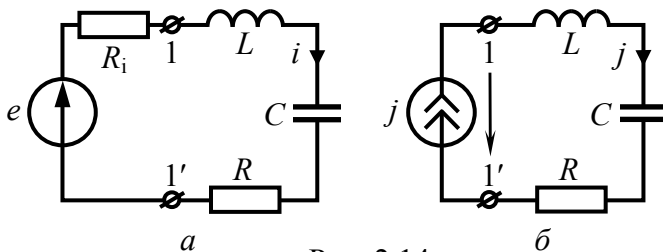


Рис. 2.14

уже не является полосно-пропускающим фильтром, так как его полоса пропускания увеличивается до бесконечности.

Предположим теперь, что внутреннее сопротивление источника содержит дополнительно реактивную составляющую. Её наличие приведет к изменению либо эквивалентной ёмкости, либо индуктивности и, согласно (2.13), к изменению резонансной частоты контура и его расстройке относительно частоты колебаний источника. Следует понимать, что реактивную составляющую внутреннего сопротивления источника, в отличие от активной, можно скомпенсировать, включив в контур реактивный элемент противоположного характера.

Требования, предъявляемые к источнику энергии, подключаемому к последовательному контуру, ограничивают его применение в качестве полосно-пропускающего фильтра.

2.9. Влияние нагрузки на резонансные свойства последовательного контура

Если последовательный контур используется в качестве полосового фильтра, то параллельно одному из реактивных элементов подключается нагрузка. Положим, что нагрузка обладает чисто активным характером сопротивления (R_n) и включена параллельно ёмкости C контура (рис. 2.15, *a*).

Очевидно, что наличие дополнительного сопротивления в цепи приводит к увеличению расхода энергии. Эквивалентная добротность цепи при этом уменьшается, полоса пропускания увеличивается. Более того, сопротивление нагрузки R_n может приводить и к изменению значения резонансной частоты цепи. Остановимся на этом подробнее.

Приведём схему контура с нагрузкой (рис. 2.15, *a*) к стандартной схеме замещения (рис. 2.15, *б*), в которой все элементы соединены последовательно. Для этого параллельное соединение R_n и C , подключенное к зажимам 2 - 2', заменим эквивалентным последовательным соединением.

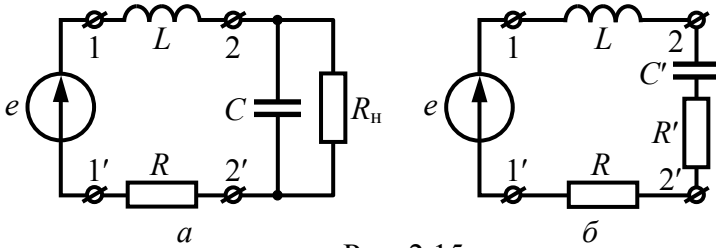


Рис. 2.15

Комплексная проводимость параллельного соединения элементов R_H и C на резонансной частоте определяется как

$$\underline{Y}_{RC} = G_H + j \cdot Y_C,$$

где $G_H = 1/R_H$, а $Y_C = \omega_0 \cdot C$. Его комплексное сопротивление

$$\underline{Z}_{RC} = 1/\underline{Y}_{RC} = 1/(G_H + j \cdot Y_C)$$

может быть сведено к виду

$$\underline{Z}_{RC} = \frac{G_H - j \cdot Y_C}{(G_H + j \cdot Y_C)(G_H - j \cdot Y_C)} = \frac{G_H - j \cdot Y_C}{G_H^2 + Y_C^2} = \frac{G_H}{G_H^2 + Y_C^2} - \frac{j \cdot Y_C}{G_H^2 + Y_C^2} = R' - j \cdot X'.$$

Таким образом, параллельное соединение R_H и C можно заменить эквивалентным последовательным соединением активного сопротивления

$$R' = \frac{G_H}{G_H^2 + Y_C^2} = \frac{1/R_H}{1/R_H^2 + (\omega_0 \cdot C)^2} = \frac{R_H}{1 + (\omega_0 \cdot R_H \cdot C)^2} \quad (2.35)$$

и ёмкости C' с реактивным сопротивлением

$$X' = \frac{Y_C}{G_H^2 + Y_C^2} = \frac{\omega_0 \cdot C}{1/R_H^2 + (\omega_0 \cdot C)^2} = \frac{1}{\omega_0 \cdot C \cdot [1 + 1/(\omega_0 \cdot R_H \cdot C)^2]}$$

Из последнего выражения следует, что

$$C' = C \cdot \left[1 + \frac{1}{(\omega_0 \cdot R_H \cdot C)^2} \right]. \quad (2.36)$$

Итак, наличие нагрузки параллельно ёмкости приводит к изменению ёмкости контура. Её величина становится больше. Однако подключение нагрузки не должно вносить расстройку контура относительно частоты колебаний источника, поэтому полагаем, что $C' \approx C$. Последнее равенство возможно, только если $1/(\omega_0 \cdot R_n \cdot C)^2 \ll 1$, т.е.

$$R_n \gg 1/(\omega_0 \cdot C) = \rho. \quad (2.37)$$

Чтобы подключение нагрузки не приводило к расстройке контура, необходимо реализовать *сопротивление нагрузки величиной, на порядок большей характеристического сопротивления контура*. Если такое условие выполнено, то $C' \approx C$, а сопротивление R' в схеме замещения контура имеет величину

$$R' \approx \frac{R_n}{(\omega_0 \cdot R_n \cdot C)^2} = \frac{1}{R_n \cdot (\omega_0 \cdot C)^2} = \frac{\rho^2}{R_n}. \quad (2.38)$$

Из выражения (2.38) видно, что даже если сопротивление нагрузки R_n удовлетворяет неравенству (2.37), то величина внесённых в контур потерь R' при большом характеристическом сопротивлении ρ может составлять весьма значительную величину, что приводит к существенному расширению полосы пропускания контура. При $\rho \gg 1$ влияние нагрузки можно значительно ослабить, используя принцип разделения ёмкости контура (рис. 2.16): ёмкость C реализуют в виде последовательного соединения двух ёмкостей C_1 и C_2 , причем C_2 , параллельно которой подключается нагрузка является наибольшей –

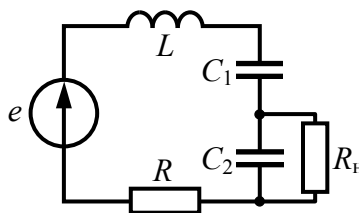


Рис. 2.16

$C_1 \ll C_2$. Тогда $C = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2) \approx C_1$; резонансная частота ω_0 контура определяется практически только величиной ёмкости C_1 , а сопротивление ёмкости C_2 , шунтирующее нагрузку, мало, так что величина потерь $R' \approx 1 / [(\omega_0 \cdot C)^2 \cdot R_H]$ в десятки-сотни раз меньше величины ρ^2 / R_H .

2.10. Коэффициент передачи последовательного контура по напряжению

Определим комплексные коэффициенты передачи по напряжению последовательного контура. Для этого найдём, используя комплексную схему замещения контура на рис. 2.8, комплексные амплитуды напряжений на ёмкости \dot{U}_{mC} и на индуктивности \dot{U}_{mL} :

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mC} &= \dot{I}_m \cdot \underline{Z}_C = \frac{\dot{E}_m}{R + j \cdot [\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)]} \cdot \frac{1}{j \omega \cdot C}, \\ \dot{U}_{mL} &= \dot{I}_m \cdot \underline{Z}_L = \frac{\dot{E}_m}{R + j \cdot [\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)]} \cdot j \omega \cdot L. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Из (2.39) получим выражения для комплексных коэффициентов передачи по напряжению:

$$\begin{aligned} \dot{K}_C &= \frac{1}{R + j \cdot [\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)]} \cdot \frac{1}{j \omega \cdot C} = \frac{e^{j(-90^\circ - \arctg\{[\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)] / R\})}}{\omega \cdot RC \sqrt{1 + \{[\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)] / R\}^2}}, \\ \dot{K}_L &= \frac{1}{R + j \cdot [\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)]} \cdot j \omega \cdot L = \frac{\omega \cdot L \cdot e^{j(90^\circ - \arctg\{[\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)] / R\})}}{R \cdot \sqrt{1 + \{[\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)] / R\}^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда получим аналитические выражения АЧХ:

а) при снятии напряжения с ёмкости C –

$$K_C(\omega) = \frac{1}{\omega \cdot RC \sqrt{1 + \{[\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)] / R\}^2}}; \quad (2.40)$$

б) при снятии напряжения с индуктивности L –

$$K_L(\omega) = \frac{\omega \cdot L}{R \cdot \sqrt{1 + \{[\omega \cdot L - 1 / (\omega \cdot C)] / R\}^2}}. \quad (2.41)$$

Из анализа выражений для АЧХ видно, что на нулевой частоте $K_C = 1$, а $K_L = 0$, т.е. амплитуда напряжения на ёмкости равна амплитуде ЭДС, а амплитуда напряжения на индуктивности равна нулю. Действительно, при $\omega = 0$ постоянный ток через контур не течёт, поэтому ЭДС оказывается полностью приложенной к ёмкости C , а напряжение на индуктивности отсутствует. На больших частотах ($\omega \rightarrow \infty$) сопротивление ёмкости мало, а сопротивление индуктивности стремится к бесконечности, тогда $K_C \rightarrow 0$, а $K_L \rightarrow 1$. Экстремумы функций $K_C(\omega)$, $K_L(\omega)$ можно найти, отыскав их производные по частоте и приравняв нулю. Расчёты показывают, что максимум АЧХ $K_C(\omega)$ приходится на частоту, несколько меньшую, чем ω_0 , максимум АЧХ $K_L(\omega)$ – напротив, несколько большую резонансной:

$$\begin{aligned} \omega_{C\max} &= \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}, \\ \omega_{L\max} &= \omega_0 / \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Однако смещения максимумов $K_C(\omega)$, $K_L(\omega)$ относительно резонансной частоты незначительны. Для высокодобротных контуров ($Q \gg 1$) ими можно пренебречь и считать, что частота любого максимума АЧХ равна резонансной. Действительно, если частота источника близка к резонансной ($\omega \approx \omega_0$), то, вводя в выражения (2.40) и (2.41) обобщённую расстройку

$$K_C(\omega) \approx \frac{1}{\omega_0 \cdot RC \sqrt{1 + \xi^2}}, \quad K_L(\omega) \approx \frac{\omega_0 \cdot L}{R \cdot \sqrt{1 + \xi^2}},$$

легко показать, что АЧХ коэффициента передачи по напряжению в окрестности резонанса сводится к уравнению обобщённой резонансной кривой:

$$K_C(\omega) = K_L(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (2.43)$$

Из выражения (2.43) видно, что при нулевой расстройке ($\xi = 0$) амплитуда напряжений на ёмкости и на индуктивности больше амплитуды ЭДС источника в Q раз. Однотипность выражений (2.43) и (2.24) позволяет применять введённые ранее параметры частотной избирательности контура (полосу пропускания, коэффициент прямоугольности) и для случая снятия отклика в виде напряжения.

Графически АЧХ комплексных коэффициентов передачи $K_C(\omega)$, $K_L(\omega)$ представлены на рис. 2.17.

Последовательный контур находит применение в радиотехнических устройствах, например во входных цепях приёмников, в измерительных приборах (измерителях добротностей, резонансных волномерах) и т.д. Широкому распространению последовательных контуров препятствует необходимость использования для них источников энергии с малым внутренним сопротивлением. Применяемые на практике управляемые источники (транзисторы) имеют большие внутренние сопротивления и без специальных мер не могут быть использованы для совместной работы с последовательными контурами.

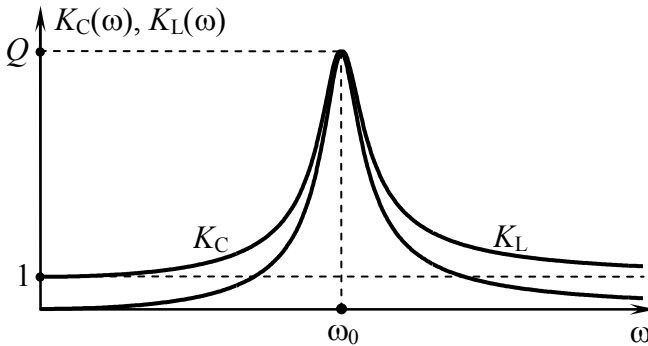


Рис. 2.17

2.11. Условие резонанса в параллельном контуре. Сопротивление контура при резонансе

Параллельным контуром называют колебательный контур, реактивные элементы которого включаются параллельно источнику энергии. В п. 2.2 было показано, что параллельное соединение реактивных элементов контура по отношению к источнику можно реализовать тремя способами (см. рис. 2.7). Все разновидности схем параллельных контуров разумно свести к одной обобщённой комплексной схеме замещения (рис. 2.18, а), в левой ветви которой включено комплексное сопротивление $\underline{Z}_1 = R_1 + j \cdot X_1$, а в правой ветви – сопротивление $\underline{Z}_2 = R_2 + j \cdot X_2$. В частности, например, для простого параллельного контура (см. рис. 2.7, а) $X_1 = -1/(\omega \cdot C)$, а $X_2 = \omega \cdot L$. Будем полагать, что контур запитывается идеальным источником тока. Тогда в качестве воздействия примем комплексную амплитуду тока источника \dot{J}_m . Откликом пусть является комплексная амплитуда напряжения на контуре $\dot{U}_{мк}$.

Определим условие резонанса в обобщённой схеме параллельного контура. Из п. 2.5 известно, что условием резонанса в последовательном контуре является равенство нулю реактивной составляющей сопротивления. Чтобы определить

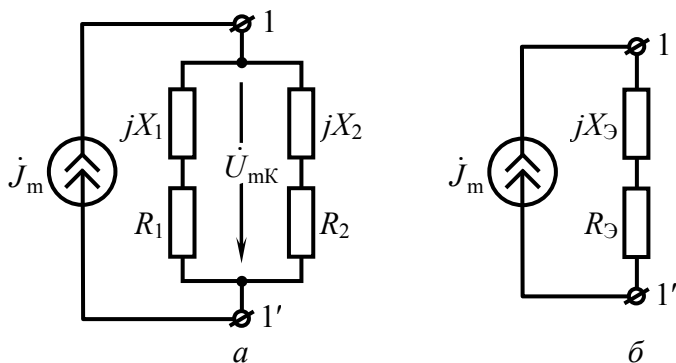


Рис. 2.18

условие резонанса в параллельном контуре, заменим его эквивалентным последовательным соединением, показанным на рис. 2.18, б. Тогда условием резонанса в параллельном контуре будет равенство нулю эквивалентного реактивного сопротивления X_{Σ} .

Комплексное сопротивление обобщённой схемы параллельного контура относительно зажимов 1 - 1' определяется равенством

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(R_1 + j \cdot X_1)(R_2 + j \cdot X_2)}{R_1 + R_2 + j \cdot (X_1 + X_2)}. \quad (2.44)$$

Для контуров с большой добротностью практически всегда в интервале используемых частот реактивные сопротивления ветвей существенно превышают сопротивления потерь:

$$|X_1| \gg R_1, |X_2| \gg R_2. \quad (2.45)$$

Тогда в числителе дроби (2.44) разумно пренебречь сопротивлениями R_1 и R_2 . В знаменателе же дроби обнулять сопротивление $(R_1 + R_2)$ недопустимо, так как в случае равенства реактивных сопротивлений X_1 и X_2 и противоположности их характера контур будет обладать бесконечно большим сопротивлением, что несвойственно реальным контурам. Итак, с учётом (2.45), получим

$$\underline{Z}_{11} \approx \frac{-X_1 \cdot X_2}{R + j \cdot X}, \quad (2.46)$$

где $R = R_1 + R_2$ и $X = X_1 + X_2$ – полное сопротивление потерь и соответственно полное реактивное сопротивление контура при последовательном его обходе. Умножив числитель и знаменатель (2.46) на комплексное сопряжение $(R - j \cdot X)$ к знаменателю, получаем выражение

$$\underline{Z}_{11} \approx \frac{-X_1 \cdot X_2}{R^2 + X^2} \cdot R + j \cdot \frac{X_1 \cdot X_2}{R^2 + X^2} \cdot X, \quad (2.47)$$

из которого следует, что эквивалентный последовательный контур характеризуется сопротивлением потерь

$$R_{\text{Э}} = \frac{X_1 \cdot X_2}{R^2 + X^2} \cdot R \quad (2.48)$$

и реактивным сопротивлением

$$X_{\text{Э}} = \frac{X_1 \cdot X_2}{R^2 + X^2} \cdot X. \quad (2.49)$$

Из (2.49) видно, что для обеспечения резонанса в исходном параллельном контуре, т. е. равенства нулю на резонансной частоте реактивного сопротивления $X_{\text{Э}}$, необходимо обращение в нуль полного реактивного сопротивления X параллельного контура (равенство нулю реактивных сопротивлений X_1 и X_2 ветвей в параллельном контуре невозможно). Итак, **условие резонанса в параллельном контуре** – равенство нулю полного реактивного сопротивления контура при последовательном его обходе:

$$X_0 = X_{10} + X_{20} = 0.$$

(Индекс «0» указывает на то, что сопротивления определяются на резонансной частоте). Из последнего выражения следует, что *при резонансе реактивные сопротивления обеих ветвей параллельного контура должны быть равны между собой по величине и противоположны по характеру*:

$$X_{10} = -X_{20}. \quad (2.50)$$

Так, при резонансе в схеме на рис. 2.7, б реактивное сопротивление левой ветви $X_1 = 1/(\omega \cdot C) - \omega \cdot L_1$ должно быть равно реактивному сопротивлению правой ветви $X_2 = \omega \cdot L_2$ и иметь ёмкостный характер.

Поскольку реактивное сопротивление контура на резонансной частоте обращается в нуль, то **при резонансе входное сопротивление контура чисто активное и равно**

$$\underline{Z}_{11}(\omega_0) = R_{\text{Э0}},$$

где $R_{\text{Э0}}$ согласно (2.48) определяется как

$$R_{\text{Э0}} = \frac{X_{10}^2}{R} = \frac{X_{20}^2}{R}. \quad (2.51)$$

Поскольку на частоте резонанса $|X_{10}| = |X_{20}| \gg R$, то входное сопротивление контура на резонансной частоте $R_{\text{Э0}}$ значительно больше сопротивления потерь R . Последнее означает: при резонансе *сопротивление параллельного контура значительно превосходит сопротивление последовательного контура*, что позволяет запитывать параллельный контур посредством источников с большим внутренним сопротивлением.

Анализ формулы (2.51) показывает, что при перестройке контура, т. е. при изменении резонансной частоты значение сопротивления контура $R_{\text{Э0}}$ будет меняться. В частности, для простого параллельного контура

$$R_{\text{Э0}} = \frac{(\omega_0 \cdot L)^2}{R} = \frac{1}{(\omega_0 \cdot C)^2 \cdot R} = \frac{\rho^2}{R} = \frac{L}{RC}, \quad (2.52)$$

из последнего выражения следует, что при увеличении резонансной частоты за счёт уменьшения ёмкости величина резонансного сопротивления простого контура будет расти.

Характеристическое сопротивление контура ρ в выражении (2.52) можно связать с добротностью Q контура ($\rho = Q \cdot R$), тогда,

$$R_{\text{Э0}} = \frac{\rho^2}{R} = Q^2 \cdot R. \quad (2.53)$$

Сопротивление простого параллельного контура при резонансе больше входного сопротивления последовательного контура в Q^2 раз. Так при добротности $Q = 100$ и сопротивлении потерь $R = 10$ Ом сопротивление $R_{\text{Э0}}$ простого параллельного контура составляет 100 кОм.

2.12. Частотные характеристики параллельного контура

Определим комплексный коэффициент передачи обобщённой схемы параллельного контура (рис. 2.18, а). Входным колебанием в такой схеме является ток источника, описываемый комплексной амплитудой \dot{J}_m , а выходным – напряжение на контуре $\dot{U}_{мк}$. Тогда комплексная частотная характеристика параллельного контура

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{U}_{мк}}{\dot{J}_m}$$

будет совпадать с комплексным сопротивлением контура \underline{Z}_{11} относительно зажимов 1-1', которое определяется выражением (2.46). Итак,

$$\dot{H}(\omega) = \underline{Z}_{11}(\omega) \approx \frac{-X_1 \cdot X_2}{R + j \cdot X} = \frac{-X_1 \cdot X_2}{R} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot X/R}. \quad (2.54)$$

Чтобы определить аналитические выражения АЧХ и ФЧХ контура, представим \underline{Z}_{11} в показательной форме комплексного числа. Поскольку параллельный контур обладает противоположными по характеру реактивными сопротивлениями ветвей, то произведение $X_1 \cdot X_2$ всегда отрицательно. Следовательно, при определении модуля \underline{Z}_{11} перед произведением $X_1 \cdot X_2$ следует сохранить знак «минус». Тогда

$$\underline{Z}_{11}(\omega) = \frac{-X_1 \cdot X_2}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (X/R)^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctg(X/R)}. \quad (2.55)$$

Из (2.55) следует, что АЧХ параллельного контура имеет вид

$$Z_{11}(\omega) = \frac{-X_1 \cdot X_2}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (X/R)^2}}. \quad (2.56)$$

Так как контур используется на частотах, близких к резонансной, то с достаточной точностью можно полагать, что $X_1 \approx X_{10}$, $X_2 \approx X_{20}$. С учётом $(-X_1 \cdot X_2)/R = R_{Э0}$ формула (2.56) имеет вид

$$Z_{11}(\omega) \approx \frac{R_{Э0}}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (2.57)$$

где ξ – обобщённая расстройка контура. Из выражения АЧХ контура видно, что входное сопротивление контура максимально при $\xi=0$, т. е. на резонансной частоте.

