

**Р. А. Мухтаров
С. Ю. Гриднев**

**РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ
НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ



Воронеж 2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

Р. А. Мухтаров, С. Ю. Гриднев

РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Воронеж 2022

УДК 624.072.23.001.24(07)

ББК 30.121я7

М926

Рецензенты:

*кафедра механики и компьютерного моделирования
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Ковалев);
А. В. Агарков, ГИП, начальник отдела искусственных сооружений
ООО «Транспроект», канд. техн. наук, доцент*

Мухтаров, Р. А.

Расчет многопролетных неразрезных балок: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (5,4 Мб) / Р. А. Мухтаров, С. Ю. Гриднев. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2022. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв. – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7731-1044-6

В краткой и доступной форме изложены различные подходы к расчёту многопролётных неразрезных балок на опорах различной жёсткости, необходимые для выполнения курсовых проектов, курсовых работ, расчетно-графических и контрольных работ по дисциплине «Строительная механика». Приведён пример расчёта с необходимыми комментариями.

Пособие предназначено для студентов третьего курса, обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство», специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений», всех форм обучения.

Ил. 76. Табл. 4 . Библиогр.: 5 назв.

УДК 624.072.23.001.24(07)

ББК 30.121.я7

*Издаётся по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ISBN 978-5-7731-1044-6

© Мухтаров Р. А., Гриднев С. Ю., 2022
© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2022

ВВЕДЕНИЕ

Неразрезные балки используются в качестве расчётной схемы целого ряда проектируемых и находящихся в условиях эксплуатации реальных многопролетных инженерных конструкций. Неразрезная балка, как расчётная схема, представляет собой сплошной изгибаемый брус, имеющий более двух опор. Она перекрывает несколько пролетов и является статически неопределимой системой. Если сами опоры не деформируются под действием приложенной нагрузки, то их считают жёсткими. В промышленном и гражданском строительстве — это подкрановые балки и ригели рам, в мостостроении — разнообразные неразрезные пролётные строения, в машиностроении — элементы несущей системы кораблей, летательных аппаратов и транспортных средств. Если же опоры получают конечные деформации в направлении опорной связи под действием приложенной нагрузки, то их считают упруго-оседающими, а в общем случае — упруго деформируемыми. В зависимости от жесткости опор неразрезные балки можно разделить на балки на жёстких и упруго-оседающих опорах. Примером неразрезных балок на упруго-оседающих опорах могут служить наплавные мосты на отдельных плавучих опорах, ригели рам с высокими гибкими колоннами, ригели некоторых пространственных рам, различные по способу прокладки и типу транспортируемых веществ трубопроводы.

Неразрезные балки, как правило, перекрывают большие пролёты и могут воспринимать значительные нагрузки. По сравнению с разрезными они являются более экономичными из-за меньших значений изгибающих моментов в пролётах. Внешняя нагрузка, приложенная в произвольном месте пролёта, вызывает изгиб балки на протяжении всей её длины, что является отличительной особенностью неразрезных балок по сравнению с разрезными. Под воздействием внешних нагрузок при изгибе в пролётах растягиваются нижние волокна (ось балки деформируется выпуклостью вниз), над опорами верхние (ось балки деформируется выпуклостью вверх). Такое чередование участков растянутых и сжатых зон приводит к уменьшению величины изгибающего момента в средних сечениях пролётов и разгружает их. Неразрезные балки в зависимости от изгибной жёсткости могут выполнять роль элементов, перераспределяющих усилия в составе комбинированных систем или стабилизирующих оптимизирующих такие системы при неравномерной нагрузке. Крайние опоры неразрезной балки устраиваются в виде шарнирно неподвижной или жёсткой заделки, а все остальные опоры шарнирно подвижные. Это обеспечивает геометрическую неизменяемость балки при действии горизонтальных или наклонных нагрузок.

Наиболее ответственной задачей при проектировании какого-либо сооружения является выбор расчётной схемы. Известно, что расчётная схема должна учитывать основные свойства инженерного сооружения как несущей системы и по возможности исключать второстепенные. От удачного выбора рациональной, в полной мере учитывающей все реальные свойства констр-

ций и при этом, по возможности, простой расчётной схемы зависит точность и трудоемкость дальнейшего расчёта сооружения.

Учебно-методическое пособие по разделу строительной механики «Статика плоских стержневых систем» составлено в соответствии с учебной программой для студентов всех форм обучения, обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство», специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» (специализации «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений» и «Строительство автомагистралей, аэродромов и специальных сооружений») очной и заочной форм обучения.

В учебном пособии приводится описание основных методов расчёта неразрезных многопролетной балок на жёстких и упруго-оседающих опорах на действие постоянной и временной нагрузок. Подробно приведены примеры расчёта разными методами. Для балки на жёстких опорах с помощью вычислительной программы для ПК строится линия влияния изгибающего момента в заданном сечении пролёта и объёмлющие эпюры от действия временной нагрузки в этом же пролёте. Здесь также строится объёмлющая эпюра от совместного действия постоянной и временной нагрузок.

Все рисунки, приведённые в данной работе, выполнены авторами.

1. ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЁТНОЙ РАБОТЫ

В задании рассматривается статически неопределимая многопролётная неразрезная балка, которая рассчитывается на действие постоянной (совокупности распределённых и сосредоточенных сил) и временной (равномерно распределённой) нагрузок.

Расчётная схема неразрезной балки, положение и величины постоянных нагрузок, положение сечения " k " для построения линии влияния изгибающего момента M_k в этом сечении, величина временной нагрузки принимаются в соответствии с данными выдаваемого студенту бланка, содержащего все исходные величины нагрузок и геометрических параметров.

Для выполнения работы требуется предварительная проработка теоретической части по соответствующим главам учебников строительной механики и разделам лекций по тому же курсу.

2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

По условиям задания в расчётной работе требуется:

Выполнить расчет балки на заданную постоянную нагрузку

1. Вычертить многопролётную неразрезную балку с действующей на неё постоянной нагрузкой. Отметить сечение " k ". Выполнить нумерацию опор и пролетов;

2. Выполнить кинематический анализ расчетной схемы балки;

3. Построить эпюры M и Q на консолях (если они предусмотрены заданием), вычислив и подписав характерные ординаты (у крайних опор);
4. Образовать основную систему для расчета методом сил с нумерацией основных неизвестных, опор и пролетов. Консоли отбросить. Показать постоянную нагрузку и основные неизвестные (опорные моменты), а также моменты на торцах крайних пролетов, выписав их величины и знаки;
5. Составить систему уравнений трех моментов;
6. Построить для каждого пролёта, как для отдельной балки, эпюры M_p и Q_p от постоянной нагрузки со всеми необходимыми для этого расчётами;
7. Вычислить по эпюрам M_p статические моменты, входящие в правые части системы уравнений трех моментов;
8. Записать систему уравнений трех моментов в развёрнутом виде с числовыми коэффициентами и значениями правой части;
9. Определить значения основных неизвестных и выполнить их проверку с подстановкой уравнения с оценкой погрешности;
10. Построить окончательные эпюры M и Q для заданной системы;
11. Вычислить и проверить опорные реакции.

Выполнить расчет балки на действие временной распределённой нагрузки

Расчёт на временную нагрузку выполняется с использованием персонального компьютера по программе, разработанной сотрудниками кафедры строительной механики ВГТУ, в следующей последовательности:

1. Построить линию влияния изгибающего момента в заданном сечении по результатам расчёта на персональном компьютере;
2. Определить изгибающий момент M_k в заданном сечении "k" от действия постоянной нагрузки загрузением построенной линии влияния;
3. Построить объемлющую эпюру от действия временной нагрузки в заданном пролёте;
4. Определить максимальный и минимальный возможный изгибающий момент в заданном сечении от действия временной нагрузки загрузением линии влияния;
5. Заполнить таблицу сравнения значений M_k от действия постоянной и временной нагрузок, определённых непосредственным расчётом и загрузением линии влияния;
6. Построить объемлющую эпюру от совместного действия постоянной и временной нагрузок в заданном пролёте.

3. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1. Нумерация опор неразрезной балки осуществляется слева направо, начиная с нулевой, пролёты в той же последовательности — начиная с первого.

Консоль в нумерацию пролётов не включается (рис. 1, а). В дальнейшем m обозначает число пролётов, n — номер рассматриваемого пролёта (или опоры).

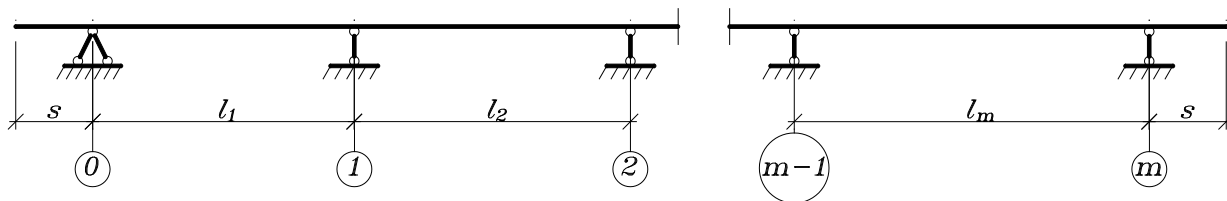


Рис. 1: а) Балка с шарнирным опиранием. Нумерация опор и пролётов

Если концы балки защемлены, каждое защемление схематизируется как две бесконечно близкие опоры; соответственно нумеруются опоры и пролеты (рис. 1, б). В составленных уравнениях полагают $l_1 \rightarrow 0$, $l_m \rightarrow 0$.

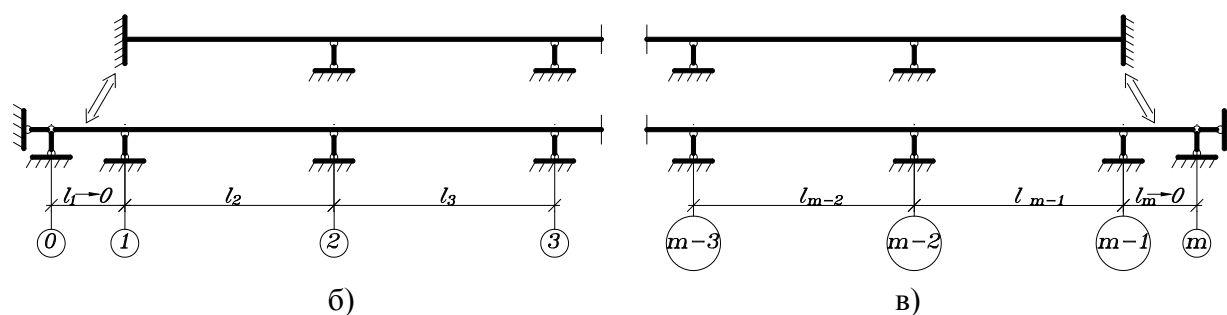


Рис. 1: б) и в). Балка с жёсткой заделкой. Нумерация опор и пролётов

3.2. Число степеней свободы (ст.св.) W и число избыточных связей L определяется по упрощенной формуле

$$W = 3 - C_0, \quad L = -W, \quad (3.1)$$

где C_0 — число опорных стержней.

Заметим, что степень статической неопределимости (число избыточных связей L) у неразрезной балки равна числу промежуточных опор.

3.3. Консоли являются статически определимыми участками неразрезной балки (хотя неразрезная балка в целом — статически неопределима). Следовательно, эпюры Q и M на консольных участках балки строятся обычными приёмами. При их построении удобно использовать типовые эпюры для консольной балки, загруженной на конце равномерно распределённой нагрузкой (рис. 2. а, в) и сосредоточенной силой (рис. 2. б, г).

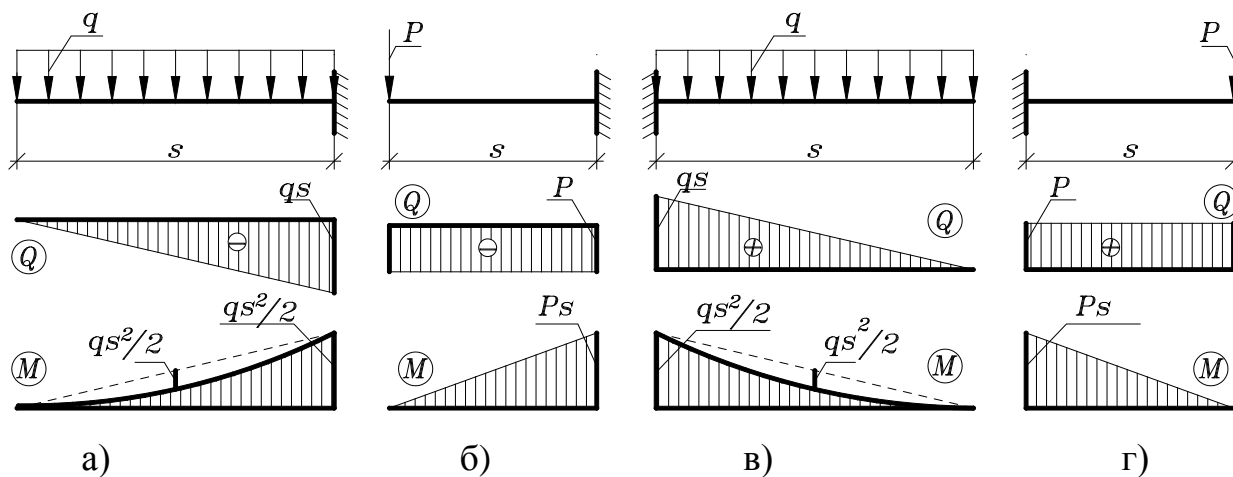


Рис. 2. Типовые эпюры для консольной балки

3.4. **Основная система** при расчёте методом сил образуется из заданной системы мысленным удалением избыточных связей. В данном случае мысленным введением шарниров над всеми промежуточными опорами (1, 2, ..., $m - 1$) превращают неразрезную систему в разрезную, и появляется возможность взаимного поворота торцов балок двух соседних пролётов над промежуточной опорой. На этом этапе удобно мысленно отбросить консольные свесы (рис. 3. а, б).

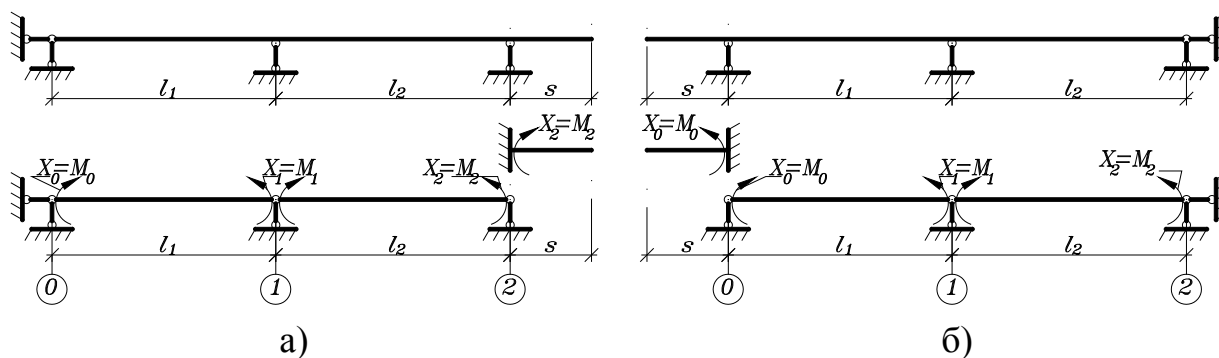


Рис. 3. Расчётная схема балок с консолью

Введение каждого шарнира равносильно удалению из заданной системы одной связи, исключающей взаимный поворот двух смежных торцов. Реакцией в удалённой связи служит «групповая сила» — две пары, представляющие собой изгибающие моменты в сечении неразрезной системы над промежуточными опорами. Они обозначаются (X_1, X_2, \dots, X_{m-1}) и являются основными неизвестными расчёта.

Аналогично обозначаются изгибающие моменты над крайними опорами X_0 и X_m , но они не являются неизвестными, т.к. уже определены расчётом консолей. Если консолей нет или они не нагружены, то X_0 и X_m равны нулю.

Используемый вариант основной системы является наиболее рациональным. Основную систему можно образовать и другими способами, но тогда

расчёт нельзя будет выполнить с помощью **уравнений трёх моментов**, которая получена для выбранного варианта основной системы.

3.5. При построении эюр Q_p и M_p в основной системе использовать известные эюры для однопролётных балок длиной пролета l с равномерно распределённой нагрузкой (рис. 4). Площадь параболического сегмента эюры M_p равна:

$$\omega = \frac{2}{3} \cdot f \cdot l, \quad (3.2)$$

где f — стрела параболического сегмента.

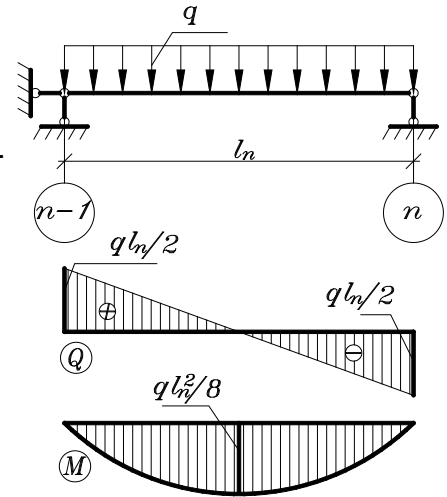


Рис. 4. Эюры Q и M от q

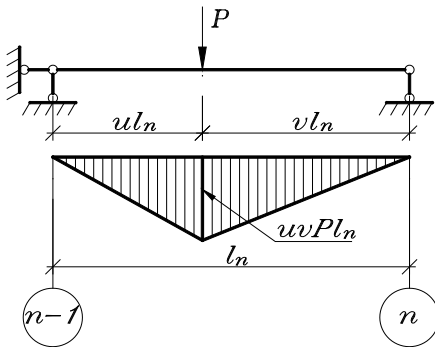


Рис. 5. Эюра M от P

Отметим другой частный случай нагрузки (рис. 5) — пролёт загружен одиночной силой P . Её положение в n -ом пролете определено отрезками $u \cdot l_n$ и $v \cdot l_n$, где u, v — безразмерные числа ($u + v = 1$). Вид эюры и формула для максимальной ординаты приведены на рис. 5.

3.6. **Уравнения трёх моментов (УТМ)** получены развертыванием условия кинематической эквивалентности основной и заданной систем неразрезной балки в виде канонических уравнений метода сил. Их смысл — тождественность перемещений основной и заданной систем. Из этого следует, что над каждой n -ой промежуточной опорой взаимный угол поворота Δ_n двух соседних торцов, прилегающих к шарниру в основной системе, должен быть равен нулю (рис. 6). Из условия $\Delta_n = 0$ и вытекает n -ое каноническое уравнение метода сил, после развертывания и подстановки коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений принимающее вид уравнения трёх моментов (УТМ):

$$l_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{S_n^A}{l_n} + \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} \right), \quad (3.3)$$

где $S_n^A = \omega_n \cdot c_n$, $S_{n+1}^B = \omega_{n+1} \cdot d_{n+1}$ — статические моменты эюр M_p в основной системе;

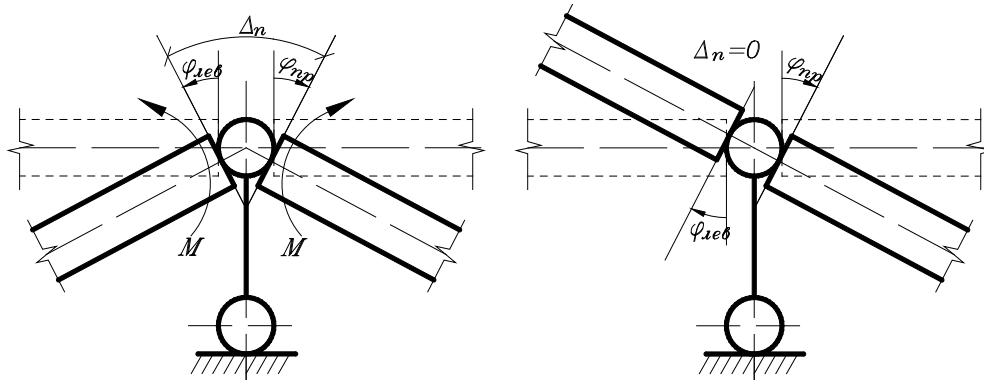


Рис. 6. Взаимный угол поворота торцов, прилегающих к шарниру

ω_n, ω_{n+1} — площади участков эюры M_p (нумерация по пролетам, рис. 7); на рисунке $c_n, d_n, c_{n+1}, d_{n+1}$ — расстояние центров тяжести этих участков эюр от левого и правого конца пролета.

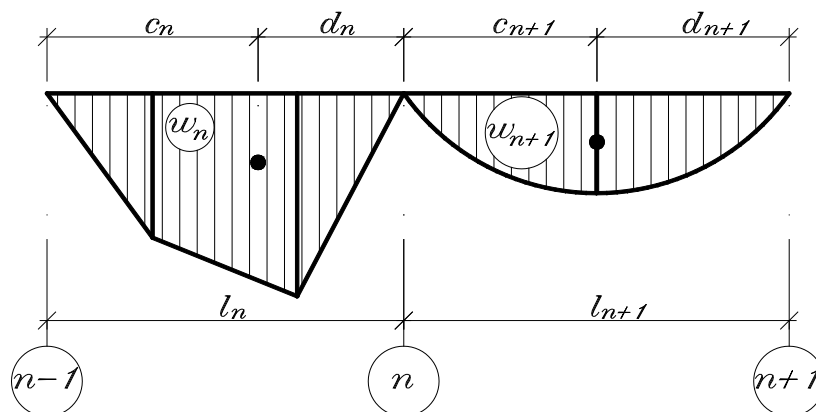


Рис. 7. Эюры M_p и расположение центров тяжести

Эюры M_p сложного очертания разбиваются на простейшие фигуры, после чего S_n^A и S_{n+1}^B вычисляются как суммы статических моментов всех частей эюры, т.е. $S_n^A = \sum \omega_i \cdot c_i$, $S_{n+1}^B = \sum \omega_i \cdot d_i$.

Замечание. Во многих учебниках стоящие в правой части (3.3) величины названы «фиктивными опорными реакциями» из-за их совпадения со значениями опорных реакций балок от принимаемой за «фиктивную нагрузку», в качестве которой принимается эюра M_p .

Если нагрузка, и, следовательно, эюра M_p симметрична относительно середины пролета, то отрезки $c_n = d_n = l_n/2$. При этом

$$\frac{S_n^A}{l_n} = \frac{\omega_n \cdot c_n}{l_n} = \frac{\omega_n \cdot l_n}{2 \cdot l_n} = \frac{\omega_n}{2}, \quad \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} = \frac{\omega_{n+1} \cdot d_{n+1}}{l_{n+1}} = \frac{\omega_{n+1} \cdot l_{n+1}}{2 \cdot l_{n+1}} = \frac{\omega_{n+1}}{2}$$

и уравнение (3) приводится к виду:

$$l_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} = -3 \cdot (\omega_n + \omega_{n+1}). \quad (3.4)$$

Подставляя в типовое уравнение трех моментов (3.3) или (3.4) последовательно $n = 1, 2, 3, \dots, m - 1$, получим систему уравнений для определения основных неизвестных. В первое и последнее уравнения войдут также известные M_0 и M_m .

3.7. Найденные при решении системы УТМ значения M_1, M_2 и т.д. надо округлить, сохранив 3–4 значащих цифр. Проверка выполняется подстановкой их в УТМ, и допустимые «невязки» определяются принятым уровнем округления (решения, округленные до 0,1 кНм, содержат погрешность в пределах $\pm 0,05$ кНм). Подробнее — см. пример расчета.

3.8. Окончательная эпюра M может быть построена графически. Вычисленные и проверенные значения основных неизвестных откладываются с учётом знака над соответствующими опорами и, соединяя эти ординаты пунктирной линией, получают линию опорных моментов. Затем к данной линии на каждом пролёте балки подвешивают эпюру M_p , т. е. эпюру моментов простой однопролётной балки. Следовательно, на эпюру M_p простой однопролётной балки накладывается трапецеидальная (параболическая, треугольная, ...) эпюра, обусловленная влиянием двух опорных моментов. Следует отметить, что на незагруженном пролёте эпюра изгибающих моментов M линейная, а на загруженном равномерно распределённой нагрузкой пролёте — нелинейная, и очерчена квадратной параболой. Участки с параболическим очертанием в работе необходимо построить графически по трем ординатам (рис. 8).

Над опорами $(n - 1)$ и n , расположенными по концам n -го пролета длиной $ab = l_n$, откладываем известные значения изгибающих моментов $aa_1 = M_{n-1}$ и $bb_1 = M_n$. Через середины отрезков ab и a_1b_1 (точки c и c_1) проводим перпендикуляр к базовой линии ab , на котором в дальнейшем откладываем отрезок равной удвоенному произведению стрелы параболы, т.е. $c_1c_2 = 2f = 2 \cdot (q \cdot l_n^2/8)$. Отрезки a_1c_2 и b_1c_2 , полученные путём соединения точки c_2 с точками a_1 и b_1 , делим на одинаковое чётное число (например, на 10 равных частей). Точки деления нумеруем, как показано на рис. 8. Соединив прямыми линиями одноименные точки, получим ряд касательных к параболе (рис. 8), весьма точно определяющих её очертание. Крайними касательными служат a_1c_2 и b_1c_2 .

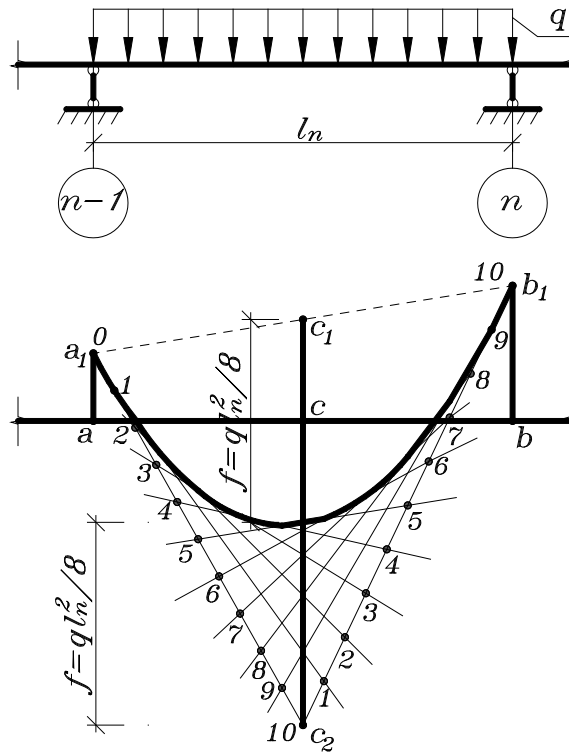


Рис. 8. Способ построения M от q

3.9. Поперечные силы в заданной системе Q_n строятся суммированием поперечных сил в основной системе Q_{pn} с величиной ΔQ_{pn} , постоянной для каждого пролета, и строятся по формуле

$$Q_n = Q_{pn} + \Delta Q_n, \quad (3.5)$$

где $\Delta Q_n = (M_n - M_{n-1})/l_n$ — дополнительная поперечная сила от действия основных неизвестных в n -ом пролете.

3.10. Если на участке балки $k - i$ длиной x известны значения Q_k и M_k , то согласно рис. 9, имеем:

$$Q_i = Q_k - q \cdot x,$$

$$M_i = M_k + Q_k \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2}.$$

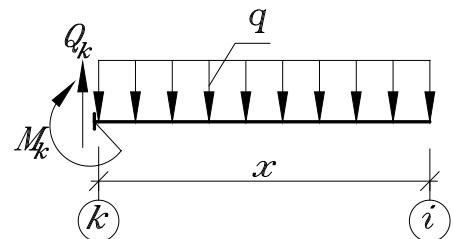


Рис. 9

Приравнявая выражение для Q_i к нулю, получаем уравнение для определения положения нулевых точек эпюр, в которых M_i достигает экстремума.

3.11. Опорные реакции R_n от заданной нагрузки определяются из условия равновесия ($\sum Y = 0$) бесконечно малого участка балки над этой опорой с учетом уже известных значений Q справа и слева от опоры. Для проверки реакций служат условия равновесия ($\sum Y = 0$) балки в целом. Заметим, что оно контролирует только вычисления Q и R_n , а ошибки в составлении и решении УТМ этой проверкой не обнаруживаются.

3.12. Выполняется расчёт на ПЭВМ для построения линии влияния изгибающего момента в заданном сечении и объемлющей эпюры от действия временной нагрузки для пролёта, в котором задано сечение. На печать при этом выдаются ординаты линии влияния изгибающего момента и объемлющей эпюры (максимальные и минимальные значения) с шагом $\frac{1}{10}l$, которые далее откладываются от базы линии влияния и базы объемлющей эпюры соответственно со своими знаками. Для окончательного построения отложенные ординаты последовательно соединяются плавными кривыми линиями.

3.13. Определяется изгибающий момент M_k в заданном сечении от действия постоянной нагрузки загрузением линии влияния по формуле

$$z = \sum_{i=1}^{n_1} P_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n_2} q_i \cdot \omega_i, \quad (3.6)$$

где P_i — величина сосредоточенной силы;

y_i — ордината линии влияния в сечении, где приложена сосредоточенная сила;

q_i — интенсивность равномерно распределённой нагрузки;

ω_i — площадь линии влияния под распределённой нагрузкой.

3.14. Определяется максимальный и минимальный изгибающие моменты в заданном сечении от действия временной нагрузки загрузением сначала только участков линии влияния с положительными ординатами, а затем — только с отрицательными ординатами. В этом случае при определении изгибающих моментов в заданном сечении загрузением линии влияния от действия временной нагрузки $M_{вр(k)}^{max}$ и $M_{вр(k)}^{min}$ в формуле (3.6) используется только второе слагаемое данной формулы;

3.15. Заполняется таблица сравнения значений M_k от действия постоянной и временной нагрузок, определённых непосредственным расчётом и загрузением линии влияния;

3.16. Строится объемлющая эпюра от совместного действия постоянной и временной нагрузок в заданном пролёте. При этом ординаты эпюры $M_{пост}$ алгебраически суммируются сначала отдельно с ординатами $M_{вр}^{max}$ и затем отдельно с ординатами $M_{вр}^{min}$

$$\left. \begin{aligned} M_{max} &= M_{пост} + M_{вр}^{max} \\ M_{min} &= M_{пост} + M_{вр}^{min} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

4. ПРИМЕР РАСЧЁТА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ

4.1. Задание

Расчётная схема неразрезной балки и исходные данные (рис. 10).

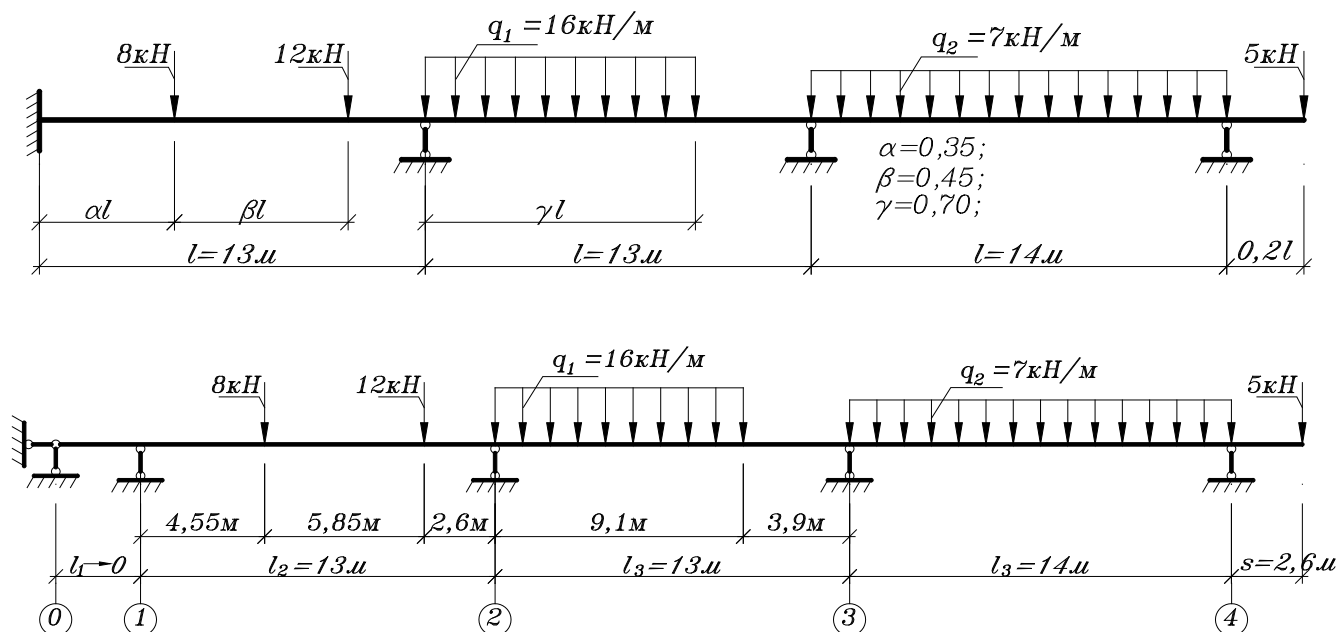


Рис. 10. Исходные данные для расчёта

4.2. Определение числа степеней свободы (степень статической неопределимости)

$$W = 3 - C_0 = 3 - 6 = -3,$$

$$L = -W = 3.$$

Диск «балка» прикреплен к диску «земля» с помощью шести стержней не параллельных и не пересекающихся в одной точке. Для их объединения достаточно трёх таких стержней. Система три раза статически неопределима и геометрически неизменяема.