Разделив обе части уравнения (2.57) на $R_{Э0}$, получим нормированную АЧХ параллельного контура:

$$\frac{Z_{11}(\omega)}{R_{Э0}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (2.58)$$

Сравнивая (2.58) с (2.24), замечаем: *обобщённая АЧХ параллельного контура любого вида на частотах, близких к резонансной, полностью совпадает по форме с АЧХ последовательного контура.*

Последнее замечание позволяет считать, что частотная избирательность параллельного контура идентична избирательности последовательного контура, при условии, что параметры элементов контуров одинаковые. Отсюда следует, что полоса пропускания любого параллельного контура определяется отношением $P_\omega = \omega_0/Q$, а коэффициент прямоугольности составляет 0.1.

Из условия (2.49) резонанса параллельного контура в случае простого контура получим

$$\omega_0 \cdot L = 1/(\omega_0 \cdot C)$$

откуда

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}.$$

Видно, что резонансная частота простого параллельного контура такая же, как и у последовательного контура.

Из выражения (2.54) следует, что комплексный коэффициент передачи простого параллельного контура (комплексное входное сопротивление) определяется выражением

$$\underline{Z}_{11} = \frac{R_{\text{Э}0}}{1+j\xi} = \frac{R_{\text{Э}0}}{1+\xi^2} - j \cdot \frac{R_{\text{Э}0}}{1+\xi^2} \cdot \xi. \quad (2.59)$$

Активная и реактивная составляющие входного сопротивления представляются в виде

$$R_{\text{Э}} = \frac{R_{\text{Э}0}}{1+\xi^2}, \quad X_{\text{Э}} = -\frac{R_{\text{Э}0}}{1+\xi^2} \cdot \xi. \quad (2.60)$$

На рис. 2.19, а представлены кривые, построенные по формулам (2.57) и (2.60). Из рисунка видно, что все составляющие сопротивления контура, в том числе и полное сопротивление существенно зависят от частоты колебаний источника. Зависимость $R_{\text{Э}}(\xi)$ располагается ниже кривой $Z_{11}(\xi)$, а реактивное сопротивление $X_{\text{Э}}(\xi)$ обладает экстремумами при расстройках $\xi_{\text{гр}1,2} = \pm 1$. На частотах, ниже резонансной, характер реактивного сопротивления контура – индуктивный, а на частотах, превышающих резонансную, – ёмкостный.

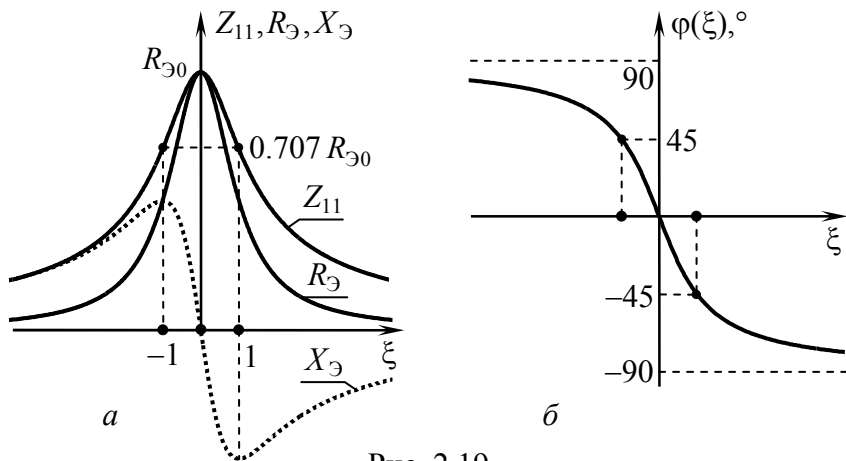


Рис. 2.19

Из аргумента (2.55) следует, что ФЧХ $\varphi(\xi) = -\arctg(\xi)$ параллельного контура (рис. 2.19, б) представляет собой полный аналог ФЧХ последовательного контура.

2.13. Резонанс токов в параллельном контуре

Построим векторную диаграмму гармонических колебаний на резонансной частоте в простом параллельном контуре, схема которого с указанными направлениями токов и напряжений приведена на рис. 2.20.

Изобразим сначала векторную диаграмму для левой ветви контура (рис. 2.21, а), а затем для правой ветви (рис. 2.21, б). Поскольку в параллельном контуре выполняются неравенства (2.45), то векторы напряжений на реактивных элементах должны значительно превосходить по длине векторы напряжений на сопротивлениях потерь катушки индуктивности и конденсатора. Следовательно, сдвиги фаз между напряжением на контуре и токами в его ветвях близки к $\pm 90^\circ$. Поэтому для построения полной диаграммы колебаний в параллельном контуре достаточно совместить вектор U_K , общий для диаграмм на рис. 2.21, а и б. Повернув в плоскости эти векторные диаграммы и совместив вектор U_K , получим полную векторную диаграмму простого параллельного контура (рис. 2.21, в).

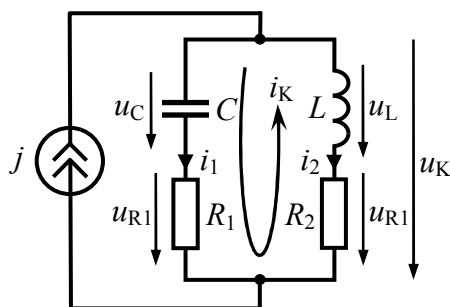


Рис. 2.20

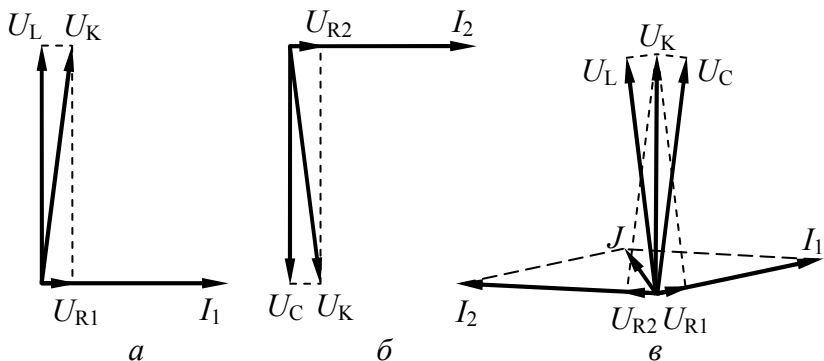


Рис. 2.21

Из векторной диаграммы можно увидеть:

а) сдвиги фаз между токами в ветвях контура и напряжением на контуре близки по абсолютной величине к 90° , следовательно, с малой погрешностью можно полагать, что сдвиг фаз между токами в ветвях равен 180° ; это означает, что токи в ветвях контура i_1 и i_2 направлены навстречу друг другу;

б) токи в ветвях контура обладают одинаковой амплитудой; таким образом, при резонансе в ветвях протекают направленные навстречу друг другу токи с одинаковыми амплитудами, следовательно, можно полагать, что **при резонансе в параллельном контуре протекает контурный ток I_K** ;

в) при резонансе напряжение на контуре совпадает по фазе с током источника;

г) на частотах, близких к резонансной, значение амплитуды тока источника существенно меньше значения амплитуд токов в ветвях контура.

Определим соотношение между амплитудами контурного тока и тока источника на резонансной частоте. Ранее было выяснено, что сопротивление простого параллельного контура на резонансной частоте чисто активное и равно $R_{Э0} = \rho^2/R$. Мощность, расходуемая в контуре, равна $P = \frac{1}{2} \cdot J_m^2 \cdot R_{Э0}$. Та же самая мощность расходуется в контуре при протекании через сопротивление потерь $R = R_1 + R_2$ контурного тока $P = \frac{1}{2} \cdot I_{mK}^2 \cdot R$.

Приравняв мощности, получаем

$$\frac{I_{\text{мк}}}{J_{\text{м}}} = Q, \quad (2.61)$$

где Q – добротность контура.

Из (2.61) видно, что амплитуда контурного тока при резонансе больше тока источника в Q раз, поэтому резонанс в параллельном контуре называют **резонансом токов**.

2.14. Влияние сопротивлений источника и нагрузки на свойства параллельного контура

Как известно, в эквивалентной схеме реального источника электрической энергии имеется внутреннее сопротивление. Представим источник схемой замещения, в которой внутреннее сопротивление R_1 включено параллельно идеальному источнику тока (рис. 2.22, а). Для использования колебаний, снимаемых с контура, к его зажимам должна быть подключена нагрузка, которая в простейшем случае описывается моделью сопротивления R_H (рис. 2.22, б). Сравнивая схемы на рис. 2.22, видим, что с позиции избирательности внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки, видимо, оказывают аналогичное влияние на контур. Говорят, что оба эти сопротивления **шунтируют** параллельный контур.

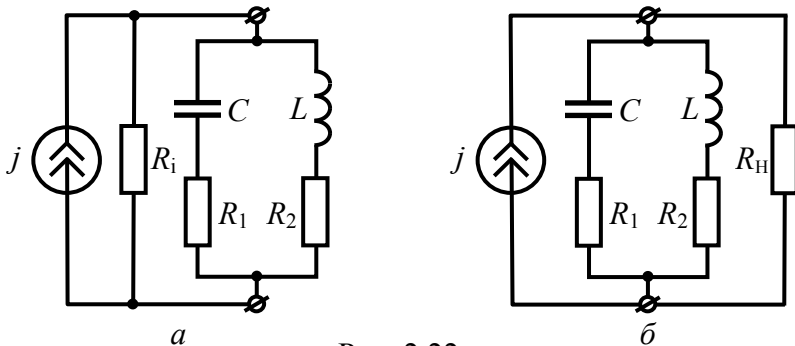


Рис. 2.22

Итак, пусть контур шунтируется неким сопротивлением $R_{\text{ш}}$. Поскольку в этом сопротивлении расходуется дополнительная энергия, то введение в схему шунта, очевидно, приводит к уменьшению добротности контура. Действительно, параллельно соединенное с контуром сопротивление может быть пересчитано внутрь контура в виде дополнительного вносимого сопротивления потерь $R_{\text{вн}}$. Тогда **эквивалентная** добротность контура будет определяться согласно (2.7) выражением

$$Q_{\text{Э}} = \rho / (R_1 + R_2 + R_{\text{вн}}). \quad (2.62)$$

Покажем это более строго. Для этого определим эквивалентное сопротивление контура с учётом шунта:

$$\underline{Z}_{11\text{Э}} = \frac{\underline{Z}_{11} \cdot R_{\text{ш}}}{\underline{Z}_{11} + R_{\text{ш}}},$$

где \underline{Z}_{11} – входное собственное сопротивление контура, описываемое формулой (2.59). Тогда

$$\underline{Z}_{11\text{Э}} = \frac{\frac{R_{\text{Э0}}}{1 + j\xi} \cdot R_{\text{ш}}}{\frac{R_{\text{Э0}}}{1 + j\xi} + R_{\text{ш}}} = \frac{R_{\text{Э0}}}{1 + \frac{R_{\text{Э0}}}{R_{\text{ш}}} + j\xi}.$$

Разделим числитель и знаменатель последней дроби на выражение $(1 + R_{\text{Э0}}/R_{\text{ш}})$, резонансное сопротивление в числителе представим как $R_{\text{Э0}} = Q \cdot \rho$. Тогда получим следующее выражение для $\underline{Z}_{11\text{Э}}$:

$$\underline{Z}_{11\text{Э}} = \frac{Q \cdot \rho}{1 + R_{\text{Э0}}/R_{\text{ш}}} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\xi}{1 + R_{\text{Э0}}/R_{\text{ш}}}}.$$

В полученном равенстве заменим обобщённую расстройку её приближенным выражением в соответствии с известной формулой (2.23):

$$\underline{Z}_{11Э} = \frac{Q \cdot \rho}{1 + R_{Э0}/R_{ш}} \cdot \frac{1}{1 + j2 \frac{Q}{1 + R_{Э0}/R_{ш}} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \quad (2.63)$$

Анализируя выражение (2.63), приходим к выводу, что оно полностью идентично формуле (2.59):

$$\underline{Z}_{11Э} = \frac{R'_{Э0}}{1 + j\xi_{Э}} \quad (2.64)$$

при условии, что

$$Q_{Э} = \frac{Q}{1 + R_{Э0}/R_{ш}} \quad (2.65)$$

Из (2.64) видно, что АЧХ параллельного контура с шунтирующим сопротивлением можно описать собственной АЧХ контура, заменив добротность контура Q на эквивалентную добротность $Q_{Э}$, вычисленную по формуле (2.65). Сравнивая эти добротности по величине, видим, что $Q \geq Q_{Э}$, причём чем больше сопротивление $R_{ш}$, тем ближе $Q_{Э}$ к добротности контура Q . Именно поэтому для сохранения высокой добротности параллельный контур желательно запитывать источником, обладающим **большим внутренним сопротивлением**.

Если на практике требуется расширить полосу пропускания параллельного контура, то для этого достаточно параллельно контуру подключить шунтирующее сопротивление $R_{ш}$, которое снижает эквивалентную добротность и, следовательно, увеличивает ширину полосы пропускания (рис. 2.23). Заметим, что при этом уменьшается эквивалентное сопротивление контура при резонансе.

На практике для ослабления шунтирующего влияния на контур внутреннего сопротивления источника или сопротивления нагрузки, приводящего к расширению полосы пропускания, часто используют **сложные** параллельные контуры (см. рис. 2.7, б и в). Можно показать, что сопротивление сложного

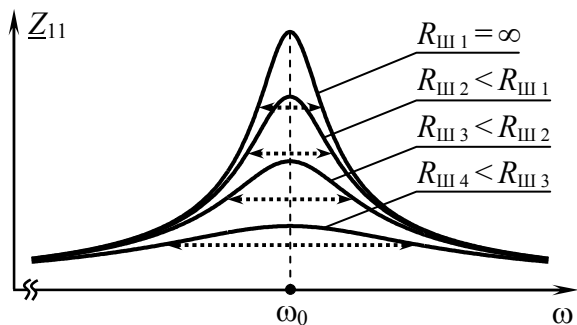


Рис. 2.23

контура второго или третьего вида на резонансной частоте определяется как

$$R_{\text{Э0СЛ}} = p^2 \cdot R_{\text{Э0}}, \quad (2.66)$$

где $R_{\text{Э0}}$ – резонансное сопротивление простого параллельного контура, p – коэффициент включения контура. Последний рассчитывается для контуров второго (см. рис. 2.7, б) и третьего видов (см. рис. 2.7, в) как

$$p_{\text{II}} = L_2 / (L_1 + L_2), \quad p_{\text{III}} = C_2 / (C_1 + C_2).$$

Резонансное сопротивление сложных контуров можно неограниченно уменьшать по сравнению со значением $R_{\text{Э0}}$ изменением коэффициента включения. Подбором коэффициента включения можно добиться такого значения эквивалентной добротности, при которой полоса пропускания контура не будет превышать заранее оговоренного значения.

Для сложных параллельных контуров соотношение между амплитудой тока в контуре при резонансе и амплитудой тока в неразветвленной части цепи несколько отличаются от такого же соотношения в простом параллельном контуре. Действительно, обеспечивая равенство расходуемой мощности в контуре $\frac{1}{2} \cdot I_{\text{мк}}^2 \cdot R = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{м}}^2 \cdot R_{\text{ЭСЛ}}$, получаем $I_{\text{мк}} / J_{\text{м}} = p \cdot Q$, где p – коэффициент включения.

3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ

3.1. Понятие сигнала. Виды сигналов

Сигналом называют протекающий во времени физический процесс, несущий в себе определенную информацию или предназначенный для её передачи.

Математический аппарат, используемый при анализе сигналов, позволяет проводить исследования без учёта природы сигналов. Однако для качественного понимания содержания характеристик сигналов удобно обращаться к их физическому наполнению. Применительно к теории цепей **сигнал** будем рассматривать как меняющееся во времени напряжение (ЭДС) или ток на входе или выходе цепи или её участка. Сигнал в общем случае обозначают как $s(t)$; если же указывается его конкретная физическая природа, то обозначение может иметь вид: $u(t)$, $e(t)$ или $i(t)$.

Различают гармонические сигналы и негармонические. С первым видом сигналов читатель был ознакомлен в начале изучения теории цепей, как со стандартным (эталонным) видом колебаний в цепи, который не меняет своей формы, проходя через линейную цепь. **Негармонические** сигналы в отличие от гармонических могут обладать самой разнообразной формой и протяжённостью по оси времени. Проходя через цепь, негармонический сигнал, как правило, меняет свою форму и длительность.

Предположим, что некий сигнал $s(t)$ (рис. 3.1, *a*) однозначно определён (измерен или рассчитан) на интервале времени $[t_1; t_2]$. За пределами этого интервала значения сигнала либо неизвестны, либо конкретно не определены, либо не имеют для исследователя какого-либо значения. В таком случае сигнал $s(t)$ разумно доопределить, присвоив ему значения при $t < t_1$ и $t > t_2$. При этом возможны как минимум два варианта. В первом случае можно считать, что влево и вправо по оси времени сигнал бесконечно повторяется через определён-

ный промежуток времени, называемый периодом. Такой сигнал принято называть **периодическим** (рис. 3.1, б). Во втором случае значения исходного сигнала вне интервала времени $[t_1; t_2]$ можно положить равными нулю. Такой сигнал (рис. 3.1, в) относят к **непериодическим** или импульсным.

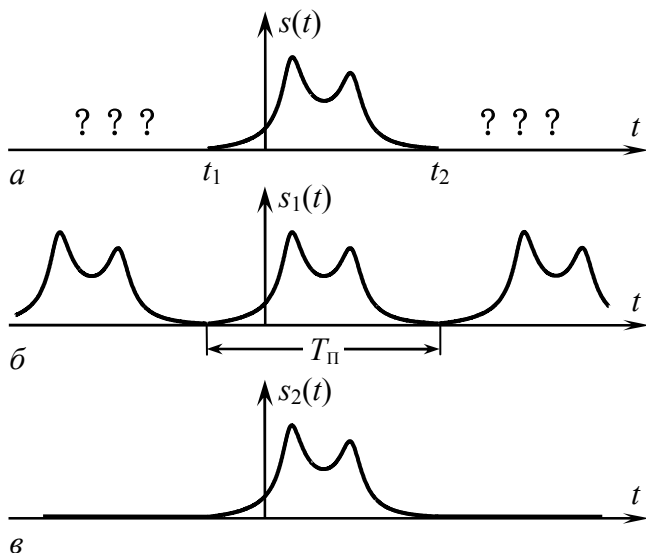


Рис. 3.1

Отметим, что гармоническое колебание является частным случаем периодического сигнала.

3.2. Периодическое колебание и его разложение в ряд Фурье

Периодическим сигналом называют колебание, существующее неограниченно долго, мгновенные значения которого повторяются через интервал времени, называемый периодом. На рис. 3.2 показаны примеры периодических сигналов разнообразной формы; в их обозначениях для указания на периодичность использован индекс «п»; период обозначен как $T_{п}$.

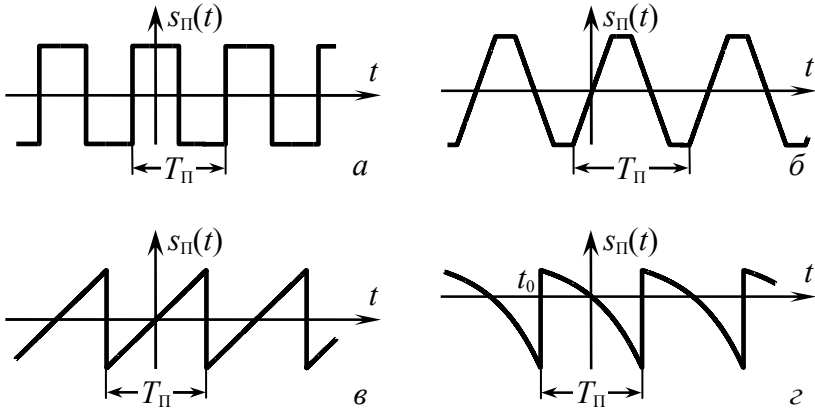


Рис. 3.2

Одной из основных задач теории цепей является расчёт отклика цепи на входное воздействие. Если в качестве входного воздействия рассматривается сигнал сложной формы, расчёт отклика произвести непросто. Однако если цепь линейна, т. е. для неё справедлив принцип наложения, то расчёт отклика цепи может быть выполнен по следующей методике. Пусть входное воздействие представлено в виде суммы колебаний, отклик на каждое из которых легко рассчитать. Тогда, определяя реакцию цепи на каждый сигнал, имеющийся в составе входного, и суммируя частные отклики, можно без особых затруднений решить задачу поиска выходного сигнала.