4.3. Расчёт балки на действие постоянной нагрузки

Заданная система (рис. 11)

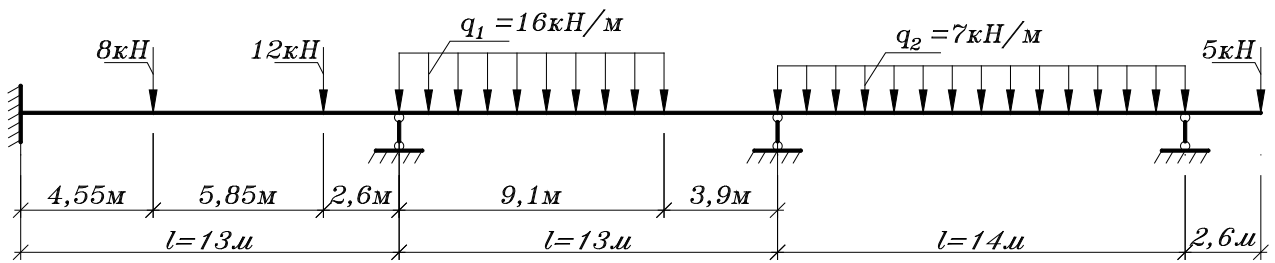


Рис. 11. Заданная система

Основная система (рис. 12)

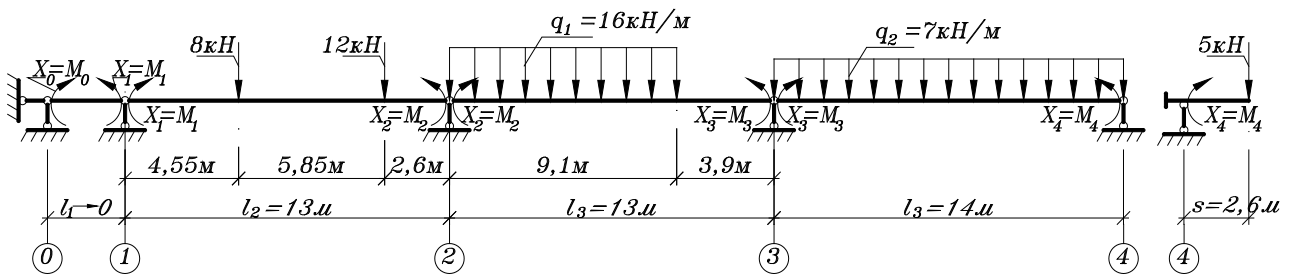


Рис. 12. Основная система

Построение эпюр поперечных сил Q_p и изгибающих моментов M_p

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от действия постоянной нагрузки, рассчитывая каждый пролёт как отдельную балку:

Пролёт №2 (рис.13):

$$\sum m_A = 0 \dots -B_2 \cdot 13 + 12 \cdot 10,4 + 8 \cdot 4,55 = 0 \Rightarrow B_2 = 12,4 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0 \dots A_2 \cdot 13 - 8 \cdot 8,45 - 12 \cdot 2,6 = 0 \Rightarrow A_2 = 7,6 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0 \dots A_2 + B_2 - 8 - 12 = 7,6 + 12,4 - 20 = 0;$$

1 участок $0 \leq x_1 \leq 2,6 \text{ м}$

$$Q_y = -B_2 = -12,4 \text{ кН};$$

$$M_z = B_2 \cdot x_1 = 12,4 \cdot x_1;$$

$$M_z(x_1 = 0) = 0; M_z(x_1 = 2,6) = 32,24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

II участок $2,6 \text{ м} \leq x_2 \leq 8,45 \text{ м}$

$$Q_y = -B_1 + 12 = -12,4 + 12 = -0,4 \text{ кН};$$

$$M_z = B_1 \cdot x_2 - 12 \cdot (x_2 - 2,6) = 12,4 \cdot x_2 - 12 \cdot (x_2 - 2,6);$$

$$M_z(x_2 = 2,6) = 32,24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_z(x_2 = 8,45) = 34,58 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

III участок $0 \leq x_3 \leq 4,55$ м

$$Q_y = A_1 = 7,6 \text{ кН};$$

$$M_z = A_1 \cdot x_3 = 7,6 \cdot x_3; \quad M_z(x_3 = 0) = 0; \quad M_z(x_3 = 8,45) = 34,58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

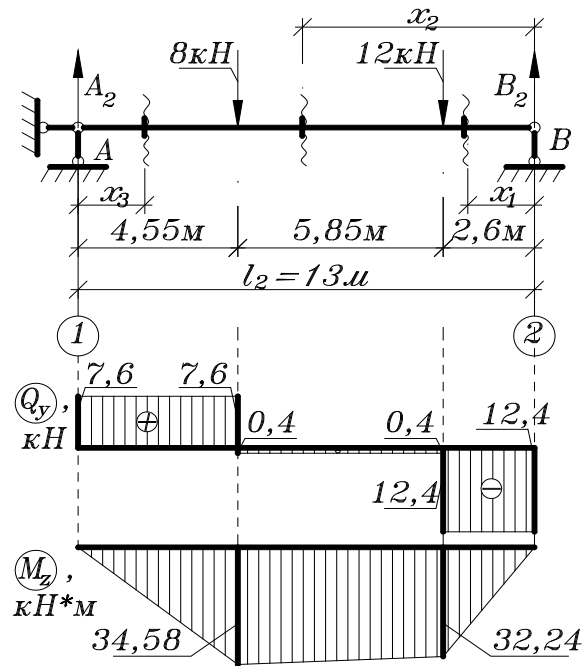


Рис. 13. Эпюры Q_y и M_z в пр.2

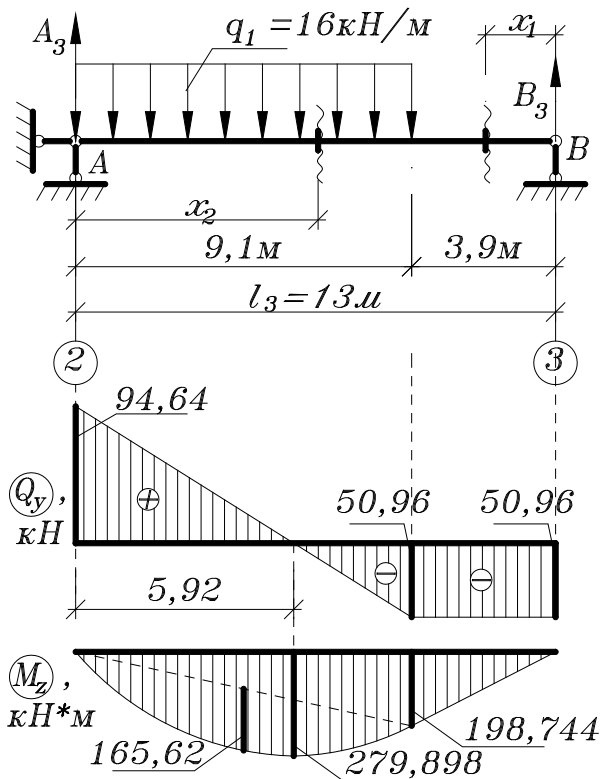


Рис. 14. Эпюры Q_y и M_z в пр.3

Пролёт №3 (рис.14):

$$\sum m_A = 0 \dots$$

$$-B_3 \cdot 13 + 16 \cdot 9,1 \cdot \frac{9,1}{2} = 0;$$

$$B_3 = 662,4/13 = 50,96 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0 \dots$$

$$A_3 \cdot 13 - 16 \cdot 9,1 \cdot (3,9 + 4,55) = 0;$$

$$A_3 = 1230,32/13 = 94,64 \text{ кН};$$

Проверка: $\sum Y = 0 \dots$

$$A_3 + B_3 - 16 \cdot 9,1 = 94,64 + 50,96 - 16 \cdot 9,1 = 0;$$

1 участок $0 \leq x_1 \leq 3,9$ м

$$Q_y = -B_3 = -50,96 \text{ кН};$$

$$M_z = B_3 \cdot x_1 = 50,96 \cdot x_1;$$

$$M_z(x_1 = 0) = 0;$$

$$M_z(x_1 = 3,9) = 198,744 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

II участок $0 \leq x_2 \leq 9,1$ м

$$Q_y = A_3 - 16 \cdot x_2 = 94,64 - 16 \cdot x_2;$$

$$Q_y(x_2 = 0) = 94,64 \text{ кН}; \quad Q_y(x_2 = 9,1) = -50,96 \text{ кН};$$

$$M_z = A_3 \cdot x_2 - 16 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 94,64 \cdot x_2 - 8 \cdot x_2^2;$$

$$M_z(x_2 = 0) = 0; \quad M_z(x_2 = 9,1) = 198,744 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_y = 94,64 - 16 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 94,64/16 = 5,915 \approx 5,92 \text{ м};$$

$$M_z(x_2 = 5,92) = 94,64 \cdot 5,92 - 8 \cdot 5,92^2 = 279,898 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Пролёт №4 (рис. 15):

$$\sum m_A = 0 \dots$$

$$-B_4 \cdot 14 + 7 \cdot 14 \cdot \frac{14}{2} = 0;$$

$$B_4 = 49 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0 \dots$$

$$A_4 \cdot 14 - 7 \cdot 14 \cdot 7 = 0;$$

$$A_4 = 49 \text{ кН};$$

Проверка: $\sum Y = 0 \dots A_4 + B_4 -$

$$-7 \cdot 14 = 49 + 49 - 98 = 0;$$

I участок $0 \leq x_1 \leq 14$ м

$$Q_y = -B_4 + 7 \cdot x_1 = -49 + 7 \cdot x_1;$$

$$Q_y(x_1 = 0) = -49 \text{ кН};$$

$$Q_y(x_1 = 14) = 49 \text{ кН};$$

$$M_z = B_4 \cdot x_1 - 7 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} =$$

$$= 49 \cdot x_1 - 3,5 \cdot x_1^2;$$

$$M_z(x_1 = 0) = 0; \quad M_z(x_1 = 14) = 49 \cdot 14 - 3,5 \cdot 14^2 = 0;$$

$$Q_y = -49 + 7 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 \text{ м};$$

$$M_z(x_1 = 7 \text{ м}) = 49 \cdot 7 - 3,5 \cdot 7^2 = 171,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

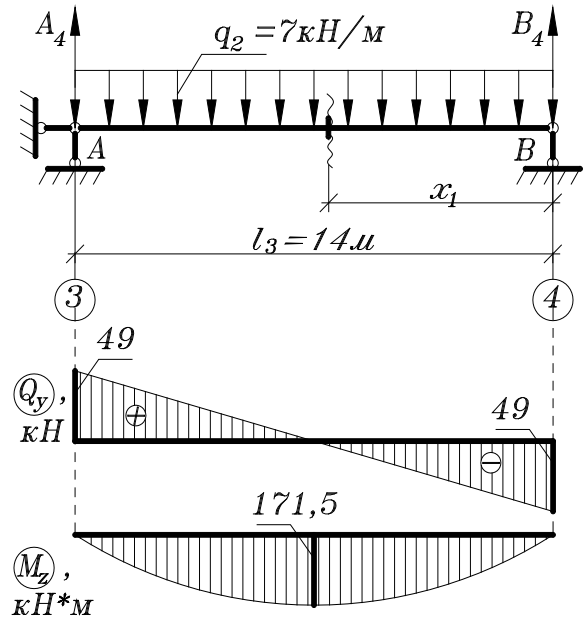


Рис. 15. Эпюры Q_y и M_z в пр.4

Сводные эпюры Q_p , M_p в основной системе (рис. 16)

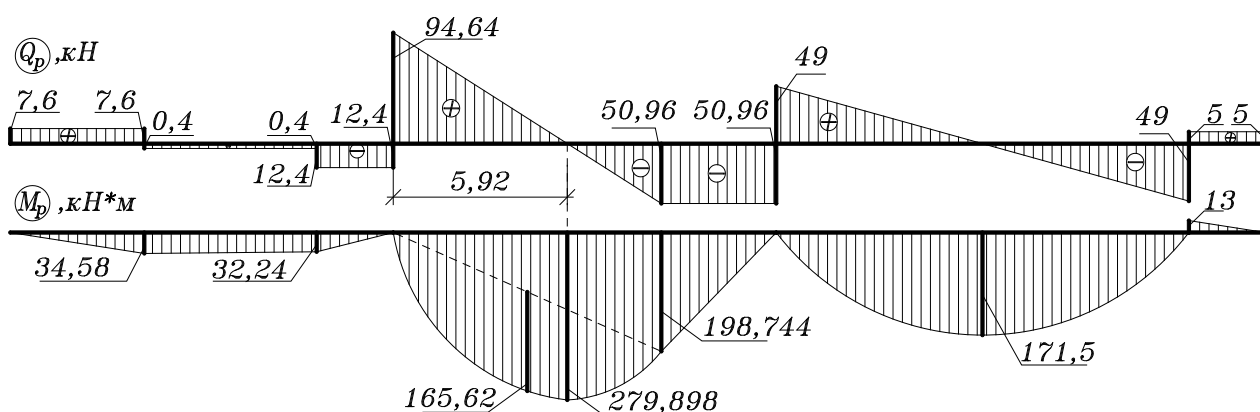


Рис. 16. Сводные эпюры Q_p и M_p в основной системе

Определение основных неизвестных

Уравнение трёх моментов в общем виде:

$$l_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{S_n^A}{l_n} + \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} \right);$$

Подставим в формулу последовательно номера неизвестных и получим

$$\begin{cases} n = 1 \dots l_1 \cdot M_0 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot M_1 + l_2 \cdot M_2 = -6 \cdot \left(\frac{S_1^A}{l_1} + \frac{S_2^B}{l_2} \right); \\ n = 2 \dots l_2 \cdot M_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot M_2 + l_3 \cdot M_3 = -6 \cdot \left(\frac{S_2^A}{l_2} + \frac{S_3^B}{l_3} \right); \\ n = 3 \dots l_3 \cdot M_2 + 2 \cdot (l_3 + l_4) \cdot M_n + l_4 \cdot M_4 = -6 \cdot \left(\frac{S_3^A}{l_3} + \frac{S_4^B}{l_4} \right). \end{cases}$$

Определение значений статических моментов и фиктивных опорных реакции в соответствующих пролётах, входящие в правую часть уравнения трёх моментов.

$$\begin{aligned} S_1^A &= 0; \\ S_2^B &= \frac{1}{2} \cdot 32,24 \cdot 2,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,6 + 32,24 \cdot 5,85 \cdot \left(2,6 + \frac{5,85}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 2,34 \cdot 5,85 \cdot \\ &\cdot \left(2,6 + \frac{2}{3} \cdot 5,85 \right) + \frac{1}{2} \cdot 34,58 \cdot 4,55 \cdot \left(2,6 + 5,85 + \frac{1}{3} \cdot 4,55 \right) = 1943,2395 \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \end{aligned}$$

$$S_2^B/l_2 = 1943,2395/13 = 149,47996 \approx 149,48 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$S_2^A = \frac{1}{2} \cdot 34,58 \cdot 4,55 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,55 + 32,24 \cdot 5,85 \cdot \left(4,55 + \frac{5,85}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2,34 \cdot 5,85 \cdot \left(4,55 + \frac{1}{3} \cdot 5,85\right) + \frac{1}{2} \cdot 32,24 \cdot 2,6 \cdot \left(4,55 + 5,85 + \frac{1}{3} \cdot 2,6\right) = 2165,1505 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$S_2^A/l_2 = 2165,1505/13 = 166,55 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$S_3^B = \frac{1}{2} \cdot 198,744 \cdot 3,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,9 + \frac{1}{2} \cdot 198,744 \cdot 9,1 \cdot \left(3,9 + \frac{1}{3} \cdot 9,1\right) + \frac{2}{3} \cdot 165,62 \cdot 9,1 \cdot \left(3,9 + \frac{9,1}{2}\right) = 15767,7767 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$S_3^B/l_3 = 15767,7767/13 = 1212,9059 \approx 1212,91 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$S_3^A = \frac{1}{2} \cdot 198,744 \cdot 9,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,1 + \frac{1}{2} \cdot 198,744 \cdot 9,1 \cdot \left(9,1 + \frac{1}{3} \cdot 3,9\right) + \frac{2}{3} \cdot 165,62 \cdot 9,1 \cdot \frac{9,1}{2} = 14088,6418 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$S_3^A/l_3 = 14088,6418/13 = 1083,7417 \approx 1083,74 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$S_4^B = \frac{2}{3} \cdot 171,5 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 = 11205,2269 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$S_4^B/l_4 = 11205,2269/14 = 800,3734 \approx 800,37 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

Проверка:

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 34,58 \cdot 4,55 + \frac{1}{2} \cdot (34,58 + 32,24) \cdot 5,85 + \frac{1}{2} \cdot 32,24 \cdot 2,6 = 78,6695 + 195,4485 + 41,912 = 316,03 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$S_2^A + S_2^B = \omega_2 \cdot l_2;$$

$$S_2^A + S_2^B = 2165,4505 + 1943,2395 = 4108,69 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$\omega_2 \cdot l_2 = 316,03 \cdot 13 = 4108,39 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

Аналогичные проверки выполняются и для других пролётов.

Подставив в уравнение трёх моментов значения пролётов, фиктивных опорных реакции, известные моменты $M_0 = 0$ и $M_4 = -13 \text{ кН} \cdot \text{м}$, получим:

$$\begin{cases} 2 \cdot (0 + 13) \cdot M_1 + 13 \cdot M_2 = -6 \cdot (0 + 149,47996); \\ 13 \cdot M_1 + 2 \cdot (13 + 13) \cdot M_2 + 13 \cdot M_3 = -6 \cdot (166,55 + 1212,9059); \\ 13 \cdot M_2 + 2 \cdot (13 + 14) \cdot M_3 + 14 \cdot (-13) = -6 \cdot (1083,7417 + 800,3734); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26 \cdot M_1 + 13 \cdot M_2 = -896,8798; \\ 13 \cdot M_1 + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot M_3 = -8276,7354; \\ 13 \cdot M_2 + 54 \cdot M_3 = -11122,6906. \end{cases}$$

Решая систему уравнения трёх моментов, получим значения основных неизвестных:

$$M_1 = 26,2846 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2 = -121,5601 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_3 = -176,7163 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

При погрешности $0,005 \text{ кН} \cdot \text{м}$ допустимые невязки:

$$\text{в ур. I } \pm 0,005 \cdot (26 + 13) = \pm 0,195 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{в ур. II } \pm 0,005 \cdot (13 + 52 + 13) = \pm 0,39 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{в ур. III } \pm 0,005 \cdot (13 + 54) = \pm 0,335 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Действительные невязки:

$$26 \cdot 26,2846 + 13 \cdot (-121,5601) + 896,8798 = -0,0019 < 0,195;$$

$$13 \cdot 26,2846 + 52 \cdot (-121,5601) + 13 \cdot (-176,7163) + 8276,7354 = \\ = |-0,0019| < 0,39;$$

$$13 \cdot (-121,5601) + 54 \cdot (-176,7163) + 11122,6906 = 0,0027 < 0,335.$$

Невязки допустимы.

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q

Для построения окончательной эпюры M значения основных неизвестных откладываются со своими знаками над соответствующими опорами и соединяются штриховой линией — линия опорных моментов. «Подвешивая» эпюры M_p к линии опорных моментов, получаем окончательную эпюру M для заданной системы (рис. 17).

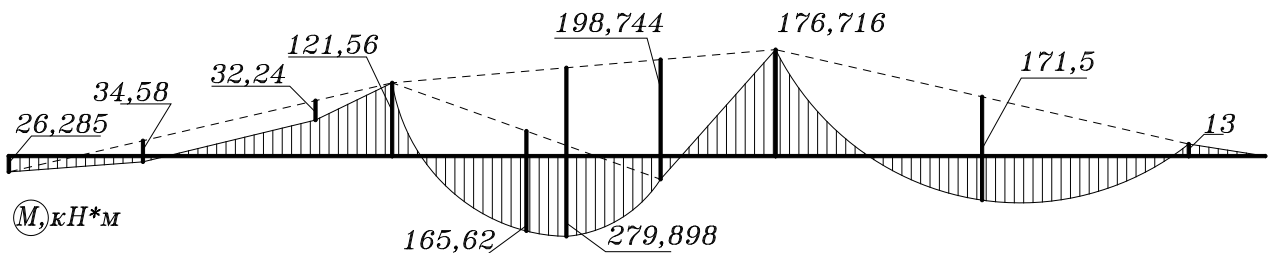


Рис. 17. Окончательная эпюра M для заданной системы

Определим дополнительную поперечную силу от действия основных неизвестных в каждом пролёте

$$\Delta Q_2 = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{-121,5601 - 26,2846}{13} = -11,3727 \text{ кН};$$

$$\Delta Q_3 = \frac{M_3 - M_2}{l_3} = \frac{-176,7163 - 121,5601}{13} = -4,2428 \text{ кН};$$

$$\Delta Q_4 = \frac{M_4 - M_3}{l_4} = \frac{-13 + 176,7163}{14} = 11,6940 \text{ кН}.$$

Поперечные силы Q (рис. 18) получаются суммированием грузовой эпюры Q_{pn} и эпюры ΔQ_n .

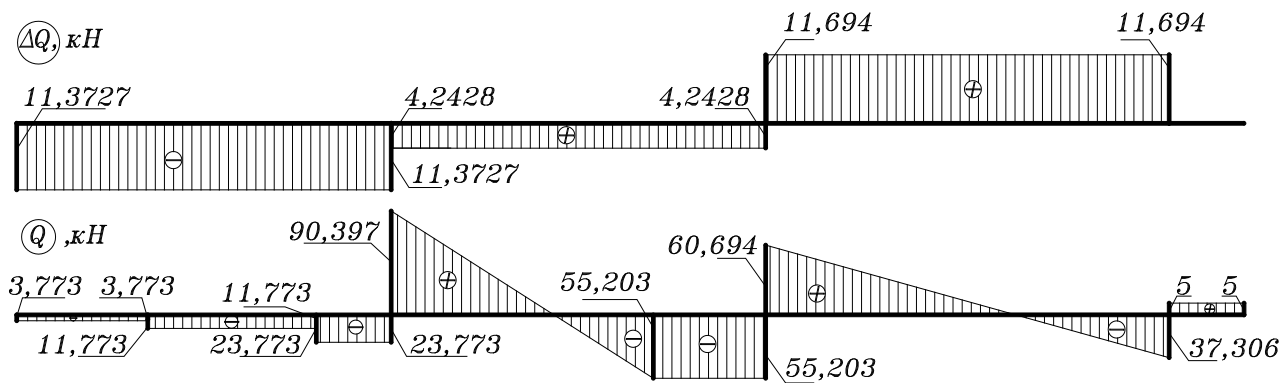


Рис. 18. Эпюра ΔQ_n . Окончательная эпюра поперечной силы Q

Определение реакций опор (рис. 19)

Опорные реакции определяем из условия равновесия, мысленно вырезанного бесконечно малого участка балки над опорой.

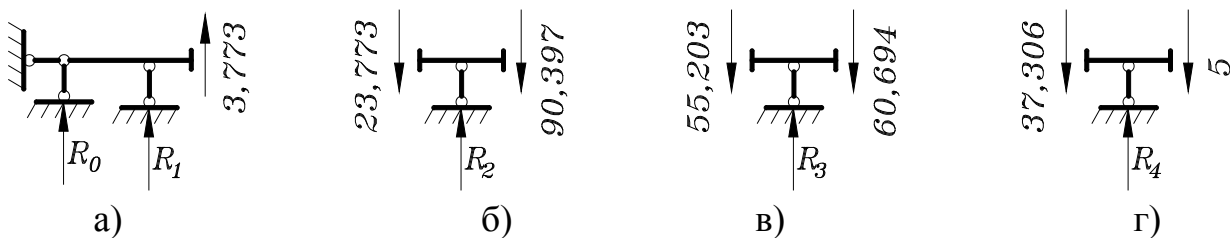


Рис. 19. Определение реакций опор

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 \dots R_0 + R_1 + 3,7727 &= 0 \Rightarrow R_0 + R_1 = -3,7727 \text{ кН (рис. 19, а);} \\ \sum Y = 0 \dots R_2 - 23,7727 - 90,3972 &= 0 \Rightarrow R_2 = 114,1699 \text{ кН (рис. 19, б);} \\ \sum Y = 0 \dots R_3 - 55,2028 - 60,694 &= 0 \Rightarrow R_3 = 115,8968 \text{ кН (рис. 19, в);} \\ \sum Y = 0 \dots R_4 - 37,306 - 5 &= 0 \Rightarrow R_4 = 42,306 \text{ кН (рис. 19, г).} \end{aligned}$$

Проверка равновесия балки в целом (рис. 20)

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 \dots R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 8 - 12 - 16 \cdot 9,1 - 7 \cdot 14 - 5 &= \\ = -3,7727 + 114,1699 + 115,8968 + 42,306 - 268,6 &= \\ = 272,3727 - 272,3727 &= 0. \end{aligned}$$

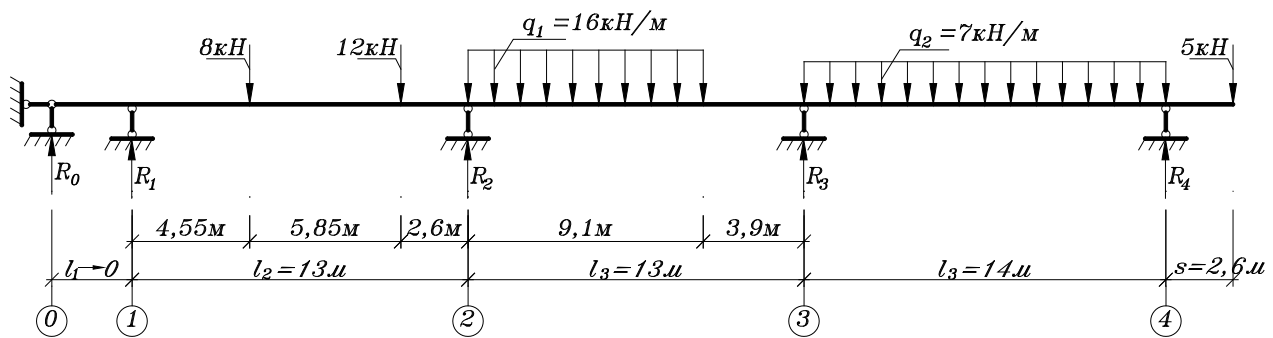


Рис. 20. Заданная система с опорными реакциями

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ОРДИНАТ ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ И ОБЪЕМЛЮЩИХ ЭПЮР НА ПЭВМ И ИХ ПОСТРОЕНИЯ

Линия влияния и объемлющие эпюры от действия временной нагрузки строятся для пролёта, в котором задано сечение. В рассматриваемом примере сечение задано во втором пролёте (номер фиктивного пролёта не учитывается) на расстоянии $0,3 \cdot l_2 = 0,3 \cdot 13 = 3,9\text{м}$ от левой опоры. Величина временной нагрузки $q_{вр} = 18 \text{ кН/м}$. Значения ординат линии влияния и объемлющих эпюр для заданного сечения в пролёте получаем расчетом на ПЭВМ по программе **ob_time.exe**.

Ввод исходных данных:

Задайте число пролётов (при жёсткой заделке фиктивные пролёты не учитываются)

3 ↴

Вы не ошиблись? (Y/N)

N ↴

Введите длины пролётов (нумерация пролётов слева направо)

13 ↴

13 ↴

14 ↴

Есть ошибки ввода? (Y/N)

N ↴

Задайте номер пролёта, где находится рассматриваемое сечение и расстояние до ближайшей левой опоры

2 ↴

3,9 ↴

Есть ошибки ввода? (Y/N)

N ↴

Если балка закреплена слева, введите цифру 1

если справа	-	2
если заземление на обоих концах	-	3
иначе	-	0

1 ↵

если балка имеет консольную часть слева	-	1
если справа	-	2
если консоли имеются на обоих концах	-	3
иначе	-	0

2 ↵

Вы не ошиблись в условиях опирания балки?

N ↵

Введите длину консольной части

2,6 ↵

Введите величину временной нагрузки

18 ↵

Будете печатать численные значения для построения линии влияния (Y/N)?

Y ↵

Ваша фамилия и номер группы??

Петров 933

Будете строить объемлющие эпюры? (Y/N)

Y ↵

Будете печатать численные данные объемлющих эпюр?

Y ↵

По результатам расчёта на ПЭВМ строим линию влияния для заданного сечения и объемлющую эпюру для пролета.

Листинг результатов расчёта на ПЭВМ

Пролёт 2 (L=13,000 м), сечение – 3,900 м

Пролёт, где нахо- дится груз P=1	Ординаты линии влияния в каждом сечении									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0,0338	-0,1202	-0,2366	-0,3606	-0,4695	-0,5409	-0,5521	-0,4808	-0,3042	0,0000
2	0,4485	1,0343	1,7443	1,2656	0,8850	0,5896	0,3664	0,2024	0,0846	0,0000
3	-0,0667	-0,1123	-0,1391	-0,1497	-0,1462	-0,1310	-0,1064	-0,0748	-0,0386	0,0000
Пр. консоль	0,0724									

Ординаты объёмлющей эпюры (пролёт №2)

M_{max}	69,4575	55,9869	83,4280	156,6219	208,0659	229,0898	219,6938
M_{min}	-295,7308	-156,4814	-88,5639	-96,8191	-113,7442	-130,6694	-147,5947

M_{max}	179,8777	109,6416	51,6625	44,7442
M_{min}	-164,5199	-181,4451	-241,0472	-382,1301

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА М В ЗАДАННОМ СЕЧЕНИИ ОТ ДЕЙСТВИЯ ПОСТОЯННОЙ НАГРУЗКИ ЗАГРУЖЕНИЕМ ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ (РИС. 21)

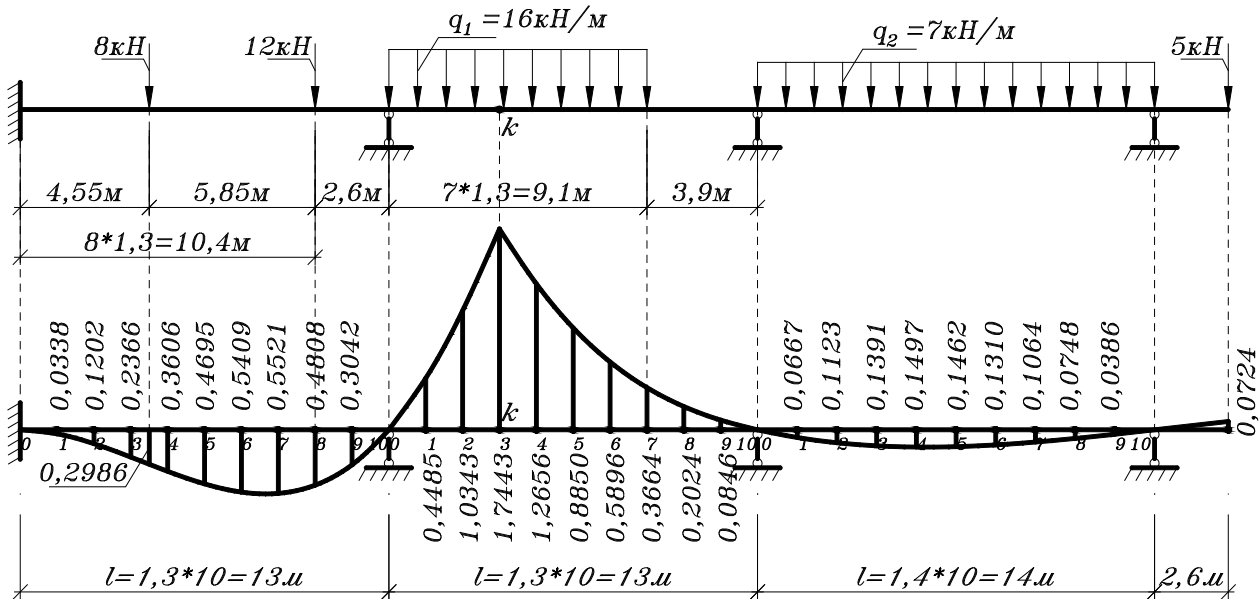


Рис. 21. Загружение л.вл. M в сечение "k" постоянной нагрузкой

$$\begin{aligned}
 M_k^{\text{пост}} = & -8 \cdot 0,2986 - 12 \cdot 0,4808 + 16 \cdot 1,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [0,4485 + (0,4485 + \\
 & + 1,0343) + (1,0343 + 1,7443) + (1,7443 + 1,2656) + (1,2656 + 0,8850) + \\
 & + (0,8850 + 0,5896) + (0,5896 + 0,3664)] - 7 \cdot 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [0,0667 + (0,0667 + \\
 & + 0,1123 + (0,1123 + 0,1391) + (0,1391 + 0,1497) + (0,1497 + 0,1462) + \\
 & + (0,1462 + 0,1310) + (0,1310 + 0,1064) + (0,1064 + 0,0748) + \\
 & + (0,0748 + 0,0386) + 0,0386] + 5 \cdot 0,0724 = -2,3888 - 5,7696 + \\
 & + 127,9304 - 9,45504 + 0,362 = 128,2924 - 17,61344 = 110,67896 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

7. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА М В ЗАДАННОМ СЕЧЕНИИ (РИС. 22)

Определение реакции опор в пролёте от заданной нагрузки и надопорных изгибающих моментов

$$\sum m_A = 0 \dots -R_B \cdot 13 - 121,5601 + 176,7163 + 16 \cdot 9,1 \cdot \frac{9,1}{2} = 0$$

$$R_B = 717,6362 / 13 = 55,2028 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0 \dots R_A \cdot 13 - 121,5601 + 176,7163 - 16 \cdot 9,1 \cdot \left(3,9 + \frac{9,1}{2}\right) = 0$$

$$R_A = 1175,1638 / 13 = 90,3972 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0 \dots 55,2028 + 90,3972 - 16 \cdot 9,1 = 0$$

Изгибающий момент M в заданном сечении "k"

$$M_k(x_k = 3,9\text{м}) = -121,5601 + 90,3972 \cdot 3,9 - 16 \cdot \frac{3,9^2}{2} = -121,5601 + 352,54908 - 121,68 = 109,30898 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

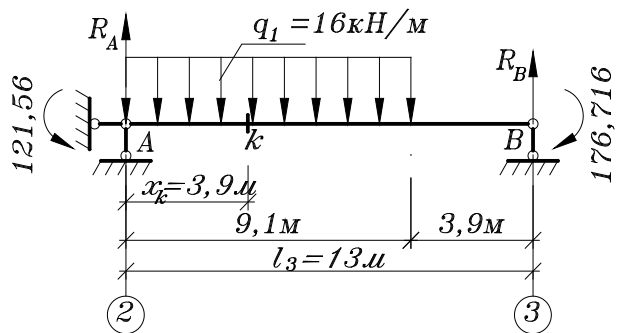


Рис. 22. Вычисление M в сечение "k"

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ОТ ДЕЙСТВИЯ ВРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ (РИС. 23)