В радиотехнике и теории связи есть множество примеров простых (элементарных) колебаний, на которые раскладывается воздействие; такие колебания называют базисом. Одним из наиболее широко распространённых способов представления сигналов является их разложение на сумму гармонических колебаний (гармоник) кратных частот. Математически на такую возможность указал ещё в XIX веке Ж. Фурье. Физически эффективность представления сигналов суммой гармоник обусловлена лёгкостью, с которой определяется отклик цепи на каждое гармоническое колебание: ведь оно, проходя через

линейную цепь, не меняет свою форму, лишь изменяет амплитуду и начальную фазу.

Рассмотрим представление периодического сигнала в виде суммы гармонических колебаний. Из математики хорошо известен **ряд Фурье в тригонометрической форме** [4]:

$$s_{\Pi}(t) = S_{-} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t)]. \quad (3.1)$$

Итак, согласно (3.1) в составе периодического сигнала выделяют некую константу S_{-} , называемую **постоянной составляющей**, и **бесконечную** сумму тригонометрических составляющих: косинусоид и синусоид.

Постоянная составляющая сигнала представляет собой среднее мгновенное значение сигнала за период и рассчитывается по формуле

$$S_{-} = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\Pi}} s_{\Pi}(t) dt, \quad (3.2)$$

где t_0 – момент времени, который удобно взять за начало периода, ближайшего к началу координат (см. рис. 3.2, з). Заметим, что постоянная составляющая сигнала может быть положительной, отрицательной или равной нулю. На рис. 3.3 приведены примеры периодического сигнала одной и той же формы с разными значениями постоянной составляющей, величина которой показана штрихом.

Под знаком суммы в ряду (3.1) указаны гармонические колебания: косинусоиды и синусоиды. Каждая комбинация $a_n \cdot \cos(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t)$ характеризуется своим номером n , своей частотой $n \cdot \Omega_{\Pi}$, своими коэффициентами a_n, b_n . Частоты косинусоид и синусоид кратны **основной частоте** периодического сигнала:

$$\Omega_{\Pi} = \frac{2\pi}{T_{\Pi}}. \quad (3.3)$$

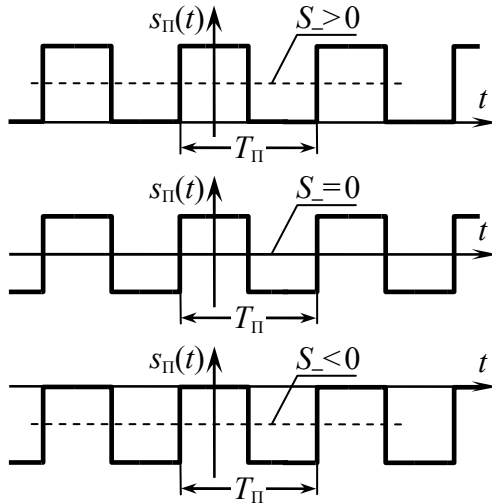


Рис. 3.3

Коэффициенты ряда Фурье a_n и b_n рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T_{\Pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\Pi}} s_{\Pi}(t) \cdot \cos(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t) dt, \\
 b_n &= \frac{2}{T_{\Pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\Pi}} s_{\Pi}(t) \cdot \sin(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t) dt.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что для колебаний, описываемых чётной функцией ($s_{\Pi}(-t) = s_{\Pi}(t)$),

$$a_n = \frac{4}{T_{\Pi}} \cdot \int_0^{T_{\Pi}/2} s_{\Pi}(t) \cdot \cos(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t) dt, \quad b_n = 0,$$

для сигналов, заданных нечётной функцией ($s_{\Pi}(-t) = -s_{\Pi}(t)$),

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T_{\Pi}} \cdot \int_0^{T_{\Pi}/2} s_{\Pi}(t) \cdot \sin(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t) dt.$$

Из тригонометрического ряда (3.1) можно получить **ряд Фурье в гармонической форме** [4]:

$$s_{\Pi}(t) = S_{-} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{mn} \cdot \cos(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t + \Psi_n). \quad (3.5)$$

Действительно, на основе известной тригонометрической формулы $\cos(\beta + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ выражение под знаком суммы в формуле (3.5) можно преобразовать к виду $A_{mn} \cdot \cos\Psi_n \cdot \cos(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t) - A_{mn} \cdot \sin\Psi_n \cdot \sin(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t)$. Обозначив

$$\begin{aligned} a_n &= A_{mn} \cdot \cos\Psi_n, \\ b_n &= -A_{mn} \cdot \sin\Psi_n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

легко получить ряд Фурье в тригонометрической форме.

Согласно (3.5) всякий периодический сигнал можно представить в виде суммы постоянной составляющей и гармонических колебаний (гармоник) с частотами, кратными основной частоте $\Omega_{\Pi} = 2\pi/T_{\Pi}$, амплитудами и начальными фазами, определяемыми из (3.6) как

$$A_{mn} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (3.7)$$

$$\Psi_n = -\arctg(b_n/a_n). \quad (3.8)$$

Ряд Фурье (3.5) в гармонической форме имеет прозрачный физический смысл. Во-первых, любую составляющую сигнала можно выделить из исходного колебания, пропустив последнее через узкополосную избирательную цепь, настроенную на частоту выбранной гармоники (рис. 3.4, выделяется вторая гармоника действующего на цепь периодического напряжения). Во-вторых, если найдены параметры всех гармонических составляющих представленного рядом Фурье колебания, то, используя схему на рис. 3.5, можно экспериментально или численно выполнить синтез колебания, сгенерировав сколь угодно точную копию колебания на основе его гар-

моник. Степень приближения копии $\tilde{u}(t)$ к оригиналу $u(t)$ определяется числом N учтённых слагаемых ряда Фурье.

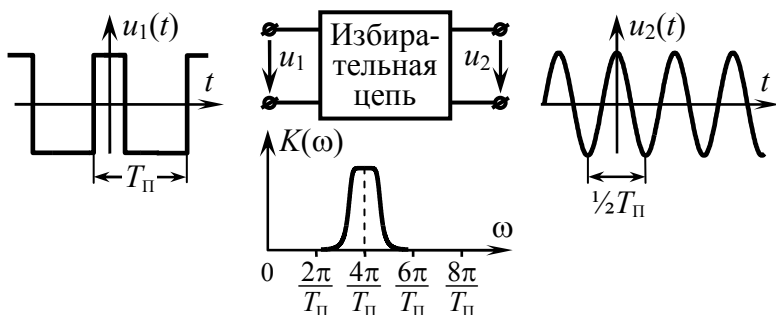


Рис. 3.4

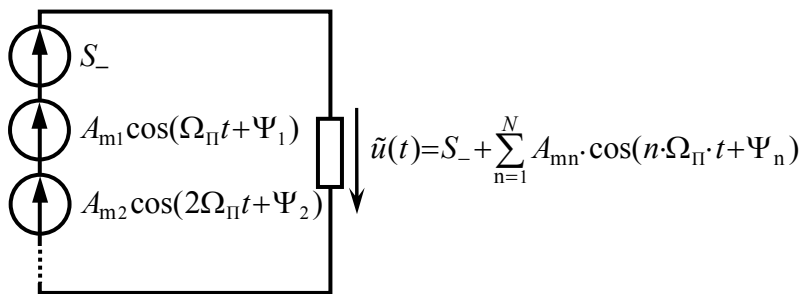


Рис. 3.5

Помимо физичности ещё одним удачным свойством гармонических колебаний в составе сигнала является их ортогональность на интервале времени, равном периоду T_{Π} :

$$\frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\Pi}} A_{mn} \cdot \cos(n \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t + \Psi_n) \times A_{mk} \cdot \cos(k \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t + \Psi_k) dt = \begin{cases} 0, n \neq k, \\ A_{mn}^2 / 2, n = k, \end{cases} \quad (3.9)$$

позволившее получить для расчёта амплитуд A_{mn} и начальных фаз Ψ_n гармоник столь простые формулы (см. (3.7) и (3.8)).

Выражение (3.9) представляет собой взаимную среднюю мощность двух гармонических колебаний. Поскольку гармонические колебания с кратными частотами ортогональны на интервале времени, равном периоду T_{Π} , то их взаимная усредненная за период мощность равна нулю. Последнее означает, что если каким-либо образом изменить параметры (амплитуду, начальную фазу) одной (или нескольких) гармоник, то параметры остальных гармоник не изменятся. Ортогональность гармоник (отсутствие между ними корреляции) позволяет использовать частотный (спектральный) метод обработки сигналов, при котором требуется изменение его формы достигается за счёт коррекции параметров гармоник сигнала.

3.3. Гармонический спектр периодического колебания

Предположим, что некое периодическое колебание разложено в ряд Фурье: найдены частоты, амплитуды и начальные фазы его гармоник. Распределение по частотам амплитуд гармоник, имеющих в составе периодического сигнала, называется **гармоническим спектром амплитуд** (ГСА) сигнала. Качественно ГСА периодического сигнала имеет вид, показанный на рис. 3.6.



Рис. 3.6

Обратим внимание на то, что точки, соответствующие амплитудам отдельных гармоник, линией **не соединяют**, так как в составе периодического сигнала не существует гармонических колебаний с промежуточными частотами.

Любой ГСА характеризуется неотрицательными значениями (амплитуды гармоник всегда положительны) за исключением, быть может, постоянной составляющей. С ростом номера и соответственно частоты гармоник наблюдается уменьшение амплитуд гармоник, нередко колебательным образом. Разнос по частоте между соседними гармониками равен основной частоте периодического колебания $\Omega_{\Pi} = 2\pi/T_{\Pi}$.

Распределение по частоте начальных фаз гармоник, имеющих в составе сигнала, называется **гармоническим спектром фаз** (ГСФ). Качественно ГСФ имеет вид, показанный на рис. 3.7.

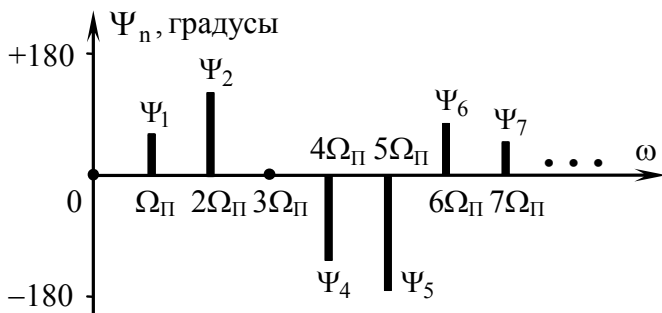


Рис. 3.7

Начальные фазы постоянной составляющей, а также гармоник с нулевыми амплитудами условно полагаются равными нулю. Если постоянная составляющая сигнала отрицательна, то в спектре амплитуд можно указать её значение, взятое по модулю, тогда в спектре фаз $-\pm 180^\circ$. Такое описание постоянной составляющей соответствует её представлению гармоникой нулевой частоты: $S_- = |S_-| \cdot \cos \Psi_0$, где Ψ_0 либо равна нулю, либо составляет $\pm 180^\circ$.

Совокупность ГСА и ГСФ колебания называют **гармоническим спектром** этого колебания; гармоники, входящие в его состав – спектральными составляющими.

К основным *особенностям спектра периодического сигнала* относятся:

а) дискретность или линейчатость, означающие, что спектр образован составляющими, разделёнными одинаковыми частотными промежутками;

б) односторонний характер; спектральными составляющими (гармониками) занята только область положительных (физических) частот;

в) неограниченность по частоте; теоретически указать частоту, на которой гармонический спектр перестает существовать, у большинства сигналов невозможно; существует, правда, отдельный класс периодических сигналов – полигармонические сигналы, состоящие из конечного числа гармоник, у которых спектр является конечным;

г) независимость величины амплитуд и фаз спектральных составляющих от величины периода, если изменение последнего сопровождается соответствующим изменением масштаба времени для всего сигнала.

3.4. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Пусть рассматривается периодическое колебание $s_{\Pi}(t)$, временная диаграмма которого показана на рис. 3.8.

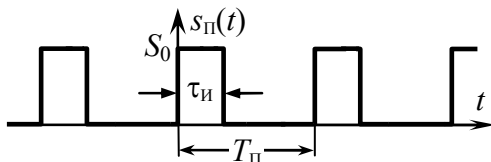


Рис. 3.8

Колебание представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов (ПППИ) длительностью $\tau_{\text{и}}$, пиковое значение которых составляет S_0 . Такую импульсную последовательность часто характеризуют **скважностью** $q = T_{\text{п}}/\tau_{\text{и}}$, равной отношению периода к длительности импульсов. Пусть скважность имеет произвольную величину. Произведём расчёт гармонического спектра такого сигнала.

Постоянная составляющая согласно (3.2)

$$S_{-} = \frac{1}{T_{\text{п}}} \cdot \int_0^{\tau_{\text{и}}} S_0 dt = S_0 \cdot \frac{\tau_{\text{и}}}{T_{\text{п}}} = \frac{S_0}{q}. \quad (3.10)$$

Коэффициенты a_n согласно (3.4)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_{\text{п}}} \cdot \int_0^{\tau_{\text{и}}} S_0 \cdot \cos(n \cdot \Omega_{\text{п}} \cdot t) dt = \frac{2S_0}{T_{\text{п}}} \cdot \frac{\sin(n \cdot \Omega_{\text{п}} \cdot t)}{n \cdot \Omega_{\text{п}}} \Big|_0^{\tau_{\text{и}}} = \\ &= \frac{2S_0}{2\pi \cdot n} \cdot \sin\left(2\pi \cdot n \cdot \frac{\tau_{\text{и}}}{T_{\text{п}}}\right) = \frac{S_0}{\pi \cdot n} \cdot \sin(2\pi \cdot n/q). \end{aligned}$$

Коэффициенты b_n согласно (3.4)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_{\text{п}}} \cdot \int_0^{\tau_{\text{и}}} S_0 \cdot \sin(n \cdot \Omega_{\text{п}} \cdot t) dt = \frac{2S_0}{T_{\text{п}}} \cdot \left(-\frac{\cos(n \cdot \Omega_{\text{п}} \cdot t)}{n \cdot \Omega_{\text{п}}} \right) \Big|_0^{\tau_{\text{и}}} = \\ &= \frac{2S_0}{2\pi \cdot n} \cdot \left[-\cos\left(2\pi \cdot n \cdot \frac{\tau_{\text{и}}}{T_{\text{п}}}\right) + 1 \right] = \frac{S_0}{\pi \cdot n} \cdot [1 - \cos(2\pi \cdot n/q)]. \end{aligned}$$

Амплитуда A_{mn} n -й гармоники согласно (3.7) может быть рассчитана по формуле

$$\begin{aligned} A_{\text{mn}} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{S_0}{\pi \cdot n} \cdot \sqrt{\sin^2(2\pi \cdot n/q) + [1 - \cos(2\pi \cdot n/q)]^2} = \\ &= \frac{S_0}{\pi \cdot n} \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(2\pi \cdot n/q)} = \frac{2S_0}{\pi \cdot n} \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{q}\right) \right|. \quad (3.11) \end{aligned}$$

В радиотехнике и теории связи для описания характеристик, получаемых на основе преобразования Фурье от прямо-

угольных функций, часто используется специальная функция следующего вида:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad (3.12)$$

которую называют функцией «синк». График функции «синк» показан на рис. 3.9, из которого видно, что функция в нуле равна единице, а по мере увеличения аргумента, колеблясь, уменьшается, периодически с шагом π пересекая ось абсцисс.

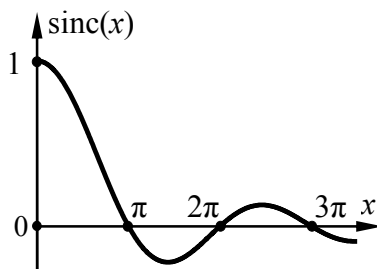


Рис. 3.9

Если разделить на q знаменатель и числитель первой дроби в формуле (3.11) и внимательно рассмотреть получившуюся формулу, то несложно увидеть в ней функцию «синк», так что

$$A_{mn} = \frac{2S_0}{q} \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi \cdot n}{q}\right) \right|. \quad (3.13)$$

Таким образом, амплитуды A_{mn} гармоник ПППИ с ростом частоты уменьшаются, колеблясь по закону модуля «синка», а период таких колебаний зависит от скважности. Гармонический спектр амплитуд ПППИ, рассчитанный в соответствии с формулами (3.10), (3.13) для двух разных значений скважности ($q = 10$ и 5) при фиксированной величине периоде, показан на рис. 3.10.

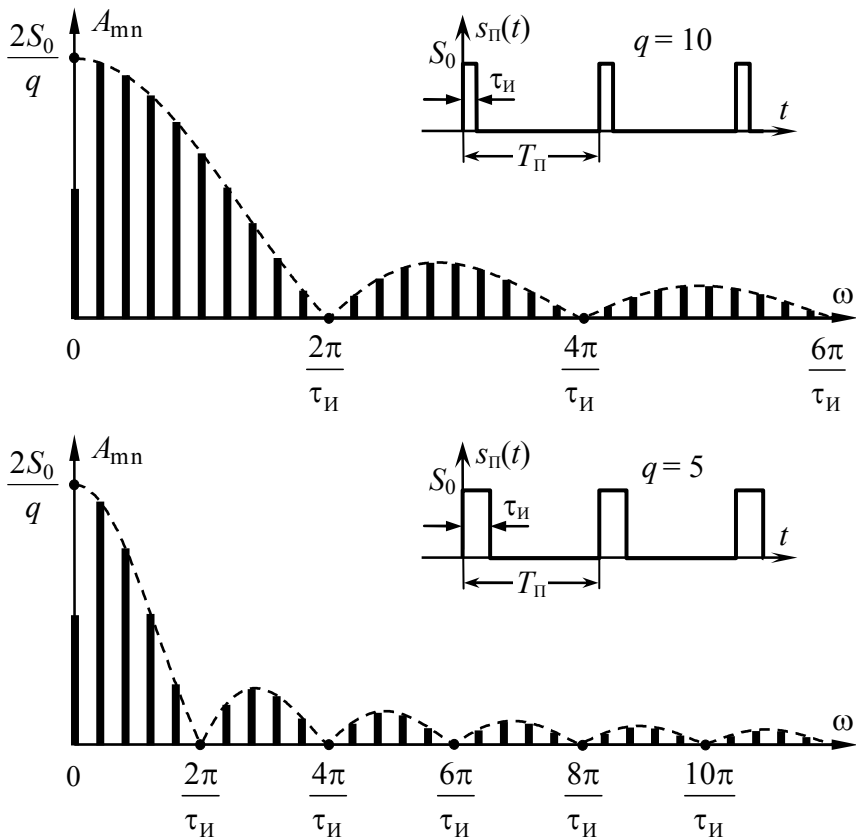


Рис. 3.10

В этот раз точки, соответствующие амплитудам отдельных гармоник, соединены штриховой линией, которая называется **огибающей амплитуд**. Поскольку огибающая амплитуд определяет внешний контур гармонического спектра амплитуд ПППИ, в том числе положение нулевых точек или нулей спектра, получим уравнение этой важной виртуальной кривой. Для этого в соотношении (3.13) восстановим в аргументе «синка» частоту n -й гармоники $\omega_n = 2\pi \cdot n / T_{\text{П}} = 2\pi \cdot n / (q \cdot \tau_{\text{И}})$, а затем заменим её текущей частотой ω . В результате получим

$$A_{ог}(\omega) = \frac{2S_0}{q} \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega \cdot \tau_{И}}{2}\right) \right| \quad (3.14)$$

Поскольку функция «синк» обращается в нуль, если её аргумент составляет $k \cdot \pi$, где $k=1, 2, 3, \dots$ – номер нуля (рис. 3.9), то несложно определить **частоты** всех **нулей** спектра амплитуд ПППИ:

$$\omega_{0k} = \frac{2\pi}{\tau_{И}} \cdot k = \frac{2\pi \cdot q}{T_{П}} \cdot k, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

Таким образом, частоты нулей спектра амплитуд ПППИ обратно пропорциональны длительности импульсов $\tau_{И}$ и прямо пропорциональны скважности q при фиксированной величине периода $T_{П}$. Заметим, что частота первого нуля часто используется для оценки практической ширины спектра ПППИ, тогда очевидно, что при уменьшении длительности импульсов (увеличении скважности) ПППИ ширина спектра возрастёт. Этот вывод очень важен, так как позволяет понять, почему при увеличении скорости передачи цифрового сигнала растёт занимаемая им полоса частот. В цифровых системах передачи в качестве переносчика цифрового сигнала используется последовательность прямоугольных импульсов. При увеличении скорости передачи сигнала число импульсов за одну секунду увеличивается. Так как импульсы не должны перекрываться, то длительность импульсов при этом уменьшается, а полоса частот, занимаемая спектром, возрастает.