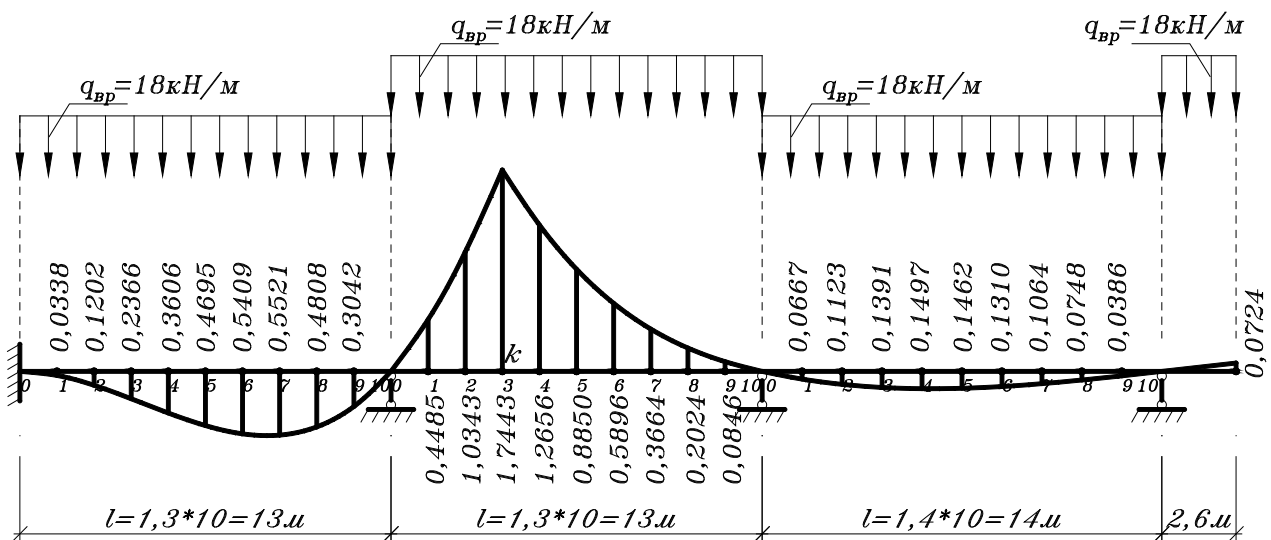


Рис. 23. Загружение л.вл. M в сечение "k" временной нагрузкой

$$M_{вр(k)}^{min} = -18 \cdot 1,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot [0,0338 + 0,1202 + 0,2366 + 0,3606 + 0,4695 + 0,5409 + 0,5521 + 0,4808 + 0,3042] - 18 \cdot 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot [0,0667 + 0,1123 + 0,1391 + 0,1497 + 0,1462 + 0,1310 + 0,1064 + 0,0748 + 0,0386] = -72,50958 - 24,31296 = -96,82254 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{вр(k)}^{max} = 18 \cdot 1,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot [0,4485 + 1,0343 + 1,7443 + 1,2656 + 0,885 + 0,5896 + 0,3664 + 0,2024 + 0,0846] + 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot 0,0724 = 154,92438 + 1,69416 = 156,61854 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9. ПОСТРОЕНИЕ ОБЪЕМЛЮЩИХ ЭПЮР M_{max} И M_{min}

Для получения объемлющих эпюр M_{max} и M_{min} от совместного действия временной нагрузки и постоянной необходимо эпюры $M_{вр}^{max}$ и $M_{вр}^{min}$ (рис. 24), а также $M_{пост}$ (рис. 25) изобразить в одном масштабе. Затем ординаты эпюры $M_{пост}$ просуммировать отдельно с ординатами $M_{вр}^{min}$ и отдельно с ординатами $M_{вр}^{max}$ (рис. 26)

$$M_{max} = M_{пост} + M_{вр}^{max};$$

$$M_{min} = M_{пост} + M_{вр}^{min}.$$

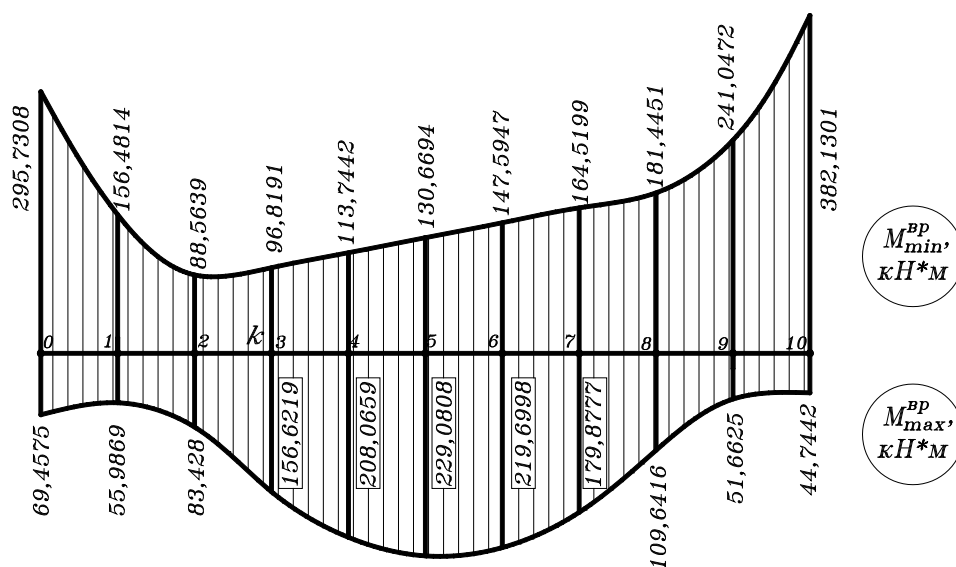


Рис. 24. Объемлющая эпюра от временной нагрузки в пролёте № 2

Ординаты изгибающего момента от действие постоянной нагрузки в каждом сечении можно определить составляя выражение:

$$M_{(i)пост} = -M_A + R_A \cdot x_i - \frac{q \cdot x_i^2}{2} = -121,5601 + 90,3972 \cdot x_i - 8 \cdot x_i^2;$$

$$M_{(0)пост} = -121,5601 \text{кН} \cdot \text{м}; M_{(1)пост} = -17,564 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(2)пост} = 59,393 \text{кН} \cdot \text{м}; M_{(3)пост} = 109,309 \text{кН} \cdot \text{м}; M_{(4)пост} = 132,185 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(5)пост} = 128,022 \text{кН} \cdot \text{м}; M_{(6)пост} = 96,818 \text{кН} \cdot \text{м}; M_{(7)пост} = 38,574 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(i)пост} = -M_B + R_B \cdot x_i = -176,7163 + 55,2028 \cdot x_i;$$

$$M_{(10)пост} = -176,716 \text{кН} \cdot \text{м}; M_{(9)пост} = -104,953 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(8)пост} = -33,189 \text{кН} \cdot \text{м};$$

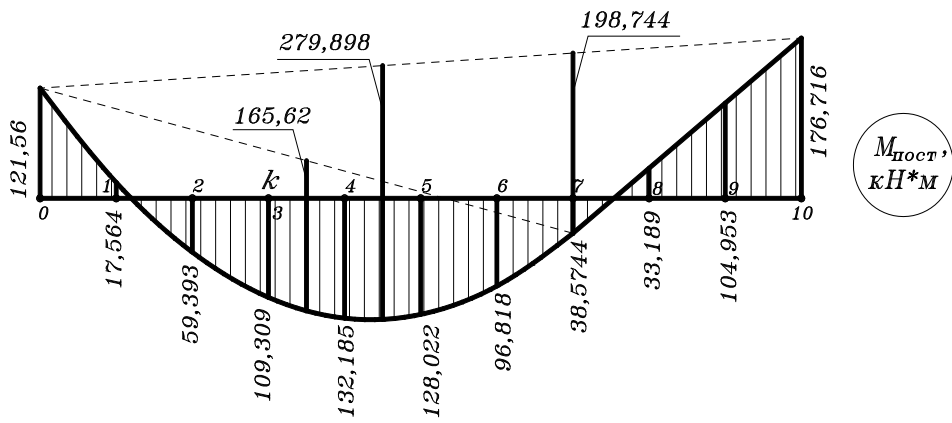


Рис. 25. Эпюра $M_{\text{пост}}$ от постоянной нагрузки в пролёте № 2

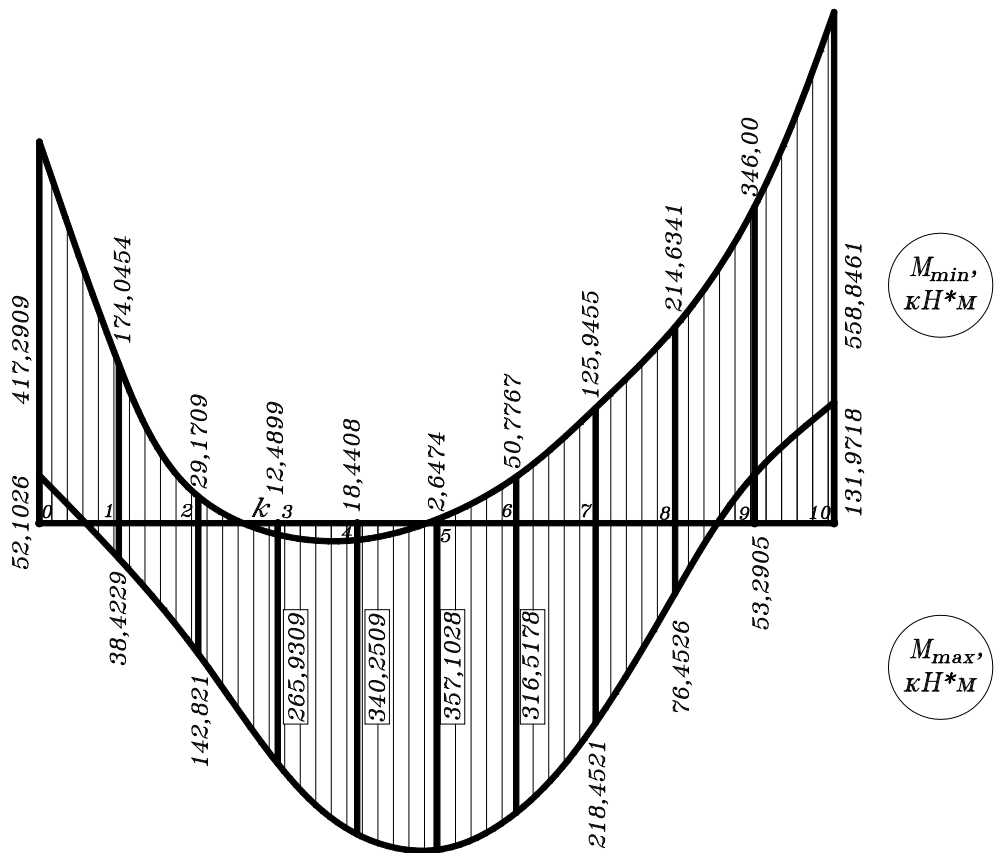


Рис. 26. Объемлющая эпюра M_{max} и M_{min} от совместного действия временной и постоянной нагрузок в пролёте № 2

Таблица 1

Таблица сравнения усилий определенных аналитическим расчетом и загрузением линий влияния

Способ определения	Обозначения усилий		
	$M_{\text{пост}}$	$M_{\text{вр}(k)}^{\text{max}}$	$M_{\text{вр}(k)}^{\text{min}}$
Аналитический расчет	109,309	156,6219	-96,8191
Загрузением линий влияния	110,679	156,618	-96,822

10. ПОСТРОЕНИЕ ОБЪЕМЛЮЩЕЙ ЭПЮРЫ ДЛЯ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Объемлющая эпюра — это эпюра, в каждом сечении которой имеется две ординаты. Одна — максимальное значение изгибающего момента при любом опасном положении временной нагрузки, а другая — минимально возможное значение изгибающего момента при другом положении временной нагрузки.

При рассмотрении эпюры изгибающих моментов, отвечающей загрузке одного пролёта балки, выявлена характерная особенность, заключающаяся в том, что на каждом незагруженном пролёте она имеет вид наклонной прямой с нулевой точкой в пределах пролёта. Эти нулевые точки называются моментными фокусами. На каждом пролёте имеется два фокуса: левый и правый.

Левым (правым) моментным фокусом какого-нибудь пролёта называется нулевая точка эпюры моментов этого пролёта при условии, что вся нагрузка неразрезной балки расположена справа (слева) от него. При таком расположении нагрузки фокус служит точкой перегиба упругой линии (рис. 27).

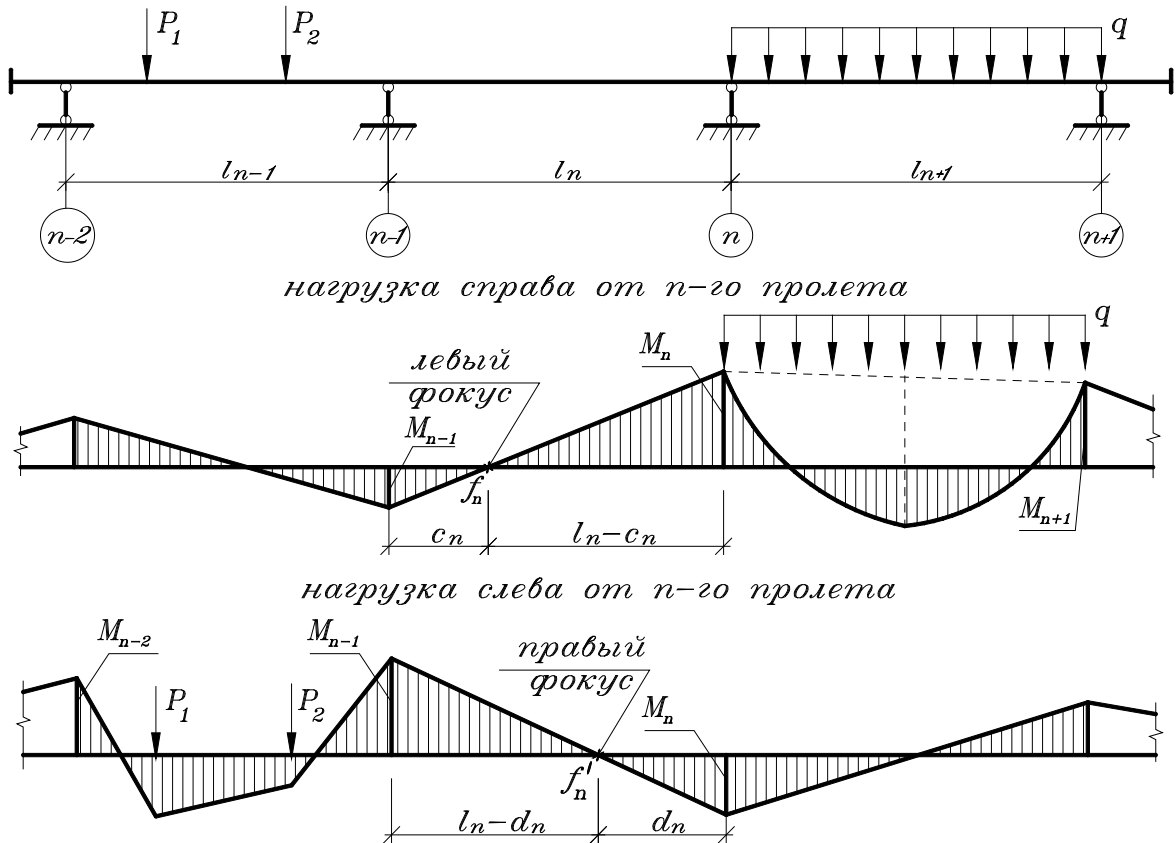


Рис. 27. Расположение фокусных точек

Абсолютная величина отношения между изгибающими моментами на концах какого-нибудь пролёта называется *моментным фокусным отношением*. Различают левое и правое фокусное отношения, смотря по тому, определяется ли оно левым или правым фокусом. Например, для пролёта l_n **левым фокусным отношением** называется отношение

$$-\frac{M_n}{l_n - c_n} = \frac{M_{n-1}}{c_n} \Rightarrow k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{l_n - c_n}{c_n};$$

для пролёта l_n **правое фокусное отношение**

$$-\frac{M_{n-1}}{l_n - d_n} = \frac{M_n}{d_n} \Rightarrow k'_n = -\frac{M_{n-1}}{M_n} = \frac{l_n - d_n}{d_n}.$$

Если известно положение фокуса, то известно и фокусное отношение и наоборот.

Когда нагрузка расположена где-то справа от рассматриваемых пролётов, то положение левых фокусов определяется отношениями

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0}; k_2 = -\frac{M_2}{M_1}; \dots; k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}}; k_{n+1} = -\frac{M_{n+1}}{M_n}.$$

Для опоры n можно составить уравнение трёх моментов

$$l_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на M_n

$$l_n \cdot \frac{M_{n-1}}{M_n} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) + l_{n+1} \cdot \frac{M_{n+1}}{M_n} = 0$$

$$-\frac{l_n}{k_n} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) - l_{n+1} \cdot k_{n+1} = 0 \Rightarrow k_{n+1} = -\frac{1}{k_n} \cdot \frac{l_n}{l_{n+1}} + 2 \cdot \frac{l_n}{l_{n+1}} + 2$$

$$k_{n+1} = 2 + \frac{l_n}{l_{n+1}} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_n}\right) \quad (10.1)$$

$$\text{или } k_n = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}}\right) \quad (10.1')$$

Эта формула является рекуррентной, т.е. позволяет переходить от n к $(n + 1)$ (или от $(n - 1)$ к n). Для того, чтобы воспользоваться ею, необходимо каким-нибудь способом определить хотя бы одно из фокусных отношений. Но в балке с шарнирно опёртыми концами левый фокус первого пролёта совпадает с левым опорным сечением, так как момент на конце при расположении нагрузки справа от первого пролёта равен нулю, поэтому

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty.$$

В таком случае

$$k_2 = 2 + \frac{l_1}{l_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 2 \cdot \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right); \quad k_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_2}\right).$$

Те же формулы справедливы и для балки, имеющей на левом конце консоль.

Если левый конец балки закреплён, то мы знаем, что такое закрепление эквивалентно наличию дополнительного нулевого пролёта $l_1 = 0$, имеющего шарнирно опёртый левый конец. Для этого пролёта имеем $k_1 = \infty$, поэтому

$$k_2 = 2 + \frac{l_1}{l_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 2.$$

Моментное фокусное отношение для фокуса, примыкающего к закреплённому концу балки, всегда **равно 2**.

Напомним, что речь идёт о балке с постоянным на протяжении пролёта моментом инерции сечения.

Аналогичный вид имеют формулы для правых фокусных отношений

$$k'_n = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}}\right). \quad (10.2)$$

Формулы (10.1) и (10.2) показывают, что левый (правый) фокус любого пролёта зависит только от приведённой длины самого пролёта и всех лежащих слева (справа) от него, но совершенно не зависит от величин, характеризующих остальные пролёты балки. Из этих формул видно также, что фокусные отношения являются положительными числами, принимающие всевозможные значения от нижнего предела, равного 2, до высшего предела, который равен бесконечности.

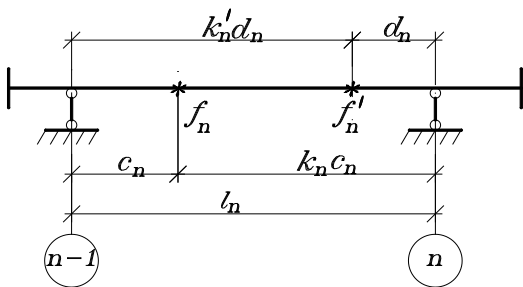


Рис. 28. Расстояния от опор до фокусных точек

Зная фокусные отношения, можно графически строить эпюры моментов; фокусы получатся при этом сами собой. Фокусы можно построить независимо от эпюры моментов, так как из пропорции получается следующая простая формула для расстояния левого фокуса от ближайшей левой опоры (рис. 28).

$$c_n + k_n \cdot c_n = l_n \Rightarrow c_n = l_n / (1 + k_n).$$

Аналогичный вид имеет формула для правого фокуса

$$d_n = \frac{l_n}{1 + k'_n},$$

где d_n — расстояние фокуса до ближайшей правой опоры;

k_n, k'_n — левое и правое фокусные отношения.

Если левый конец балки зашкремлён, то фокусное отношение $k_1 = 2$, а потому $c_1 = \frac{l_1}{3}$, т.е. фокус, примыкающий к зашкремлённому концу балки, отстоит от него на расстоянии равном одной трети соответствующего пролёта. Это — наибольшее возможное для фокусов расстояние от ближайшей опоры; наименьшее возможное расстояние равно нулю.

11. ПРИМЕНЕНИЕ МОМЕНТНЫХ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ К ПОСТРОЕНИЮ ЭПЮР

Когда из всех пролётов нагружен только один, то при помощи фокусных отношений очень просто и быстро определяются все опорные моменты.

Пусть, например, нагрузка расположена только в n — ом пролёте длиной l_n . Построение эпюры начнём с определения момента на концах нагруженного пролёта. Для этого составим два уравнения

$$l_{n-1} \cdot M_{n-2} + 2 \cdot (l_{n-1} + l_n) \cdot M_{n-1} + l_n \cdot M_n = -6 \cdot \left(\frac{S_{n-1}^A}{l_{n-1}} + \frac{S_n^B}{l_n} \right) = -6 \cdot A_n^\phi;$$

$$l_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{S_n^A}{l_n} + \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} \right) = -6 \cdot B_n^\phi;$$

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}}; \quad M_{n+1} = -\frac{M_n}{k'_{n+1}},$$

где $\frac{S_{n-1}^A}{l_{n-1}} = 0; \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} = 0; \frac{S_n^B}{l_n} = A_n^\phi; \frac{S_n^A}{l_n} = B_n^\phi.$

Подставив эти выражения в уравнения, мы исключим из них неизвестные M_{n-2} и M_{n+1} и получим

$$\left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}} \right) \right] \cdot l_n \cdot M_{n-1} + l_n \cdot M_n = -6 \cdot A_n^\phi;$$

$$l_n \cdot M_{n-1} + \left[2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right) \right] \cdot l_n \cdot M_n = -6 \cdot B_n^\phi.$$

Выражения в квадратных скобках соответственно равны k_n и k'_n . Сделав эту подстановку, получим весьма простую систему двух уравнений

$$\begin{aligned} k_n \cdot l_n \cdot M_{n-1} + l_n \cdot M_n &= -6 \cdot A_n^\phi; \\ l_n \cdot M_{n-1} + k'_n \cdot l_n \cdot M_n &= -6 \cdot B_n^\phi. \end{aligned}$$

Сначала, например, из второго уравнения выразим

$$M_{n-1} = \frac{-6 \cdot B_n^\phi - k'_n \cdot l_n \cdot M_n}{l_n}$$

и подставим в первое уравнения

$$k_n \cdot l_n \cdot \left[\frac{-6 \cdot B_n^\phi - k'_n \cdot l_n \cdot M_n}{l_n} \right] + l_n \cdot M_n = -6 \cdot A_n^\phi.$$

Выполняя некоторые простые математические операции, получим формулу для определения опорных моментов на концах только загруженного n – ого пролёта длиной l_n . В данном пролёте эпюра M через фокусы не проходит, но используя оба фокусные отношения, можно определить опорные изгибающие моменты на концах загруженного пролёта:

$$M_{n-1} = -6 \cdot \frac{A_n^\phi \cdot k'_n - B_n^\phi}{l_n \cdot (k_n \cdot k'_n - 1)} \quad \text{или} \quad M_{n-1} = -\frac{6}{l_n^2} \cdot \frac{S_n^B \cdot k'_n - S_n^A}{(k_n \cdot k'_n - 1)} \quad (11.1)$$

$$M_n = -6 \cdot \frac{B_n^\phi \cdot k_n - A_n^\phi}{l_n \cdot (k_n \cdot k'_n - 1)} \quad \text{или} \quad M_n = -\frac{6}{l_n^2} \cdot \frac{S_n^A \cdot k_n - S_n^B}{(k_n \cdot k'_n - 1)} \quad (11.2)$$

Затем, пользуясь фокусными отношениями, легко можно найти остальные опорные моменты.

Если нагрузка расположена только справа от n – ого пролёта, то в этом пролёте эпюра M проходит через левый фокус, а по ближайшему к нагрузке опорному моменту M_n , используя левые фокусные отношения, можно вычислить

$$M_{n-1} = -\frac{M_n}{k_n}; \quad M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}}; \quad M_{n-3} = -\frac{M_{n-2}}{k_{n-2}}; \dots \quad (11.3)$$

Если нагрузка расположена только слева от n – ого пролёта, то в этом пролёте эпюра M проходит через правый фокус, а по ближайшему к на-

грузке опорному моменту M_{n-1} , используя правые фокусные отношения, можно вычислить

$$M_n = -\frac{M_{n-1}}{k'_n}; M_{n+1} = -\frac{M_n}{k'_{n+1}}; M_{n+2} = -\frac{M_{n+1}}{k'_{n+2}}; \dots \quad (11.4)$$

В формулах (11.3) и (11.4) знак «минус» указывает на то, что моменты над опорами слева и справа от загруженного пролёта чередуются по знаку. По абсолютной величине они быстро убывают с удалением от загруженного пролёта, т.к. эпюра M проходит через фокусы, удалённые от нагрузки. Зная эти свойства, во многих случаях можно составить эскиз эпюры M без расчёта.

При загрузке только одной консоли по известному значению $M_{\text{конс}} = -P \cdot s$ последовательно определяют все остальные опорные моменты по (11.3) или (11.4).

Применение формулы метода фокусных отношений позволяет строить эпюру M , не решая каждый раз систему УТМ (они содержат решение УТМ в общем виде). При загрузке только одного пролёта определяют моменты по его концам по формулам (11.1) и (11.2), затем моменты левее загруженного пролёта по формуле (11.3) и правее его по формуле (11.4).

Когда нагрузка расположена одновременно на нескольких пролётах и на консолях, применяется принцип суперпозиции, т.е. сначала определяют опорные моменты, вызываемые каждой из этих нагрузок в отдельности, затем они суммируются.

При нагрузке, симметричной относительно середины пролёта

$$M_{n-1} = -\frac{6}{l_n^2} \cdot \frac{S_n^B \cdot k'_n - S_n^A}{(k_n \cdot k'_n - 1)} = -\frac{3 \cdot \omega_n}{l_n} \cdot \frac{k'_n - 1}{k_n \cdot k'_n - 1}, \quad (11.5)$$

$$M_n = -\frac{6}{l_n^2} \cdot \frac{S_n^A \cdot k_n - S_n^B}{(k_n \cdot k'_n - 1)} = -\frac{3 \cdot \omega_n}{l_n} \cdot \frac{k_n - 1}{k_n \cdot k'_n - 1}, \quad (11.6)$$

где $S_n^A = \omega_n \cdot l_n/2$ и $S_{n+1}^B = \omega_{n+1} \cdot l_{n+1}/2$.

12. ПРИМЕР РАСЧЁТА ПОСТРОЕНИЯ ОБЪЕМЛЮЩЕЙ ЭПЮРЫ ДЛЯ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Левые фокусные отношения

$$k_n = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}}\right);$$

Если левый конец балки закреплён, то мы знаем, что такое закрепление эквивалентно наличию дополнительного нулевого пролёта $l_1 = 0$, имеющего шарнирно опёртый левый конец, следовательно, $M_1 = 0$. Для этого пролёта имеем $k_1 = M_1/M_0 = \infty$, поэтому

$$k_2 = 2 + \frac{l_1}{l_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 2.$$

Моментное фокусное отношение для фокуса, примыкающего к закреплённому концу балки, всегда равно 2.

$$\begin{aligned} k_2 &= 2 + \frac{l_1}{l_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_1}\right) = 2 + \frac{0}{l_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 2; \\ k_3 &= 2 + \frac{l_2}{l_3} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_2}\right) = 2 + \frac{13}{13} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3,5; \\ k_4 &= 2 + \frac{l_3}{l_4} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_3}\right) = 2 + \frac{13}{14} \cdot \left(2 - \frac{1}{2,5}\right) = 3,592. \end{aligned}$$

Правые фокусные отношения

$$k'_n = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}}\right).$$

В балке с шарнирно опёртым концом правый фокус четвертого пролёта совпадает с правым опорным сечением, так как момент на конце при расположении нагрузки слева от четвертого пролёта равен нулю, поэтому

$$\begin{aligned} k'_4 &= -\frac{M_3}{M_4} = -\frac{M_3}{0} = \infty; \\ k'_3 &= 2 + \frac{l_4}{l_3} \cdot \left(2 - \frac{1}{k'_4}\right) = 2 + \frac{14}{13} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4,154; \\ k'_2 &= 2 + \frac{l_3}{l_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{k'_3}\right) = 2 + \frac{13}{13} \cdot \left(2 - \frac{1}{4,154}\right) = 3,759; \\ k_2 \cdot k'_2 - 1 &= 2 \cdot 3,759 - 1 = 6,518; \quad k_3 \cdot k'_3 - 1 = 3,5 \cdot 4,154 - 1 = 13,539. \end{aligned}$$

Нагрузка только во втором пролёта (равномерно распределенная временная нагрузка величиной $q_{вр} = 18$ кН/м) (рис. 29)

$$M_{n-1} = -\frac{6}{l_n^2} \cdot \frac{S_n^B \cdot k'_n - S_n^A}{(k_n \cdot k'_n - 1)}; \quad M_n = -\frac{6}{l_n^2} \cdot \frac{S_n^A \cdot k_n - S_n^B}{(k_n \cdot k'_n - 1)};$$

где $S_n^A = \omega_n \cdot l_n/2$ и $S_{n+1}^B = \omega_{n+1} \cdot l_{n+1}/2$.

$$S_n^A = S_n^B = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{q \cdot l^4}{24} = \frac{18 \cdot 13^4}{24} = 21420,75 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$M_1 = -\frac{6}{l_2^2} \cdot \frac{S_2^B \cdot k_2' - S_2^A}{(k_2 \cdot k_2' - 1)} = -\frac{6}{13^2} \cdot \frac{21420,75 \cdot (3,759 - 1)}{6,518} = -321,911 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -\frac{6}{l_2^2} \cdot \frac{S_2^A \cdot k_2 - S_2^B}{(k_2 \cdot k_2' - 1)} = -\frac{6}{13^2} \cdot \frac{21420,75 \cdot (2 - 1)}{6,518} = -116,677 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Нагрузка расположена только слева от 3 – го пролёта. Эпюра M в пролёте №3 проходит через правый фокус, а по ближайшему к нагрузке опорному моменту M_{n-1} , используя правые фокусные отношения, можно вычислить

$$M_n = -\frac{M_{n-1}}{k_n'};$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{k_3'} = -\frac{-116,677}{4,154} = 28,089 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = -\frac{M_3}{k_4'} = -\frac{28,089}{\infty} = 0.$$

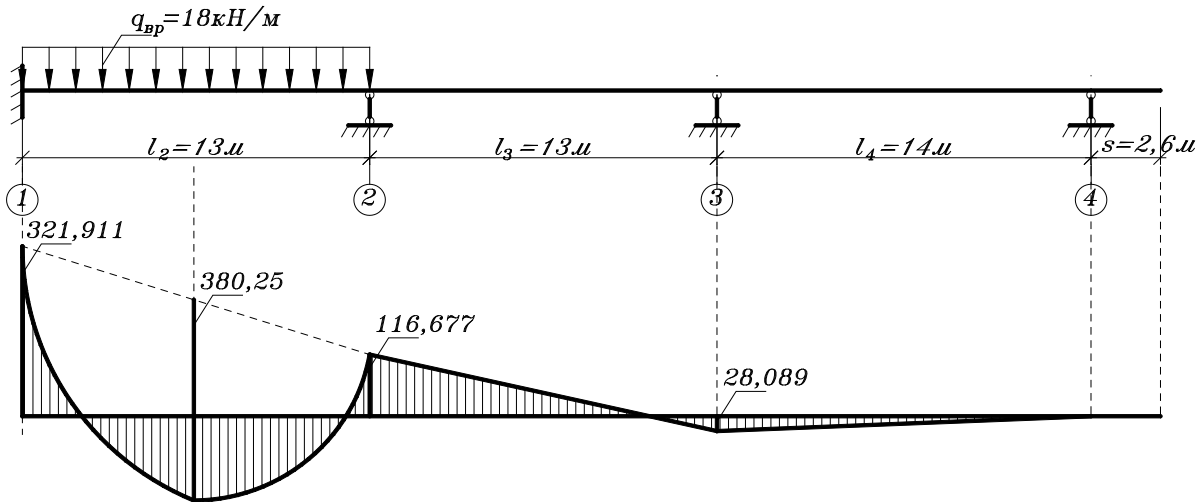


Рис. 29. Эпюра M от временной нагрузки $q_{вр}$, расположенной в пролёте № 2

Нагрузка только в третьем пролёте (рис. 30)

$$S_3^A = S_3^B = \frac{q \cdot l^4}{24} = \frac{18 \cdot 13^4}{24} = 21420,75 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$M_2 = -\frac{6}{l_3^2} \cdot \frac{S_3^B \cdot k_3' - S_3^A}{(k_3 \cdot k_3' - 1)} = -\frac{6}{13^2} \cdot \frac{21420,75 \cdot (4,154 - 1)}{13,539} = -177,164 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = -\frac{6}{l_2^2} \cdot \frac{S_3^A \cdot k_3 - S_3^B}{(k_3 \cdot k_3' - 1)} = -\frac{6}{13^2} \cdot \frac{21420,75 \cdot (3,5 - 1)}{13,539} = -140,521 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Нагрузка расположена только слева от 4 – го пролёта. Эпюра M в пролёте №4 проходит через правый фокус, а по ближайшему к нагрузке опорному моменту M_{n-1} , используя правые фокусные отношения, можно вычислить

$$M_4 = -\frac{M_3}{k'_4} = -\frac{-140,521}{\infty} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Нагрузка расположена только справа от 2 – ого пролёта. Эпюра M в пролёте №2 проходит через левый фокус, а по ближайшему к нагрузке опорному моменту M_n , используя левые фокусные отношения, можно вычислить

$$M_{n-1} = -\frac{M_n}{k_n}; \quad M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{177,164}{2} = 88,582 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

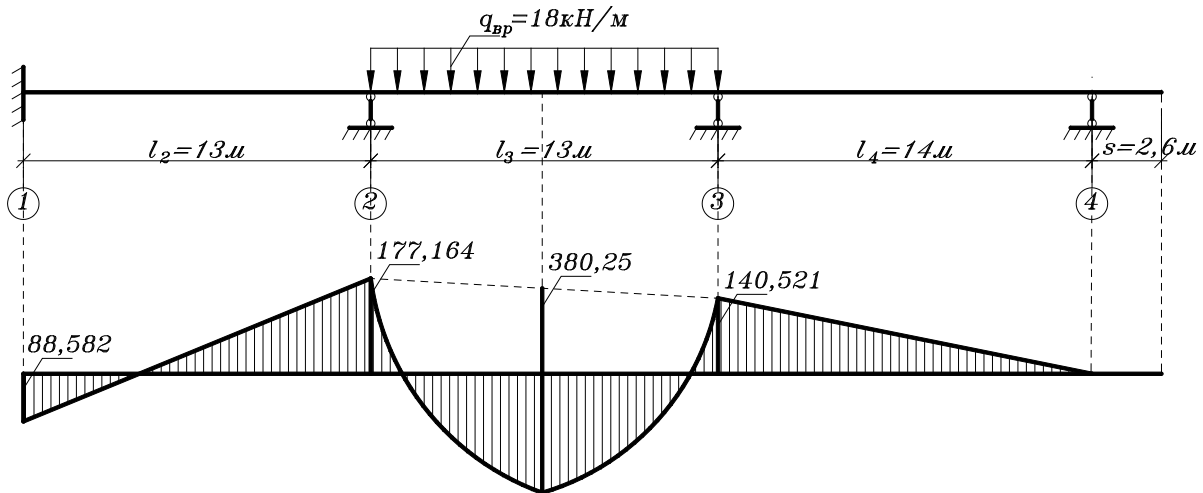


Рис. 30. Эпюра M от временной нагрузки q_{BP} , расположенной в пролёте № 3

Нагрузка только в четвертом пролёте (рис. 31)

$$S_4^A = S_4^B = \frac{q \cdot l^4}{24} = \frac{18 \cdot 14^4}{24} = 28812 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

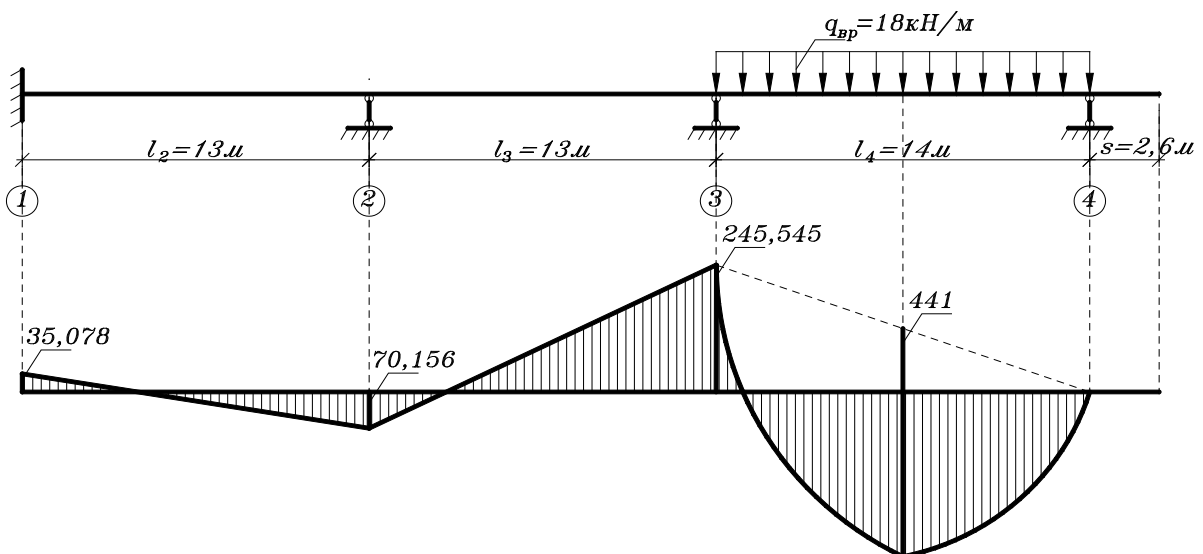


Рис. 31. Эпюра M от временной нагрузки q_{BP} , расположенной в пролёте № 4

$$M_3 = -\frac{6}{l_4^2} \cdot \frac{S_4^B \cdot k_4' - S_4^A}{(k_4 \cdot k_4' - 1)} = -\frac{6}{l_4^2} \cdot \frac{S_4^B - (S_4^A/k_4')}{[k_4 - (1/k_4')] } = -\frac{6}{14^2} \cdot \frac{28812}{3,592} = -245,545 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -\frac{6}{l_4^2} \cdot \frac{S_4^A \cdot k_4 - S_4^B}{(k_4 \cdot k_4' - 1)} = -\frac{6}{l_4^2} \cdot \frac{S_4^A \cdot k_4 - S_4^B}{\infty} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Нагрузка расположена только справа от 3 – ого пролёта

$$M_2 = -\frac{M_3}{k_3} = -\frac{-245,545}{3,5} = 70,156 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{70,156}{2} = -35,078 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Загружена только консоль (рис. 32)

$$M_4 = -18 \cdot 2,6 \cdot 1,3 = -60,84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Нагрузка расположена только справа от 4 – ого пролёта

$$M_3 = -\frac{M_4}{k_4} = -\frac{-60,84}{3,592} = 16,938 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -\frac{M_3}{k_3} = -\frac{16,938}{3,5} = -4,839 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{-4,839}{2} = 2,4195 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

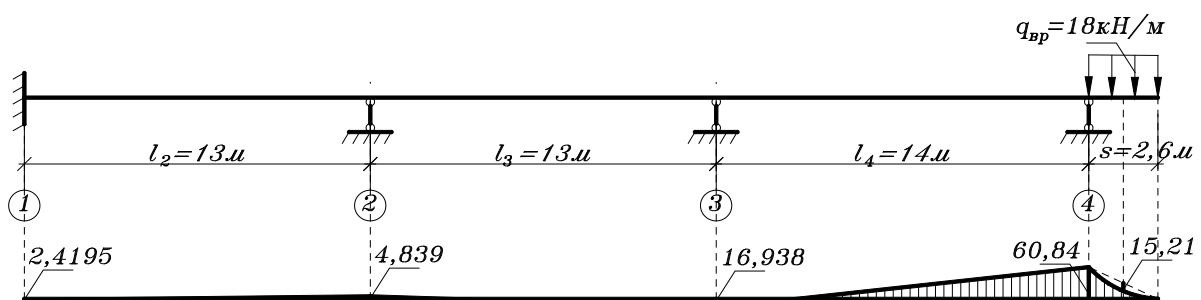


Рис. 32. Эпюра M от временной нагрузки $q_{вр}$, расположенной на консоли

Построение объемлющей эпюры по всей длине неразрезной балки показано на рис. 33.

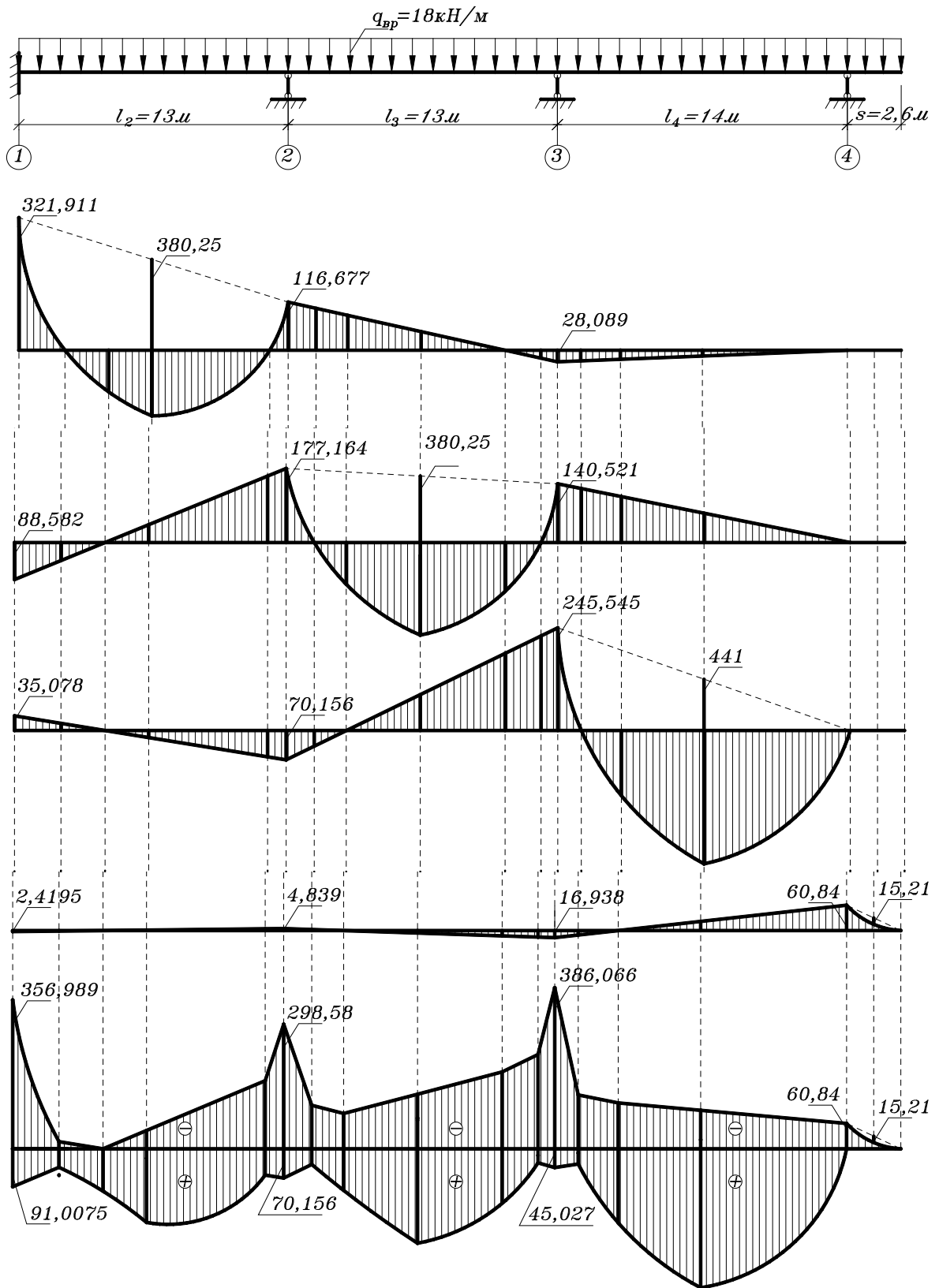


Рис. 33. Объемлющие эпюры M_{min} и M_{max} для неразрезной балки от q_{bp}

13. ПРИМЕР РАСЧЁТА ПОСТРОЕНИЯ ОБЪЕМЛЮЩЕЙ ЭПЮРЫ ДЛЯ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ УРАВНЕНИЙ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Построение объемлющей эпюры с применением уравнений трёх моментов

$$l_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{S_n^A}{l_n} + \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} \right).$$

Неразрезная балка загружена равномерно распределенной временной нагрузкой величиной $q_{вр}$.

$$\frac{S_n^A}{l_n} = \frac{1}{l_n} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{q_{вр} \cdot l_n^2}{8} \cdot l_n \cdot \frac{1}{2} \cdot l_n \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_{вр} \cdot l_n^3}{12} = \frac{1}{2} \cdot \omega_n;$$

$$\frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} = \frac{1}{l_{n+1}} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{q_{вр} \cdot l_{n+1}^2}{8} \cdot l_{n+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_{n+1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_{вр} \cdot l_{n+1}^3}{12} = \frac{1}{2} \cdot \omega_{n+1}.$$

Уравнений трёх моментов принимает следующий вид

$$l_n \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} = -3 \cdot (\omega_n + \omega_{n+1})$$

где $\omega_n = q_{вр} \cdot l_n^3/12$ и $\omega_{n+1} = q_{вр} \cdot l_{n+1}^3/12$.

Нагрузка только во втором пролёта (равномерно распределенная временная нагрузка величиной $q_{вр} = 18$ кН/м) (рис. 34):

$$\begin{aligned} n = 1 \dots l_1 \cdot M_0 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot M_1 + l_2 \cdot M_2 &= -3 \cdot (\omega_1 + \omega_2) \\ n = 2 \dots l_2 \cdot M_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot M_2 + l_3 \cdot M_3 &= -3 \cdot (\omega_2 + \omega_3) \\ n = 3 \dots l_3 \cdot M_2 + 2 \cdot (l_3 + l_4) \cdot M_3 + l_4 \cdot M_4 &= -3 \cdot (\omega_3 + \omega_4) \end{aligned}$$

Известно — $\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = 0$;

$$\omega_2 = q_{вр} \cdot l_2^3/12 = 18 \cdot 13^3/12 = 3295,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad l_1 = 0; \quad M_4 = 0.$$

$$n = 1 \dots 26 \cdot M_1 + 13 \cdot M_2 = -3 \cdot (0 + 3295,5)$$

$$n = 2 \dots 13 \cdot M_1 + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot M_3 = -3 \cdot (3295,5 + 0)$$

$$n = 3 \dots 13 \cdot M_2 + 54 \cdot M_3 = 0$$

$$M_3 = -\frac{13 \cdot M_2}{54} = -0,241 \cdot M_2;$$

$$M_1 = \frac{-9886,5 - 13 \cdot M_2}{26} = -380,25 - 0,5 \cdot M_2;$$

$$13 \cdot (-380,25 - 0,5 \cdot M_2) + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot (-0,241 \cdot M_2) = -9886,5;$$

$$-4943,25 - 6,5 \cdot M_2 + 52 \cdot M_2 - 3,133 \cdot M_2 = -9886,5;$$

$$M_2 = \frac{-4943,25}{42,367} = -116,677 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = -0,241 \cdot M_2 = -0,241 \cdot (-116,677) = 28,119 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -380,25 - 0,5 \cdot (-116,677) = -321,9115 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

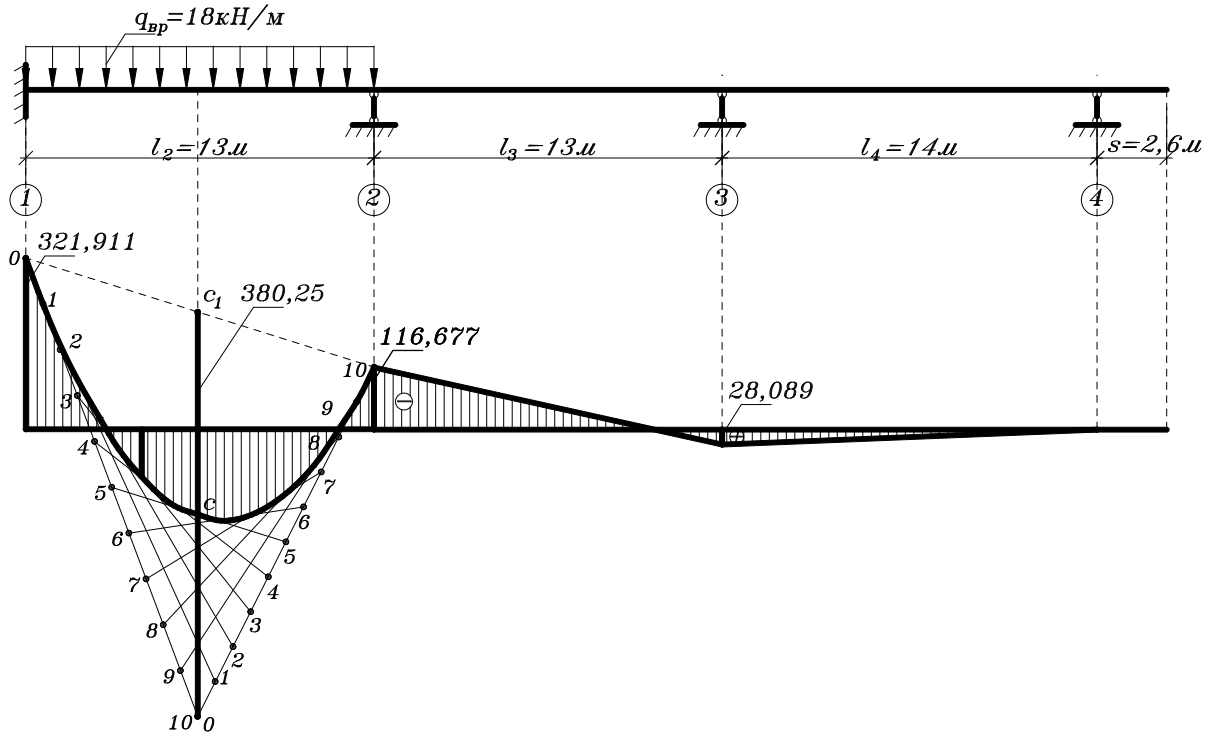


Рис. 34. Эпюра M от временной нагрузки $q_{вп}$, расположенной в пролёте № 2

Нагрузка только в третьем пролёте (рис. 35)

$$n = 1 \dots l_1 \cdot M_0 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot M_1 + l_2 \cdot M_2 = -3 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$n = 2 \dots l_2 \cdot M_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot M_2 + l_3 \cdot M_3 = -3 \cdot (\omega_2 + \omega_3)$$

$$n = 3 \dots l_3 \cdot M_2 + 2 \cdot (l_3 + l_4) \cdot M_3 + l_4 \cdot M_4 = -3 \cdot (\omega_3 + \omega_4)$$

Известно — $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = 0$;

$$\omega_3 = q_{вп} \cdot l_3^3 / 12 = 18 \cdot 13^3 / 12 = 3295,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; l_1 = 0; M_4 = 0.$$

$$n = 1 \dots 26 \cdot M_1 + 13 \cdot M_2 = 0$$

$$n = 2 \dots 13 \cdot M_1 + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot M_3 = -3 \cdot (0 + 3295,5)$$

$$n = 3 \dots 13 \cdot M_2 + 54 \cdot M_3 = -3 \cdot (3295,5 + 0)$$

$$M_1 = -\frac{13 \cdot M_2}{26} = -0,5 \cdot M_2;$$

$$M_3 = \frac{-9886,5 - 13 \cdot M_2}{54} = -183,083 - 0,241 \cdot M_2;$$

$$13 \cdot (-0,5 \cdot M_2) + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot (-183,083 - 0,241 \cdot M_2) = -9886,5;$$

$$-6,5 \cdot M_2 + 52 \cdot M_2 - 2380,079 - 3,133 \cdot M_2 = -9886,5;$$

$$M_2 = \frac{-7506,421}{42,367} = -177,176 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -0,5 \cdot M_2 = -0,5 \cdot (-177,176) = 88,588 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = -183,083 - 0,241 \cdot M_2 = -183,083 - 0,241 \cdot (-177,176) =$$

$$= -140,383 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

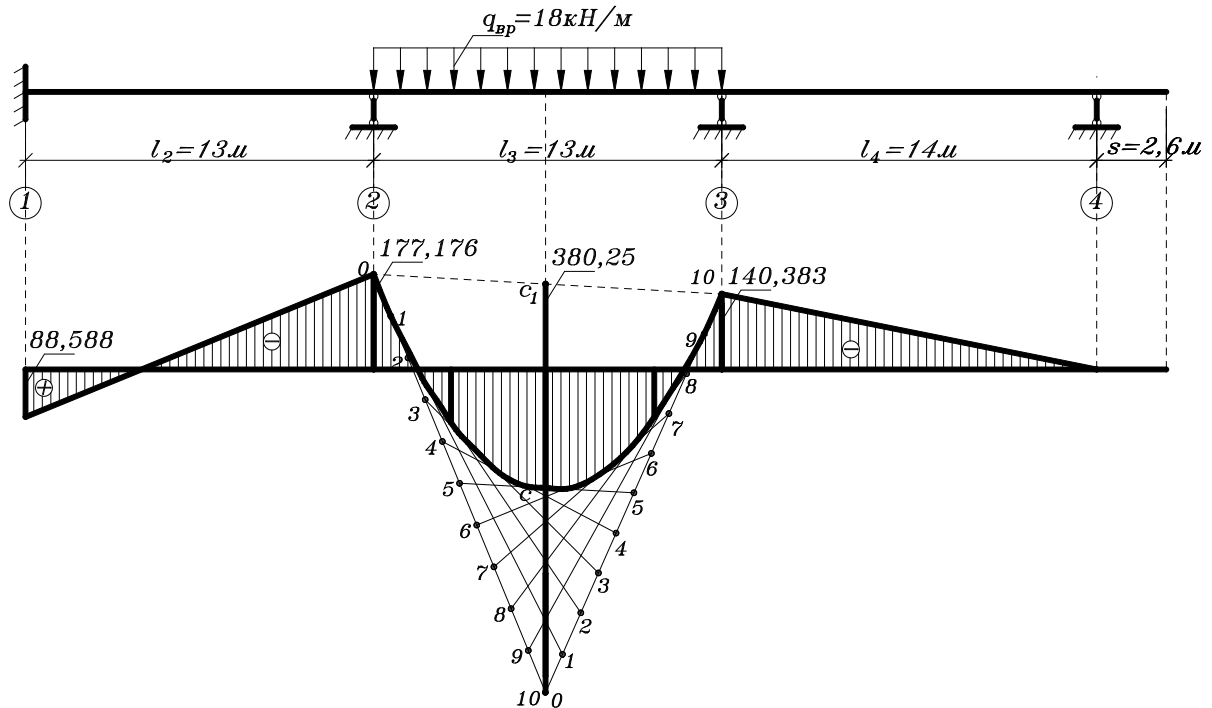


Рис. 35. Эпюра M от временной нагрузки $q_{\text{вр}}$, расположенной в пролёте № 3

Нагрузка только в четвертом пролёте (рис. 36)

$$n = 1 \dots l_1 \cdot M_0 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot M_1 + l_2 \cdot M_2 = -3 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$n = 2 \dots l_2 \cdot M_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot M_2 + l_3 \cdot M_3 = -3 \cdot (\omega_2 + \omega_3)$$

$$n = 3 \dots l_3 \cdot M_2 + 2 \cdot (l_3 + l_4) \cdot M_3 + l_4 \cdot M_4 = -3 \cdot (\omega_3 + \omega_4)$$

Известно — $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$;

$$\omega_4 = q_{\text{вр}} \cdot l_4^3 / 12 = 18 \cdot 14^3 / 12 = 4116 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; l_1 = 0; M_4 = 0.$$

$$n = 1 \dots 26 \cdot M_1 + 13 \cdot M_2 = 0$$

$$n = 2 \dots 13 \cdot M_1 + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot M_3 = 0$$

$$n = 3 \dots 13 \cdot M_2 + 54 \cdot M_3 = -3 \cdot (0 + 4116)$$

$$M_1 = -\frac{13 \cdot M_2}{26} = -0,5 \cdot M_2;$$

$$M_3 = \frac{-12348 - 13 \cdot M_2}{54} = -228,667 - 0,241 \cdot M_2;$$

$$13 \cdot (-0,5 \cdot M_2) + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot (-228,667 - 0,241 \cdot M_2) = 0;$$

$$-6,5 \cdot M_2 + 52 \cdot M_2 - 2972,671 - 3,133 \cdot M_2 = 0;$$

$$M_2 = \frac{2972,671}{42,367} = 70,165 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -0,5 \cdot M_2 = -0,5 \cdot 70,165 = -35,0825 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = -228,667 - 0,241 \cdot M_2 = -228,667 - 0,241 \cdot 70,165 = -245,577 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

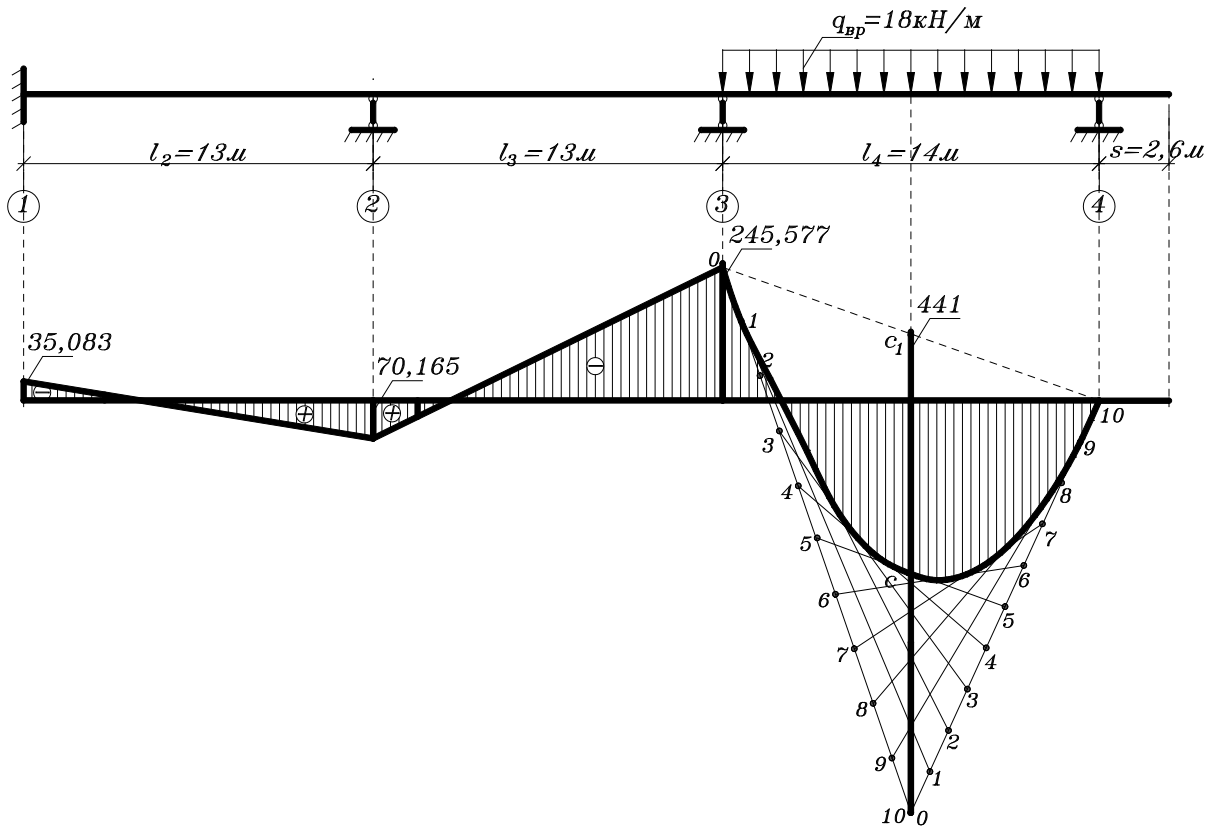


Рис. 36. Эпюра M от временной нагрузки $q_{вр}$, расположенной в пролёте № 4

Загружена только консоль (рис. 37)

$$M_4 = -18 \cdot 2,6 \cdot 1,3 = -60,84 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$n = 1 \dots l_1 \cdot M_0 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot M_1 + l_2 \cdot M_2 = -3 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$n = 2 \dots l_2 \cdot M_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot M_2 + l_3 \cdot M_3 = -3 \cdot (\omega_2 + \omega_3)$$

$$n = 3 \dots l_3 \cdot M_2 + 2 \cdot (l_3 + l_4) \cdot M_3 + l_4 \cdot M_4 = -3 \cdot (\omega_3 + \omega_4)$$

Известно — $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$; $\omega_4 = q_{вр} \cdot l_4^3 / 12 = 18 \cdot 14^3 / 12 = 4116 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$; $l_1 = 0$; $M_4 = -60,84 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$n = 1 \dots 26 \cdot M_1 + 13 \cdot M_2 = 0$$

$$n = 2 \dots 13 \cdot M_1 + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot M_3 = 0$$

$$n = 3 \dots 13 \cdot M_2 + 54 \cdot M_3 + 14 \cdot (-60,84) = 0$$

$$M_1 = -\frac{13 \cdot M_2}{26} = -0,5 \cdot M_2;$$

$$M_3 = \frac{851,76 - 13 \cdot M_2}{54} = 15,773 - 0,241 \cdot M_2;$$

$$13 \cdot (-0,5 \cdot M_2) + 52 \cdot M_2 + 13 \cdot (15,773 - 0,241 \cdot M_2) = 0;$$

$$-6,5 \cdot M_2 + 52 \cdot M_2 + 205,049 - 3,133 \cdot M_2 = 0;$$

$$M_2 = \frac{-205,049}{42,367} = -4,839 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -0,5 \cdot M_2 = -0,5 \cdot (-4,839) = 2,4195 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = 15,773 - 0,241 \cdot M_2 = 15,773 - 0,241 \cdot (-4,839) = 16,939 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

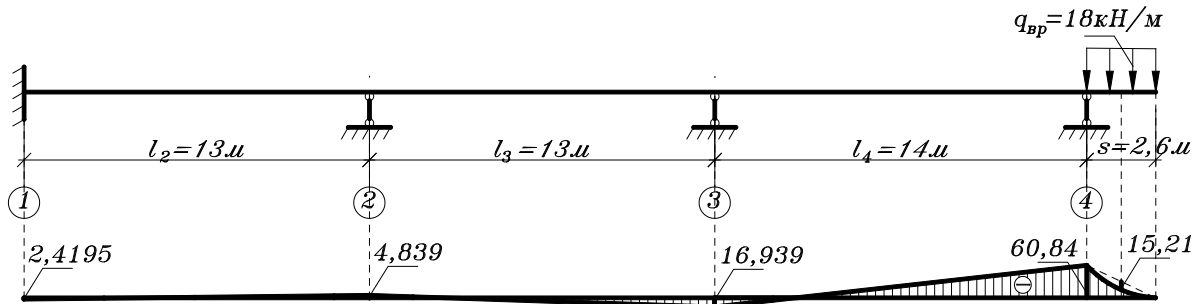


Рис. 37. Эпюра M от временной нагрузки $q_{вр}$, расположенной на консоли

Подробный способ построения объемлющей эпюры по всей длине неразрезной балки приведён на рис. 38, а для каждого пролёта в отдельности — на рис. 39.

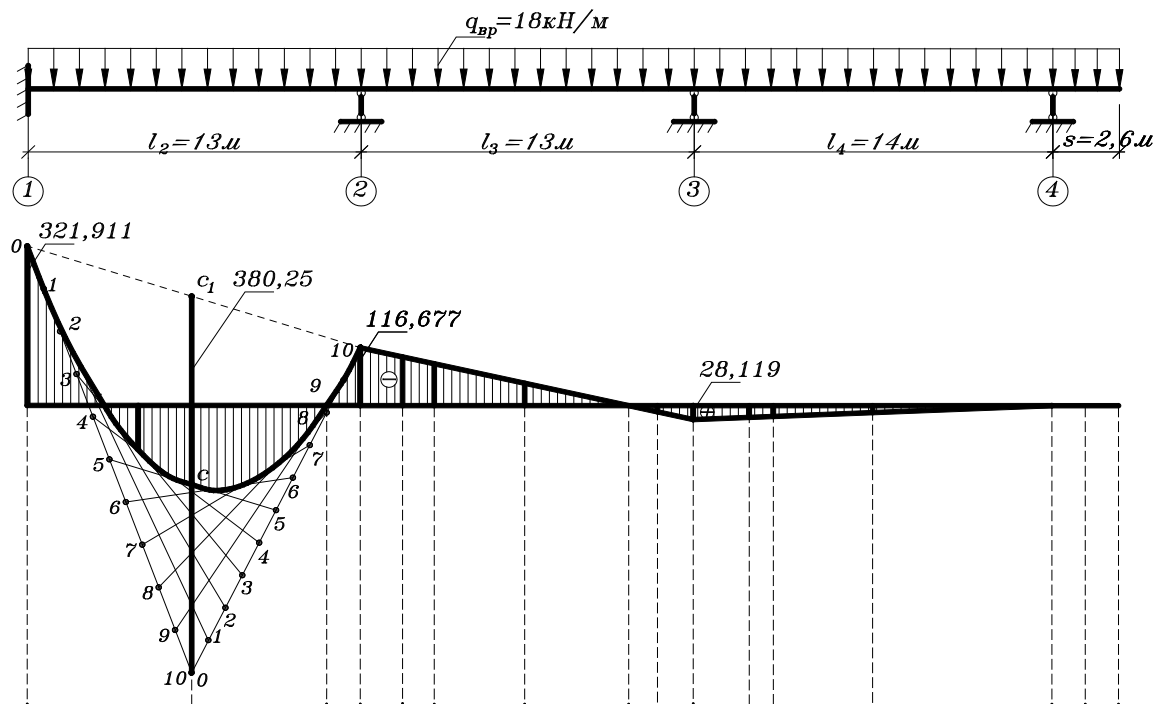


Рис. 38. (начало) Объемлющие эпюры M_{min} и M_{max} для неразрезной балки от $q_{вр}$

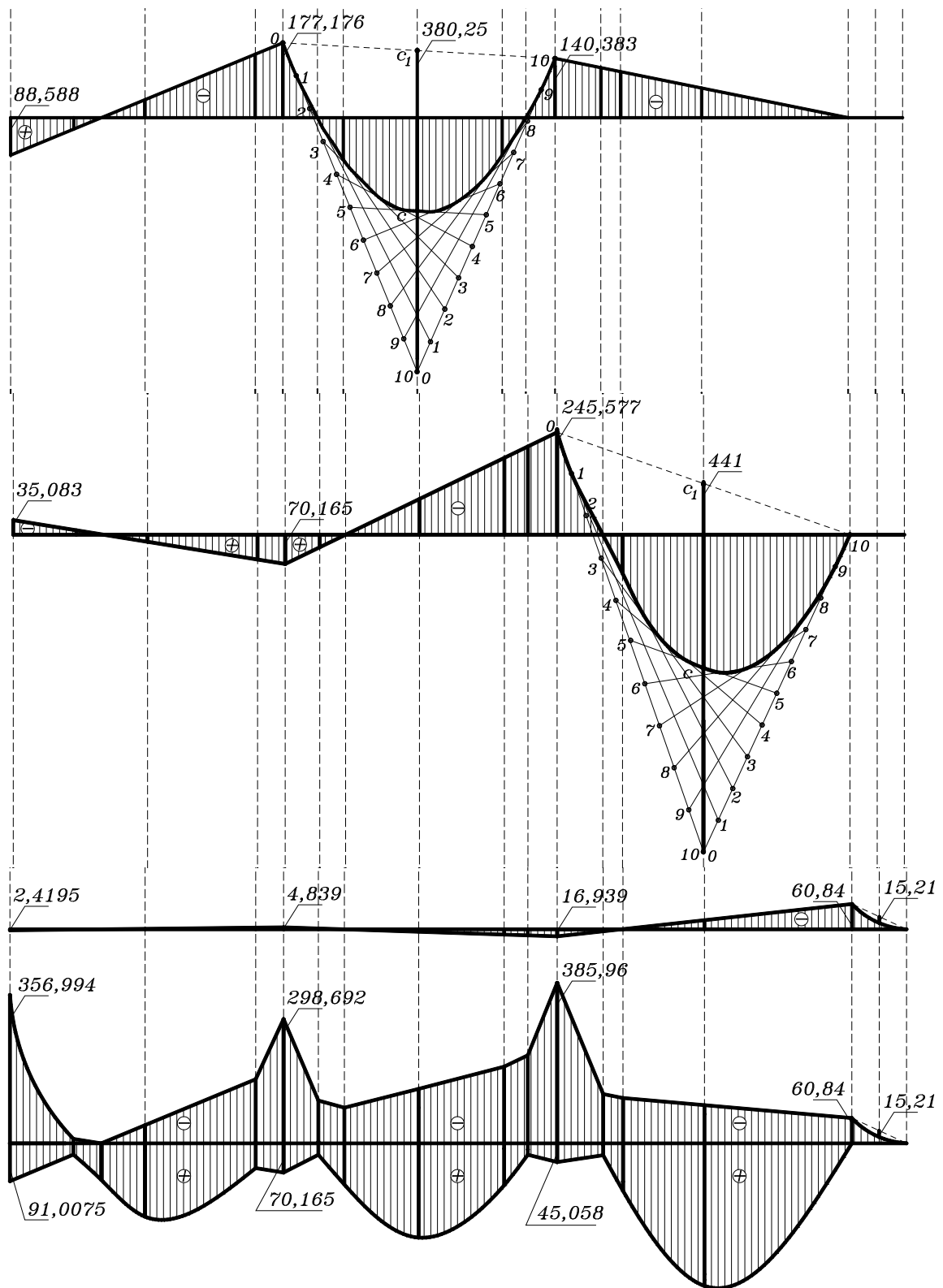


Рис. 38. (окончание) Объемлющие эпюры M_{min} и M_{max} для неразрезной балки от $q_{вр}$

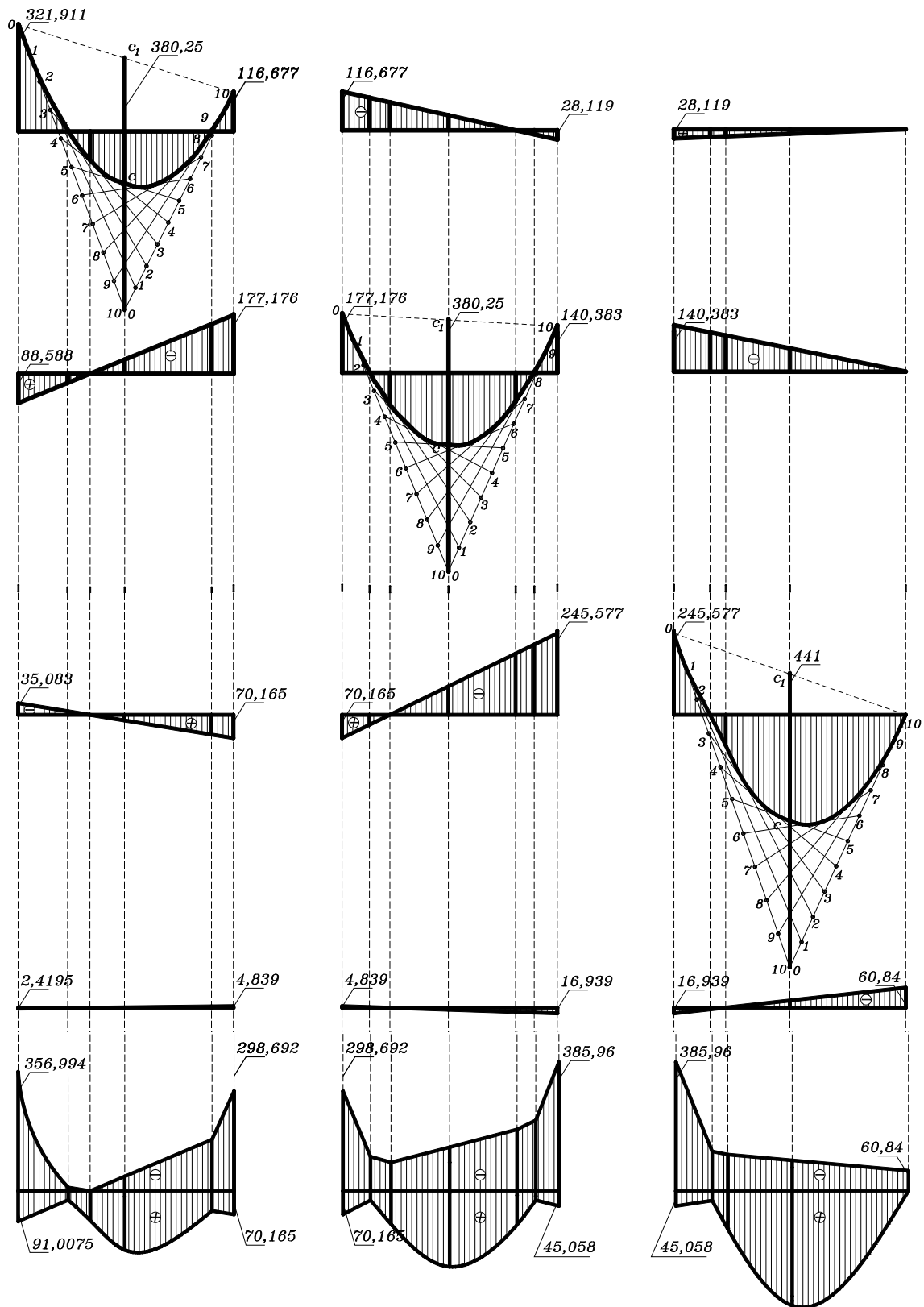


Рис. 39. Объемлющие эпюры M_{min} и M_{max} для каждого пролёта неразрезной балки в отдельности от действия временной нагрузки $q_{вр}$

14. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ СТАТИЧЕСКИМ И КИНЕМАТИЧЕСКИМ СПОСОБАМИ

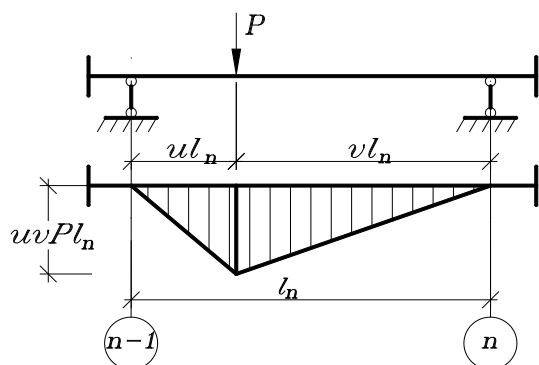


Рис. 40. Груз P в пролёте

Частный случай: При единственном грузе P (рис. 40).