Вернёмся вновь к обсуждению спектра амплитуд ПППИ. Нули огибающей амплитуд при определенном условии могут совпадать с частотами отдельных гармоник. Тогда гармоники с такими частотами в спектре исчезают. Пусть при целенаправленном изменении скважности q частота первого нуля $\omega_{01} = 2\pi/\tau_{И}$ огибающей амплитуд совпала с частотой n -й гармоники $\omega_n = 2\pi \cdot n/T_{П} = 2\pi \cdot n/(q \cdot \tau_{И})$, тогда условием выпадения n -й гармоники из спектра ПППИ будет обеспечение равенства

скважности q и номера n устранимой гармоники. Заметим, что в этом случае из спектра выпадает не только гармоника номера n , но и гармоники с кратными частотами и номерами: $2n, 3n, 4n, \dots$

При совпадении частот нулей огибающей спектра амплитуд с частотами гармоник спектр разряжается, так как сигнал содержит меньшее число гармоник. Наиболее разреженный спектр наблюдается у ПППИ со скважностью, равной двум. Из спектра такого сигнала выпадают 2, 4, 6, 8-я, ... гармоники, то есть все чётные гармоники. Кроме того, если все мгновенные значения ПППИ уменьшить на половину амплитуды ($S_0/2$), как показано на рис. 3.11, то согласно (3.10) постоянная составляющая также будет равна нулю. Последовательность импульсов, показанная на рис. 3.11, называется **меандром**. Таким образом, спектр меандра включает только нечётные гармоники, амплитуды которых согласно (3.13) будут определяться как

$$A_{mn} = S_0 \cdot \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right) \right|, n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.16)$$

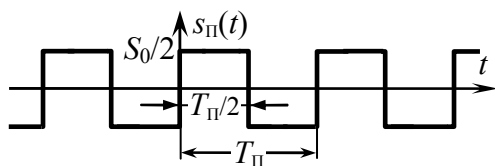


Рис. 3.11

Заметим, что $\sin(\pi \cdot n/2)$ в составе $\operatorname{sinc}(\pi \cdot n/2)$ при любых нечётных значениях обращается либо в единицу, либо в «минус» единицу, тогда $|\operatorname{sinc}(\pi \cdot n/2)| = 1/(\pi \cdot n/2) = 2/(\pi \cdot n)$ и выражение, определяющие амплитуды, принимает вид

$$A_{mn} = \frac{2S_0}{\pi \cdot n}, n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.17)$$

Из полученной формулы видно, что каждая последующая нечётная гармоника в спектре меандра меньше по амплитуде, чем первая гармоника, во столько раз, каков номер этой гармоники.

3.5. Синтез сигнала по спектру. Эффект Гиббса

Синтез периодического сигнала по его спектру рассмотрим на примере меандра, так как у меандра спектр сильно разрежен из-за отсутствия чётных гармоник, поэтому учёт каждой из низших гармоник приводит к заметному изменению формы сигнала.

Так как постоянной составляющей в составе меандра нет, как, впрочем, и нечётных гармоник, то его синтез заключается в сложении согласно ряду Фурье в гармонической форме (3.5) чётных гармоник с заранее рассчитанными амплитудами (3.17) и начальными фазами. При синтезе число гармоник может быть сразу взято большим. Но можно постепенно увеличивать число слагаемых ряда Фурье, например, от единицы (только 1-я гармоника) до трёх (1-я и 3-я гармоники), затем до 5 (1, 3 и 5-я гармоники) и т.д., и изучать, как каждая из вновь добавляемых гармоник влияет на форму сигнала.

Отследить изменение формы синтезированного по гармоникам меандра можно по рис. 3.12, на котором в верхней части иллюстраций указывается число учитываемых при синтезе гармоник. Тонкой сплошной линией показан исходный меандр, толстой сплошной линией – синтезированный сигнал. Как видно из рис. 3.12 с увеличением числа учитываемых гармоник форма синтезированного сигнала все больше приближается к прямоугольной. Однако даже при учёте 100 гармоник (с номерами от 1 до 100) в окрестности фронтов импульсов (перепадов значений меандра) сохраняются выбросы. Эти выбросы с ростом числа учитываемых гармоник становятся всё менее протяжёнными, но их величина не уменьшается и составляет 9% размаха (удвоенной амплитуды) меандра.

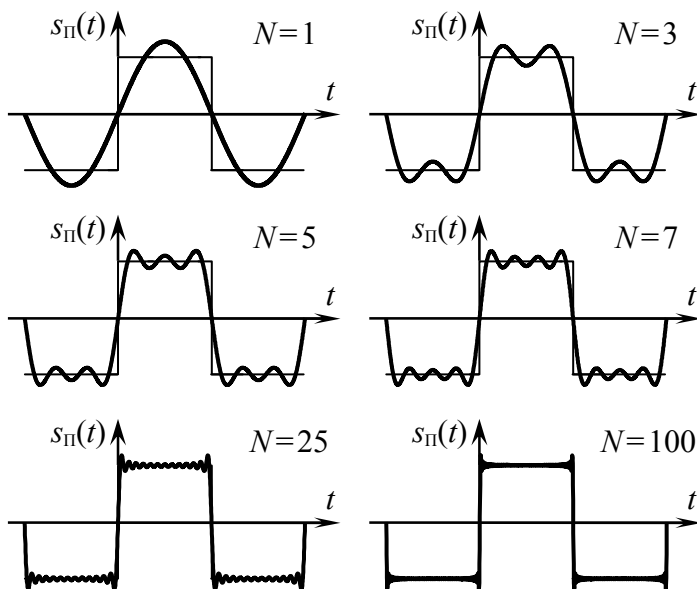


Рис. 3.12

Наличие выбросов слева и справа перепадов сигнала, осцилляций его значений между перепадами, «размытие» крутизны перепадов связано с ограничением слагаемых ряда Фурье и получило название **эффекта** (явления) **Гиббса**.

Эффект Гиббса имеет место при усечении любых убывающих на бесконечности числовых массивов.

К настоящему времени разработаны методы нейтрализации нежелательных эффектов усечения сигналов во временной области.

Ещё одним результатом изучения синтеза меандра по его спектру является вывод о **влиянии спектральных составляющих разных частот на форму сигнала**. Так, очевидно, что фронты импульсов (перепады) формируются высокочастотными гармониками (гармониками с большими номерами), а вершина и пьедестал – низкочастотными гармониками (гармониками с малыми номерами).

3.6. Распределение мощности в спектре периодического сигнала. Практическая ширина спектра сигнала

Средняя за период мощность P , расходуемая в цепи, определяется, как известно, интегралом от мгновенной мощности $p(t)$:

$$P = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_0^{T_{\Pi}} p(t) dt, \quad (3.18)$$

которая, в свою очередь, пропорциональна квадрату напряжения $u^2(t)/R$ или тока в цепи $i^2(t) \cdot R$, а при условии, что $R = 1$ Ом, – квадрату сигнала $s_{\Pi}(t)$, независимо от того, чем он является – напряжением или током. Тогда средняя за период мощность сигнала $s_{\Pi}(t)$, мысленно выделяющегося на сопротивлении в 1 Ом, равна

$$P_s = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_0^{T_{\Pi}} s_{\Pi}^2(t) dt. \quad (3.19)$$

Периодический сигнал можно описать рядом Фурье в гармонической форме (3.5). Подставив (3.5) в (3.19) и вспомнив, что средняя взаимная мощность двух любых гармоник равна нулю (согласно формуле (3.9)), получим, что средняя за период мощность периодического сигнала определяется мощностью постоянной составляющей сигнала (S_-^2) и средними мощностями его гармоник ($A_{mn}^2/2$):

$$P_s = S_-^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2}. \quad (3.20)$$

Таким образом, средняя за период мощность сигнала равна сумме средних мощностей его гармоник. Так как с увеличением номера (частоты) гармоники её амплитуда уменьшается, то наибольший энергетический вклад в формирование сигнала вносят гармоники с малыми номерами. Ниже на

рис. 3.13 показан гармонический спектр периодического сигнала и распределение мощности сигнала по его спектру, которое из-за дискретности спектра имеет ступенчатый характер. Каждая последующая ступенька распределения мощности, как правило, меньше по высоте предыдущей. Ступенчатое распределение асимптотически приближается к средней за период мощности сигнала P_s .

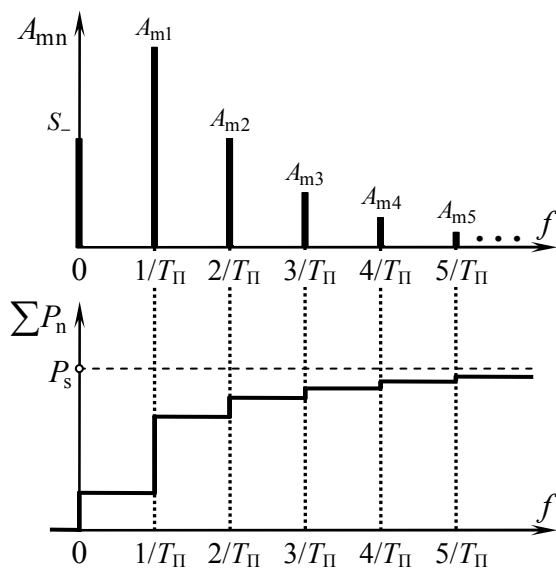


Рис. 3.13

Большинство реальных сигналов обладают спектрами, неограниченно долго убывающими по частоте, так что указать конкретную частоту (ширину спектра), на которой спектр реального сигнала заканчивается, не представляется возможным. Однако проектирование цепей для обработки сигналов предполагает наличие информации о ширине спектра сигнала. И тогда вместо точного значения ширины спектра указывается её приближённое значение – практическая ширина спектра. **Практическая ширина спектра сигнала** – интервал частот, в

пределах которой сосредоточены наиболее значимые гармоники, за пределами которой спектральными составляющими сигнала можно пренебречь.

Для оценки практической ширины спектра могут быть использованы разные критерии (правила): энергетический, по заданному уровню спектра, по частоте нуля огибающей спектра.

Практическая ширина спектра сигнала **по энергетическому критерию** определяется как область частот, в пределах которой сосредоточена преобладающая доля ($k = 0.90 \dots 0.99$) мощности сигнала. Довольно часто доля мощности сигнала, сосредоточенная в пределах его практической ширины спектра, берётся равной 90 или 95 %. Тогда практическая ширина спектра сигнала Δf определяется номером высшей гармоники n_{\max} , при учёте которой суммарная мощность гармоник равна или несколько больше k -й доли мощности сигнала (рис. 3.14):

$$S_{\Sigma}^2 + \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{A_{m n}^2}{2} \geq k \cdot P_s, \text{ так что } \Delta f = n_{\max} / T_{\Pi}. \quad (3.21)$$

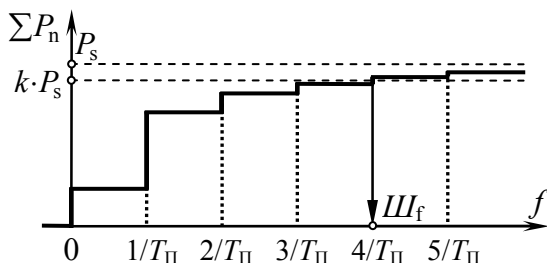


Рис. 3.14

Заметим, что если величина доли мощности k не оговаривается, то по умолчанию считается, что $k = 0.9$.

Практическая ширина спектра сигнала **по критерию заданного уровня** определяется как интервал частот, за пределами которого амплитуды гармоник не должны превышать заданный уровень ($v = 0.1 \dots 0.2$) от амплитуды наиболее значи-

мой (первой) гармонике. Если величина уровня ν не оговаривается, то по умолчанию считается, что $\nu = 0.1$. Граничной частотой практической ширины спектра является частота последней гармонике, амплитуда которой превышает заданный уровень (рис. 3.15).

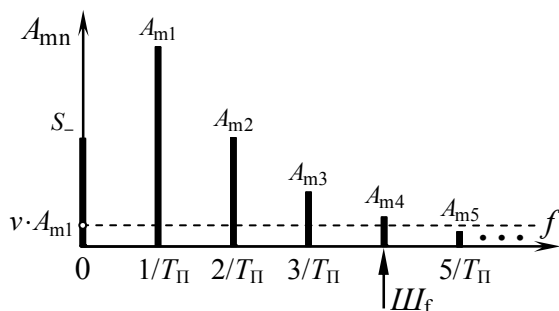


Рис. 3.15

Практическая ширина спектра сигнала **по частоте нуля огибающей спектра** определяется как интервал частот, верхняя граничная частота которого совпадает с частотой первого нуля огибающей спектра амплитуд. Ярким примером применения этого критерия может служить оценка ширины спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. 3.16). Поскольку частота первого нуля огибающей спектра амплитуд ПППИ составляет величину, обратно пропорциональную длительности импульсов $\tau_{\text{И}}$, практическая ширина спектра ПППИ равна

$$\text{Ш}_f = \frac{1}{\tau_{\text{И}}}. \quad (3.22)$$

Из формулы (3.22) следует, что чем меньше длительность импульсов периодической последовательности, тем больше практическая ширина спектра сигнала, занимаемая его спектральными составляющими.

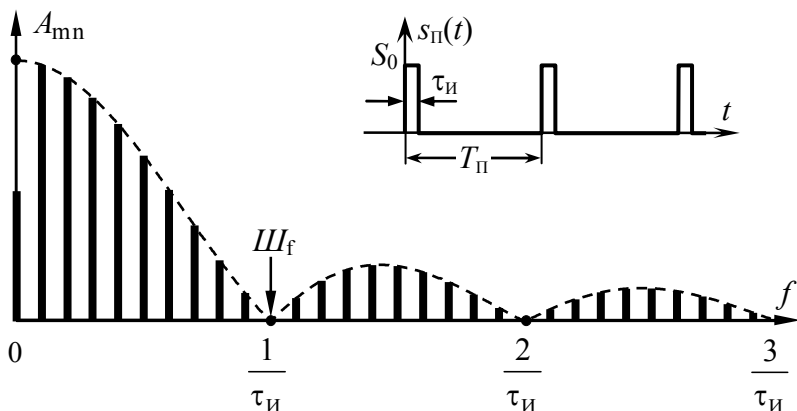


Рис. 3.16

Заметим, что соотношение (3.22) часто используется для оценки ширины спектра периодической последовательности импульсов **любой формы**, отличной от прямоугольной. **Преимуществом** такой оценки ширины спектра является отсутствие необходимости выполнять расчёт гармонического спектра амплитуд, достаточно знать лишь длительность импульсов.

Полагая, что практическая ширина спектра ПППИ определяется частотой первого нуля огибающей спектра амплитуд (формулой (3.22)), можно оценить долю мощности последовательности импульсов, которая сосредоточена в границах так называемого основного лепестка амплитудного спектра. Численный расчёт в случае скважности ПППИ, равной или большей трём, даёт значение $k = 0.903$.

Интересно отметить, что практическая ширина спектра ПППИ большой скважности, найденная по уровню 0.1 от амплитуды первой гармоники, приблизительно равна частоте третьего нуля огибающей спектра: $\text{Ш}_f = 2.68/\tau_{\text{И}} \approx 3/\tau_{\text{И}}$. При численном расчёте доля мощности ПППИ в ширине спектра, найденной по уровню 0.1, составляет 0.964, а по третьему нулю огибающей спектра амплитуд – 0.966.

3.7. Комплексный спектр периодического сигнала

Периодический сигнал $s_{\Pi}(t)$ может быть разложен в ряд Фурье в комплексной форме [4]:

$$s_{\Pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_n \cdot e^{jn \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t}, \quad (3.23)$$

составляющими которого являются комплексные экспоненты с отрицательными и положительными частотами. Наличие в составе сигнала экспонент с отрицательными частотами свидетельствует об отсутствии физического смысла такого ряда. Такой ряд Фурье предназначен только для расчётов.

Коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме могут быть рассчитаны по формуле

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\Pi}} s_{\Pi}(t) \cdot e^{-jn \cdot \Omega_{\Pi} \cdot t} dt, \quad (3.24)$$

из которой, в частности, следует, что при изменении знака номера n , приводящему к изменению знака частоты комплексной экспоненты, коэффициент становится комплексно-сопряжённым по отношению к исходному значению:

$$\dot{C}_{-n} = \dot{C}_n^*.$$

Распределение по частоте модулей $|\dot{C}_n|$ коэффициентов \dot{C}_n ряда Фурье в комплексной форме называют **комплексным спектром амплитуд** периодического сигнала, распределение аргументов коэффициентов $\arg \dot{C}_n$ – **комплексным спектром фаз**. Особенностью комплексного спектра сигнала является его двухсторонний характер, обусловленный наличием в составе сигнала комплексных экспонент с отрицательными частотами. Однако поскольку модули комплексно-сопряжённых коэффициентов равны, а аргументы – противоположны по знаку, **комплексный спектр амплитуд** является

чётной функций частоты (и симметричен относительно оси ординат), а **комплексный спектр фаз** – **нечётной** функцией частоты (и симметричен относительно начала координат). Ниже на рис. 3.17 приведен пример комплексного спектра периодического сигнала в виде двух диаграмм.

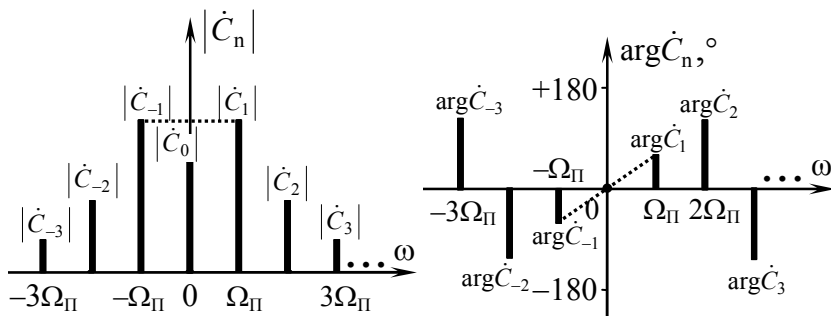


Рис. 3.17

Комплексный спектр периодического сигнала однозначно связан с гармоническим спектром.

Для **перехода от комплексного спектра амплитуд к гармоническому спектру амплитуд** следует отбросить составляющие с отрицательными частотами, составляющую на нулевой частоте (постоянную составляющую сигнала $S_- = \dot{C}_0$) перенести один к одному, а модули коэффициентов \dot{C}_n , определяющие амплитуды гармоник, удвоить. Удвоение связано с тем, что число составляющих в гармоническом спектре вдвое меньше и средняя мощность гармоники вдвое меньше мощности экспоненты, так что $A_{mn}^2/2 = 2 \cdot |\dot{C}_n|^2$.

Гармонический спектр фаз на положительных частотах в точности совпадает с комплексным спектром фаз.

Ниже на рис. 3.18 продемонстрировано соответствие комплексного и гармонического спектров периодического сигнала.

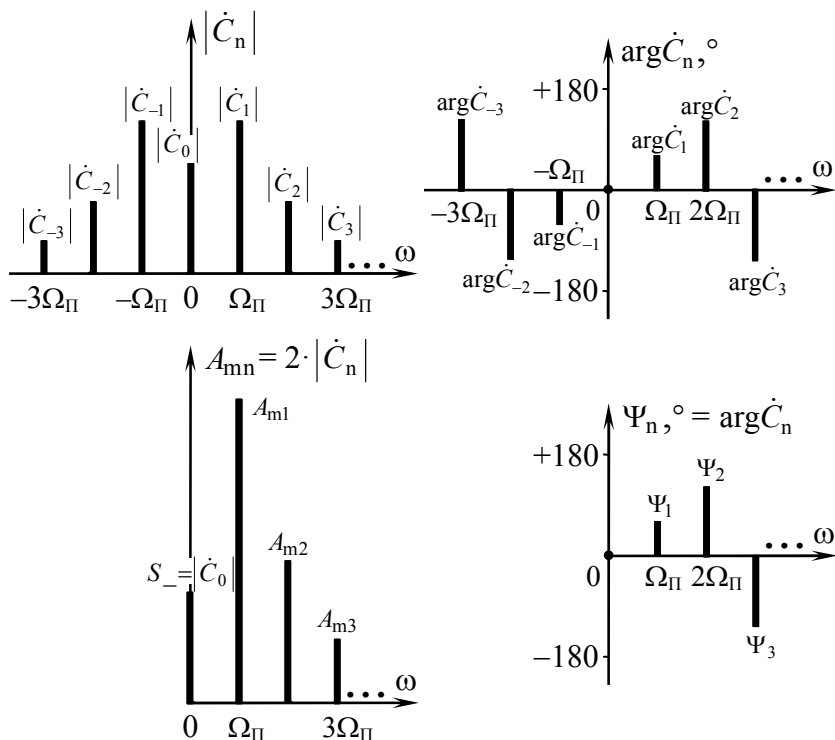


Рис. 3.18

Комплексный спектр сигнала используется при расчёте спектральным методом отклика линейной цепи на нестандартное воздействие.