Переменное положение груза в n – ом пролёте определяется параметрами $u \cdot l_n$ и $v \cdot l_n$, где u и v безразмерные числа ($u + v = 1$).

Определим опорные реакции

$$\sum m_A = 0 \dots -R_B \cdot l_n + P \cdot u \cdot l_n = 0 \Rightarrow R_B = P \cdot u;$$

$$\sum m_B = 0 \dots R_A \cdot l_n - P \cdot v \cdot l_n = 0 \Rightarrow R_A = P \cdot v$$

Определим статические моменты

$$\begin{aligned} S_n^A &= \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot P \cdot l_n \cdot u \cdot l_n \cdot \frac{2}{3} \cdot u \cdot l_n + \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot P \cdot l_n \cdot v \cdot l_n \cdot (u \cdot l_n + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot v \cdot l_n) = \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^3 \cdot v \cdot l_n^2 + \frac{1}{2} \cdot P \cdot l_n \cdot u \cdot v^2 \cdot \left[u \cdot l_n + \frac{1}{3} \cdot (1 - u) \cdot l_n \right] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^3 \cdot v \cdot l_n^2 + \frac{1}{2} \cdot P \cdot l_n \cdot u \cdot v^2 \cdot l_n \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot l_n + \frac{2}{3} \cdot u \cdot l_n \right] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^3 \cdot v \cdot l_n^2 + \frac{1}{6} \cdot P \cdot l_n \cdot u \cdot v^2 \cdot l_n^2 + \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot l_n^2 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^3 \cdot (1 - u) \cdot l_n^2 + \frac{1}{6} \cdot P \cdot l_n \cdot u \cdot (1 - 2 \cdot u + u^2) \cdot l_n^2 + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^2 \cdot (1 - 2 \cdot u + u^2) \cdot l_n^2 = \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^3 \cdot l_n^2 - \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^4 \cdot l_n^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot P \cdot l_n \cdot u \cdot l_n^2 - \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^2 \cdot l_n^2 + \frac{1}{6} \cdot P \cdot l_n \cdot u^3 \cdot l_n^2 + \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^2 \cdot l_n^2 - \\ &- \frac{2}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^3 \cdot l_n^2 + \frac{1}{3} \cdot P \cdot l_n \cdot u^4 \cdot l_n^2 = \frac{P \cdot l_n^3}{6} \cdot [2 \cdot u^3 + u + u^3 - 4 \cdot u^3] = \\ &= \frac{u - u^3}{6} \cdot P \cdot l_n^3; \end{aligned}$$

$$S_n^A = \frac{u - u^3}{6} \cdot P \cdot l_n^3; \quad (14.1)$$

$$S_n^B = \frac{v - v^3}{6} \cdot P \cdot l_n^3; \quad (14.2)$$

Величина изгибающего момента над опорными сечениями определяются

$$M_{n-1} = P \cdot l_n \cdot \frac{U - k'_n \cdot V}{k_n \cdot k'_n - 1}; \quad (14.3)$$

$$M_n = P \cdot l_n \cdot \frac{V - k_n \cdot U}{k_n \cdot k'_n - 1}. \quad (14.4)$$

Выражения $u \cdot v \cdot (1 + v)$ и $u \cdot v \cdot (1 + u)$ представляют собой функции третьей степени относительно u . Чтобы убедиться в этом, следует вместо v подставить выражение $(1 - u)$. Отсюда следует, что линия влияния опорного момента на протяжении каждого пролёта представляет собой кубическую параболу.

Здесь обозначено:

$$U = u \cdot v \cdot (1 + u) = u \cdot (1 - u) \cdot (1 + u) = u \cdot (1 - u^2) = u - u^3; \quad (14.5)$$

$$V = u \cdot v \cdot (1 + v) = (1 - v) \cdot v \cdot (1 + v) = v \cdot (1 - v^2) = v - v^3 \quad (14.6)$$

Разделим пролёт на 10 равных частей и будем ставить груз $P = 1$ последовательно в каждую точку деления. Им будут соответствовать значения $u = 0,00; 0,10; 0,20; \dots; 1,00; v = 1,00; 0,90; 0,80; \dots; 0,00;$

14.1. Статический метод

Для построения линии влияния выполняется серия загрузений единичным безразмерным грузом $P = 1$ (табл. 2) каждого пролёта с малым шагом. Груз поочерёдно располагается на всех пролётах балки, а также на консолях. Необходимо выразить интересующие нас величины в функции от абсциссы этого груза. Для каждого нагружения строится соответствующая линия влияния, интересующей нас величины. На каждой л.вл. отмечаем соответствующую ординату ($\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_i$), которые откладываются от базовой линии с учётом знака. Для построения линии влияния ординаты соединяют плавной кривой линией.

Таблица 2

Величина изгибающего момента над опорными сечениями при переменном положении единичного безразмерного груза $P = 1$

Расположение груза $P = 1$	M_1	M_2	M_3	M_4
В пролёте №2	$l_2 \cdot \frac{U - k'_2 \cdot V}{k_2 \cdot k'_2 - 1}$	$l_2 \cdot \frac{V - k_2 \cdot U}{k_2 \cdot k'_2 - 1}$	$-\frac{M_2}{k'_3}$	$-\frac{M_3}{k'_4}$
В пролёте №3	$-\frac{M_2}{k_2}$	$l_3 \cdot \frac{U - k'_3 \cdot V}{k_3 \cdot k'_3 - 1}$	$l_3 \cdot \frac{V - k_3 \cdot U}{k_3 \cdot k'_3 - 1}$	$-\frac{M_3}{k'_4}$
В пролёте №4	$-\frac{M_2}{k_2}$	$-\frac{M_3}{k_3}$	$l_4 \cdot \frac{U - k'_4 \cdot V}{k_4 \cdot k'_4 - 1}$	$l_4 \cdot \frac{V - k_4 \cdot U}{k_4 \cdot k'_4 - 1}$
На консоли	$-\frac{M_2}{k_2}$	$-\frac{M_3}{k_3}$	$-\frac{M_4}{k_4}$	$-P \cdot s < 0$

Продолжение табл. 2

В пролёте №2	$13 \cdot \frac{U - 3,759 \cdot V}{6,518}$	$13 \cdot \frac{V - 2 \cdot U}{6,518}$	$-\frac{M_2}{4,154}$	$-\frac{M_3}{\infty}$
В пролёте №3	$-\frac{M_2}{2}$	$13 \cdot \frac{U - 4,154 \cdot V}{13,539}$	$13 \cdot \frac{V - 3,5 \cdot U}{13,539}$	$-\frac{M_3}{\infty}$
В пролёте №4	$-\frac{M_2}{2}$	$-\frac{M_3}{3,5}$	$l_4 \cdot \frac{U/k'_4 - V}{k_4 - 1/k'_4}$	$l_4 \cdot \frac{V - k_4 \cdot U}{\infty}$
На консоли	$-\frac{M_2}{2}$	$-\frac{M_3}{3,5}$	$-\frac{M_4}{3,592}$	$-1 \cdot 2,6$
В пролёте №2	$1,994 \cdot U - 7,138 \cdot V$	$1,994 \cdot V - 3,989 \cdot U$	$0,48 \cdot V - 0,96 \cdot U$	0
В пролёте №3	$0,693 \cdot U - 2,877 \cdot V$	$0,96 \cdot U - 3,989 \cdot V$	$0,96 \cdot V - 3,361 \cdot U$	0
В пролёте №4	$-0,557 \cdot V$	$1,114 \cdot V$	$-3,898 \cdot V$	0
На консоли	0,103	-0,207	0,724	-2,6м

В заданной системе изгибающий момент M_k для сечения "k" в n – ом пролёте, удалённого от опор $(n - 1)$ и (n) на расстояния $u \cdot l_n = a$ и $v \cdot l_n = b$, соответственно, определяется по формуле

$$M_k = M_{k(0)} + M_{n-1} \frac{b}{l_n} + M_n \frac{a}{l_n}, \quad (14.7)$$

где л.вл. $M_{k(0)}$ для основной системы в n – ом пролёте, в остальных пролётах ординаты л.вл. $M_{k(0)}$ равны нулю.

Рассмотрим построение л.вл. изгибающего момента M_k для сечения "k" балки, расположенного, например, в пролёте №3 - $u \cdot l_3 = a$ и $v \cdot l_3 = b$.

Груз в пролёте № 2

$$\begin{aligned} M_k &= 0 + M_2 \frac{b}{l_3} + M_3 \frac{a}{l_3} = l_2 \cdot \frac{V - k_2 \cdot U}{k_2 \cdot k'_2 - 1} \cdot v - \left[\left(l_2 \cdot \frac{V - k_2 \cdot U}{k_2 \cdot k'_2 - 1} \right) / k'_3 \right] \cdot u = \\ &= l_2 \cdot \frac{V - k_2 \cdot U}{k_2 \cdot k'_2 - 1} \cdot (v - u/k'_3); \end{aligned}$$

Груз в пролёте № 3

$$\begin{aligned} M_k &= M_{k(0)} + M_2 \frac{b}{l_3} + M_3 \frac{a}{l_3} = M_{k(0)} + l_3 \cdot \frac{U - k'_3 \cdot V}{k_3 \cdot k'_3 - 1} \cdot v + l_3 \cdot \frac{V - k_3 \cdot U}{k_3 \cdot k'_3 - 1} \cdot u = \\ &= M_{k(0)} + \frac{l_3}{k_3 \cdot k'_3 - 1} \cdot [U \cdot (v - k_3 \cdot u) + V \cdot (u - k'_3 \cdot v)] = M_{k(0)} + [(-)]; \end{aligned}$$

Груз в пролёте № 4

$$M_k = 0 + M_2 \frac{b}{l_3} + M_3 \frac{a}{l_3} = \frac{l_4 \cdot V}{k_3 \cdot k_4} \cdot v - l_4 \cdot \frac{V}{k_4} \cdot u = \frac{l_4 \cdot V}{k_4} \cdot \left(\frac{v}{k_3} - u \right);$$

При грузе на конце консоли

$$M_k = 0 + M_2 \frac{b}{l_3} + M_3 \frac{a}{l_3} = -\frac{P \cdot s}{k_3 \cdot k_4} \cdot v + \frac{P \cdot s}{k_4} \cdot u = \frac{P \cdot s}{k_4} \cdot \left(u - \frac{v}{k_3} \right).$$

Для построения линии влияния ординаты соединяют плавной кривой линией.

Груз в пролёте №2

$$M_k = 0 + M_2 \frac{b}{l_3} + M_3 \frac{a}{l_3} = (1,994 \cdot V - 3,989 \cdot U) \cdot v + (0,48 \cdot V - 0,96 \cdot U) \cdot u = 1,3958 \cdot V - 2,7923 \cdot U + 0,144 \cdot V - 0,288 \cdot U = 1,5398 \cdot V - 3,0803 \cdot U;$$

Груз в пролёте №3 $a = u \cdot l_3 = 0,3 \cdot l_3$; $b = v \cdot l_3 = 0,7 \cdot l_3$

$$\begin{aligned} M_k &= M_{k(0)} + M_2 \frac{b}{l_3} + M_3 \frac{a}{l_3} = M_{k(0)} + (0,96 \cdot U - 3,989 \cdot V) \cdot v + \\ &+ (0,96 \cdot V - 3,61U) \cdot u \\ &= M_{k(0)} + 0,672 \cdot U - 2,7923 \cdot V + 0,288 \cdot V - 1,0083 \cdot U = \\ &= M_{k(0)} - 0,3363 \cdot U - 2,5043 \cdot V; \end{aligned}$$

Груз в пролёте № 4

$$M_k = 0 + M_2 \frac{b}{l_3} + M_3 \frac{a}{l_3} = 1,114 \cdot V \cdot v - 3,898 \cdot V \cdot u = 0,7798 \cdot V - 1,1694 \cdot V = -0,3896 \cdot V;$$

Груз на конце консоли

$$M_k = 0 + M_2 \frac{b}{l_3} + M_3 \frac{a}{l_3} = -0,207 \cdot v + 0,724 \cdot u = -0,1449 + 0,2172 = 0,0723.$$

Вычисленные ординаты линий влияния по полученным выражениям для десяти сечений в каждом пролёте приведены в табл. 3. Для построения линии влияния ординаты в каждом сечений откладывают с учётом знаков от базовой линии и соединяют плавной кривой линией (рис. 41).

Таблица 3

Ординаты линий влияния для десяти сечений в каждом пролёте

№ по- ложения груза	u	v	U	V	Груз в пролёте №2 $1,5398 \cdot V - 3,0803 \cdot U = M_k$		Груз в пролёте №3 $M_{k(0)} - 0,3363 \cdot U - 2,5024 \cdot V = M_k$			Груз в пр.№4 $-0,3896 \cdot V = M_k$	
					M_k	M_k	$M_{k(0)}$	M_k	M_k		
					$-3,0803U$	M_k	$M_{k(0)}$	$-2,5024V$	M_k		
0	0,00	1,00	0,000	0,000	0	0	0	0	0	0	
1	0,10	0,90	0,099	0,171	0,2633	-0,3049	-0,0416	0,91	-0,333	-0,4282	0,4482
2	0,20	0,80	0,192	0,288	0,4435	-0,5914	-0,1479	1,82	-0,0646	-0,7212	1,0342
3	0,30	0,70	0,273	0,357	0,5497	-0,8409	-0,2912	2,73	-0,0918	-0,8940	1,7442
4	0,40	0,60	0,336	0,384	0,5913	-1,0349	-0,4436	2,34	-0,1129	-0,9616	1,2655
5	0,50	0,50	0,375	0,375	0,5774	-1,1551	-0,5777	1,95	-0,1261	-0,9391	0,8848
6	0,60	0,40	0,384	0,336	0,5174	-1,1828	-0,6654	1,56	-0,1291	-0,8414	0,5895
7	0,70	0,30	0,357	0,273	0,4204	-1,0997	-0,6793	1,17	-0,1201	-0,6837	0,3662
8	0,80	0,20	0,288	0,192	0,2956	-0,8871	-0,5915	0,78	-0,0968	-0,4808	0,2024
9	0,90	0,10	0,171	0,099	0,1524	-0,5267	-0,3743	0,39	-0,0575	-0,2479	0,0846
10	1,00	0,00	0,000	0,000	0	0	0	0	0	0	0

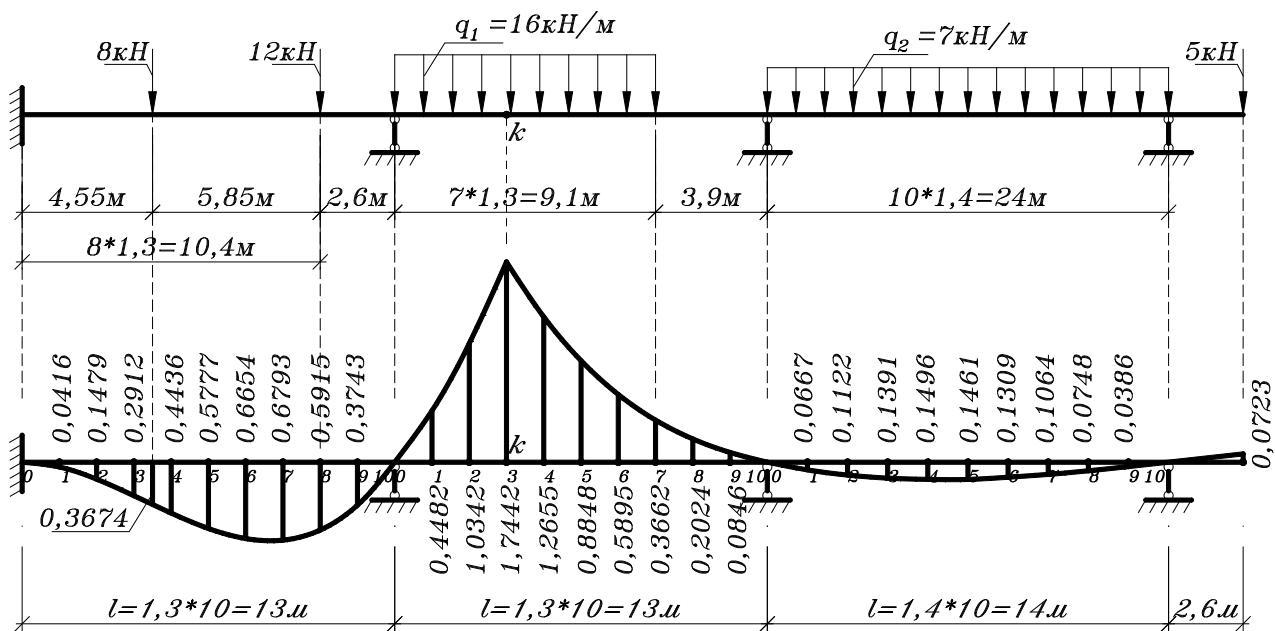


Рис. 41. Загружение л.вл. M в сечение "k" постоянной нагрузкой

Вычислим значение изгибающего момента в заданном сечении "k" от действия постоянной нагрузки

$$\begin{aligned}
 M_k^{\text{пост}} &= -8 \cdot 0,3674 - 12 \cdot 0,5915 + 16 \cdot 1,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [0,4482 + (0,4482 + 1,0342) + \\
 &+ (1,0342 + 1,7442) + (1,7442 + 1,2655) + (1,2655 + 0,8848) + \\
 &+ (0,8848 + 0,5895) + (0,5895 + 0,3662)] - \\
 &- 7 \cdot 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [0,0667 + (0,0667 + 0,1122) + (0,1122 + 0,1391) + \\
 &+ (0,1391 + 0,1496) + (0,1496 + 0,1461) + (0,1461 + 0,1309) + \\
 &+ (0,1309 + 0,1064) + (0,1064 + 0,0748) + (0,0748 + 0,0386) + 0,0386] + \\
 &+ 5 \cdot 0,0723 = -2,9392 - 7,098 + 127,9096 - 9,45112 + 0,3615 = \\
 &= 128,2711 - 19,48832 = 108,78278 \text{кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

14.2. Кинематический метод (рис. 42)

Линии влияния, построенные кинематическим способом, называются моделями или эскизами. Данным способ л.вл. строим приближенно.

Для построения линий влияния изгибающих моментов (л.вл. M_k) вводим шарнир в интересующем сечении и сообщаем единичный взаимный угол поворота сечениям, примыкающим к шарниру.

Использовать свойства л.вл., вытекающие из кинематического способа её построения: очертание л.вл. M для любого (опорного или промежуточного) сечения "k" совпадает с очертанием оси изогнутой балки, если этот изгиб вызван единичным взаимным поворотом торца двух её частей, разде-

лённых шарниром, мысленно введённым в сечении "k" направление взаимного поворота назначается таким же как у $M_k > 0$.

Известно: Если по условию задачи сечение "k" расположено в средней части пролёта, между фокусами, то ординаты л.вл. M_k получаются положительными по всей длине этого пролёта. Если же сечение задано между фокусом и опорой, то ординаты л.вл. M_k положительны в ближайшей к сечению части пролёта и отрицательны в его отделённой части. Чем ближе сечение "k" к опоре, тем короче положительный и длиннее отрицательный участок л.вл. M_k в этом пролёте.

Для построения л.вл. опорной реакций мысленно отбрасываем опорное устройство, её действия заменяем усилием. Сообщаем новой системе (не механизм как МШБ) перемещения по направлению удалённой связи так, чтобы выполнялось положительная работа. Масштаб принимаем равной единице. Восстанавливаем связь, которая удерживает балку в искривлённом положении.

Для построения л.вл. поперечной силы Q_k вводим «качели», и прикладываем групповую силу Q .

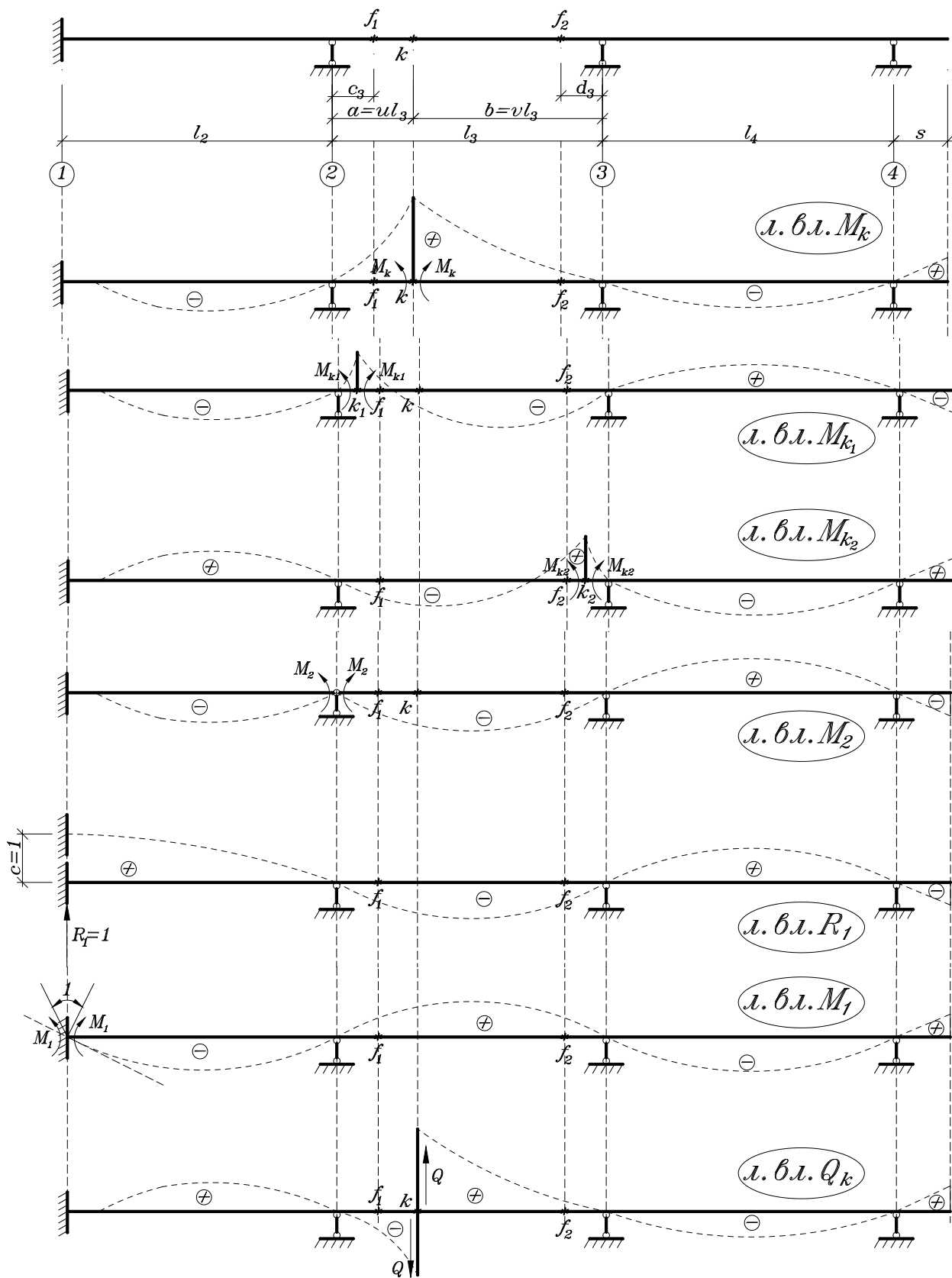


Рис. 42. Модели (эскизы) линии влияния

15. РАСЧЁТ МНОГОПРОЛЁТНОЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

15.1. Общие методические указания

В ряде случаев расчёт многопролётной неразрезной балки рациональнее выполнять методом перемещений. Это может приводить к существенному снижению трудоёмкости расчёта, а также выполнять контроль правильности выполнения расчёта выше описанными методами.

При расчёте статически неопределимых неразрезных балок методом перемещений за неизвестные принимаются углы поворота сечений над промежуточными опорами. Деформированный вид балки будет полностью определен, если будут известны угловые перемещения опорных сечений $n_{\text{угл}}$. Их число и будет равняться общему числу неизвестных, т.к. все линейные перемещения определены. В этом случае сечения балки над опорами условно принимается за «жесткие» узлы. Напомним, что «жестким» считается узел, в котором, по крайней мере, два из сходящихся в нём стержней жёстко соединены между собой.

Заметим, что для консоли эюры можно построить сразу как для статически определённой системы.

Выбор основной системы. При расчёте методом перемещений сплошной неразрезной балки накладываем противоповоротные шайбы над опорами, превращая её в совокупность однопролётных статически неопределимых балок. При этом полученную таким образом из заданной систему называют основной. Обращаем ваше внимание, что противоповоротные шайбы накладываются на крайние опоры в том случае, если по условиям задачи балка имеет консольные свесы. Число неизвестных метода перемещений является степенью кинематической неопределимости заданной системы.

Противоповоротная «шайба» не может поворачиваться до тех пор, пока ей не будет сообщён принудительный поворот. Реакция таких связей представляют собой моменты, и называются реактивными моментами.

Таким образом, основная система состоит из отдельных статически неопределимых балок, каждый из которых работает самостоятельно. В основной системе от заданной нагрузки деформируются только те элементы, к которым приложена внешняя нагрузка. Каждый стержень в ОС от внешней нагрузки изгибается независимо от других стержней.

Основные неизвестные метода нумеруются по порядку и подлежат определению. Усилия в наложенных связях нумеруются в соответствии с нумерацией перемещений.

Канонические уравнения. Следует отметить, что в заданной системе противоповоротные «шайбы» отсутствуют, следовательно, усилия в наложенных связях должны равняться нулю.

Если полная реакция (реактивный момент) любой дополнительно введённой связи определённая расчётом в основной системе равняется нулю, т.е.

$R_i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, k$, то основная и заданная системы статически эквивалентны и разрешающими являются статические условия.

Развёртывание условия $R_i = 0$ на основе принципа суперпозиции приводит к каноническому уравнению метода перемещений

$$R_i = 0 \dots \sum r_{ik} \cdot Z_k + R_{ip} = 0, \quad (15.1)$$

где r_{ik} — коэффициент уравнений — реактивный момент в i — той наложенной противоположной «шайбе» от единичного перемещения k — той наложенной противоположной «шайбы», т.е. $Z_k = 1$ в основной системе;

$r_{ik} \cdot Z_k$ — реактивный момент в i — той наложенной противоположной «шайбе» от действия основного неизвестного Z_k в основной системе;

R_{ip} — свободный член — реактивный момент в i — той наложенной противоположной «шайбе» от заданной внешней нагрузки в основной системе.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. Для вычисления единичных коэффициентов r_{ik} при неизвестных рассматривают единичные вспомогательные состояния. По направлению наложенных противоположных «шайб» основной системе сообщаются единичные перемещения (угловые повороты) и с помощью таблицы метода перемещений строят эпюры m_i, q_i . Рассматривают основную систему под действием заданной внешней нагрузки (сост. «Р»), и по таблице метода перемещений строят эпюры M_p, Q_p , затем определяют свободные члены R_{ip} .

При определении реактивных моментов в наложенных противоположных «шайбах» (коэффициентов и свободных членов) применяется статический способ, который является основным в методе перемещений и основан на использовании уравнений равновесия.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены, представляющие реактивные моменты в наложенных противоположных «шайбах», определяют из условий равновесия в основной системе сечений над опорами. Для этого данный участок сечениями отделяется от всех примыкающих балок (слева и справа) совместно с наложенными на них противоположными «шайбами» и составляется уравнение равновесия в виде $\sum M = 0$. При этом значения изгибающих моментов снимают с соответствующей эпюры изгибающих моментов.

Положительное направление определяемого реактивного момента совпадает с принятым направлением неизвестного угла поворота сечения над опорой.

Окончательная эпюра изгибающих моментов M . На основании принципа суперпозиции эпюра M строится по формуле

$$M = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + M_p \quad (15.2)$$

Окончательная эпюра поперечной силы Q . Строится двумя способами:

а) на основании принципа суперпозиции (в данной работе не рассматривается)

$$Q = q_1 \cdot z_1 + q_2 \cdot z_2 + Q_p; \quad (15.3)$$

б) по данным уже построенной окончательной эпюры M , рассматривая равновесие стержней.

Проверка правильности построения окончательных эпюр. Статические проверки при расчёте неразрезной балки методом перемещений (условия равновесия $\sum M = 0$, $\sum Y = 0$) должны выполняться для любого сечения заданной системы. Особое значение приобретает соблюдение условий равновесия, которыми ранее в расчёте основной системы определялась каждая из реакций наложенной связи R_i .

Этими условиями контролируется соблюдение исходных разрешающих статических условий $R_i = 0$, т.е. правильность составления и решения канонических уравнений метода перемещений. Поэтому статические проверки при расчёте методом перемещений являются основными. После этого проверяют равновесие неразрезной балки в целом.

15.2. Справочные данные и указания об их использовании

Эпюры для статически неопределимых балок от единичного поворота сечений над опорами и заданной внешней нагрузки предварительно строят методом сил. Все эпюры сводятся в таблицу метода перемещений (табл. 4). Применение данной таблицы для построения единичной и грузовой эпюры снижает трудоёмкость.

По данным таблицы метода перемещений в работе надо изобразить для каждого состояния основной системы деформированные (искривлённые) очертания всех пролётов неразрезной балки, эпюры M и Q для них.

Используя справочные данные при построении эпюры M , следует каждый раз согласовывать расположение ординат эпюры с очертанием деформированного (искривлённого) пролёта на схеме балки (ординаты эпюры должны быть отложены со стороны растянутого волокна).

Используя справочные данные при построении эпюры Q , следует каждый раз направлять силы R_A и R_B (по их направлению затем определяются знаки ординат Q) так, чтобы уравновесить ими нагрузку, пары M_A и M_B , приложенные в концевых сечениях стержня согласно уже построенной эпюре M .