3.8. Спектральное описание импульсных (непериодических) сигналов

Для выяснения особенностей спектра непериодического импульсного сигнала и подхода к его расчёту имеет смысл воспользоваться математическим аппаратом для спектрального анализа периодических сигналов. Будем полагать, что импульсный сигнал многократно повторяется с периодом, рав-

ным бесконечности ($T_{\Pi} \rightarrow \infty$) так, что в пределах просматриваемой части оси времени наблюдается только один импульс (рис. 3.19).

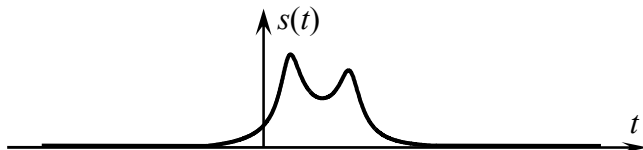


Рис. 3.19

Так как период сигнала равен бесконечности, то основная частота периодического сигнала $\Omega_{\Pi} = 2\pi/T_{\Pi}$, определяющая разнос по частоте соседних спектральных составляющих сигнала, бесконечно мала. Поэтому частотный зазор между спектральными составляющими импульсного сигнала равен нулю, **спектр импульсного сигнала является сплошным**. Заметим, что частоты спектральных составляющих могут быть какими угодно, частоты даже не привязаны к основной частоте, поскольку последняя бесконечно мала. Спектральные составляющие импульсного сигнала не являются гармониками и не подлежат нумерации, так как их номер никак не связан с их частотой.

Попытка расчёта коэффициентов \dot{C}_n ряда Фурье в комплексной форме согласно (3.24):

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\Pi}} s(t) \cdot e^{-jn \cdot \Omega_{\Pi} t} dt, \quad (3.25)$$

приведёт к нулевому результату, поскольку интеграл следует поделить на бесконечную величину периода. Следовательно, **амплитуды спектральных составляющих** импульсного сигнала **бесконечно малы** и спектр амплитуд такого сигнала расчитан быть не может. Бесконечно малая амплитуда составляющих импульсного сигнала обусловлена тем, что таких составляющих в спектре чрезвычайно много, а мощность сигнала

ла конечна. Мощность, приходящаяся на одну спектральную составляющую, в итоге оказывается чрезвычайно малой.

Для спектрального описания импульсных сигналов нужна функция, которая бы принимала конечные значения, но обладала бы всеми свойствами комплексного спектра сигнала. Получить такую функцию несложно из выражения для коэффициентов ряда Фурье в комплексной форме (из формулы (3.25)), отбросив множитель $1/T_{\Pi}$, расширив пределы интегрирования до бесконечных величин и заменив частоты гармоник $n \cdot \Omega_{\Pi}$ текущей частотой ω :

$$\dot{G}_S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (3.26)$$

Сконструированная комплексная функция частоты получила название **комплексной спектральной плотности**, а преобразование вида (3.26) – **прямого преобразования Фурье**.

Если представить комплексную спектральную плотность в показательной форме комплексного числа

$$\dot{G}_S(\omega) = G_S(\omega) \cdot e^{j\psi_S(\omega)},$$

то **модуль** комплексной спектральной плотности будет определять **спектральную плотность амплитуд**, а **аргумент** – **спектр фаз** импульсного сигнала [5].

Спектральная плотность амплитуд импульсного сигнала:

а) является сплошной функцией частоты;

б) совпадает по форме с комплексным спектром амплитуд сигнала (с бесконечно малыми уровнями), но отличается масштабом и размерностью;

в) имеет размерность «единица измерения сигнала / Гц», поэтому численно равна пределу отношения амплитуды составляющей комплексного спектра к полосе частот, в рамках которой она наблюдается, при стремлении полосы к нулю;

г) является двухсторонней чётной функцией частоты (свойство унаследовано от комплексного спектра амплитуд);

однако часто принято графически отображать лишь её поведение в области положительных частот;

5) на нулевой частоте равна площади под кривой, ограничивающей сигнал:

$$\dot{G}_S(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt.$$

Основные свойства спектра фаз импульсного сигнала:

- а) сплошная функция частоты;
- б) совпадает с комплексным спектром фаз;
- в) является двухсторонней нечётной функцией частоты.

Если известна комплексная спектральная плотность импульсного сигнала, то при помощи **обратного преобразования Фурье** можно рассчитать текущие значения сигнала:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_S(\omega) \cdot e^{+j\omega \cdot t} d\omega. \quad (3.27)$$

3.9. Спектральная плотность амплитуд и спектр фаз прямоугольного импульса

Пусть сигнал представляет собой одиночный прямоугольный импульс (рис. 3.20) длительностью $\tau_{И}$ с амплитудой S_0 , симметричный относительно оси ординат.

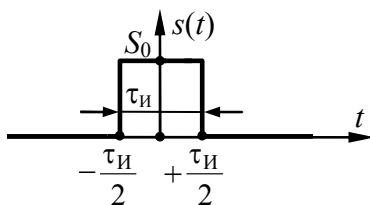


Рис. 3.20

Для описания такого импульса используется функция $\text{rect}(t)$, представляющая собой прямоугольное окно единичной амплитуды и длительности, симметричное относительно оси

ординат. В случае отличной от единицы амплитуды прямоугольного импульса функция $\text{rect}(t)$ в его описании умножается на соответствующее амплитудное значение: $S_0 \cdot \text{rect}(t)$, при неединичной длительности в аргументе после слеша (дробной черты) указывается фактическая длительность импульса:

$$s(t) = S_0 \cdot \text{rect}(t/\tau_{И}).$$

Комплексная спектральная плотность такого импульса

$$\begin{aligned} \dot{G}_S(\omega) &= \int_{-\tau_{И}/2}^{+\tau_{И}/2} S_0 \cdot e^{-j\omega t} dt = S_0 \cdot \frac{e^{-j\omega\tau_{И}/2} - e^{+j\omega\tau_{И}/2}}{-j\omega} = \\ &= S_0 \cdot \tau_{И} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega \cdot \tau_{И}}{2}\right), \end{aligned}$$

как видно, представляет собой функцию «синк» (см. рис. 3.9).

Таким образом, спектральная плотность амплитуд импульса, показанного на рис. 3.20, определяется функцией

$$G_S(\omega) = S_0 \cdot \tau_{И} \cdot \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega \cdot \tau_{И}}{2}\right) \right|, \quad (3.28)$$

описывающей огибающую амплитуд периодической последовательности таких прямоугольных импульсов (3.14). Поскольку комплексная спектральная плотность представляет собой модификацию комплексного спектра амплитуд импульсного сигнала, то между коэффициентами ряда Фурье в комплексной форме для **периодической последовательности импульсов** и комплексной спектральной плотностью **одиночного импульса** простая **связь**:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T_{П}} \cdot \dot{G}_S\left(\omega = \frac{2\pi n}{T_{П}}\right). \quad (3.29)$$

Спектральная плотность амплитуд прямоугольного импульса и его спектр фаз показаны на рис. 3.21. Наличие спектра фаз при действительном характере комплексной спектральной плотности связано исключительно с изменением

знака функции «синк» при переходе от главного лепестка к первому боковому, от второго бокового к третьему и т.д.

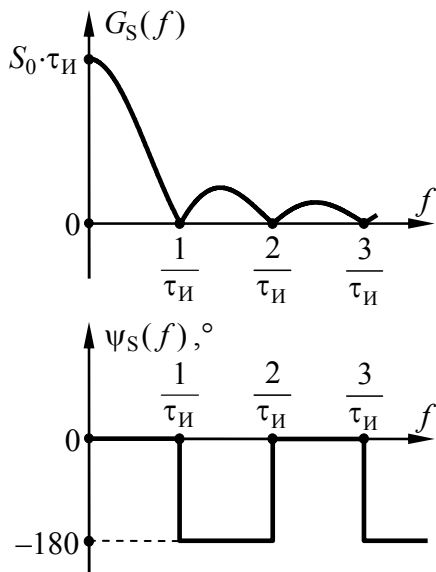


Рис. 3.21

3.10. Энергетические характеристики и практическая ширина спектра импульсного сигнала

Импульсный сигнал принято описывать **энергией**, определяемой интегралом от мгновенной мощности сигнала в пределах его длительности, в предположении, что сигнал выделяется на виртуальном сопротивлении $R = 1$ Ом:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt. \quad (3.30)$$

Вся энергия сигнала распределена между его гармоническими составляющими, число которых бесконечно велико, а огибающая спектра амплитуд описывается спектральной плотностью амплитуд, так что

$$E_S = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_S(f)|^2 df. \quad (3.31)$$

Практическая ширина спектра непериодического импульсного сигнала может быть найдена по тем же критериям, что и для периодического сигнала:

а) по энергетическому критерию — в пределах практической ширины спектра Δf должно быть сосредоточено не менее q -й ($q = 0.9 \dots 0.99$) доли энергии E_S сигнала:

$$2 \cdot \int_0^{\Delta f} |\dot{G}_S(f)|^2 df = q \cdot E_S; \quad (3.32)$$

б) по заданному уровню спектра амплитуд — за пределами практической ширины амплитуды гармоник должны составлять менее $0.1 \dots 0.2$ от максимума спектральной плотности амплитуд;

в) по частоте нуля в спектре амплитуд; верхней граничной частоте ширины спектра должна соответствовать частота первого нуля спектральной плотности амплитуд; по аналогии с прямоугольным импульсом она обратно пропорциональна длительности импульса (см. формулу (3.22)).

3.11. Спектральная плотность дельта-импульса

Дельта-импульсом называют сигнал, описываемый дельта-функцией (функцией Дирака, единичным импульсом):

$$s_\delta(t) = S_0 \cdot T \cdot \delta(t),$$

где $S_0 \cdot T$ — коэффициент, обеспечивающий дельта-импульсу размерность сигнала;

$\delta(t)$ — дельта-функция, принимающая бесконечное значение в нулевой момент времени и равная нулю во все остальные моменты времени; графически дельта-функцию принято

изображать в виде вектора неограниченной (с разрывом) длины (рис. 3.22, а).

Заметим, что площадь дельта-функции (интеграл в пределах, охватывающих момент времени локализации дельта-функции), равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Дельта-функция обладает **стробирующим** или **фильтрующим свойством**. Суть его заключается в том, что интеграл, содержащий дельта-функцию в подынтегральной функции в качестве множителя, равен значению другого множителя подынтегральной функции в момент времени, в который дельта-функция уходит в бесконечность:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = \Phi(t_0). \quad (3.33)$$

Дельта-импульсом принято описывать реальный сигнал, обладающий малой длительностью по сравнению со временем протекания процессов в цепи, на которую он воздействует. В частности, произвольный импульс конечной длительности $\tau_{\text{и}}$, много меньшей постоянной времени цепи $\tau_{\text{ц}}$ (времени запаздывания сигналов в цепи), может быть описан моделью дельта-импульса, при этом коэффициент $S_0 \cdot T$ будет соответствовать площади этого импульса.

Комплексная спектральная плотность дельта-импульса согласно (3.25) с учётом стробирующего свойства дельта-функции (3.33) равна

$$\dot{G}_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \cdot T \cdot \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = S_0 \cdot T \cdot e^{-j\omega \cdot 0} = S_0 \cdot T.$$

Из полученного выражения следует, что **спектральная плотность амплитуд дельта-импульса равномерна** на всех частотах (рис. 3.22, б).

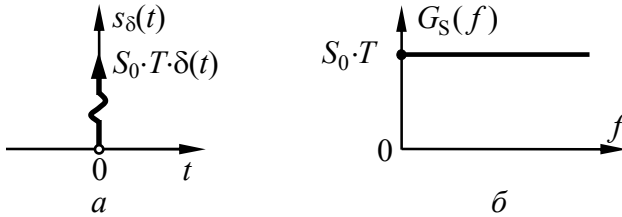


Рис. 3.22

Равномерность спектра амплитуд дельта-импульса означает, что в его формировании участвуют гармонические колебания всех возможных частот от нуля до бесконечности с равными амплитудами.

Если в пределах полосы пропускания цепи спектр амплитуд воздействующего на узкополосную цепь широкополосного импульса является относительно равномерным, то такой импульс может быть описан моделью дельта-импульса. На рис. 3.23 показана спектральная плотность $G_S(\omega)$ прямоугольного импульса, воздействующего на цепь с приведённой здесь же АЧХ $H(\omega)$. Видно, что в пределах значимой части АЧХ спектр воздействующего сигнала практически равномерен, следовательно, импульсный сигнал при расчётах целесообразно заменить дельта-импульсом.

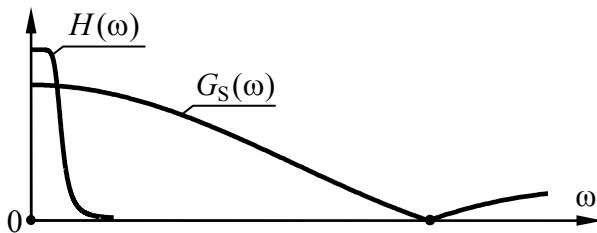


Рис. 3.23

Таким образом, реальный импульс может претендовать на роль дельта-импульса при условии, что его ширина спектра Δf значительно превышает полосу пропускания цепи Δf_c .

3.12. Связь комплексной спектральной плотности сигнала и его изображения по Лапласу

В большинстве случаев аналитический расчёт прямого и обратного преобразования Фурье является весьма трудоёмкой процедурой, облегчить которую можно, используя связь преобразования Фурье и преобразования Лапласа.

Если импульсный сигнал может быть отнесён к категории оригиналов, то его комплексная спектральная плотность $\dot{G}_S(\omega)$ определяется изображением сигнала по Лапласу $S(p)$, в котором переменная p должна быть заменена на $j\omega$:

$$\dot{G}_S(\omega) = S(p)|_{p=j\omega}. \quad (3.34)$$

В случае, когда импульсный сигнал обладает бесконечной энергией, то к правилу отыскания $\dot{G}_S(\omega)$ по $S(p)$ необходимо добавить следующее.

Если изображение по Лапласу $S(p)$ сигнала $s(t)$ имеет полюсы, лежащие на мнимой оси комплексной системы координат, то значение комплексной спектральной плотности $\dot{G}_S(\omega)$, получаемой из $S(p)$ путём замены p на $j\omega$, надо дополнить слагаемым с коэффициентом π , определяемым дельта-функцией, привязанной к координате полюса.

Путь требуется рассчитать комплексную спектральную плотность сигнала, описываемого единичной функцией (рис. 3.24, а). Изображение по Лапласу такого сигнала хорошо известно и равно $1/p$. У такого изображения есть один полюс, лежащий на мнимой оси комплексной системы координат: $p=0$. Следовательно, выражение $1/(j\omega)$ должно быть дополнено слагаемым $\pi \cdot \delta(\omega-0) = \pi \cdot \delta(\omega)$. Тогда комплексная спектральная плотность сигнала, описываемого единичной функцией, имеет вид: $1/(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega)$ (рис. 3.24, б).

Спектральная плотность импульса с бесконечной энергией содержит **особенность типа дельта-функции**.

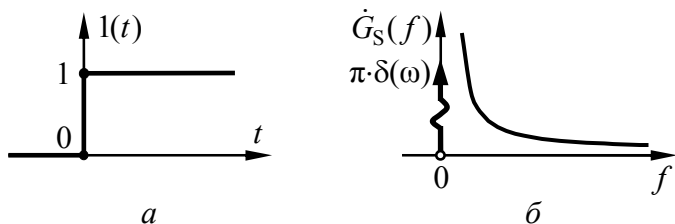


Рис. 3.24

3.13. Теоремы о спектрах

Теоремы о спектрах позволяют предсказать, что произойдёт со спектром сигнала в случае его типового линейного преобразования [4].

Теоремы о спектрах в равной степени справедливы для спектров периодических и импульсных сигналов, однако далее они будут сформулированы для непериодических (импульсных) сигналов.

Пусть имеется исходный импульсный сигнал $s(t)$ с известным спектром $\dot{G}_S(\omega)$.

Теорема подобия. Если сигнал умножается на константу, то на эту же константу умножается его спектр:

$$k \cdot s(t) \rightleftharpoons k \cdot \dot{G}_S(\omega). \quad (3.35)$$

Заметим, что если константа $k > 0$, то все амплитуды гармонических составляющих сигнала изменяются в k раз, спектр фаз сигнала при этом остаётся прежним. Если же $k < 0$, то помимо изменения амплитуд составляющих в $|k|$ раза, наблюдается изменение всех начальных фаз составляющих на $\pm 180^\circ$.

Теорема запаздывания. Если сигнал запаздывает на время t_3 , то его спектр умножается на множитель запаздывания, представляющий собой экспоненту с отрицательным мнимым показателем, определяемым временем t_3 :

$$s(t-t_3) \rightleftharpoons \dot{G}_S(\omega) \cdot e^{-j\omega t_3}. \quad (3.36)$$

Так как модуль комплексной экспоненты равен единице, то спектр амплитуд при запаздывании сигнала не подвергается изменениям. Однако у сигнала меняются начальные фазы всех гармонических составляющих пропорционально их частоте.

Теорема об инверсии аргумента. Если у сигнала время начинает течь вспять (справа налево), то его спектр становится комплексно-сопряжённым:

$$s(-t) \rightleftharpoons \dot{G}_S^*(\omega). \quad (3.37)$$

Спектр амплитуд при этом остаётся прежним, а начальные фазы всех спектральных составляющих меняют свой знак.

Теорема об изменении масштаба. Если аргумент сигнала (время) умножить на неотрицательный коэффициент, то аргумент спектральной функции, как и сама спектральная функция, на тот же коэффициент разделится:

$$s(\alpha \cdot t) \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{G}_S\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (3.38)$$

Заметим, что если коэффициент $\alpha < 1$, то при умножении аргумента на α сигнал расширяется, а спектр сжимается и выпячивается. Если же $\alpha > 1$, сигнал сжимается, а его спектр расширяется и на всех частотах уменьшается.

Теорема о дифференцировании сигнала. При дифференцировании сигнала его спектр умножается на $j\omega$:

$$\frac{ds(t)}{dt} \rightleftharpoons j\omega \cdot \dot{G}_S(\omega). \quad (3.39)$$

В результате спектр на малых частотах значительно «проседает», а на больших частотах приподнимается. Все составляющие получают при этом добавку по фазе на 90° .

Теорема об интегрировании сигнала. При интегрировании сигнала с нулевой площадью его спектр делится на $j\omega$:

$$\int_{-\infty}^t s(t) dt \rightleftharpoons \frac{\dot{G}_S(\omega)}{j\omega}. \quad (3.40)$$

Если площадь интегрируемого сигнала отлична от нуля:

$$P_S = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)dt \neq 0,$$

то к выражению, определяющему спектр проинтегрированного сигнала, следует добавить дельта-функцию, привязанную к нулевой частоте, с коэффициентом π , умноженным на площадь исходного сигнала:

$$\int_{-\infty}^t s(t)dt \rightleftharpoons \frac{\dot{G}_S(\omega)}{j\omega} + \pi \cdot P_S \cdot \delta(\omega). \quad (3.41)$$

Теорема о сумме. Если два сигнала складываются, то суммируются и их спектры:

$$s_1(t) + s_2(t) \rightleftharpoons \dot{G}_{S1}(\omega) + \dot{G}_{S2}(\omega). \quad (3.42)$$

Заметим, что речь идет о сложении комплексных амплитуд составляющих комплексных спектров сигналов, то есть суммирование выполняется с учётом начальных фаз составляющих.

Теорема о свёртке. Если сигналы сворачиваются, их спектры перемножаются:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t-\tau)d\tau \rightleftharpoons \dot{G}_{S1}(\omega) \cdot \dot{G}_{S2}(\omega). \quad (3.43)$$

При перемножении сигналов, их спектры сворачиваются:

$$s_1(t) \cdot s_2(t) \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_{S1}(x) \cdot \dot{G}_{S2}(\omega-x)dx. \quad (3.44)$$

Теорема о смещении спектра. При умножении сигнала на неограниченную во времени гармоническую функцию, его спектр раздваивается и смещается вверх и вниз по частоте на частоту гармонического колебания:

$$s(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \psi_0) \rightleftharpoons \frac{1}{2} \cdot \dot{G}_S(\omega - \omega_0) \cdot e^{j\psi_0} + \frac{1}{2} \cdot \dot{G}_S(\omega + \omega_0) \cdot e^{-j\psi_0}. \quad (3.45)$$

4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

4.1. Суть частотного метода анализа прохождения сигналов через цепь

Пусть на входе линейной цепи с комплексной частотной характеристикой $\dot{H}(\omega)$ действует периодический сигнал $s_1(t)$. Для отыскания **периодического сигнала** $s_2(t)$ на выходе цепи можно использовать **частотный или спектральный метод анализа**, суть которого основана на возможности представления сигналов в виде суммы гармоник и принципе суперпозиции, справедливом для линейных цепей. Методика применения метода отражена следующей цепочкой преобразований:

$$s_1(t) \rightarrow \dot{C}_{n1} \rightarrow \dot{C}_{n1} \cdot \dot{H}(n\Omega_{\Pi}) = \dot{C}_{n2} \rightarrow s_2(t). \quad (4.1)$$

Первым этапом, соответствующим первой стрелке, является разложение входного сигнала $s_1(t)$ в комплексный ряд Фурье, заключающееся в отыскании комплексных коэффициентов \dot{C}_{n1} такого ряда. Поскольку \dot{C}_{n1} с точностью до коэффициента соответствуют комплексным амплитудам гармоник сигнала $s_1(t)$, то для расчёта комплексных амплитуд \dot{C}_{n2} гармоник выходного сигнала цепи $s_2(t)$ достаточно комплексные амплитуды гармоник \dot{C}_{n1} входного сигнала умножить на значения комплексной частотной характеристики цепи $\dot{H}(n\Omega_{\Pi})$, взятой на частотах гармоник $n\Omega_{\Pi}$. Этот важный этап соответствует второй стрелке цепочки. Заключительным этапом (последней стрелкой цепочки) является синтез выходного сигнала $s_2(t)$ с помощью ряда Фурье в комплексной форме по найденным коэффициентам этого ряда \dot{C}_{n2} .

Сущность частотного (спектрального) метода для анализа прохождения **импульсного** (непериодического) сигнала через линейную цепь соответствует следующей цепочке преобразований [5]:

$$s_1(t) \rightarrow \dot{G}_{S1}(\omega) \rightarrow \dot{G}_{S1}(\omega) \cdot \dot{H}(\omega) = \dot{G}_{S2}(\omega) \rightarrow s_2(t), \quad (4.2)$$

где $\dot{G}_{S1}(\omega)$, $\dot{G}_{S2}(\omega)$ – комплексные спектральные плотности сигналов, причём первая стрелка цепочки соответствует операции прямого преобразования Фурье, а последняя – обратного преобразования Фурье.

4.2. Преобразование прямоугольного импульса RC-цепью со съёмом сигнала с ёмкости

Пусть на вход простейшей RC-цепи со съёмом выходного сигнала (в виде напряжения) с ёмкости поступает импульс напряжения прямоугольной формы (рис. 4.1). Требуется рассчитать сигнал на выходе цепи.

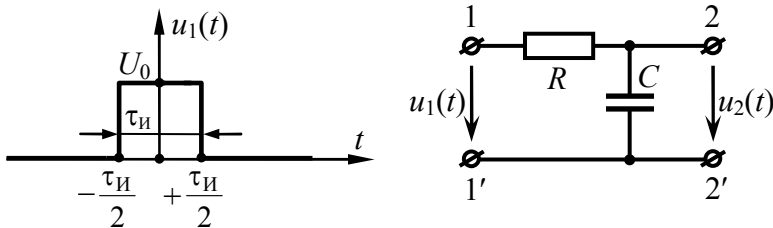


Рис. 4.1

Поскольку напряжение на входе цепи является импульсным (непериодическим), то для расчёта отклика цепи следует использовать цепочку вида (4.2), первым этапом которой является поиск комплексной спектральной плотности входного воздействия. Расчёт комплексной спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса выполнен в п. 3.9, согласно которому

$$\dot{G}_{U1}(\omega) = \int_{-\frac{\tau_{И}}{2}}^{+\frac{\tau_{И}}{2}} U_0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt = \frac{U_0}{j\omega} \left(e^{j\omega \cdot \frac{\tau_{И}}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{\tau_{И}}{2}} \right).$$

Комплексная частотная характеристика анализируемой RC-цепи в виде комплексного коэффициента передачи по напряжению (1.13) получена в п. 1.3:

$$\dot{H}(\omega) = \dot{K}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\cdot\tau},$$

где $\tau = R\cdot C$ – постоянная времени цепи.

В соответствии с (4.2) комплексная спектральная плотность отклика цепи будет определяться как

$$\dot{G}_{U2}(\omega) = \dot{G}_{U1}(\omega)\cdot\dot{K}(\omega) = \frac{U_0}{j\omega}\cdot\left(e^{j\omega\cdot\frac{\tau_{II}}{2}} - e^{-j\omega\cdot\frac{\tau_{II}}{2}}\right)\cdot\frac{1}{1+j\omega\cdot\tau}.$$

Далее следует представить выходной сигнал как обратное преобразование Фурье его комплексной спектральной плотности и разделить полученный интеграл на два:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_0\cdot\left(e^{j\omega\cdot\frac{\tau_{II}}{2}} - e^{-j\omega\cdot\frac{\tau_{II}}{2}}\right)}{j\omega\cdot(1+j\omega\cdot\tau)}\cdot e^{j\omega\cdot t}d\omega = \\ &= \frac{U_0}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\cdot\left(t+\frac{\tau_{II}}{2}\right)}}{j\omega\cdot(1+j\omega\cdot\tau)}d\omega + \frac{U_0}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\cdot\left(t-\frac{\tau_{II}}{2}\right)}}{j\omega\cdot(1+j\omega\cdot\tau)}d\omega. \end{aligned}$$

Чтобы взять интегралы аналитически, следует воспользоваться табличным интегралом:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\cdot(t+\tau)}}{a+j\omega}d\omega = \operatorname{sgn}(\tau)\cdot 1(t+\tau)\cdot e^{-a\cdot(t+\tau)}, \quad (4.3)$$

где $\operatorname{sgn}(\tau)$ – функция взятия знака: $\operatorname{sgn}(\tau) = \begin{cases} +1, & \text{если } \tau \geq 0, \\ -1, & \text{если } \tau < 0; \end{cases}$

$1(t)$ – единичная функция: $1(t+\tau) = \begin{cases} +1, & \text{если } t \geq \tau, \\ 0, & \text{если } t < \tau. \end{cases}$

Предварительно интегралы в $u_2(t)$ следует подогнать под вид табличного интеграла (4.3):

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/\tau + j\omega - j\omega}{j\omega \cdot (1/\tau + j\omega)} \cdot e^{j\omega \left(t + \frac{\tau_{И}}{2}\right)} d\omega + \\
 &+ \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/\tau + j\omega - j\omega}{j\omega \cdot (1/\tau + j\omega)} \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{\tau_{И}}{2}\right)} d\omega = \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega \left(t + \frac{\tau_{И}}{2}\right)}}{j\omega} d\omega - \\
 &- \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega \left(t + \frac{\tau_{И}}{2}\right)}}{1/\tau + j\omega} d\omega + \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega \left(t - \frac{\tau_{И}}{2}\right)}}{j\omega} d\omega - \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega \left(t - \frac{\tau_{И}}{2}\right)}}{1/\tau + j\omega} d\omega.
 \end{aligned}$$

С учётом табличного интеграла (4.3), получаем, что

$$u_2(t) = U_0 \cdot 1\left(t + \frac{\tau_{И}}{2}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t + \tau_{И}/2}{\tau}}\right) - U_0 \cdot 1\left(t - \frac{\tau_{И}}{2}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t - \tau_{И}/2}{\tau}}\right),$$

или с использованием интервального описания функции:

$$u_2(t) = \begin{cases} U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t + \tau_{И}/2}{\tau}}\right) & \text{при } -\tau_{И}/2 \leq t < \tau_{И}/2, \\ U_0 \cdot \left(e^{-\frac{t - \tau_{И}/2}{\tau}} - e^{-\frac{t + \tau_{И}/2}{\tau}}\right) & \text{при } t > \tau_{И}/2. \end{cases} \quad (4.4)$$

Анализ полученного выражения показывает, что передний фронт выходного импульса представляет собой нарастающую экспоненту выпуклостью вверх, а задний фронт формируется преимущественно убывающей экспонентой выпуклостью вниз. Поскольку скорость изменения экспонент, описывающих выходной сигнал, существенно зависит от соотношения между постоянной времени цепи $\tau = R \cdot C$ и длительностью импульса $\tau_{И}$, то, меняя, например, ёмкость C можно обеспечить заметную вариацию формы выходного импульса.

На рис. 4.2 показаны временные диаграммы выходных импульсов RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости для четырёх значений отношения $\tau/\tau_{И} = 0.05, 0.2, 1, 2$.

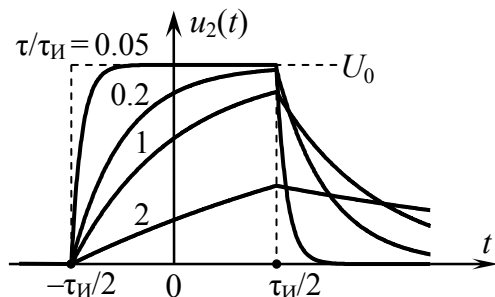


Рис. 4.2

Из рис. 4.2 следует, что искажение формы прямоугольного импульса при его прохождении через RC-цепь со съёмом напряжения с ёмкости проявляется в **конечной крутизне фронтов**. Этот фактор выражен тем сильнее, чем больше постоянная времени цепи $\tau = R \cdot C$ (больше отношение $\tau/\tau_{И}$), следовательно, чем сильнее **завал частотной характеристики** цепи в области **верхних частот**.

Выбор постоянной времени цепи τ зависит от требований, предъявляемых к форме импульса на выходе цепи. Если достаточно, чтобы за время длительности импульса $\tau_{И}$ амплитуда лишь достигала своего максимально возможного значения U_0 , то постоянная времени τ может быть близка к $\tau_{И}$ (см., например, кривую на рис. 4.2, соответствующую $\tau/\tau_{И} = 1$). Форма импульса на выходе цепи при этом далека от прямоугольной.

В тех случаях, когда требуется удовлетворительное воспроизведение формы импульса, постоянная времени τ должна сопоставляться со временем, отводимым на длительность фронта выходного импульса, и быть малой по сравнению с длительностью импульса $\tau_{И}$ (см., например, кривую на рис. 4.2, соответствующую $\tau/\tau_{И} = 0.05$).

Следует отметить, что в случае прохождения через цепь импульсной последовательности проведённый анализ справедлив при достаточно длительном интервале между импульсами, так как только при этом будет отсутствовать наложение фронтов соседних импульсов.

4.3. Преобразование прямоугольного импульса RC-цепью со съёмом сигнала с сопротивления

Пусть теперь импульс напряжения прямоугольной формы действует на входе RC-цепи со съёмом выходного сигнала в виде напряжения с сопротивления (рис. 4.3). По-прежнему требуется рассчитать напряжение на выходе цепи.

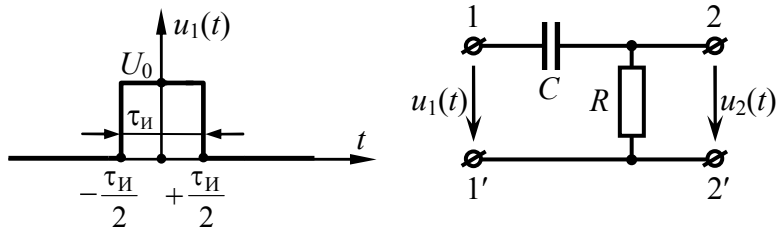


Рис. 4.3

Комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению получен в п. 1.2 и имеет следующий вид:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{j\omega \cdot \tau}{1 + j\omega \cdot \tau},$$

где $\tau = R \cdot C$ – постоянная времени цепи.

Тогда комплексная спектральная плотность импульса на выходе цепи в соответствии с (4.2) будет определяться как

$$\dot{G}_{U_2}(\omega) = \dot{G}_{U_1}(\omega) \cdot \dot{K}(\omega) = \frac{U_0}{j\omega} \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{\tau_{И}}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{\tau_{И}}{2}} \right) \cdot \frac{j\omega \cdot \tau}{1 + j\omega \cdot \tau}.$$

Аналитическое выражение выходного импульса в виде обратного преобразования Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_0 \cdot j\omega \cdot \tau \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{\tau_{И}}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{\tau_{И}}{2}} \right)}{j\omega(1+j\omega \cdot \tau)} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega \cdot \tau \cdot e^{j\omega \cdot \left(t + \frac{\tau_{И}}{2} \right)}}{j\omega(1+j\omega \cdot \tau)} d\omega + \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega \cdot \tau \cdot e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{\tau_{И}}{2} \right)}}{j\omega(1+j\omega \cdot \tau)} d\omega.
 \end{aligned}$$

Подгонка по вид табличного интеграла (4.3) в этом случае требует несколько больших усилий:

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega + 1/\tau - 1/\tau}{j\omega(1/\tau + j\omega)} \cdot e^{j\omega \cdot \left(t + \frac{\tau_{И}}{2} \right)} d\omega + \\
 &+ \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega + 1/\tau - 1/\tau}{j\omega(1/\tau + j\omega)} \cdot e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{\tau_{И}}{2} \right)} d\omega = \\
 &= \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega \cdot \left(t + \frac{\tau_{И}}{2} \right)}}{j\omega} d\omega - \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/\tau \cdot e^{j\omega \cdot \left(t + \frac{\tau_{И}}{2} \right)}}{j\omega(1/\tau + j\omega)} d\omega + \\
 &+ \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{\tau_{И}}{2} \right)}}{j\omega} d\omega - \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/\tau \cdot e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{\tau_{И}}{2} \right)}}{j\omega(1/\tau + j\omega)} d\omega.
 \end{aligned}$$

Заметим, что второй и четвёртый интегралы в описании выходного сигнала адаптированы под табличный вид ранее. С учётом их разложения на два интеграла и приведения подобных интегралов получим

$$u_2(t) = \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega \cdot \left(t + \frac{\tau_{И}}{2} \right)}}{1/\tau + j\omega} d\omega + \frac{U_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega \cdot \left(t - \frac{\tau_{И}}{2} \right)}}{1/\tau + j\omega} d\omega.$$

Применяя табличный интеграл (4.3) применительно к последнему выражению, получаем, что

$$u_2(t) = U_0 \cdot 1\left(t + \frac{\tau_{И}}{2}\right) \cdot e^{-\frac{t+\tau_{И}/2}{\tau}} - U_0 \cdot 1\left(t - \frac{\tau_{И}}{2}\right) \cdot e^{-\frac{t-\tau_{И}/2}{\tau}},$$

или с использованием интервального описания функции:

$$u_2(t) = \begin{cases} U_0 \cdot e^{-\frac{t+\tau_{И}/2}{\tau}} & \text{при } -\tau_{И}/2 \leq t < \tau_{И}/2, \\ U_0 \cdot \left(e^{-\frac{t+\tau_{И}/2}{\tau}} - e^{-\frac{t-\tau_{И}/2}{\tau}} \right) & \text{при } t > \tau_{И}/2. \end{cases} \quad (4.5)$$

На рис. 4.4 показаны временные диаграммы выходных импульсов RC-цепи со съёмом напряжения с сопротивления для четырёх значений отношения $\tau/\tau_{И} = 10, 1, 0.2$ и 0.05 .

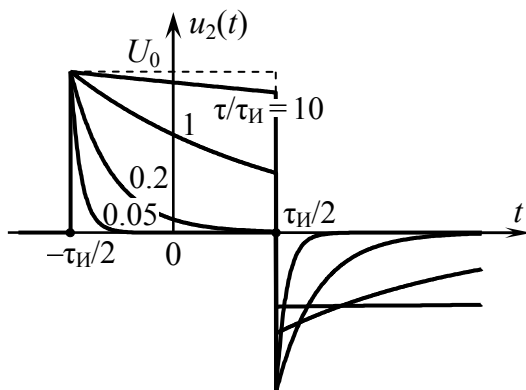


Рис. 4.4

Искажение формы выходного сигнала проявляется в **спаде вершины импульса** при сохранении исходной крутизны фронтов. Проявление этого фактора выражено тем сильнее, чем меньше постоянная времени цепи $\tau = R \cdot C$ (или отношение $\tau/\tau_{И}$) и, следовательно, чем сильнее **завал частотной характеристики** цепи в области **нижних частот**.

Для удовлетворительного воспроизведения формы импульса постоянная времени цепи τ должна быть велика по сравнению с длительностью импульса $\tau_{И}$ (см., например, кривую на рис. 4.4, соответствующую $\tau/\tau_{И} = 10$).

4.4. Частотные характеристики неискажающей цепи

Неискажающей цепью называют линейную цепь, сигнал на выходе которой в точности совпадает по форме с входным сигналом, но отличается уровнем и положением на временной оси. Если сигнал на входе неискажающей цепи представляет собой одиночный импульс $s_1(t)$, то её выходной импульс согласно определению должен иметь вид

$$s_2(t) = K \cdot s_1(t - t_3), \quad (4.6)$$

где K – коэффициент передачи цепи;
 t_3 – время задержки сигнала в цепи.

Заметим, что **любая другая трансформация** сигнала при его прохождении через цепь является **искажением**.

Согласно ранее сформулированным теоремам о спектрах – теореме подобия (3.34) и теореме запаздывания (3.35) – комплексная спектральная плотность выходного сигнала $s_2(t) = K \cdot s_1(t - t_3)$ связана с комплексной спектральной плотностью входного сигнала $s_1(t)$ соотношением

$$\dot{G}_{S_2}(\omega) = K \cdot \dot{G}_{S_1}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_3}. \quad (4.7)$$

С другой стороны, в соответствии с частотным (спектральным) методом анализа цепей комплексные спектральные плотности выходного и входного сигналов связаны друг с другом посредством комплексной частотной характеристики цепи:

$$\dot{G}_{S_2}(\omega) = \dot{G}_{S_1}(\omega) \cdot \dot{H}(\omega). \quad (4.8)$$

Приравняв (4.8) к (4.7), легко получить выражение для комплексной частотной характеристики неискажающей цепи:

$$\dot{H}(\omega) = K \cdot e^{-j\omega \cdot t_3}. \quad (4.9)$$

Так как модуль комплексной частотной характеристики определяет АЧХ цепи, а аргумент – ФЧХ, то АЧХ и ФЧХ неискажающей цепи имеют вид

$$\begin{aligned} H(\omega) &= K, \\ \varphi(\omega) &= -j\omega \cdot t_3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из выражения для АЧХ следует, что **АЧХ** неискажающей цепи **должна быть равномерна** на всех частотах (рис. 4.5, а). Необходимость равномерности АЧХ также вытекает из следующих соображений. Для того чтобы форма сигнала при прохождении через цепь не изменилась, необходимо, чтобы все спектральные составляющие сигнала изменились (ослабились или усилились) в одно и то же число раз. А это возможно лишь в том случае, когда коэффициент передачи (АЧХ) цепи на частотах всех спектральных составляющих сигнала одинаков.

Из (4.10) следует, что **ФЧХ** неискажающей цепи **должна быть линейной** (рис. 4.5, б). Известно, что производная ФЧХ по частоте определяет время запаздывания в цепи гармонического сигнала с текущей частотой ω :

$$t_3(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (4.11)$$

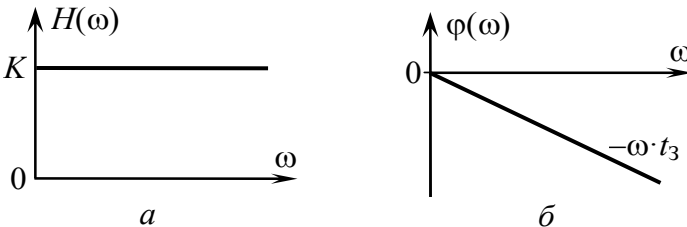


Рис. 4.5

Для совпадения формы выходного сигнала с формой входного сигнала необходимо, чтобы все его спектральные со-

ставляющие проходили через цепь за одно и то же время (время запаздывания). Это возможно лишь в том случае, когда производная ФЧХ по частоте равна константе. А для этого ФЧХ должна быть строго линейной во всей полосе частот.

Таким образом, для неискаженной передачи сигнала с выхода на вход АЧХ цепи должна быть равномерной, а ФЧХ – линейной на всех частотах.