В единичных состояниях (нагрузка отсутствует) силы R_A и R_B образуют пару, уравновешивающую пары M_A и M_B . Поэтому, если M_A и M_B , судя по эпюре M , вращают стержень по ходу часовой стрелки, то R_A и R_B должны вращать в обратном направлении, т.е. будут отрицательны, и наоборот.

Таблица метода перемещений

№ п/п	Схема балки и воздействия на неё	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и поперечных сил
1		$M_A = 4 \cdot E \cdot J / l;$ $M_B = 2 \cdot E \cdot J / l;$ $R_A = -R_B = -6 \cdot E \cdot J / l^2;$
2		$M_A = -u \cdot v^2 \cdot P \cdot l;$ $M_B = u^2 \cdot v \cdot P \cdot l;$ $M_C = 2 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot P \cdot l;$ $R_A = v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u) \cdot P;$ $R_B = u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v) \cdot P;$
3		$M_A = M_B = -\frac{q \cdot l^2}{12};$ $M_C = \frac{q \cdot l^2}{8};$ $R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2};$

№ п/п	Схема балки и воздействия на неё	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и поперечных сил
4		$M_A = -\frac{q \cdot a^2}{6} \cdot (3 - 4 \cdot u + 1,5 \cdot u^2);$ $M_B = -\frac{q \cdot a^2}{6} \cdot (u - 0,75 \cdot u^2);$ $M_C = \frac{q \cdot a^2 \cdot u}{12} \cdot (6 \cdot v^2 + 3 \cdot v - 1);$ $R_A = \frac{q \cdot a \cdot (l - 0,5 \cdot a)}{l} - \frac{M_A - M_B}{l};$ $R_B = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot l} + \frac{M_A - M_B}{l};$ <p style="text-align: center;"><i>или</i></p> $M_C = R_B \cdot vl - M_B$ $u = a/l.$
5		$M_A = -\frac{q \cdot a^2}{6} \cdot (u - 0,75 \cdot u^2);$ $M_B = -\frac{q \cdot a^2}{6} \cdot (3 - 4 \cdot u + 1,5 \cdot u^2);$ $M_C = \frac{q \cdot l^2 \cdot v^3}{12} \cdot (6 \cdot u^2 + 3 \cdot u - 1);$ $R_A = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot l} - \frac{M_A - M_B}{l};$ $R_B = \frac{q \cdot a \cdot (l - 0,5 \cdot a)}{l} + \frac{M_A - M_B}{l};$ <p style="text-align: center;"><i>или</i></p> $M_C = R_A \cdot vl - M_A$ $u = a/l.$

№ п/п	Схема балки и воздействия на неё	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и поперечных сил
6		$M_A = -\frac{q \cdot c}{l^2} \cdot \left[ab^2 - \frac{c^2}{12} \cdot (2b - a) \right];$ $M_B = -\frac{q \cdot c}{l^2} \cdot \left[a^2b - \frac{c^2}{12} \cdot (2a - b) \right];$ $R_A = \frac{q \cdot c \cdot b}{l} - \frac{M_A - M_B}{l};$ $R_B = \frac{q \cdot c \cdot a}{l} + \frac{M_A - M_B}{l};$

16. ПРИМЕР РАСЧЁТА МНОГОПРОЛЁТНОЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ

16.1. Задание (рис. 43)

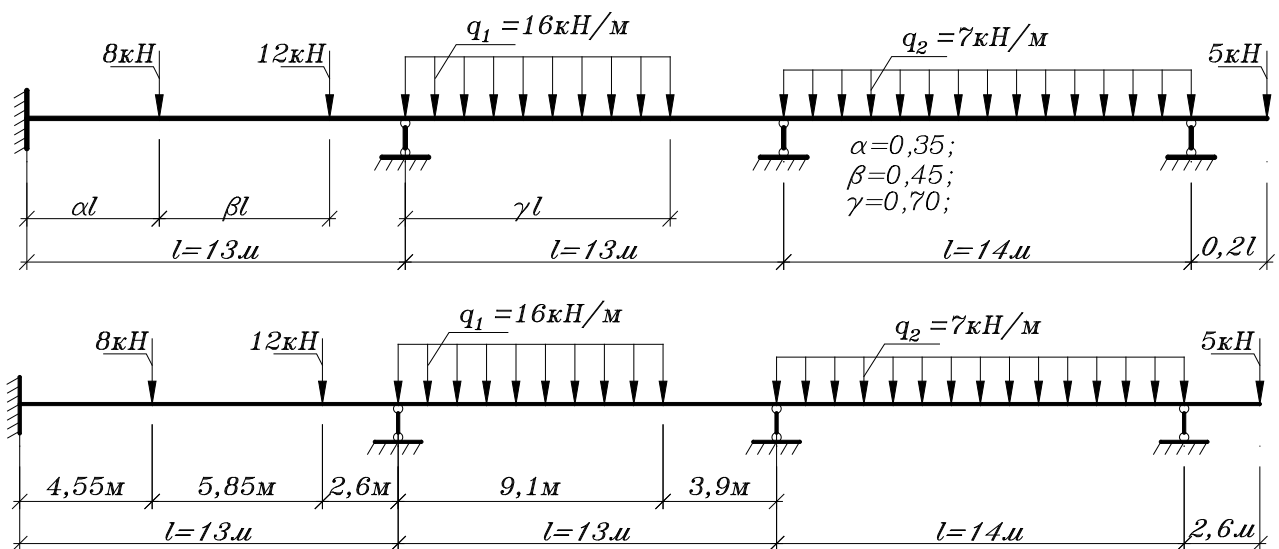


Рис. 43. Исходные данные для расчёта

16.2. Определение степени кинематической неопределимости

$$n = n_{\text{угл}} = 3.$$

Система три раза кинематически неопределима.

16.3. Основная система метода перемещений

На чертеже (рис. 44) основной системы показаны и занумерованы основные неизвестные метода перемещений Z_1 , Z_2 и Z_3 , нагрузка, реакции наложенных связей R_1 , R_2 и R_3 . Принятые направления основных неизвестных на схеме считаются положительными. Противоповоротные «шайбы», наложенные над промежуточными опорами, препятствуют поворотам сечений Z_1 , Z_2 и Z_3 . При этом возникающие реакции в наложенных противоположных шайбах (реактивные моменты) обозначены R_1 , R_2 и R_3 и по условию статической эквивалентности основной и заданной систем должны равняться нулю.

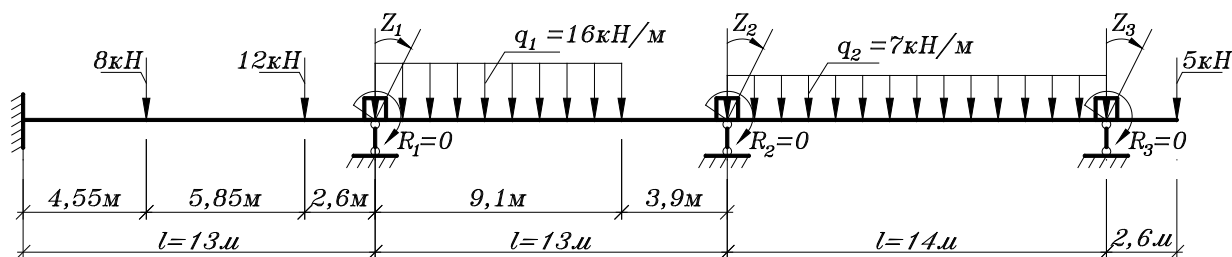


Рис. 44. Основная система метода перемещений

Канонические уравнения метода перемещений

$$\begin{cases} R_1 = 0 \cdots r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1p} = 0 \\ R_2 = 0 \cdots r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2p} = 0 \\ R_3 = 0 \cdots r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

Приводим ниже механический смысл первого канонического уравнения, коэффициента r_{12} и свободного члена R_{3p} уравнений:

ур. № 1 — реактивный момент в первой наложенной противоположной «шайбе» от совместного действия всех основных неизвестных Z_1 , Z_2 , Z_3 и внешней нагрузки равен нулю;

r_{12} — коэффициент уравнений — реактивный момент в первой наложенной противоположной «шайбе» от единичного перемещения второй наложенной противоположной «шайбы», т.е. $Z_2 = 1$.

R_{3p} — свободный член — реактивный момент в третьей наложенной противоположной «шайбе» от заданной внешней нагрузки.

16.4. Единичные состояния основной системы и соответствующие эпюры. Определение коэффициентов канонических уравнений

Состояние $Z_1 = 1$ (рис. 45)

Рассматриваем единичное состояние, в котором сообщаем единичный угол поворота первой наложенной шайбы $Z_1 = 1$. Изображаем стержни в деформированном состоянии и обозначаем возникающие в наложенных противоположных шайбах реактивные моменты r_{11} , r_{21} и r_{31} . Соответствующие этому состоянию эпюры моментов m_1 и поперечных сил q_1 с вычислением ординат строим с помощью таблицы метода перемещений (рис. 45).

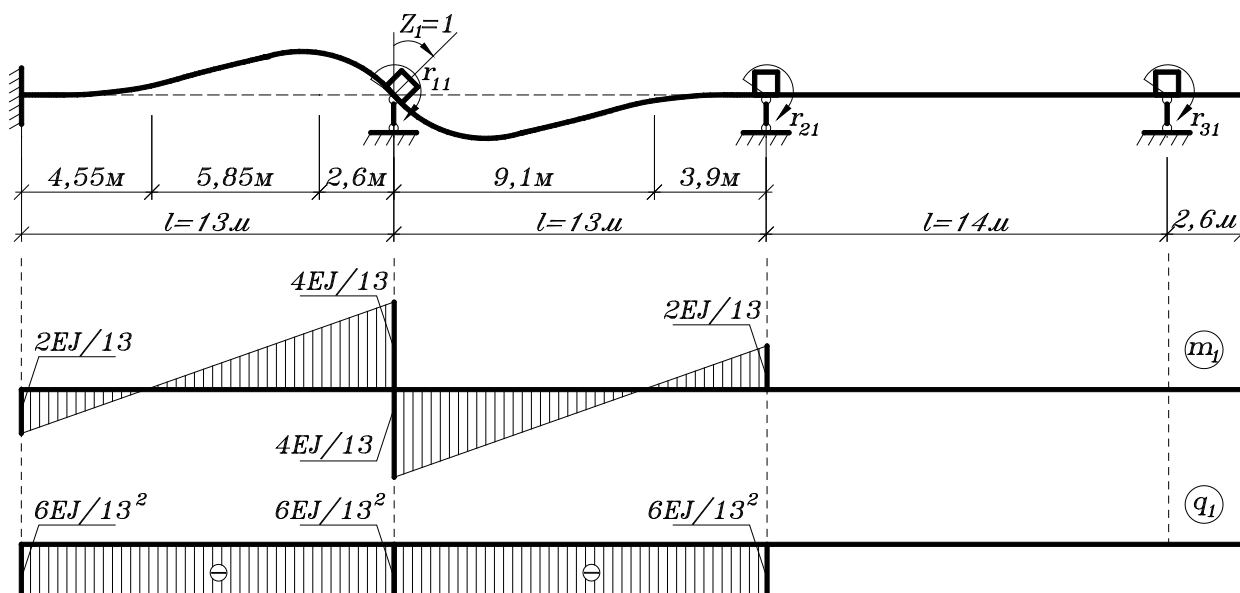


Рис. 45. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента в первом вспомогательном состоянии

Коэффициенты r_{11} (рис. 46,а), r_{21} (рис. 46,б) и r_{31} (рис. 46,в) определяем из условия равновесия узлов в соответствии с данными эпюры m_1 .

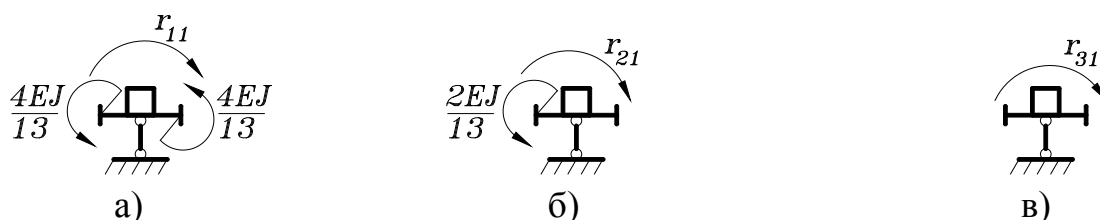


Рис. 46. Определение коэффициентов в первом вспомогательном состоянии

$$\begin{aligned} \sum M = 0 \dots r_{11} - 4EJ/13 - 4EJ/13 = 0 &\Rightarrow r_{11} = 0,6154EJ \text{ (рис. 46,а);} \\ \sum M = 0 \dots r_{21} - 2EJ/13 = 0 &\Rightarrow r_{21} = 0,1538EJ \text{ (рис. 46,б);} \\ \sum M = 0 \dots r_{31} = 0 &\text{ (рис. 46,в).} \end{aligned}$$

Состояние $Z_2 = 1$ (рис. 47)

Задаём единичный угол поворота по ходу часовой стрелки второй наложенной противоповоротной «шайбе» $Z_2 = 1$. Изображаем стержни в деформированном состоянии с обозначением реактивных моментов в наложенных противоповоротных «шайбах» r_{12} , r_{22} и r_{32} . С помощью таблицы метода перемещений строим соответствующие этому состоянию эпюры моментов m_2 и поперечных сил q_2 с вычислением ординат (рис. 47).

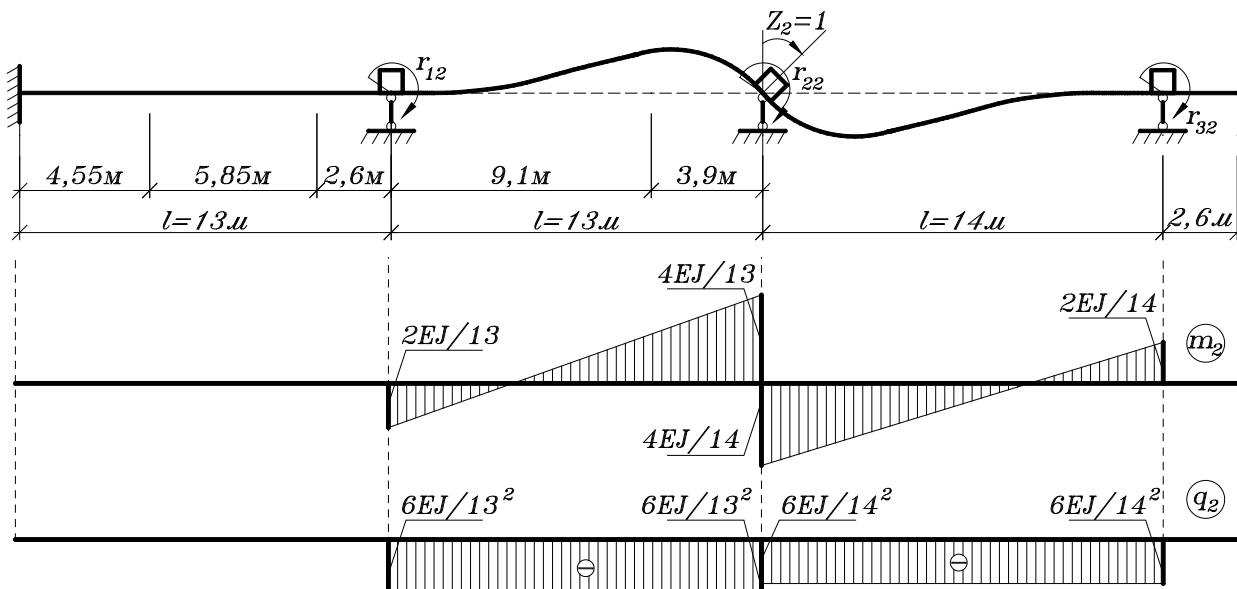


Рис. 47. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента во втором вспомогательном состоянии

По данным эпюры m_2 определяем коэффициенты r_{21} (рис. 48,а), r_{22} (рис. 48,б) и r_{23} (рис. 48,в), рассматривая равновесие опорных узлов.

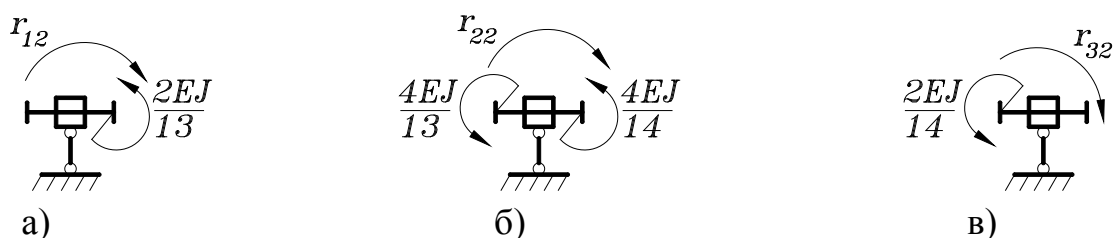


Рис. 48. Определение коэффициентов во втором вспомогательном состоянии

$$\begin{aligned} \sum m = 0 \dots r_{12} - 2EJ/13 = 0 &\Rightarrow r_{12} = 0,1538EJ \text{ (рис. 48,а);} \\ \sum m = 0 \dots r_{22} - 4EJ/13 - 4EJ/14 = 0 &\Rightarrow \\ r_{22} = (0,3077 + 0,1538)EJ = 0,5934EJ &\text{ (рис. 48,б);} \\ \sum m = 0 \dots r_{32} - 2EJ/14 = 0 &\Rightarrow r_{32} = 0,1428EJ \text{ (рис. 48,в).} \end{aligned}$$

Состояние $Z_3 = 1$ (рис. 49)

Третьей наложенной протвояпоротной «шайбе» в направлении третьего основного неизвестного задаём единичное перемещение $Z_3 = 1$, в виде угла поворота по ходу часовой стрелки. Реактивные моменты в наложенных связях обозначаем r_{13} , r_{23} , r_{33} и показываем на схеме, изображённой в деформированном состоянии. Соответствующие этому состоянию эпюры моментов m_3 и поперечных сил q_3 с вычислением ординат строим с помощью таблицы метода перемещений (рис. 49).

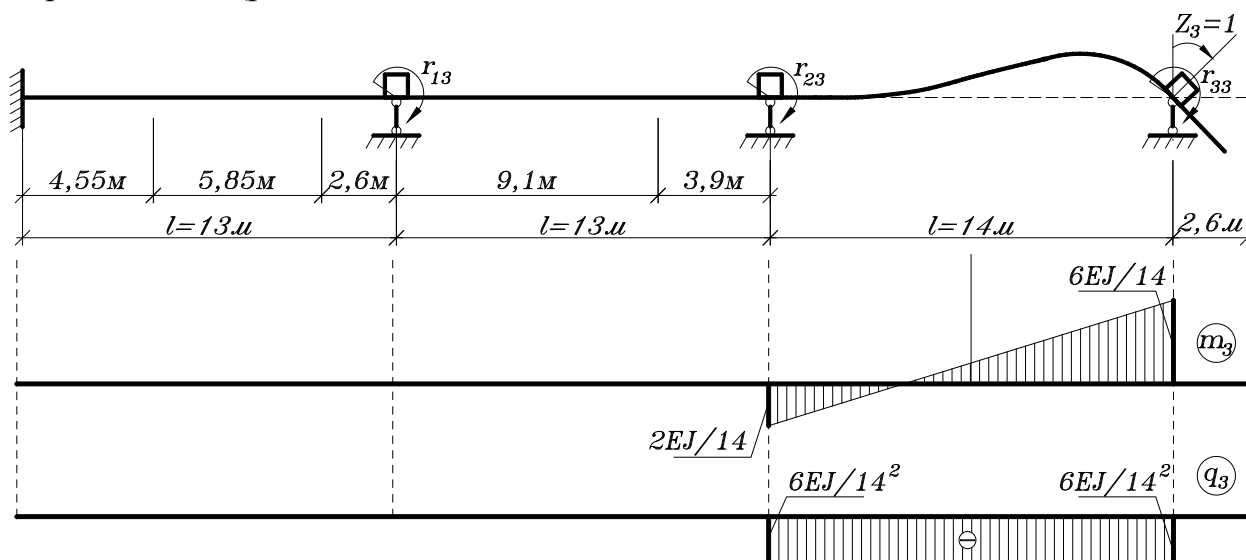
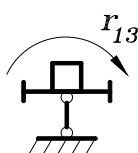
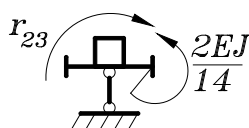


Рис. 49. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента в третьем вспомогательном состоянии

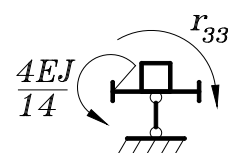
Коэффициенты r_{13} (рис. 50,а), r_{23} (рис. 50,б) и r_{33} (рис. 50,в) определяем из условия равновесия опорных узлов в соответствии с данными эпюры m_3 .



а)



б)



в)

Рис. 50. Определение коэффициентов в третьем вспомогательном состоянии

$$\sum m = 0 \dots r_{13} = 0 \text{ (рис. 50,а);}$$

$$\sum m = 0 \dots r_{23} - 2EJ/14 = 0 \Rightarrow r_{23} = 0,1428EJ \text{ (рис. 50,б);}$$

$$\sum m = 0 \dots r_{33} - 4EJ/14 = 0 \Rightarrow r_{33} = 0,2857EJ \text{ (рис. 50,в).}$$

На основании теоремы о взаимности побочных единичных коэффициентов (реакций) проверяем условие $r_{ik} = r_{ki}$. Сравнивая, получаем, что равенство выполняется тождественно, т.е. $r_{21} = r_{12} = 0,1538EJ$, $r_{31} = r_{13} = 0$, $r_{23} = r_{32} = 0,1428EJ$.

16.5. Основная система под действием нагрузки и соответствующие эпюры. Определение свободных членов канонических уравнений

Состояние "P" (рис. 51)

Изображаем каждый пролёт неразрезной балки в деформированном состоянии от заданной внешней нагрузки и обозначаем реактивные моменты в наложенных противоповоротных шайбах R_{1p}, R_{2p}, R_{3p} . Соответствующие этому состоянию эпюры моментов M_p и поперечных сил Q_p с вычислением ординат строим с помощью таблицы метода перемещений (рис. 51).

Для консоли длиной $s = 2,6$ м эпюры Q_p и M_p (они окончательные) строят обычными приёмами как для статически определимой консольной балки

$$Q_p = 5 \text{ кН}; M_p = -5 \cdot x; M_p(x = 0) = 0; M_p(x = 2,6 \text{ м}) = -13 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

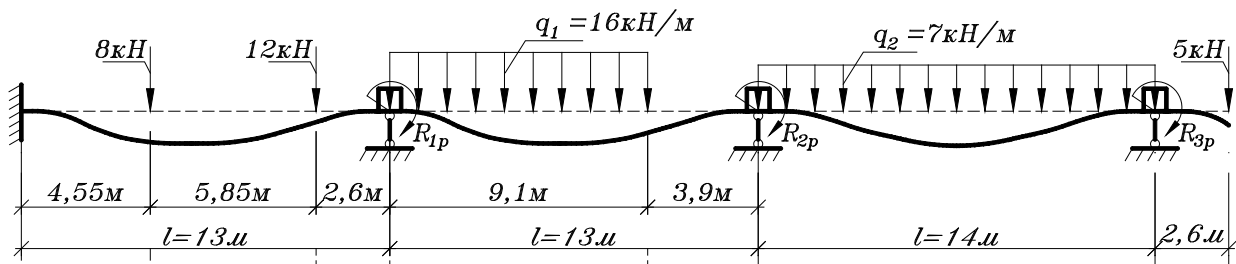


Рис. 51. Деформированное состояние от заданной внешней нагрузки

Следует отметить, что во втором пролёте одновременно действуют две сосредоточенные нагрузки величинами 8 кН и 12 кН. С помощью таблицы метода перемещений сначала строим эпюры M_p и Q_p от одной, затем от действия второй нагрузки. Затем, применяя принцип суперпозиции, полученные результаты складываем. Вид окончательных эпюр не зависит от последовательности приложения нагрузки.

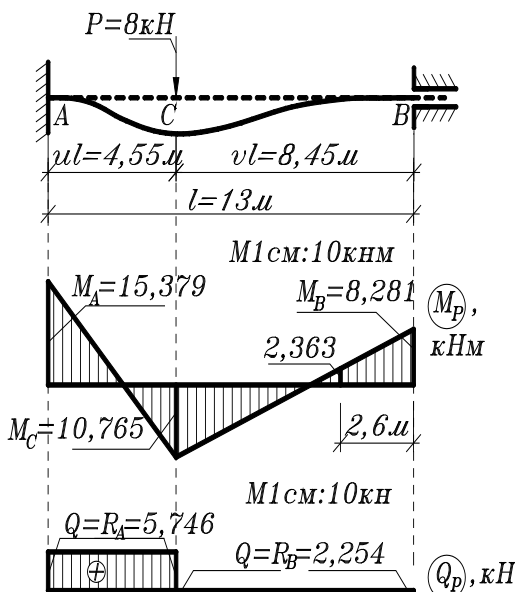


Рис. 52. Эпюры M_p и Q_p от $P = 8$ кН в пр.2

Эпюры от действия $P = 8$ кН (рис. 52)

$$M_A = -u \cdot v^2 \cdot P \cdot l = -0,35 \cdot 0,65^2 \cdot 8 \cdot 13 = 15,379 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = -u^2 \cdot v \cdot P \cdot l = 0,35^2 \cdot 0,65 \cdot 8 \cdot 13 = 8,281 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = 2 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot P \cdot l = 2 \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^2 \cdot 8 \cdot 13 = 10,7653 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_A = v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u) \cdot P = 0,65^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,35) \cdot 8 = 5,746 \text{ кН};$$

$$R_B = u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v) \cdot P = 0,35^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,65) \cdot 8 = 2,254 \text{ кН};$$

Эпюры от действия $P = 12\text{кН}$ (рис. 53)

$$M_A = -u \cdot v^2 \cdot P \cdot l = 0,8 \cdot 0,2^2 \cdot 12 \cdot 13 = 4,992\text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = u^2 \cdot v \cdot P \cdot l = 0,8^2 \cdot 0,2 \cdot 12 \cdot 13 = 19,968\text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = 2 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot P \cdot l = 2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 \cdot 12 \cdot 13 = 7,9872\text{кН} \cdot \text{м};$$

$$R_A = v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u) \cdot P = 0,2^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,8) \cdot 12 = 1,248\text{кН};$$

$$R_B = u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v) \cdot P = 0,8^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,2) \cdot 12 = 10,752\text{кН};$$

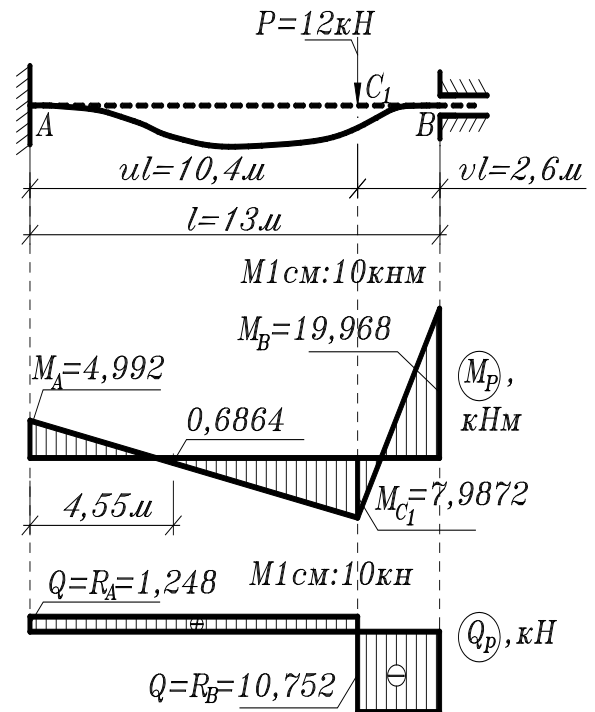


Рис. 53. Эпюры M_p и Q_p от $P = 8\text{кН}$ в пр. 2

Построенные эпюры M_p и Q_p с помощью таблицы метода перемещений от действия нагрузок 8кН и 12кН в отдельности складываем, применяя принцип суперпозиции и независимости действия сил (рис. 54).

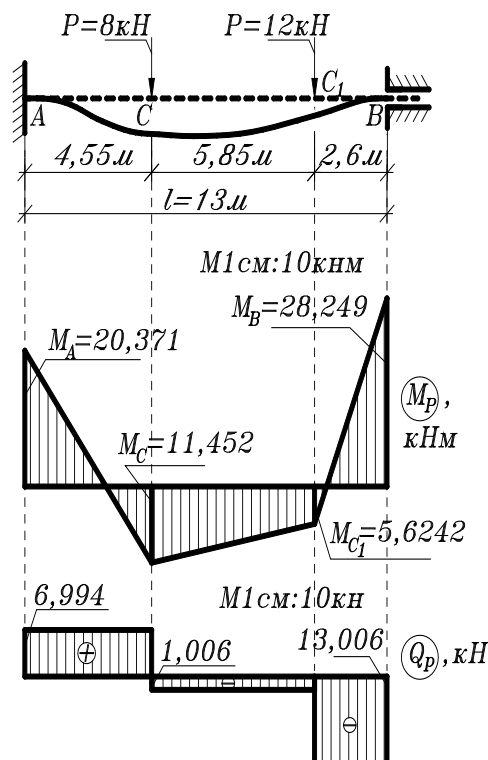


Рис. 54. Эпюры M_p и Q_p от совместного действия нагрузок в пр. 2

Пролёт №3 (рис. 55):

$$u = a/l.$$

$$M_A = -q \cdot a^2 \cdot (3 - 4 \cdot u + 1,5 \cdot u^2)/6 =$$

$$= -\frac{16 \cdot 9,1^2 \cdot (3 - 4 \cdot 0,7 + 1,5 \cdot 0,7^2)}{6} =$$

$$= -206,473 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = -q \cdot a^2 \cdot (u - 0,75 \cdot u^2)/6 =$$

$$= -16 \cdot 9,1^2 \cdot (0,7 - 0,75 \cdot 0,7^2)/6 =$$

$$= -146,849 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = \frac{16 \cdot 9,1^2 \cdot 0,7}{12} \cdot [6 \cdot 0,3^2 + 3 \cdot 0,3 -$$

$$-1] = 34,007 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_A = [q \cdot a \cdot (l - 0,5 \cdot a)]/l - [M_A - M_B]/l =$$

$$= [16 \cdot 9,1 \cdot (13 - 0,5 \cdot 9,1)]/13 -$$

$$- [-206,473 - (-146,849)]/13 =$$

$$= 94,64 + 4,5865 = 99,2265 \text{ кН};$$

$$R_B = (q \cdot a^2)/(2 \cdot l) + [M_A - M_B]/l =$$

$$= (16 \cdot 9,1^2)/2 \cdot 13 +$$

$$+ [-206,473 - (-146,849)]/13 =$$

$$= 50,96 - 4,5865 = 46,3735 \text{ кН}$$

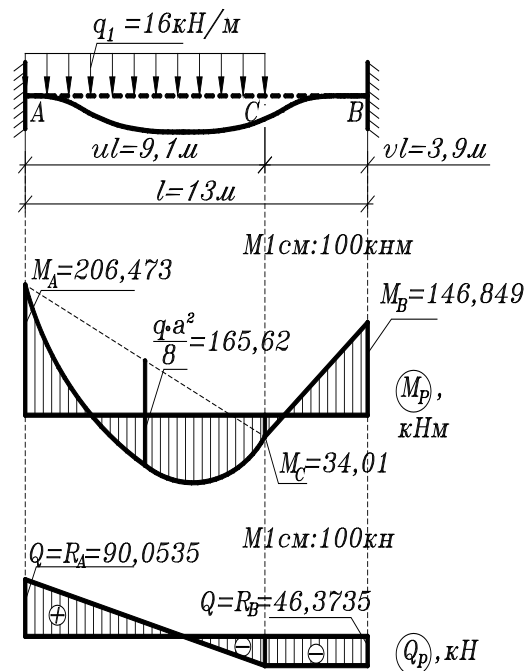


Рис. 55. Эпюры M_p и Q_p в пр. 3

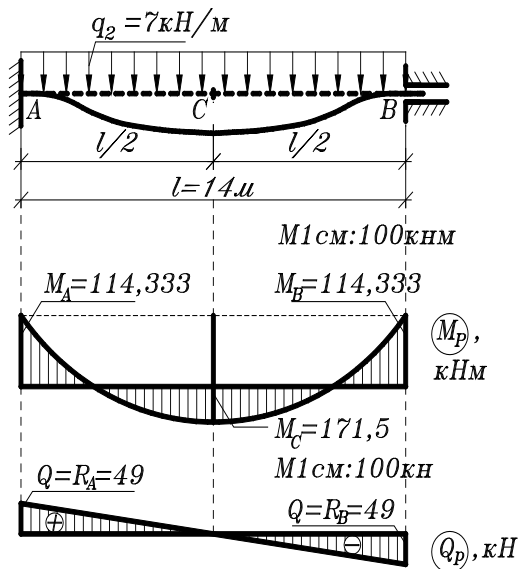


Рис. 56. Эпюры M_p и Q_p в пр. 4

Пролёт №4 (рис. 56)

$$M_A = M_B = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{7 \cdot 14^2}{12} =$$

$$= -114,333 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{7 \cdot 14^2}{8} = 171,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{7 \cdot 14}{2} = 49 \text{ кН};$$

Построенные эпюры для каждого пролёта в отдельности с помощью таблицы метода перемещений изображаются по всей длине неразрезной балки и называются сводными эпюрами (рис. 57).

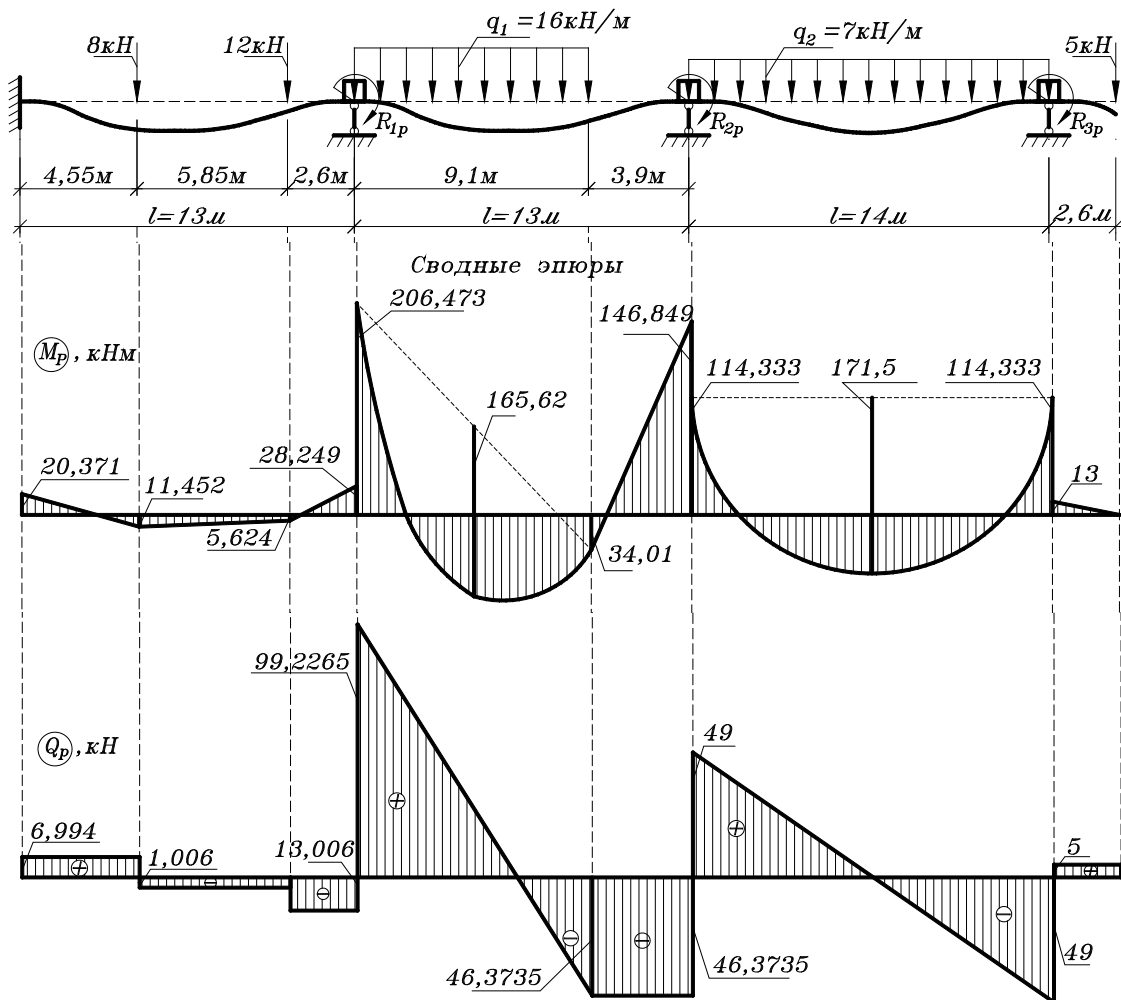


Рис. 57. Сводные эпюры M_p и Q_p от постоянной нагрузки в основной системе

Свободные члены R_{1p} (рис. 58,а), R_{2p} (рис. 58,б) и R_{3p} (рис. 58,в) определяются по эпюре M_p при рассмотрении равновесия вырезанного опорного сечения вблизи установленной противоповоротной «шайбы».

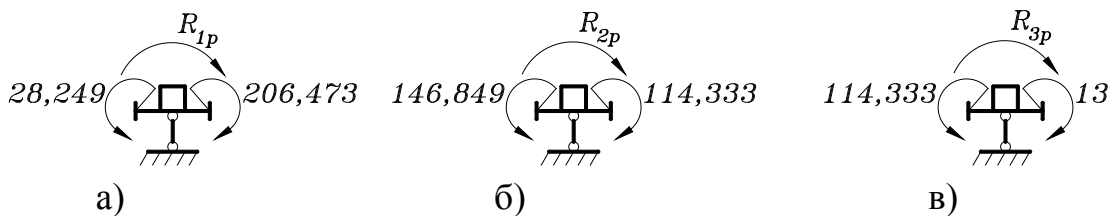


Рис. 58. Определение свободных членов канонических уравнений

$$\sum m = 0 \dots R_{1p} - 28,249 + 206,473 = 0 \Rightarrow R_{1p} = -178,224 \text{кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 58,а);}$$

$$\sum m = 0 \dots R_{2p} - 146,849 + 114,333 = 0 \Rightarrow R_{2p} = 32,516 \text{кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 58,б);}$$

$$\sum m = 0 \dots R_{3p} - 114,333 + 13 = 0 \Rightarrow R_{3p} = 101,333 \text{кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 58,в).}$$

16.6. Вычисление основных неизвестных

Вычисленные коэффициенты при неизвестных и свободные члены подставляют в канонические уравнения

$$\begin{cases} 0,6154 \cdot E \cdot J \cdot Z_1 + 0,1538 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 - 178,224 = 0 \\ 0,1538 \cdot E \cdot J \cdot Z_1 + 0,5934 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 + 0,1428 \cdot E \cdot J \cdot Z_3 + 32,516 = 0 \\ 0,1428 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 + 0,2857 \cdot E \cdot J \cdot Z_3 + 101,333 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} E \cdot J \cdot Z_1 &= (-0,1538 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 + 178,224) / 0,6154 \\ &= -0,2499 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 + 289,607 \\ E \cdot J \cdot Z_3 &= (-0,1428 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 - 101,333) / 0,2857 \\ &= -0,4998 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 - 354,6832 \end{aligned}$$
$$-0,0384 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 + 44,5415 + 0,5934 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 - 0,0714 \cdot E \cdot J \cdot Z_2 - 50,6488 + 32,516 = 0$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (любыми известными методами), вычисляют значения основных неизвестных

$$\begin{aligned} E \cdot J \cdot Z_2 &= -26,4087 / 0,4836 = -54,608 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ E \cdot J \cdot Z_1 &= 303,253 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad E \cdot J \cdot Z_3 = -327,39 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Проверка (с подстановкой):

$$\begin{aligned} \text{ур.1} \dots 0,6154 \cdot 303,253 + 0,1538 \cdot (-54,608) - 178,224 &= 186,622 - \\ &- 186,623 = -1 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ур.2} \dots 0,1538 \cdot 303,253 + 0,5934 \cdot (-54,608) + 0,1428 \cdot (-327,39) + \\ + 32,516 &= 79,156 - 79,156 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ур.3} \dots 0,1428 \cdot (-54,608) + 0,2857 \cdot (-327,39) + 101,333 &= \\ = -101,333 + 101,333 &= 0 \end{aligned}$$

При подстановке значений основных неизвестных в канонические уравнения получаются невязки: $-1 \cdot 10^{-3}$ в ур. № 1, 0 в ур. № 2 и ур. № 3. Для их оценки определим погрешности, возможные из-за округления решения (при неблагоприятном сочетании знаков \pm погрешности слагаемых суммируются, поэтому коэффициенты уравнений учитываем по абсолютной величине).

$$\text{Погрешность: ур. № 1} \dots 0,05 \cdot (0,6154 + 0,1538) = 0,03846 > 0,001;$$

$$\text{ур. № 2} \dots 0,05 \cdot (0,1538 + 0,5934 + 0,1428) = 0,0445 > 0;$$

$$\text{ур. № 3} \dots 0,05 \cdot (0,1428 + 0,2857) = 0,0214 > 0.$$

Полученные невязки находятся в допустимых пределах.

16.7. Построение окончательной эпюры изгибающего момента М

Сначала строят вспомогательные (промежуточные) эпюры $m_1 \cdot z_1$ (рис. 59, а), $m_2 \cdot z_2$ (рис. 59, б) и $m_3 \cdot z_3$ (рис. 59, в). Окончательная эпюра изгибающих моментов М (рис. 59, г), строится на основании принципа суперпозиции путём суммирования ординат в узловых сечениях по формуле

$$M = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + M_p.$$

На нагруженных равномерно распределённой нагрузкой пролётах № 2 и № 3 узловые ординаты соединяются прямыми (штриховые линии), к которым «подвешиваются» (как на эпюре M_p) соответствующие балочные эпюры параболического очертания от этих нагрузок с ординатами посередине 165,62 кН·м и 171,5 кН·м соответственно.

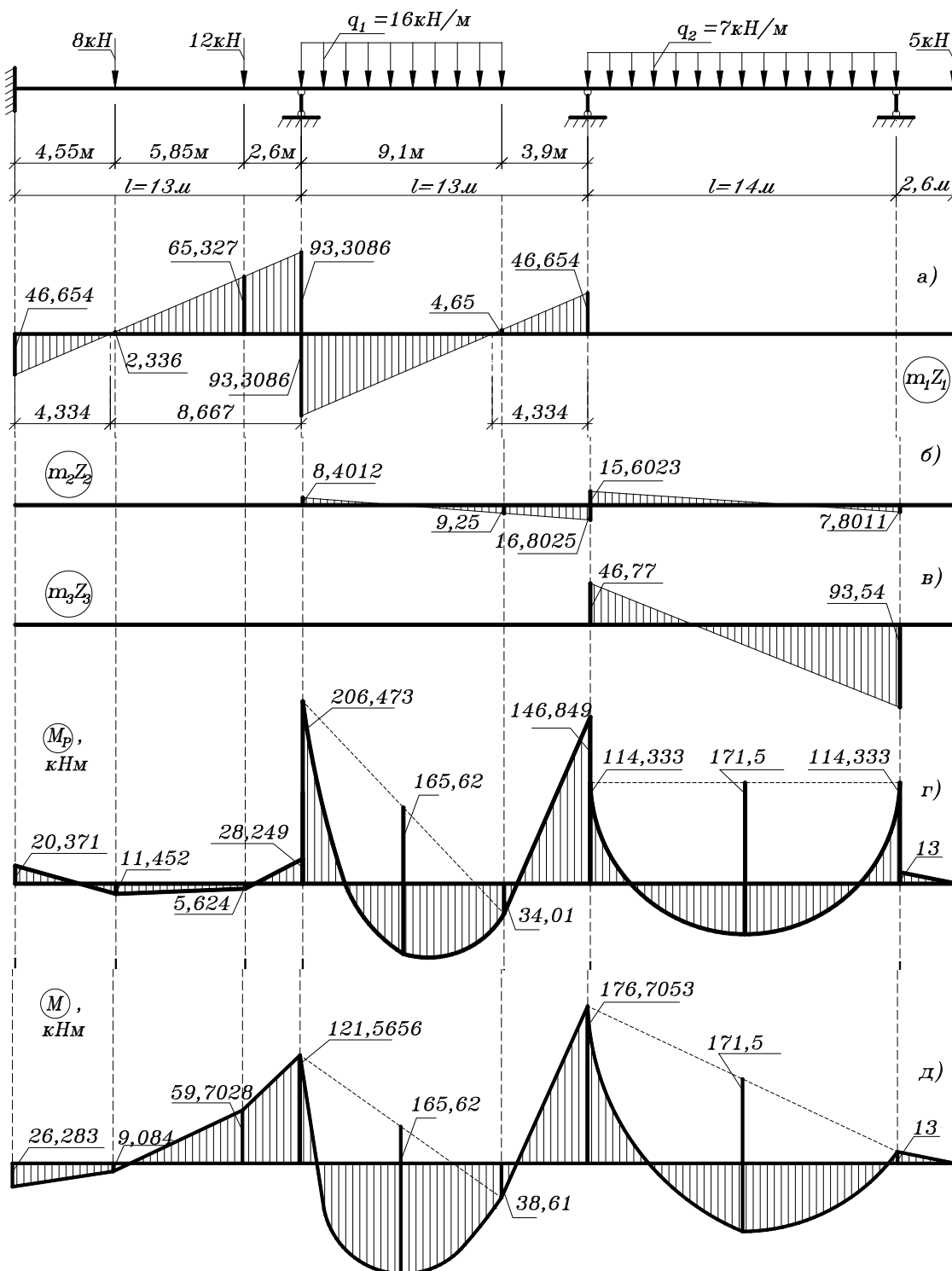


Рис. 59. Построение окончательной эпюры изгибающего момента M с применением принципа суперпозиции

16.8. Построение окончательной эпюры поперечной силы Q

Окончательная эпюра поперечной силы Q строится по данным эпюры M , где рассматривается равновесие стержней с применением уравнений равновесия. Изложенный способ в данной работе не рассматривается.

Окончательная эпюра поперечных сил Q (рис. 60), строится на основании принципа суперпозиции путём суммирования ординат в узловых сечениях по формуле

$$Q = q_1 \cdot z_1 + q_2 \cdot z_2 + q_3 \cdot z_3 + Q_p$$

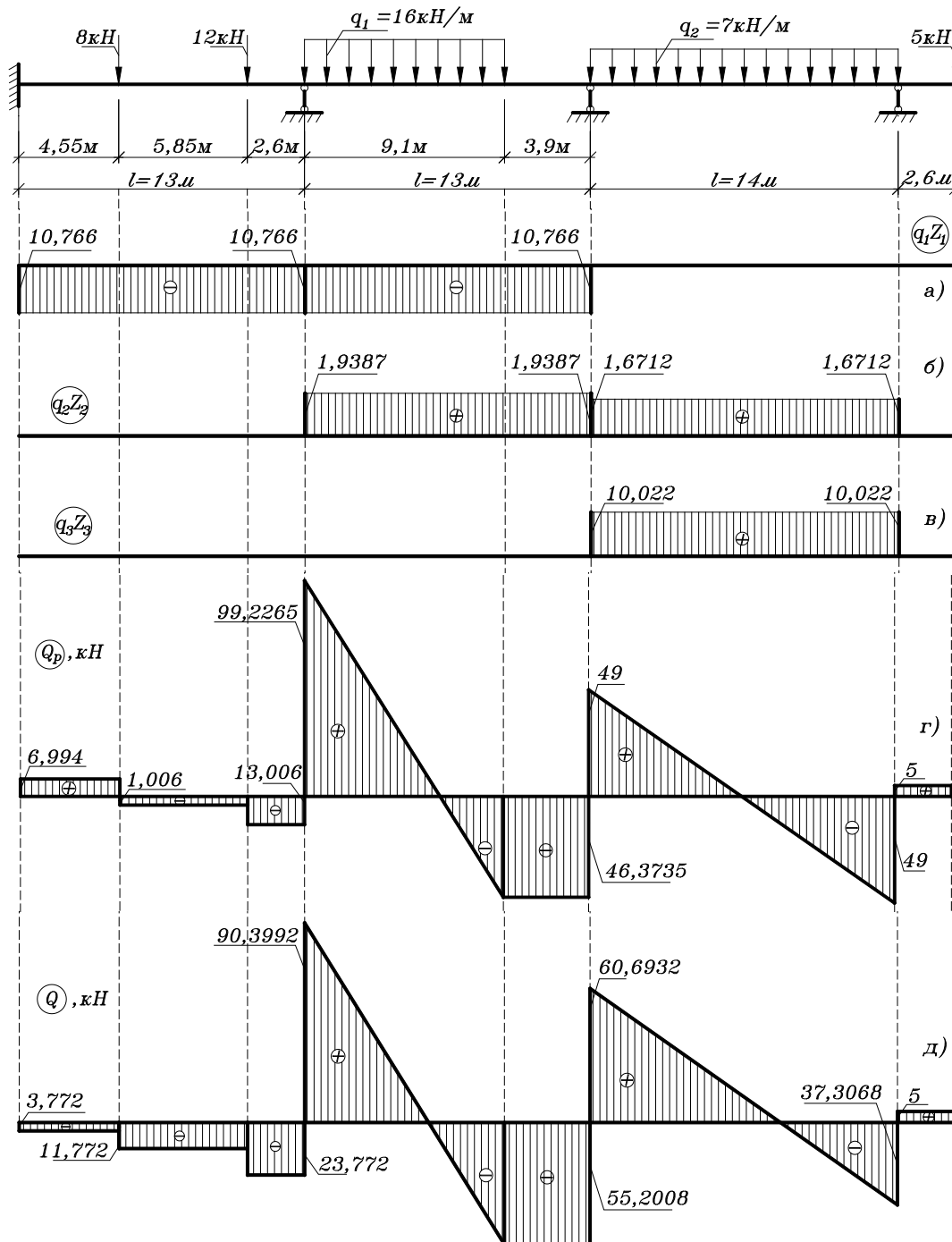


Рис. 60. Построение окончательной эпюры поперечной силы Q с применением принципа суперпозиции

16.9. Определение реакций опор (рис. 61)

Опорные реакции определяем из условия равновесия, мысленно вырезанного бесконечно малого участка балки над опорой.

$$\sum Y = 0 \dots R_0 + R_1 + 3,7727 = 0 \Rightarrow R_0 + R_1 = -3,7727 \text{ кН (рис.61,а);}$$

$$\sum Y = 0 \dots R_2 - 23,7727 - 90,3992 = 0 \Rightarrow R_2 = 114,1719 \text{ кН (рис.61,б);}$$

$$\sum Y = 0 \dots R_3 - 55,2028 - 60,694 = 0 \Rightarrow R_3 = 115,8948 \text{ кН (рис.61,в);}$$

$$\sum Y = 0 \dots R_4 - 37,3068 - 5 = 0 \Rightarrow R_4 = 42,306 \text{ кН (рис.61,г);}$$

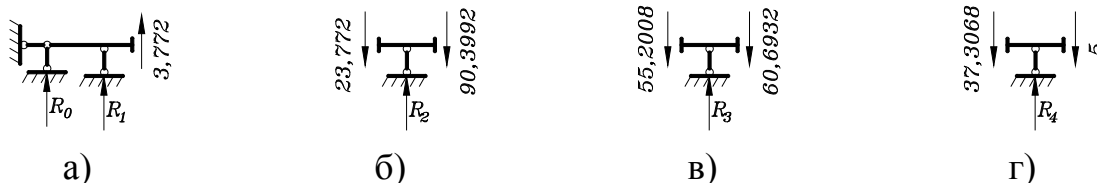


Рис. 61. Определение реакций опор

16.10. Проверка равновесия балки в целом

Рассматриваем схему балки с заданной внешней нагрузкой и опорными реакциями, определёнными по значениям ординат окончательной эпюры Q в опорных сечениях (рис. 62).

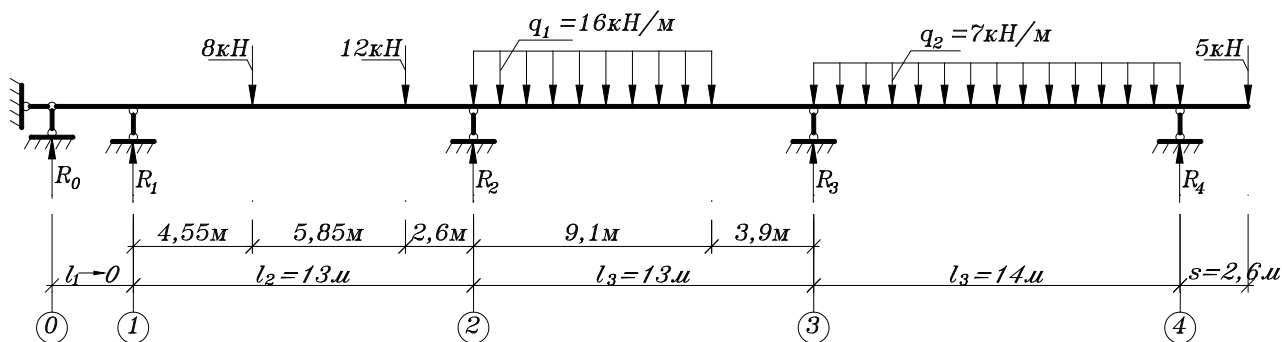


Рис. 62. Нерезванная балка с заданной внешней нагрузкой и вычисленными опорными реакциями

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 \dots R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 8 - 12 - 16 \cdot 9,1 - 7 \cdot 14 - 5 = \\ = -3,7727 + 114,1719 + 115,8948 + 42,306 - 268,6 = \\ = 272,3712 - 272,3712 = 0. \end{aligned}$$

17. РАСЧЁТ МНОГОПРОЛЁТНОЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ НА УПРУГО-ОСЕДАЮЩИХ (ПОДАТЛИВЫХ) ОПОРАХ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

17.1. Основные положения

Смешанный метод расчета разработан в 1927 г. профессором А. А. Гвоздевым. Его целесообразно применять при расчёте конструкций, имеющих неоднородную структуру в разных направлениях (по длине и высоте). Это характерно для сооружений, в которых в одной условно рассматриваемой части имеется малое число так называемых лишних связей, а в другой — существенно большее. Решение таких задач методом сил или перемещений связано с большим объёмом вычислений в связи большим количеством неизвестных. Применение смешанного метода в подобных задачах позволяет существенно снизить трудоёмкость расчёта.

При смешанном методе одна часть неизвестных представляет усилия в «лишних» связях как в методе сил, другая часть неизвестные перемещения узлов системы, как в методе перемещений.

Основную систему смешанного метода получают из заданной отбрасыванием «лишних» связей в той части сооружения, характеризующейся большим числом степеней свободы, что характерно для метода сил, и наложением дополнительных связей (противоповоротных шайб и линейных связей) в другой части конструкции, как в методе перемещений. Неизвестными смешанного метода, таким образом, будут являться усилия (силы и изгибающие моменты) в удалённых связях, и перемещения (углы поворота и линейные перемещения узлов).

Применение смешанного метода позволяет выполнить расчёт с меньшим количеством уравнений и неизвестных по сравнению с методом сил и перемещений в отдельности.

Условиями для составления системы канонических уравнений смешанного метода являются:

- равенство нулю (отсутствие) перемещений по направлению отброшенных связей по методу сил от действия внешней нагрузки и основных неизвестных — уравнения I группы;
- равенство нулю (отсутствие) реактивных усилий во введенных (наложенных) дополнительных связях по методу перемещений от действия внешней нагрузки и основных неизвестных — уравнения II группы.

Коэффициенты канонических уравнений смешанного метода определяются статическим способом как в методе перемещений, перемножением эпюр как в методе сил. Специальные коэффициенты определяются статическим способом или из геометрических соображений.

Для образования основной системы смешанного метода как при расчёте неразрезной балки на жёстких опорах с помощью уравнений трёх момен-

тов во всех опорных сечениях вводим шарниры, а в сечениях над упруго-оседающими опорами накладываем вертикальные линейные связи как в методе перемещений, препятствующие упругому оседанию податливых опор.

Основными неизвестными расчёта будут являться усилия — надопорные изгибающие моменты X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 и вертикальные перемещения (линейная просадка) Z_2 и Z_3 сечений над упруго податливыми опорами.

Нумерация основных неизвестных каждого типа может быть как самостоятельной, так и сквозной. Перемещения по направлению удалённых и усилия в наложенных связях должны равняться нулю для кинематической и статической эквивалентности основной и заданной систем соответственно.

Уравнения первой и второй группы после подстановки коэффициентов и свободных членов, которые получены при рассмотрении единичных и грузового состояния, при постоянной жёсткости по длине балки $E \cdot J_n = E \cdot J_{n+1} = E \cdot J = const$ имеют следующий вид:

$$\Delta_n = 0 \dots l_n \cdot X_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot X_n + l_{n+1} \cdot X_{n+1} - \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_n} \cdot Z_{n-1} + 6 \cdot E \cdot J \cdot \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) \cdot Z_n - \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_{n+1}} \cdot Z_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{S_n^A}{l_n} + \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} \right); \quad (17.1)$$

$$R_n = 0 \dots \frac{1}{l_n} \cdot X_{n-1} - \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) \cdot X_n + \frac{1}{l_{n+1}} \cdot X_{n+1} + c_n \cdot Z_n = -(B_n + A_{n+1}). \quad (17.2)$$

где c_n — коэффициент жёсткости, кН/м.

Таким образом, опорная реакция в основной системе определяется

$$R_{np} = B_n + A_{n+1}, \quad (17.3)$$

где B_n — правая опорная реакции в основной системе от действия заданной нагрузки в n — ом пролёте;

A_{n+1} — левая опорная реакция в основной системе от действия заданной нагрузки в $(n + 1)$ — ом пролёте.

Физический смысл первого уравнения — перемещение, вычисленное в основной системе по направлению n — ой отброшенной связи X_n от действия всех основных неизвестных и заданной внешней нагрузки, равно нулю.

Физический смысл второго уравнения — реакция в n — ой наложенной связи, вычисленной в основной системе от действия всех основных неизвестных и заданной внешней нагрузки, равна нулю.

17.2. Пример расчета с дополнительными методическими указаниями

Заданная система (рис. 63)

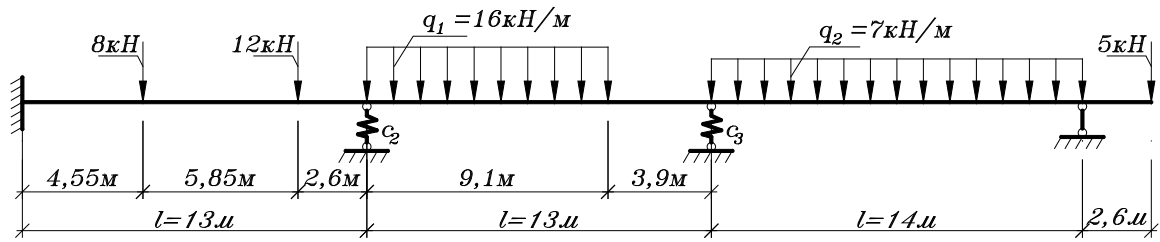


Рис. 63. Неразрезная балка с упруго-оседающими опорами

Основная система смешанного метода (рис. 64)

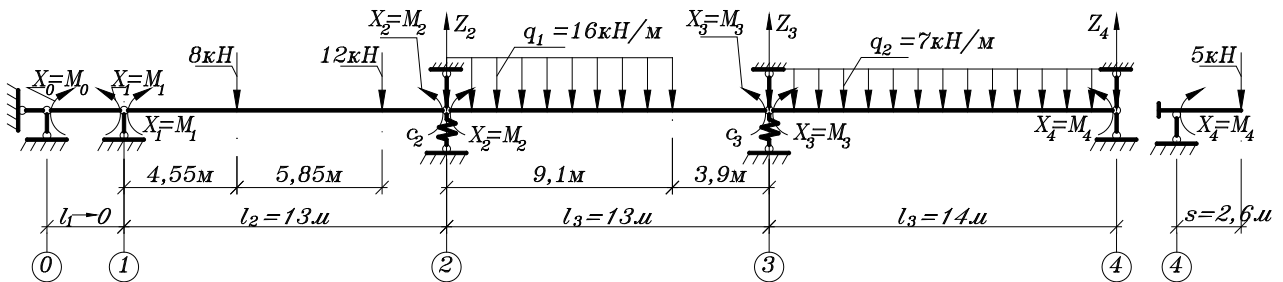


Рис. 64. Основная система смешанного метода

Эпюры Q_p и M_p строим в основной системе метода сил (рис. 65)

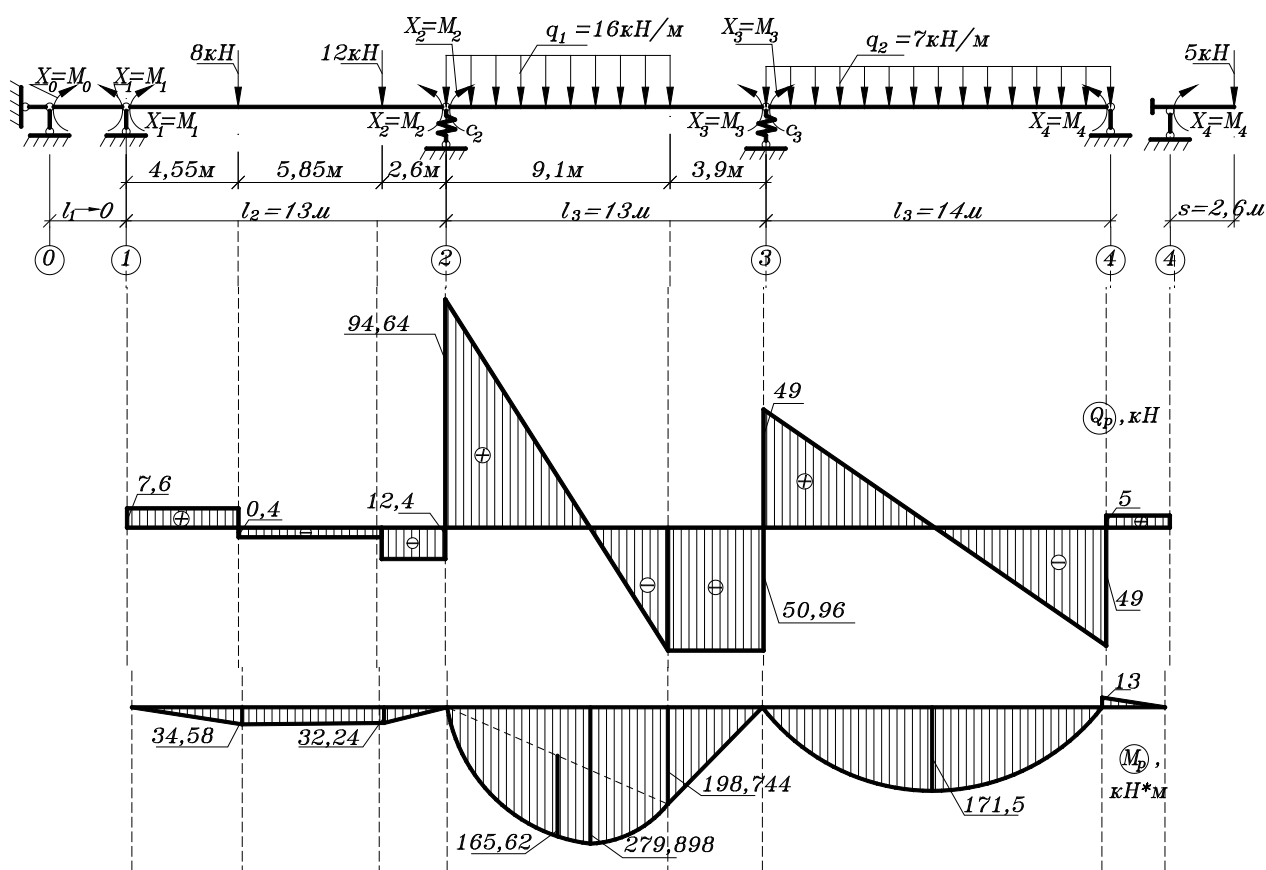


Рис. 65. Эпюры Q_p и M_p в основной системе от заданной внешней нагрузки

Определение основных неизвестных канонических уравнений

I-ая группа уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 0 \dots & l_1 \cdot X_0 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot X_1 + l_2 \cdot X_2 - \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_1} \cdot Z_0 + \\ & + 6EJ \cdot \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \cdot Z_1 - \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_2} \cdot Z_2 = -6 \cdot \left(\frac{S_1^A}{l_1} + \frac{S_2^B}{l_2} \right) \\ \Delta_2 = 0 \dots & l_2 \cdot X_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot X_2 + l_3 \cdot X_3 - \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_2} \cdot Z_1 + \\ & + 6EJ \cdot \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \cdot Z_2 - \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_3} \cdot Z_3 = -6 \cdot \left(\frac{S_2^A}{l_2} + \frac{S_3^B}{l_3} \right) \\ \Delta_3 = 0 \dots & l_3 \cdot X_2 + 2 \cdot (l_3 + l_4) \cdot X_3 + l_4 \cdot X_4 - \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_3} \cdot Z_2 + \\ & + 6EJ \cdot \left(\frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_4} \right) \cdot Z_3 - \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_4} \cdot Z_4 = -6 \cdot \left(\frac{S_3^A}{l_3} + \frac{S_4^B}{l_4} \right) \end{aligned}$$

II-ая группа уравнений

$$R_2 = 0 \dots \frac{1}{l_2} \cdot X_1 - \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \cdot X_2 + \frac{1}{l_3} \cdot X_3 + c_2 \cdot Z_2 = -(B_2 + A_3)$$

$$R_3 = 0 \dots \frac{1}{l_3} \cdot X_2 - \left(\frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_4} \right) \cdot X_3 + \frac{1}{l_4} \cdot X_4 + c_3 \cdot Z_3 = -(B_3 + A_4)$$

Известно:

$$l_1 \rightarrow 0; Z_0 = 0; Z_1 = 0; Z_4 = 0; X_4 = -13 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$S_1^A/l_1 = 0; S_2^B/l_2 = 149,47996 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; S_2^A/l_2 = 166,55 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$S_3^B/l_3 = 1212,9059 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; S_3^A/l_3 = 1083,7417 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$S_4^B/l_4 = 800,3734 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

Поперечное сечение неразрезной балки принято постоянное по длине (рис. 66). Момент инерции поперечного сечения принят равным:

$$J_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot (1 - \beta^4) = \frac{3,14 \cdot 0,8^4}{64} \cdot (1 - 0,9^4) =$$

$$= 0,020096 \cdot 0,3439 = 6911,0144 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

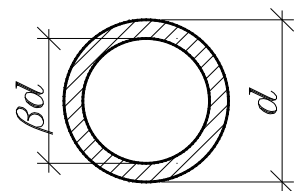


Рис. 66. Полое сечение

Модуль упругости материала принят равным $E = 2 \cdot 10^5$ Мпа.