Показанными на рис. 4.5 частотными характеристиками не может обладать ни одна реальная цепь, только идеальная. Однако на практике в этом и нет необходимости. Действительно, спектр реального сигнала сосредоточен в пределах его практической ширины. При удалении от граничных частот практической ширины спектра амплитуды спектральных составляющих сигнала значительно уменьшаются и практически не влияют на форму сигнала. Следовательно, частотные характеристики **реальной неискажающей цепи** должны соответствовать частотным характеристикам идеальной цепи **в пределах практической ширины спектра сигнала и несколько шире**. Условие, при котором цепь с полосой пропускания Π_f является неискажающей по отношению к сигналу с практической шириной спектра Π_f , имеет вид

$$\Pi_f \gg \Pi_f. \quad (4.12)$$

На рис. 4.6 показана АЧХ низкочастотной цепи с полосой пропускания, значительно превышающей практическую ширину спектра действующего на входе этой цепи прямоугольного импульса с изображённым спектром. Видно, что в пределах значимой части спектра входного импульса АЧХ цепи является практически равномерной, т.е. близкой к АЧХ неискажающей цепи. Заметим, что ФЧХ цепей в пределах полосы пропускания относительно линейна. Таким образом, цепь с АЧХ, показанной на рис. 4.6, можно считать неискажающей по отношению к сигналу с изображённым спектром.

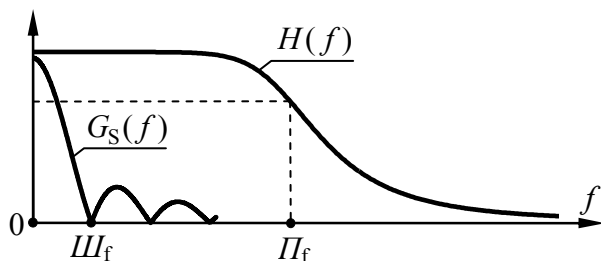


Рис. 4.6

Заметим, что на практике допускается незначительное искажение сигналов в цепях. При этом, как правило, полоса пропускания цепи берётся равной практической ширине спектра обрабатываемых ею сигналов.

Искажения сигнала, обусловленные неравномерностью АЧХ цепи, относят к **частотным искажениям**. Для количественной оценки частотных искажений используют **коэффициент частотных искажений** (M), равный отношению максимального значения АЧХ цепи H_{\max} к значению АЧХ на данной частоте $H(\omega)$. Поскольку наибольшие частотные искажения проявляются на границах полосы пропускания, то при расчёте цепей может быть задан коэффициент частотных искажений на граничных частотах полосы пропускания:

$$M_{\text{гр}} = \frac{H_{\max}}{H(\omega_{\text{гр}})} = 1.41.$$

На рис. 4.7, *a* показано расчётное напряжение на выходе гипотетической цепи с линейной ФЧХ и неравномерной АЧХ, совпадающей по форме с АЧХ простейшей RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости (см. рис. 1.5, *a*). При этом полоса пропускания цепи взята равной ширине спектра входного меандра (см. рис. 3.11), оцениваемой по частоте первого нуля огибающей спектра амплитуд, так что коэффициент частотных искажений на границе полосы пропускания равен 1.41. Из рисунка видно, что подавление на верхних частотах спектральных составляющих по амплитуде при постоянстве их времени запаз-

дывания приводит к специфическому изменению формы сигнала.

Искажения сигнала, вызванные нелинейностью ФЧХ, называются **фазовыми искажениями**. Фазовые искажения не влияют на спектральный состав и соотношение амплитуд гармонических составляющих сигнала, а приводят к изменению его формы в результате неодинаковых временных задержек составляющих сигнала при его прохождении через цепь.

На рис. 4.7, б показано расчётное напряжение на выходе гипотетической цепи с равномерной на всех частотах АЧХ и нелинейной ФЧХ, совпадающей с ФЧХ RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости. Заметим, что обусловленное нелинейностью ФЧХ недостаточное запаздывание по фазе высокочастотных составляющих, формирующих фронты импульсов, приводит к существенному изменению формы фронтов. Напряжение на выходе реальной RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости (с учётом и частотных, и фазовых искажений) изображено на рис. 4.7, в. Отметим, что частотные и фазовые искажения, вносимые цепью в совокупности, называют **линейными искажениями** сигнала.

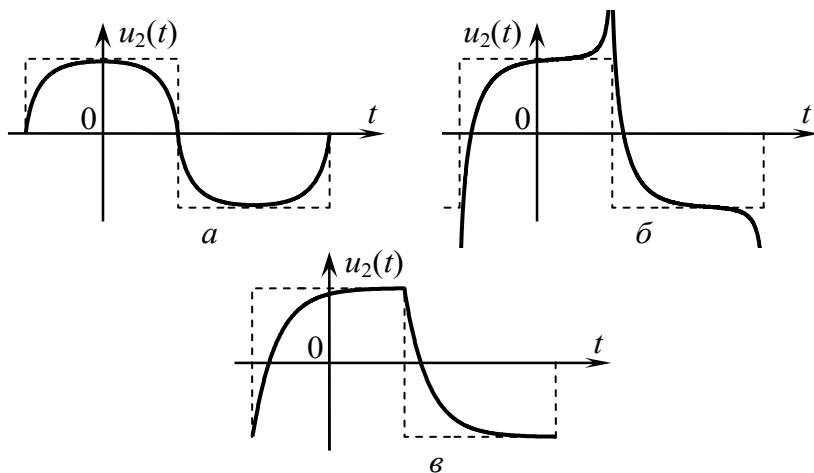


Рис. 4.7

4.5. Частотные характеристики дифференцирующей цепи

Дифференцирующей называют цепь, сигнал на выходе которой пропорционален производной входного сигнала по времени. Если входной сигнал такой цепи – $s_1(t)$, а выходной – $s_2(t)$, то согласно определению дифференцирующей цепи

$$s_2(t) = T \cdot \frac{ds_1(t)}{dt}, \quad (4.13)$$

где T – коэффициент, имеющий размерность времени.

В соответствии с теоремой о дифференцировании сигнала (3.38) и теоремой подобия (3.34) комплексные спектральные плотности сигналов на выходе и входе дифференцирующей цепи должны быть связаны как

$$\dot{G}_{S2}(\omega) = j\omega T \cdot \dot{G}_{S1}(\omega). \quad (4.14)$$

С другой стороны, в соответствии с частотным (спектральным) методом анализа цепей (4.2) связь комплексных спектральных плотностей сигналов на выходе и входе определяется комплексной частотной характеристикой цепи:

$$\dot{G}_{S2}(\omega) = \dot{H}(\omega) \cdot \dot{G}_{S1}(\omega). \quad (4.15)$$

Сравнив выражения (4.15) и (4.14), несложно установить, что комплексная частотная характеристики дифференцирующей цепи имеет вид

$$\dot{H}(\omega) = j\omega T = \omega T \cdot e^{j90^\circ}, \quad (4.16)$$

откуда следует, что **АЧХ** дифференцирующей цепи представляет собой **линейно нарастающую** функцию частоты, а **ФХЧ** на всех частотах определяется значением 90° :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \omega T, \\ \varphi(\omega) &= 90^\circ. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Частотные характеристики дифференцирующей цепи показаны на рис. 4.8.

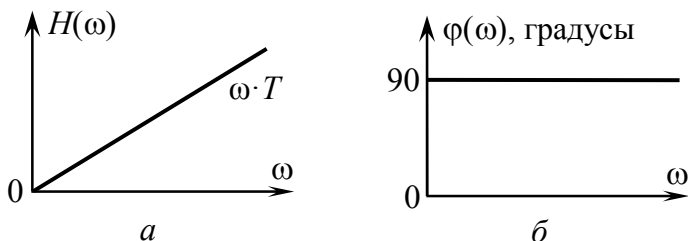


Рис. 4.8

Из рис. 4.8 видно, что при увеличении частоты до бесконечности АЧХ дифференцирующей цепи также устремляется в бесконечность, чего у реальных цепей быть не может. Таким образом, физически реализовать идеальную дифференцирующую цепь, то есть цепь, дифференцирующую сигналы на всех частотах, невозможно.

Однако на практике достаточно, чтобы характеристики цепи, претендующей на роль дифференцирующей, совпадали с требуемыми (идеальными) характеристиками не на всех возможных частотах, а в пределах практической ширины спектра действующего на цепь сигнала и несколько шире.

Рассмотрим частотные характеристики простейшей RC-цепи со съёмом выходного сигнала с сопротивления (рис. 4.9, а), полученные в п. 1.2. Обращает на себя внимание то, что начальный участок АЧХ RC-цепи (рис. 4.9, б), соответствующий частотам, существенно меньшим нижней граничной частоты полосы пропускания $\omega_{гр}$, является линейным, а соответствующий участок ФЧХ (рис. 4.9, в) характеризуется значениями, близкими к 90° . Следовательно, такая RC-цепь способна высококачественно дифференцировать сигналы с практической шириной спектра $\Delta\omega$, много меньшей нижней граничной частоты полосы пропускания цепи $\omega_{гр}$. **Условие качественного**

дифференцирования RC-цепью сигнала может быть трансформировано во временную область

$$\Delta\omega \ll \omega_{гр}. \tag{4.18}$$

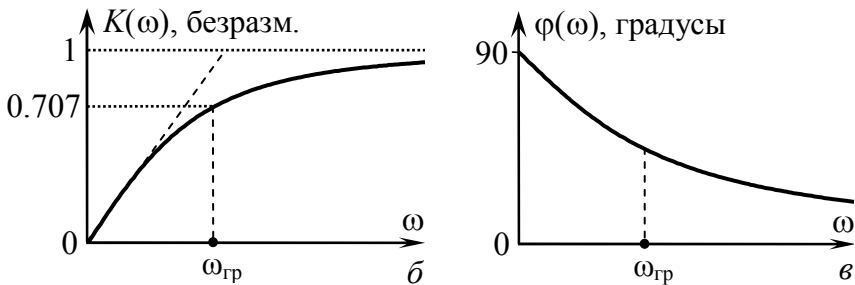
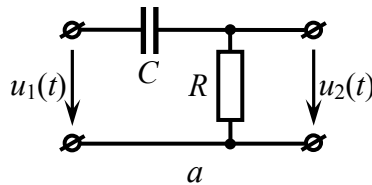


Рис. 4.9

Действительно, практическая ширина спектра любого сигнала обратно пропорциональна его длительности: $\Delta\omega \sim 1/\tau_{И}$, а граничная частота полосы пропускания RC-цепи обратно пропорциональна постоянной времени цепи: $\omega_{гр} = 2\pi/\tau$. Таким образом, из (4.18) вытекает неравенство:

$$\tau \ll \tau_{И}. \tag{4.19}$$

Для качественного дифференцирования RC-цепью входного сигнала достаточно, чтобы её постоянная времени была хотя бы на порядок меньше длительности сигнала.

На рис. 4.10 пунктиром показана временная диаграмма треугольного импульса напряжения, действующего на входе RC-цепи со съёмом выходного напряжения с сопротивления. Там же сплошными линиями приведены нормированные диа-

граммы напряжения на выходе цепи для разных соотношений $\tau_H/\tau = 1, 10, 100$.

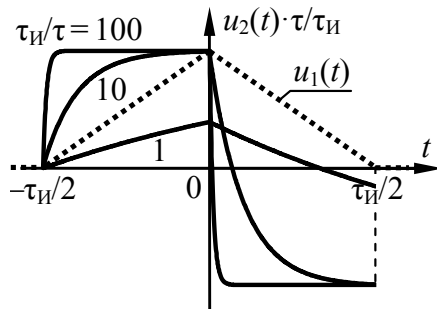


Рис. 4.10

Видно, что наилучшее дифференцирование наблюдается при $\tau_H/\tau = 100$, когда линейно нарастающему фронту входного импульса соответствует положительный постоянный уровень на выходе, а линейно убывающему фронту – отрицательный уровень выходного напряжения.

4.6. Частотные характеристики интегрирующей цепи

Интегрирующей называют цепь, сигнал на выходе которой пропорционален интегралу от входного сигнала. Если сигнал на входе цепи – $s_1(t)$, на выходе – $s_2(t)$, то

$$s_2(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^t s_1(t) dt, \quad (4.20)$$

где T – коэффициент, имеющий размерность времени.

В соответствии с теоремой об интегрировании сигнала (3.39) и теоремой подобия (3.34) комплексные спектральные плотности сигналов на выходе и входе интегрирующей цепи должны быть связаны как

$$\dot{G}_{S_2}(\omega) = \frac{\dot{G}_{S_1}(\omega)}{j\omega T}. \quad (4.21)$$

Однако поскольку связь комплексных спектральных плотностей сигналов на выходе и входе цепи определяется её комплексной частотной характеристикой (4.2), то комплексная частотная характеристики интегрирующей цепи должна определяться выражением:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{j\omega T} = \frac{1}{\omega T} \cdot e^{-j90^\circ}, \quad (4.22)$$

откуда следует, что АЧХ интегрирующей цепи представляет собой **убывающую гиперболу**, а ФХЧ на всех частотах равна «минус» 90° :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{\omega T}, \\ \varphi(\omega) &= -90^\circ. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Частотные характеристики интегрирующей цепи показаны на рис. 4.11.

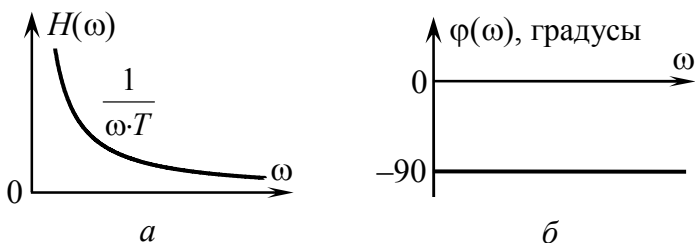


Рис. 4.11

Из рис. 4.11 следует, что при уменьшении частоты до нуля АЧХ интегрирующей цепи устремляется в бесконечность. Таким образом, физически реализовать идеальную интегрирующую на всех частотах цепь невозможно. Однако на практике достаточно, чтобы характеристики цепи совпадали с идеальными характеристиками на частотах спектральных составляющих интегрируемого сигнала.

Рассмотрим частотные характеристики RC-цепи со съёмом выходного сигнала с ёмкости (рис. 4.12, а), полученные в п. 1.3.

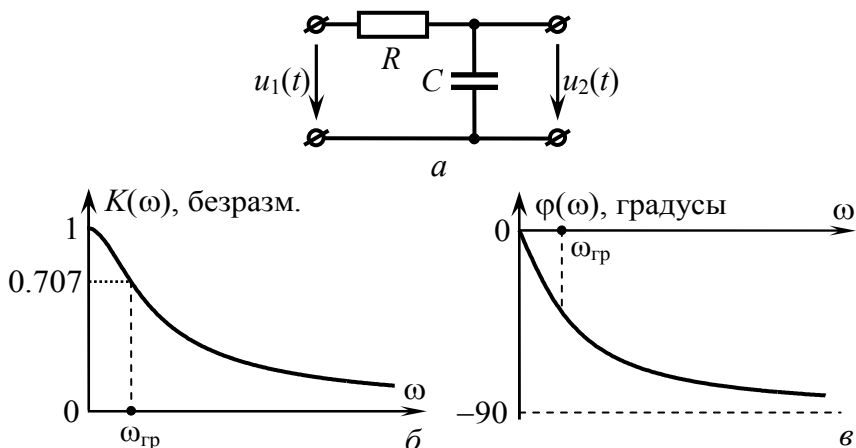


Рис. 4.12

Заметим, что участок АЧХ RC-цепи (рис. 4.12, б), соответствующий частотам, большим верхней граничной частоты полосы пропускания $\omega_{гр}$, является гиперболическим. Это подтверждает анализ АЧХ, выполненный в п. 1.3 и показавший, что при $\omega \gg 1/RC = \omega_{гр}$ выражение для АЧХ упрощается и имеет вид: $K(\omega) \approx 1/(\omega \cdot RC)$, что соответствует гиперболе. Значения ФЧХ (рис. 4.12, в) при $\omega \gg \omega_{гр}$ близки к «минус» 90° . Следовательно, RC-цепь со съёмом сигнала с ёмкости способна интегрировать сигналы, у которых практическая ширина спектра $\Delta\omega$ много больше верхней граничной частоты полосы пропускания цепи $\omega_{гр}$. Таким образом, **условие качественного интегрирования RC-цепью** сигнала имеет вид:

$$\Delta\omega \gg \omega_{гр} \quad (4.24)$$

или при переходе во временную область:

$$\tau \gg \tau_{И}. \quad (4.25)$$

Для качественного интегрирования RC-цепью входного сигнала необходимо, чтобы её постоянная времени была больше длительности сигнала хотя бы на порядок.

На рис. 4.13 пунктиром показана временная диаграмма бинарного прямоугольного импульса напряжения, действующего на входе RC-цепи со съёмом выходного напряжения с ёмкости. Там же сплошными линиями приведены нормированные диаграммы напряжения на выходе цепи для разных соотношений $\tau/\tau_{И} = 0.1, 1, 10$.

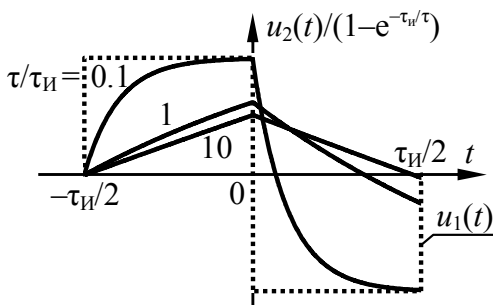


Рис. 4.13

Из рис. 4.13 видно, что наилучшее интегрирование наблюдается при $\tau/\tau_{И} = 10$, т. е. когда бинарному прямоугольному импульсу на входе соответствует практически симметричный треугольный импульс напряжения на выходе.

4.7. Связь импульсной характеристики с комплексной частотной характеристикой цепи, временного метода анализа с частотным

Пусть сигнал на входе линейной цепи представляет собой дельта-импульс: $s_1(t) = S_0 \cdot T \cdot \delta(t)$. Тогда сигнал на выходе цепи будет описываться нормированной импульсной характеристикой цепи $g(t)$: $s_2(t) = S_0 \cdot T \cdot g(t)$. Отсюда следует, что импульсная характеристика цепи равна выходному сигналу $s_2(t)$,

делённому на коэффициент $S_0 \cdot T$. Если выходной сигнал $s_2(t)$ заменить обратным преобразованием Фурье, определяемым его комплексной спектральной плотностью $\dot{G}_{s_2}(\omega)$ –

$$g(t) = \frac{1}{S_0 \cdot T} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_{s_2}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega,$$

и вспомнить, что согласно спектральному (частотному) методу анализа $\dot{G}_{s_2}(\omega) = \dot{G}_{s_1}(\omega) \cdot \dot{H}(\omega)$, а комплексная спектральная плотность $\dot{G}_{s_1}(\omega)$ входного дельта-импульса равна коэффициенту $S_0 \cdot T$ перед дельта-функцией, то несложно получить

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.26)$$

Итак, нормированная импульсная характеристика цепи совпадает с обратным преобразованием Фурье комплексной частотной характеристики цепи. Это означает, что **комплексная частотная характеристика цепи есть прямое преобразование Фурье импульсной характеристики** цепи, или что комплексная частотная характеристика цепи совпадает с комплексной спектральной плотностью импульсной характеристики цепи:

$$\dot{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (4.27)$$

Вернёмся к теореме о свёртке двух сигналов (см. формулу (3.42)), в соответствии с которой при свёртке сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, определяемой соотношением

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t-\tau) d\tau,$$

комплексные спектральные плотности сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ перемножаются: $\dot{G}_{s_1}(\omega) \cdot \dot{G}_{s_2}(\omega)$. Пусть сигнал $s_2(t)$ заменён импульсной характеристикой линейной цепи $g(t)$ с комплексной

спектральной плотностью, равной комплексной частотной характеристике цепи $\dot{G}_{S2}(\omega) = \dot{H}(\omega)$, а $s_1(t)$ – сигнал на входе такой цепи, тогда получим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \iff \dot{G}_{S1}(\omega) \cdot \dot{H}(\omega). \quad (4.28)$$

Слева в (4.28) записан сигнал на выходе цепи, определяемый временным методом анализа цепей (через свёртку входного сигнала с импульсной характеристикой цепи), справа – комплексная спектральная плотность того же выходного сигнала в соответствии со спектральным (частотным) методом анализа цепей. Таким образом, **временной и частотный методы анализа цепей связаны парой преобразования Фурье.**

4.8. Идеальный фильтр нижних частот и его характеристики

Идеальным фильтром нижних частот называют линейную цепь, обеспечивающую неискажённое прохождение полезного сигнала с ограниченным по ширине спектром и подавление других (мешающих) сигналов (помех) с частотами, отличными от частот полезного сигнала.

Требование неискажённого прохождения полезного сигнала через идеальный ФНЧ обуславливает равномерность АЧХ и линейность ФЧХ в пределах частот от нуля до так называемой **частоты среза** (ω_{cp}), определяющей верхнюю границу полосы пропускания фильтра. На частотах, превышающих частоту среза фильтра ω_{cp} , то есть в полосе задерживания, для подавления мешающих сигналов АЧХ идеального ФНЧ должна быть равна нулю. Таким образом, АЧХ идеального ФНЧ должна быть прямоугольной (рис. 4.14, а), а ФЧХ в пределах полосы пропускания, ограниченной частотой среза ω_{cp} , – линейной (рис. 4.14, б). Заметим, что коэффициент прямоугольности АЧХ идеального ФНЧ, введённый в п. 1.5, равен

единице. Следовательно, идеальный ФНЧ обладает максимально возможной избирательностью.

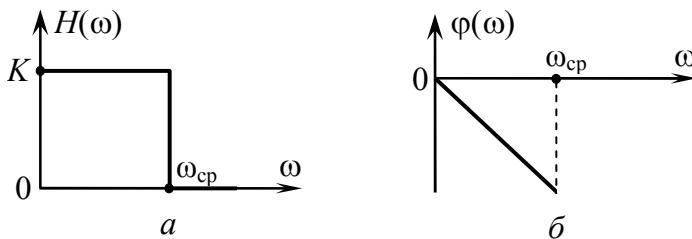


Рис. 4.14

Полагая, что в пределах интервала частот от нуля до ω_{cp} АЧХ идеального ФНЧ равно константе K , а ФЧХ является линейной и имеет наклон, определяемый временем запаздывания t_3 , несложно получить комплексную частотную характеристику идеального ФНЧ, расширив её описание и в область отрицательных частот:

$$\dot{H}(\omega) = \begin{cases} K \cdot e^{-j\omega t_3} & \text{при } -\omega_{cp} \leq \omega \leq \omega_{cp}, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases} \quad (4.29)$$

Для расчёта импульсной характеристики идеального ФНЧ воспользуемся ранее выявленной связью в виде (4.26) между нею и комплексной частотной характеристикой цепи:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}(\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_{cp}}^{+\omega_{cp}} K \cdot e^{-j\omega t_3} \cdot e^{-j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{K}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_{cp}}^{+\omega_{cp}} e^{j\omega \cdot (t-t_3)} d\omega = \frac{K}{2\pi} \cdot \frac{e^{j\omega_{cp} \cdot (t-t_3)} - e^{-j\omega_{cp} \cdot (t-t_3)}}{j \cdot (t-t_3)}. \end{aligned}$$

Разложив по формуле Эйлера экспоненты с комплексными показателями, умножив числитель и знаменатель на ω_{cp} , с учётом того, что $\sin(\omega_{cp} \cdot (t-t_3)) / (\omega_{cp} \cdot (t-t_3)) = \text{sinc}(\omega_{cp} \cdot (t-t_3))$, несложно получить

$$g(t) = \frac{K \cdot \omega_{cp}}{\pi} \cdot \text{sinc}(\omega_{cp} \cdot (t - t_3)). \quad (4.30)$$

Таким образом, импульсная характеристика идеального ФНЧ описывается запаздывающей на время t_3 известной нам функцией «синк» и имеет вид, показанный на рис. 4.15. Заметим, что с учётом полученного аргумента функции «синк», описывающей импульсную характеристику идеального ФНЧ, половина длительности основного лепестка равна длительности первого, второго и последующих боковых лепестков и обратно пропорциональна частоте среза фильтра.

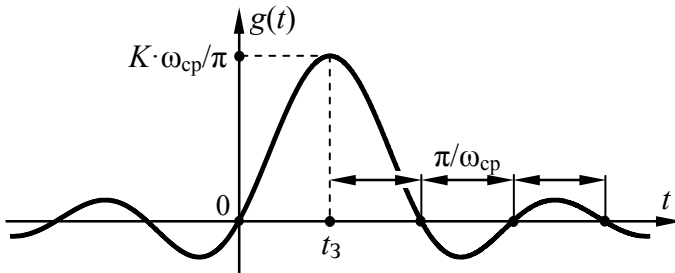


Рис. 4.15

Анализ приведённой на рис. 4.15 импульсной характеристики идеального ФНЧ показывает, что характеристика при отрицательных моментах времени отличается от нуля. Вместе с тем импульсная характеристика представляет собой нормированную реакцию цепи на дельта-импульс, который действует на входе цепи в нулевой момент времени. Наличие на выходе идеального ФНЧ сигнала при отрицательных моментах времени, то есть при отсутствии на входе воздействия, его порождающего, свидетельствует о нарушении причинно-следственной связи. Последнее означает, что в строгом понимании *идеальный ФНЧ физически реализовать невозможно*.

Таким образом, построить фильтр с характеристиками, изображенными на рис. 4.14 – с равномерной в пределах поло-

сы полосе пропускания АЧХ, нулевой передачей в полосе задерживания и скачкообразным переходом от одной полосы к другой – принципиально невозможно. В связи с этим требования к АЧХ физически реализуемого фильтра, помимо сформулированных, должны включать также наличие **полосы перехода (расфильтровки)** – диапазона частот, разделяющего полосы пропускания и задерживания. В полосе расфильтровки происходит плавное изменение АЧХ от значений, характерных для полосы пропускания до значений, допустимых в полосе задерживания.

Следует понимать, что характеристики идеального ФНЧ не только служат ориентиром по степени избирательности и линейных искажений сигналов для реальных ФНЧ. В частности, например, для ФНЧ второго и более высоких порядков, у которых импульсная характеристика имеет лепестковый характер, средняя оценка половины длительности основного лепестка позволяет получить примерное значение полосы пропускания фильтра, поскольку при этом допускается схожесть при $t > 0$ импульсной характеристики реального ФНЧ с характеристикой идеального ФНЧ, показанной на рис. 4.15.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики цепи? С какой целью их определяют? Какова методика расчёта и измерения этих характеристик?

2. Какую цепь называют фильтром нижних частот? Что такое граничная частота и полоса пропускания ФНЧ? Изобразить схему простейшего ФНЧ и графики его АЧХ и ФЧХ.

3. Что такое фильтр верхних частот? Как определяются его граничная частота и полоса заграждения? Изобразить схему простейшего ФВЧ и графики его АЧХ и ФЧХ.

4. Какую цепь называют полосно-заграждающим фильтром? Что такое граничные частоты и полоса заграждения ПЗФ? Изобразить АЧХ и ФЧХ реального ПЗФ.

5. Что такое полосно-пропускающий фильтр? Как определяются его граничные частоты и полоса пропускания? Изобразить схему простейшего ППФ и графики его АЧХ и ФЧХ.

7. Изобразить АЧХ и ФЧХ RC -цепи со съёмом напряжения с ёмкости (сопротивления), указать координаты их характерных точек. Как скажется на частотных характеристиках RC -цепи увеличение сопротивления R ? уменьшение ёмкости C ?

8. Как по ФЧХ установить вид частотно-избирательного фильтра? Если схема ФНЧ (или ФВЧ) содержит один (два) реактивных элемента, то каков сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями в этой цепи на граничной частоте полосы пропускания?

9. Что такое логарифмическая АЧХ цепи и чем обусловлена необходимость её использования? Чем отличается логарифмический масштаб оси частот от линейного масштаба? Что откладывают по оси ординат логарифмической АЧХ?

10. Как по логарифмической АЧХ цепи определить граничные частоты полосы пропускания (заграждения) цепи? Чем обосновано применение такого критерия оценки граничных частот?

11. Пусть коэффициент передачи фильтра по напряжению составляет: а) 1; б) 10; в) 100; г) 150. Каков при этом коэффициент передачи по напряжению в децибелах? На сколько дБ изменится коэффициент передачи по напряжению, если его значение изменилось в 2 раза, в 10 раз, в 20 раз, в 50 раз?

12. Известно, что максимальный коэффициент передачи цепи по напряжению составляет: а) 46 дБ; б) 34 дБ; в) 32 дБ. Какова величина коэффициента передачи в размах?

13. В каком случае колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора, является последовательным (параллельным)? Чем определяется частота и амплитуда вынужденных колебаний в колебательном контуре?

14. Что такое резонанс? Какой тип резонанса (напряжений или тока) имеет место в последовательном контуре? Каковы условия резонанса в последовательном контуре?

15. Какого типа резонанс (напряжения или токов) имеет место в параллельном контуре? В чем заключается внешнее проявление резонанса в параллельном контуре?

16. Каков характер и величина сопротивления последовательного контура при резонансе? Нарисовать схему замещения контура на резонансной частоте. Указать, как определяется резонансная частота контура.

17. Каковы характер и величина сопротивления параллельного контура при резонансе? Во сколько раз его величина отличается от сопротивления последовательного контура с аналогичными элементами при резонансе?

18. Для последовательного контура изобразить частотные зависимости тока, напряжения на ёмкости и индуктивности, полного сопротивления контура, сдвига фаз между напряжением и током. Объяснить их поведение.

19. Что такое добротность колебательного контура? Как она связана с характеристическим сопротивлением контура, его ёмкостью, индуктивностью, сопротивлением потерь? Каковы значения добротности контуров в радиотехнике?

20. Что такое полоса пропускания контура? Как она зависит от добротности? параметров R , L , C контура? Как её определить экспериментально?

21. Как на практике осуществляется перестройка контура по частоте без изменения его полосы пропускания? Изменяются ли при этом добротность и резонансное сопротивление последовательного (параллельного) контура?

22. Как влияет на характеристики контура внутреннее сопротивление источника? Имеет ли смысл запитывать последовательный (параллельный) контур от источника с большим (малым) внутренним сопротивлением? Если нет, почему?

23. Как влияют на вид частотных характеристик последовательного контура, например, зависимости от частоты коэффициента передачи по напряжению, величина сопротивления нагрузки (шунта), подключенной к ёмкости?

24. Предложить и обосновать практические способы снижения влияния шунта (нагрузки) на характеристики последовательного контура.

25. Записать обобщённое уравнение резонансной кривой контура. Чем определяется необходимость его использования? Что такое обобщённая расстройка контура? Чему она равна на границах полосы пропускания контура?

26. Решить задачу. Полоса пропускания последовательного контура составляет 10 кГц, характеристическое сопротивление — 2 кОм. Какой величины сопротивление нагрузки необходимо выбрать, чтобы получить полосу пропускания 15 кГц при резонансной частоте 100 кГц?

27. Решить задачу. Какова ёмкость контура (в пФ), если контур, будучи настроенным на частоту 300 МГц, имеет характеристическое сопротивление 530 Ом?

28. Решить задачу. Определить амплитуду ЭДС источника, запитывающего последовательный контур с характеристическим сопротивлением 100 Ом, сопротивлением потерь 1 Ом. Амплитуда напряжения на ёмкости при резонансе равна 5 В.

29. Что такое гармонический спектр процесса? спектр амплитуд? спектр фаз? Каковы особенности гармонического спектра периодического процесса?

30. Что представляет собой гармоника в составе периодического процесса? Как определяется её частота, амплитуда и начальная фаза?

31. Записать и пояснить выражения для ряда Фурье и коэффициентов разложения в ряд периодического процесса.

32. Изобразить спектры амплитуд и фаз периодической последовательности прямоугольных импульсов. Отметить их характерные точки и указать на их основные особенности.

33. Как влияют на спектр амплитуд последовательности прямоугольных импульсов амплитуда, длительность и период повторения импульсов?

34. Какой вклад в формирование импульса вносят гармоники низшего порядка? высшего порядка?

35. Что такое практическая ширина спектра процесса? По каким критериям её можно определять? Как ширина спектра связана с длительностью импульсов?

36. Как влияет скважность периодической последовательности импульсов на вид её амплитудного спектра? На величину практической ширины спектра?

37. Как в инженерной практике может быть использована практическая ширина спектра процесса? Как она должна соотноситься с полосой пропускания тракта обработки процесса?

38. Записать ряд Фурье в комплексной форме и формулы для вычисления коэффициентов разложения. Как определяют комплексные амплитуды гармоник процесса?

39. Сформулировать теорему запаздывания. Как влияет временная задержка процесса на его спектр амплитуд и фаз?

40. В чём суть теоремы о сумме спектров? Можно ли при отыскании амплитуд гармоник суммарного процесса просто складывать амплитуды гармоник составляющих процесса?

41. Какие изменения характерны для спектра амплитуд и фаз периодического процесса после его дифференцирования (интегрирования)?

42. Что происходит со спектром процесса при его умножении на высокочастотное гармоническое колебание?

43. Сформулировать теорему об изменении масштаба времени. Каким трансформациям подвергнется спектр амплитуд и фаз процесса при увеличении длительности процесса фиксированной амплитуды?

44. В чём состоят изменения спектра амплитуд и фаз процесса при его временной инверсии?

45. Изобразить спектр амплитуд и фаз гармонического напряжения $u(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 104 \cdot t - 30^\circ)$ мВ.

46. Определить путем тригонометрического преобразования, на какие составляющие можно разложить периодическое колебание вида: $u(t) = 100 \cdot \cos 2(2\pi \cdot 106 \cdot t + 45^\circ)$ В. Изобразить его спектр амплитуд и фаз.

47. Чем схожи и чем отличаются спектры одиночного импульсного процесса и периодической последовательности таких импульсов?

48. Что такое комплексная спектральная плотность непериодического (импульсного) процесса? Каковы её свойства? Как на её основе рассчитать спектр периодической последовательности таких импульсов?

49. В чём сущность и особенности практического применения спектрального метода для анализа прохождения сигнала через линейную цепь?

50. Полагая, что импульс в пределах периода последовательности описывается функцией $\text{rect}(t/\tau)$, где $\tau = 1$ мкс, укажите, какой формы будет огибающая спектра амплитуд такого сигнала. На каких частотах она будет обращаться в нуль?

51. Импульсный непериодический сигнал описывается функцией $\text{sinc}(\alpha \cdot t)$, где $\alpha = 10^4 \text{ с}^{-1}$. Укажите, какой формы будет спектральная плотность амплитуд такого импульса. Какова ширина спектра такого импульсного сигнала?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

У студентов, поверхностно ознакомившихся с этим пособием, может сложиться мнение, что дисциплина «Основы теории цепей» (или «Теория электрических цепей») является чисто теоретической и отвлечённой от решения реальных задач радиотехники. Такое мнение является глубоко ошибочным, так как данная дисциплина является фундаментом знаний, умений и навыков, необходимых для анализа и синтеза реальных радиотехнических устройств и систем.

Предложения по совершенствованию пособия, а также отзывы по содержанию пособия автор просит присылать по электронной почте: avostankov@mail.ru.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков, Ю. Н. Основные понятия и законы теории цепей, методы анализа процессов в цепях [Текст]: учеб. пособие / Ю. Н. Новиков. — 3-е изд., испр. и доп. — СПб.: Лань, 2011. — 368 с.

2. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей [Текст]: учебник / Г. И. Атабеков. — 3-е изд., стереотип. — СПб.: Лань, 2009. — 424 с.

3. Попов, В. П. Основы теории цепей [Текст]: учебник для вузов / В. П. Попов. — 4-е изд., испр. — М.: Высшая школа, 2003. — 575 с.

4. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] : учеб. пособие для вузов / И.С. Гоноровский. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Дрофа, 2006. — 719 с.

5. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] : учеб. пособие / С.И. Баскаков. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Высш. шк., 2003. — 462 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- АЧХ – амплитудно-частотная характеристика, 8
- Время запаздывания сигнала в цепи, 126
- ГСА – гармонический спектр амплитуд, 87
- ГСФ – гармонический спектр фаз, 88
- Дельта-импульс, 110
- Дифференцирующая цепь, 130
- Добротность контура, 44
- Идеальный фильтр нижних частот, 138
- Интегрирующая цепь, 133
- Комплексная спектральная плотность, 106
- Комплексная частотная характеристика, 6
- Комплексный коэффициент передачи, 9
- Комплексный спектр амплитуд, 102
- Комплексный спектр фаз, 102
- Коэффициент прямоугольности АЧХ, 27
- КЧХ – комплексная частотная характеристика, 6
- ЛАЧХ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика, 33
- Линейные искажения, 129
- Меандр, 94
- Неискажающая цепь, 125
- Обобщённая резонансная кривая, 54
- Периодический сигнал, 81
- ПЗ – полоса задерживания, 35
- ПЗФ – полосно-заграждающий фильтр, 36
- ПП – полоса пропускания, 22
- ПППИ – периодическая последовательность прямоугольных импульсов, 90
- ППФ – полосно-пропускающий фильтр, 35
- Практическая ширина спектра, 98
- Расстройка, 53
- Резонанс, 38

Ряд Фурье, 85
Скважность, 90
Сопротивление потерь контура, 43
Спектральная плотность амплитуд, 106
Теорема запаздывания, 114
Теорема о дифференцировании сигнала, 115
Теорема о смещении спектра, 116
Теорема о сумме, 116
Теорема об изменении масштаба, 115
Теорема об инверсии аргумента, 115
Теорема об интегрировании сигнала, 115
Теорема подобия, 114
Теорема о свёртке, 116
Фазовые искажения, 129
ФВЧ – фильтр верхних частот, 35
ФНЧ – фильтр нижних частот, 35
Формула Томсона, 41
ФЧХ – фазочастотная характеристика, 8
Характеристическое сопротивление контура, 42
Частотные искажения, 128
Частотный или спектральный метод анализа, 117
Эффект Гиббса, 96

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ	5
1.1. Комплексная частотная, амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики цепи	5
1.2. Частотные характеристики простейшей RC-цепи со съёмом напряжения с сопротивления	10
1.3. Частотные характеристики простейшей RC-цепи со съёмом напряжения с ёмкости	15
1.4. Частотные характеристики делителя напряжения моста Вина	18
1.5. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности АЧХ цепи	21
1.6. Расчёт частотных характеристик цепей лестничного типа	28
1.7. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика цепи	33
1.8. Понятие о частотных фильтрах	35
2. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ.....	38
2.1. Собственные колебания в колебательном контуре....	38
2.2. Вынужденные колебания в контуре	44
2.3. Комплексная проводимость, АЧХ и ФЧХ последовательного контура.....	45
2.4. Вторичные параметры последовательного контура ..	49
2.5. Резонанс напряжений в последовательном контуре..	51
2.6. Уравнение резонансной кривой контура.	
Обобщённые АЧХ и ФЧХ контура	53
2.7. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности колебательного контура.....	56
2.8. Влияние неидеальности источника на частотные характеристики последовательного контура.....	59
2.9. Влияние нагрузки на резонансные свойства последовательного контура.....	61

2.10. Коэффициент передачи последовательного контура по напряжению	64
2.11. Условие резонанса в параллельном контуре. Сопротивление контура при резонансе	67
2.12. Частотные характеристики параллельного контура	71
2.13. Резонанс токов в параллельном контуре	74
2.14. Влияние сопротивлений источника и нагрузки на свойства параллельного контура	76
3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ...	80
3.1. Понятие сигнала. Виды сигналов	80
3.2. Периодическое колебание и его разложение в ряд Фурье	81
3.3. Гармонический спектр периодического колебания...	87
3.4. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов.....	89
3.5. Синтез сигнала по спектру. Эффект Гиббса.....	95
3.6. Распределение мощности в спектре периодического сигнала. Практическая ширина спектра сигнала	97
3.7. Комплексный спектр периодического сигнала	102
3.8. Спектральное описание импульсных (непериодических) сигналов.....	104
3.9. Спектральная плотность амплитуд и спектр фаз прямоугольного импульса.....	107
3.10. Энергетические характеристики и практическая ширина спектра импульсного сигнала.....	109
3.11. Спектральная плотность дельта-импульса	110
3.12. Связь комплексной спектральной плотности сигнала и его изображения по Лапласу	113
3.13. Теоремы о спектрах	114
4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ	117
4.1. Суть частотного метода анализа прохождения сигналов через цепь	117
4.2. Преобразование прямоугольного импульса RC-цепью со съёмом сигнала с ёмкости	118

4.3. Преобразование прямоугольного импульса RC-цепью со съёмом сигнала с сопротивления	122
4.4. Частотные характеристики неискажающей цепи	125
4.5. Частотные характеристики дифференцирующей цепи	130
4.6. Частотные характеристики интегрирующей цепи	133
4.7. Связь импульсной характеристики с комплексной частотной характеристикой цепи, временного метода анализа с частотным	136
4.8. Идеальный фильтр нижних частот и его характеристики	138
Контрольные вопросы	142
Заключение	147
Библиографический список	147
Предметный указатель	148

Учебное издание

Останков Александр Витальевич

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ И ЦЕПЕЙ

Учебное пособие

Редактор Аграновская Н. Н.

Подписано в печать 22. 11. 2021.

Формат 60×84 1/16. Бумага для множительных аппаратов.
Уч.-изд. л. 9,5. Усл. печ. л. 8,8. Тираж 350 экз. Заказ № 180.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026 Воронеж, Московский проспект, 14