Изгибная жёсткость

$$E \cdot J_z = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 6911,0144 \cdot 10^{-6} = 13822,0288 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 =$$

$$= 13,822 \cdot 10^5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$6 \cdot E \cdot J_z = 6 \cdot 13,822 \cdot 10^5 = 82,932 \cdot 10^5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

Коэффициенты жёсткости второй и третьей упругих связей

$$c_2 = 4000 \text{ кН/м}; c_3 = 5000 \text{ кН/м};$$

После подстановки исходных данных уравнения I-ой группы принимают вид

$$\Delta_1 = 0 \dots 26 \cdot X_1 + 13 \cdot X_2 - \frac{82,932 \cdot 10^5}{13} \cdot Z_2 = -6 \cdot (0 + 149,47996)$$

$$\Delta_2 = 0 \dots 13 \cdot X_1 + 52 \cdot X_2 + 13 \cdot X_3 + 82,932 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{13} \right) \cdot Z_2 -$$

$$- \frac{82,932 \cdot 10^5}{13} \cdot Z_3 = -6 \cdot (166,55 + 1212,9059)$$

$$\Delta_3 = 0 \dots 13 \cdot X_2 + 54 \cdot X_3 + 14 \cdot (-13) - \frac{82,932 \cdot 10^5}{13} \cdot Z_2 + 82,932 \cdot 10^5 \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} \right) \cdot Z_3 = -6 \cdot (1083,7417 + 800,3734)$$

После подстановки исходных данных уравнения II-ой группы принимают вид

$$R_2 = 0 \dots \frac{1}{13} \cdot X_1 - \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{13} \right) \cdot X_2 + \frac{1}{13} \cdot X_3 + 4000 \cdot Z_2 = -(12,4 + 94,64)$$

$$R_3 = 0 \dots \frac{1}{13} \cdot X_2 - \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} \right) \cdot X_3 + \frac{1}{14} \cdot (-13) + 5000 \cdot Z_3 = -(50,96 + 49)$$

$$\begin{cases} 26 \cdot X_1 + 13 \cdot X_2 - 637938 \cdot Z_2 = -896,8798 \\ 13 \cdot X_1 + 52 \cdot X_2 + 13 \cdot X_3 + 1275877 \cdot Z_2 - 637938 \cdot Z_3 = -8276,7354 \\ 13 \cdot X_2 + 54 \cdot X_3 - 182 - 637938 \cdot Z_2 + 1230313 \cdot Z_3 = -11304,6906 \\ 0,076923 \cdot X_1 - 0,15385 \cdot X_2 + 0,076923 \cdot X_3 + 4000 \cdot Z_2 = -107,0 \\ 0,076923 \cdot X_2 - 0,148352 \cdot X_3 - 0,92857 + 5000 \cdot Z_3 = -99,96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26 \cdot X_1 + 13 \cdot X_2 - 637938 \cdot Z_2 = 896,8798 \\ 13 \cdot X_1 + 52 \cdot X_2 + 13 \cdot X_3 + 1275877 \cdot Z_2 - 637938 \cdot Z_3 = -8276,7354 \\ 13 \cdot X_2 + 54 \cdot X_3 - 637938 \cdot Z_2 + 1230313 \cdot Z_3 = -11122,6906 \\ 0,076923 \cdot X_1 - 0,15385 \cdot X_2 + 0,076923 \cdot X_3 + 4000 \cdot Z_2 = -107,04 \\ 0,076923 \cdot X_2 - 0,148352 \cdot X_3 + 5000 \cdot Z_3 = -99,03143 \end{cases}$$

Решая систему уравнений методом Гаусса (или любым другим способом) получаем:

$$X_1 = -457,9381 \text{кН} \cdot \text{м}; X_2 = 83,24314 \text{кН} \cdot \text{м}; X_3 = 42,11251 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$Z_2 = -1,556162 \cdot 10^{-2} \text{м}; Z_3 = -1,983745 \cdot 10^{-2} \text{м}.$$

Проверка (с подстановкой):

$$\text{ур. № 1} \dots -11906,3906 + 1082,16082 + 9927,34874 = 896,8798;$$

$$896,88104 - 896,8798 = -0,00124;$$

$$\text{ур. № 2} \dots 13 \cdot (-457,9381) + 52 \cdot 83,24314 + 13 \cdot 42,11251 + 1275877 \cdot$$

$$\cdot (-1,556162 \cdot 10^{-2}) - 637938 \cdot (-1,983745 \cdot 10^{-2}) = -8276,7354;$$

$$-5953,1953 + 4328,64328 + 547,46263 - 19854,71304 + 12655,06318 =$$

$$= -8276,7354;$$

$$-8276,739252 + 8276,7354 = -0,003852;$$

$$\text{ур. № 3} \dots 1082,16082 + 2274,07554 + 9927,34874 - 24406,27262 =$$

$$= -11122,6906;$$

$$-11122,68752 + 11122,6906 = -0,003078;$$

$$\text{ур. № 4} \dots -35,22597247 - 12,80695709 + 3,239420607 - 62,24648 =$$

$$= -107,04;$$

$$-107,039989 + 107,04 = 0,00001105;$$

$$\text{ур. № 4} \dots 6,403312058 - 6,247475084 - 99,18725 = -99,03143;$$

$$-99,03141303 + 99,03143 = -0,000016975.$$

Невязка:

$$0,005(26 + 13 + 637938) = 0,195 > 0,00124.$$

Построение окончательной эпюры M (рис. 67)

Окончательные эпюры M и Q строим графическим способом аналогично построению эпюры для неразрезной балки на жёстких опорах (рис. 67).

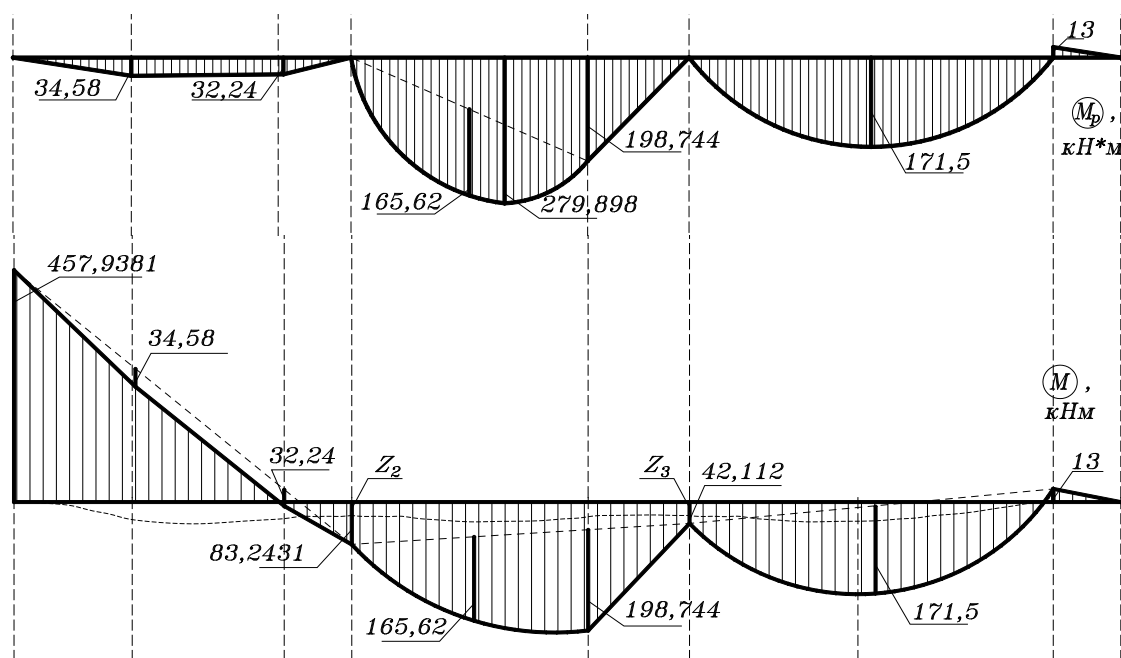


Рис. 67. Построение окончательной эпюры изгибающего момента M и вертикальные перемещения упруго-оседающих опор

Построение окончательной эпюры Q (рис. 68)

$$Q_n = Q_{p(n)} + \Delta Q_n$$

$$\Delta Q_n = \frac{X_n - X_{n-1}}{l_n}$$

$$\Delta Q_2 = (X_2 - X_1)/l_2 = (83,243 - (-457,938))/13 = 41,629 \approx 41,63 \text{ кН};$$

$$\Delta Q_3 = (X_3 - X_2)/l_3 = (42,113 - 83,243)/13 = -3,164 \text{ кН};$$

$$\Delta Q_4 = (X_4 - X_3)/l_4 = (-13 - 42,113)/14 = -3,936 \text{ кН};$$

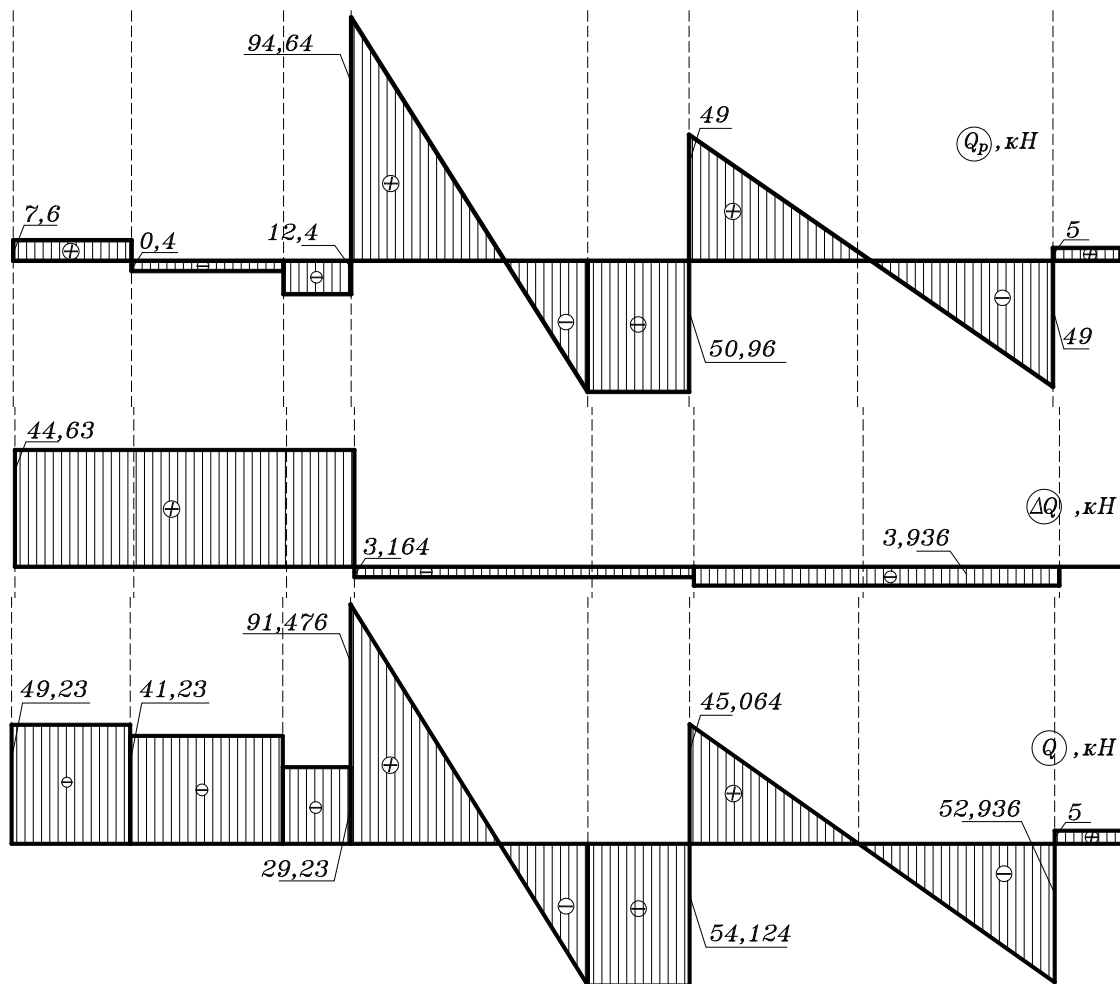


Рис. 68. Построение окончательной эпюры поперечной силы Q

Определение опорных реакций (рис. 69):



Рис. 69. Опорные реакции

$$\begin{aligned} \sum y = 0 \dots R_0 + R_1 - 49,23 &= 0 \Rightarrow R_0 + R_1 = 49,23 \text{ кН}; \\ \sum y = 0 \dots R_2 + 29,23 - 91,476 &= 0 \Rightarrow R_2 = 62,246 \text{ кН}; \\ \sum y = 0 \dots R_3 - 54,124 - 45,064 &= 0 \Rightarrow R_3 = 99,188 \text{ кН}; \\ \sum y = 0 \dots R_4 - 52,936 - 5 &= 0 \Rightarrow R_4 = 57,936 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Проверка равновесия балки в целом (рис. 70)

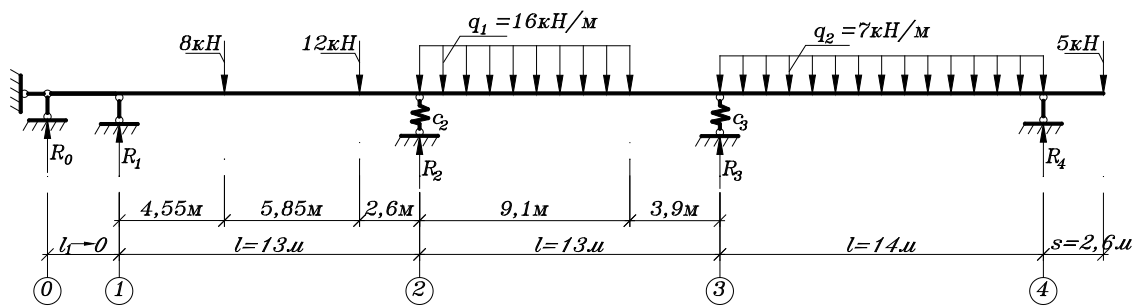


Рис. 70. Неразрезная балка с заданной внешней нагрузкой и вычисленными реакциями опор

$$\sum y = 0 \dots R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 8 - 12 - 16 \cdot 9,1 - 7 \cdot 14 - 5 = 49,23 + 62,246 + 99,188 + 57,936 - 20 - 145,6 - 98 - 5 = 268,6 - 268,6 = 0.$$

18. РАСЧЁТ МНОГОПРОЛЁТНОЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ НА УПРУГО-ОСЕДАЮЩИХ (ПОДАТЛИВЫХ) ОПОРАХ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ПЯТИ МОМЕНТОВ

18.1. Основные положения

В общем случае, часть опор многопролётной неразрезной балки могут быть упруго-податливыми, а другая часть — жесткими. Следует отметить, что раскрытие статической неопределённости многопролётных неразрезных балок на упруго-оседающих опорах осуществляется аналогично методике, применяемой при составлении уравнений трёх моментов. Уравнение неразрывности имеет вид $\alpha_{\text{лев}} = \alpha_{\text{пр}}$, что подразумевает равенство углов поворота балки на опоре слева и справа. Количество уравнений неразрывности деформации соответствует числу неизвестных опорных моментов.

При составлении уравнений суммарных углов поворота балки на упруго-податливой опоре появляются дополнительные неизвестные — углы поворота, которые вызваны проседанием податливых опор f_n . Упругое проседание опоры характеризуется коэффициентом податливости

$$f_n = \delta_n \cdot R_n \quad (18.1)$$

где $\delta_n = 1/c_n$, м/кН — коэффициент (податливости) пропорциональности между проседанием n -ой опоры и давлением на неё;

R_n , кН — давление балки на n -ую опору (реакция имеет противоположное направление).

Следует отметить, что количество неизвестных величин превосходит число уравнений на количество податливых опор. Поэтому для определения соответ-

вующих неизвестных f_n составляется вспомогательная система уравнений вида $f_n = \delta_n \cdot R_n$, по числу неизвестных коэффициентов податливости опор.

После составления вспомогательной системы уравнений все f_n подставляются в основную систему уравнений. В результате подстановки и приведения подобных членов получается система уравнений, в каждое из которых входит не более пяти неизвестных опорных моментов, поэтому теорема получила название **теорема пяти моментов**.

Для n -ой опоры при условии $E \cdot J_n = E \cdot J_{n+1} = E \cdot J = const$

$$|\alpha_{n,n-1}^{лев}| = |\alpha_{n,n+1}^{пр}| \quad (18.2)$$

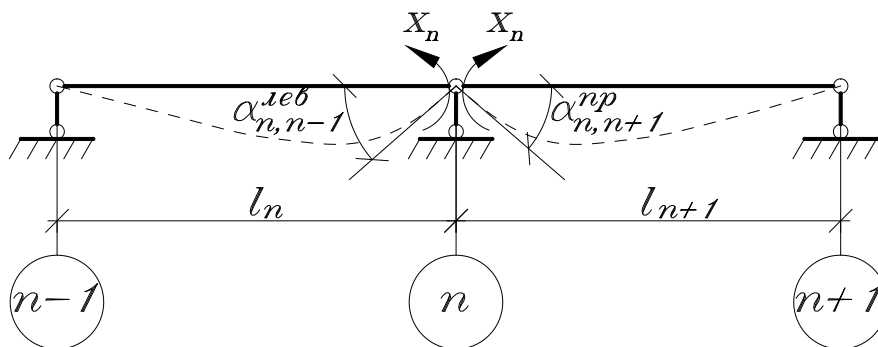


Рис. 71. Углы поворота балки вблизи n – ой опоры

$\alpha_{n,n-1}^{лев}$ — угол поворота статически определимой балки с левой стороны на n – ой опоре длиной пролёта l_n в сторону опоры $(n - 1)$ (рис. 71);

$\alpha_{n,n+1}^{пр}$ — угол поворота статически определимой балки с правой стороны на n – ой опоре длиной пролёта l_{n+1} в сторону опоры $(n + 1)$ (рис. 71).

Угол поворота балки вблизи n – ой опоры по ходу часовой стрелки принимаем с положительным знаком, а против — с отрицательным.

Полный угол поворота балки на n – ой опоре в левую от данной опоры сторону $(n - 1)$ – ой опоры в общем виде представляется выражением

$$\alpha_{n,n-1}^{лев} = -\alpha_{n,n-1}^{лев}(M_{n-1}) - \alpha_{n,n-1}^{лев}(M_n) - \alpha_{n,n-1}^{лев}(S_{n,n-1}) + \varphi_{n,n-1}^{лев}, \quad (18.3)$$

где $\alpha_{n,n-1}^{лев}(M_{n-1})$ — угол поворота балки в основной системе с левой стороны на n – ой опоре от действия опорного момента M_{n-1} в сторону опоры $(n - 1)$;

$\alpha_{n,n-1}^{лев}(M_n)$ — угол поворота балки в основной системе с левой стороны на n – ой опоре от действия опорного момента M_n в сторону опоры $(n - 1)$;

$\alpha_{n,n-1}^{лев}(S_{n,n-1})$ — угол поворота балки в основной системе с левой стороны на n – ой опоре от действия заданной внешней нагрузки в пролёте длиной l_{n-1} в сторону опоры $(n - 1)$;

Полный угол поворота балки на n – ой опоре в правую от опоры сторону — сторону $(n + 1)$ – ой опоры в общем виде представляется аналогичным выражением

$$\alpha_{n,n+1}^{\text{пр}} = \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(M_n) + \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(M_{n+1}) + \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(S_{n,n+1}) + \varphi_{n,n+1}^{\text{пр}}, \quad (18.4)$$

где $\varphi_{n,n-1}^{\text{лев}}$, $\varphi_{n,n+1}^{\text{пр}}$ — дополнительные углы поворотов, вызванные проседанием упруго - податливых опор (рис. 72). Они геометрически равны и определяются с помощью следующих выражений

$$\varphi_{n,n-1}^{\text{лев}} = \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n}; \quad \varphi_{n,n+1}^{\text{пр}} = \frac{f_{n+1} - f_n}{l_{n+1}}.$$

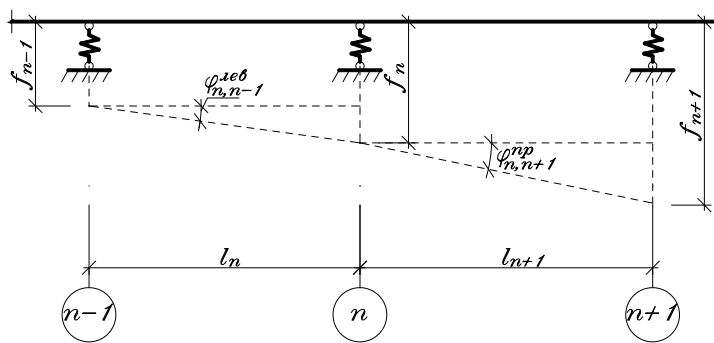


Рис. 72. Углы поворотов, вызванные проседанием упруго-податливых опор

Определим составляющие полного угла поворота на n – ой опоре слева и справа

$$\begin{aligned} \alpha_{n,n-1}^{\text{лев}}(M_{n-1}) &= -\frac{l_n}{6EJ} M_{n-1}; \\ \alpha_{n,n-1}^{\text{лев}}(M_n) &= -\frac{l_n}{3EJ} M_n; \quad \alpha_{n,n-1}^{\text{лев}}(S_{n,n-1}) = \frac{\omega_n \cdot c_n}{l_n} = \frac{S_n^A}{l_n}; \\ \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(M_n) &= \frac{l_{n+1}}{3EJ} M_n; \quad \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(M_{n+1}) = \frac{l_{n+1}}{6EJ} M_{n+1}; \\ \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(S_{n,n+1}) &= \frac{\omega_{n+1} \cdot d_{n+1}}{l_{n+1}} = \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}}. \end{aligned}$$

Полученные соотношения подставим в уравнение неразрывности деформации на n – ой опоре

$$\alpha_{n,n+1}^{\text{пр}} - \alpha_{n,n-1}^{\text{лев}} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(M_n) + \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(M_{n+1}) + \alpha_{n,n+1}^{\text{пр}}(S_{n,n+1}) + \varphi_{n,n+1}^{\text{пр}} + \alpha_{n,n-1}^{\text{лев}}(M_{n-1}) + \\
& \quad + \alpha_{n,n-1}^{\text{лев}}(M_n) + \alpha_{n,n-1}^{\text{лев}}(S_{n,n-1}) - \varphi_{n,n-1}^{\text{лев}} = 0; \\
& \frac{l_n}{6EJ} M_{n-1} + \frac{l_n}{3EJ} M_n + \frac{l_{n+1}}{3EJ} M_n + \frac{l_{n+1}}{6EJ} M_{n+1} - \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n} + \frac{f_{n+1} - f_n}{l_{n+1}} + \\
& \quad + \left(\frac{S_n^A}{l_n} + \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} \right) = 0; \\
& l_n \cdot M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} - 6EJ \cdot \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n} + \\
& \quad + 6EJ \cdot \frac{f_{n+1} - f_n}{l_{n+1}} = -6 \cdot \left(\frac{S_n^A}{l_n} + \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} \right); \tag{18.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{или } \Delta_n = 0 \dots \delta_{n,n-1} \cdot M_{n-1} + \delta_{n,n} \cdot M_n + \delta_{n,n+1} \cdot M_{n+1} + \\
& \quad + (\varphi_{n,n+1}^{\text{пр}} - \varphi_{n,n-1}^{\text{лев}}) + \Delta_{np} = 0 \tag{18.6}
\end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты при неизвестных канонического уравнения метода сил (рис. 73):

$$\begin{aligned}
\delta_{n,n-1} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_n \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_n}{6EJ}; \\
\delta_{n,n} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_n \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{n+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3EJ} (l_n + l_{n+1}) = 2 \cdot \frac{1}{6EJ} (l_n + l_{n+1}) \\
\delta_{n,n+1} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_{n+1}}{6EJ}; \\
l_n \cdot M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} - 6EJ \cdot \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n} + \\
& + 6EJ \cdot \frac{f_{n+1} - f_n}{l_{n+1}} = -6 \cdot \left(\frac{S_n^A}{l_n} + \frac{S_{n+1}^B}{l_{n+1}} \right);
\end{aligned}$$

Упругое проседание для n -ой опоры

$$f_n = \delta_n \cdot R_n.$$

Опорная реакция в основной системе для n -ой опоры определяется

$$R_n = R_{n,n-1}^{\text{пр}} + R_{n,n+1}^{\text{лев}} + R_{np}, \tag{18.7}$$

где $R_{n,n-1}^{\text{пр}}$ — опорная реакция n -ой опоры пролета между опорами $(n-1)$ и n длиной l_n ;

$R_{n,n+1}^{\text{лев}}$ — опорная реакция n -ой опоры пролета между опорами n и $(n+1)$ длиной l_{n+1} .

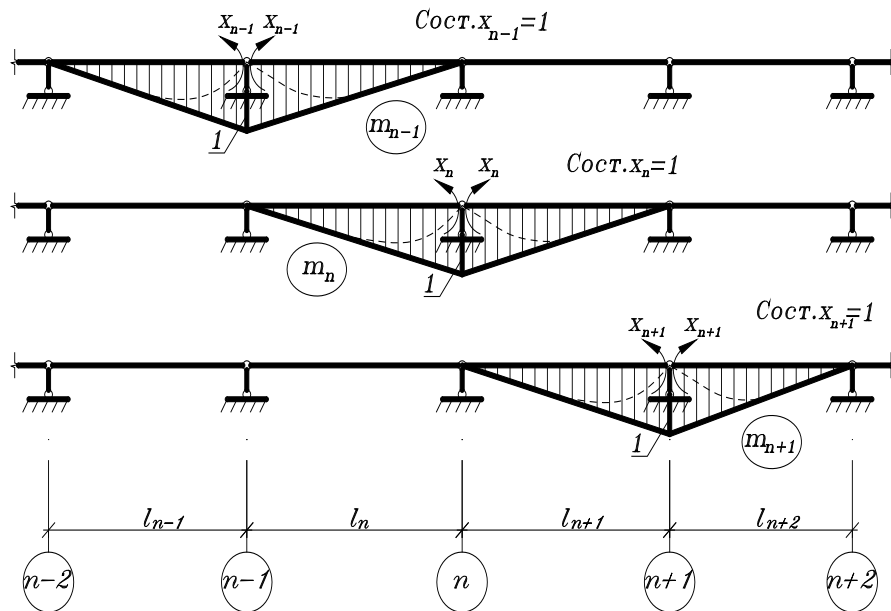


Рис. 73. Эпюры изгибающих моментов в единичных состояниях

Показанные опорные реакции определяются с помощью ниже приведенных выражений

$$R_{n,n-1}^{\text{пр}} = \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} ; \quad R_{n,n+1}^{\text{лев}} = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}},$$

где R_{np} — опорная реакция в основной системе от заданной внешней нагрузки определяется

$$R_{np} = B_n + A_{n+1},$$

где B_n — правая опорная реакция n — ого пролёта;

A_{n+1} — левая опорная реакция $n + 1$ — ого пролёта.

Окончательно получим

$$R_n = Q_n^{\text{лев}} + Q_{n+1}^{\text{пр}} + R_{np} = \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} + (B_n + A_{n+1}). \quad (18.8)$$

Тогда

$$f_n = \delta_n \cdot R_n = \delta_n \cdot \left[\frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} + (B_n + A_{n+1}) \right]. \quad (18.9)$$

После решения системы уравнений и нахождения значений опорных моментов каждый пролёт рассчитываемой балки рассматривается как отдельная

свободно опертая балка, на которую помимо заданной пролётной нагрузки действуют известные опорные моменты. Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил строятся аналогично теории изложенной при расчёте многопролётной неразрезной балки с помощью уравнений трех моментов.

18.2. Пример расчёта многопролётной неразрезной балки на упруго-оседающих (податливых) опорах с помощью уравнений пяти моментов

Заданная система (рис. 74)

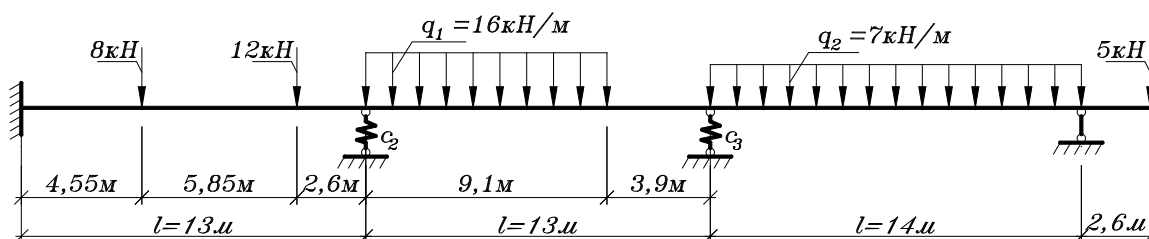


Рис. 74. Неразрезная балка на упруго-оседающих опорах с заданной внешней нагрузкой

Основная система (рис. 75)

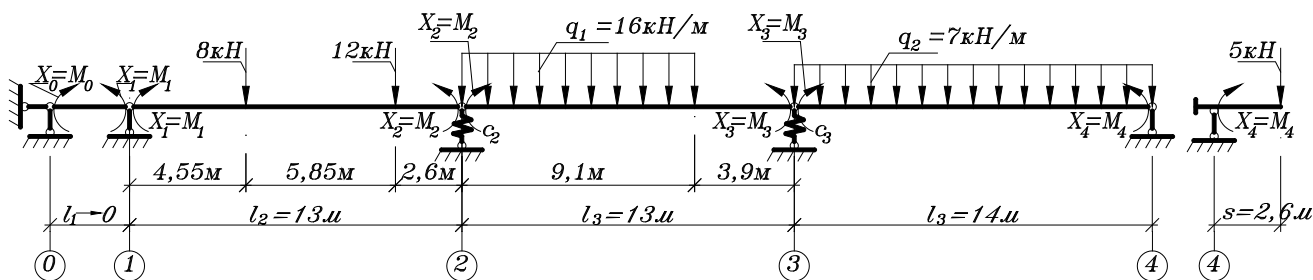


Рис. 75. Основная система неразрезной балки на упруго-оседающих опорах

Составление и решение уравнения пяти моментов

$$\begin{aligned}
 n = 1 \dots l_1 \cdot M_0 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot M_1 + l_2 \cdot M_2 - 6EJ \cdot \frac{f_1 - f_0}{l_1} + 6EJ \cdot \frac{f_2 - f_1}{l_2} = \\
 = -6 \cdot \left(\frac{S_1^A}{l_1} + \frac{S_2^B}{l_2} \right); \\
 n = 2 \dots l_2 \cdot M_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot M_2 + l_3 \cdot M_3 - 6EJ \cdot \frac{f_2 - f_1}{l_2} + 6EJ \cdot \frac{f_3 - f_2}{l_3} = \\
 = -6 \cdot \left(\frac{S_2^A}{l_2} + \frac{S_3^B}{l_3} \right);
 \end{aligned}$$

$$n = 3 \dots l_3 \cdot M_2 + 2 \cdot (l_3 + l_4) \cdot M_3 + l_4 \cdot M_4 - 6EJ \cdot \frac{f_3 - f_2}{l_3} + 6EJ \cdot \frac{f_4 - f_3}{l_4} =$$

$$= -6 \cdot \left(\frac{S_3^A}{l_3} + \frac{S_4^B}{l_4} \right).$$

Известно:

$$f_0 = f_1 = f_4 = 0; \quad S_1^A/l_1 = 0; \quad l_1 \cdot M_0 = 0; \quad M_4 = -13 \text{кН} \cdot \text{м}; \quad 6EJ = 82,932 \cdot 10^5 \text{кН} \cdot \text{м}^2; \quad \delta_2 = 1/c_2 = 1/4000 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{м/кН}; \quad \delta_3 = 1/c_3 = 1/5000 = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{м/кН};$$

$$f_2 = \delta_2 \cdot R_2 = \delta_2 \cdot \left[\frac{M_1 - M_2}{l_2} + \frac{M_3 - M_2}{l_3} + (B_2 + A_3) \right] = 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{M_1 - M_2}{13} + \frac{M_3 - M_2}{13} + (12,4 + 94,64) \right] = 10^{-4} \cdot [0,1923M_1 - 0,1923M_2 + 0,1923M_3 - 0,1923M_2 + 267,6] = [0,1923M_1 - 0,3846M_2 + 0,1923M_3 + 267,6] \cdot 10^{-4};$$

$$f_3 = \delta_3 \cdot R_3 = \delta_3 \cdot \left[\frac{M_2 - M_3}{l_3} + \frac{M_4 - M_3}{l_4} + (B_3 + A_4) \right] = 2,0 \cdot 10^{-4} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{M_2 - M_3}{13} + \frac{M_4 - M_3}{14} + (50,96 + 49) \right] = [0,1538M_2 - 0,1538M_3 + 0,1428M_4 - 0,1428M_3 + 199,92] \cdot 10^{-4} = [0,1538M_2 - 0,2966M_3 + 0,1428M_4 + 199,92] \cdot 10^{-4};$$

$$n = 1 \dots 26M_1 + 13M_2 + 6EJ \cdot \frac{f_2 - 0}{13} = -6 \cdot (0 + 149,97996);$$

$$n = 2 \dots 13M_1 + 52M_2 + 13M_3 - 6EJ \cdot \frac{f_2 - 0}{13} + 6EJ \cdot \frac{f_3 - f_2}{13} =$$

$$= -6 \cdot (166,55 + 1212,9059);$$

$$n = 3 \dots 13M_2 + 54M_3 + 14 \cdot (-13) - 6EJ \cdot \frac{f_3 - f_2}{13} + 6EJ \cdot \frac{0 - f_3}{14} =$$

$$= -6 \cdot (1083,7417 + 800,3734);$$

$$n = 1 \dots 26M_1 + 13M_2 - 6,3794 \cdot 10^5 \cdot f_2 = -899,879;$$

$$n = 2 \dots 13M_1 + 52M_2 + 13M_3 + 6,3794 \cdot 10^5 \cdot f_2 - 6,3794 \cdot 10^5 \cdot (f_3 - f_2) =$$

$$= -8276,7354;$$

$$n = 3 \dots 13M_2 + 54M_3 + 14 \cdot (-13) + 6,3794 \cdot 10^5 \cdot (f_3 - f_2) +$$

$$+ 5,9237 \cdot 10^5 \cdot f_3 = -11304,6906;$$

$$n = 4 \dots 14M_3 - 364 - 5,9237 \cdot 10^5 \cdot f_3 = -4802,2404;$$

$$n = 1 \dots 26M_1 + 13M_2 - 6,3794 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} \cdot [0,1923M_1 - 0,3846M_2 +$$

$$+ 0,1923M_3 + 267,6] = -899,879;$$

$$n = 2 \dots 13M_1 + 52M_2 + 13M_3 - f_2 \cdot (6,3794 \cdot 10^5 + 6,3794 \cdot 10^5) + 6,3794 \cdot$$

$$\cdot 10^5 \cdot f_3 = -8276,7354;$$

$$n = 3 \dots 13M_2 + 54M_3 - 182 - f_3 \cdot (6,3794 \cdot 10^5 + 5,9237 \cdot 10^5) + 6,3794 \cdot$$

$$\cdot 10^5 \cdot f_2 = -11304,6906;$$

$$n = 1 \dots 26M_1 + 13M_2 + 12,267M_1 - 24,535M_2 + 12,2267M_3 + 17071,274 = \\ = -899,879;$$

$$n = 2 \dots 13M_1 + 52M_2 + 13M_3 - 12,7588 \cdot 10^5 \cdot [0,1923M_1 - 0,3846M_2 + \\ + 0,1923M_3 + 267,6] \cdot 10^{-4} + 6,3794 \cdot 10^5 \cdot [0,1538M_2 - 0,2966M_3 + \\ + 0,1428M_4 + 199,92] \cdot 10^{-4} = -8276,7354;$$

$$n = 3 \dots 13M_2 + 54M_3 - 12,3031 \cdot 10^5 \cdot [0,1538M_2 - 0,2966M_3 + \\ + 0,1428M_4 + 199,92] \cdot 10^{-4} + 6,3794 \cdot 10^5 \cdot [0,1923M_1 - 0,3846M_2 + \\ + 0,1923M_3 + 267,6] \cdot 10^{-4} = -11122,6906;$$

$$n = 1 \dots 38,267M_1 - 11,535M_2 + 12,267M_3 = -17971,1534;$$

$$n = 2 \dots 13M_1 + 52M_2 + 13M_3 - 24,535M_1 + 49,0703M_2 - 24,535 - \\ - 34142,5488 + 9,8115M_2 - 18,9213M_3 + 9,1098M_4 + 12753,6965 = \\ = -8276,7354;$$

$$n = 3 \dots 13M_2 + 54M_3 - 18,9222M_2 + 36,491M_3 - 17,5688M_4 - \\ - 24596,35752 + 12,267M_1 - 24,535M_2 + 12,267M_3 + 17071,2744 = \\ = -11122,6906;$$

$$n = 1 \dots 38,267M_1 - 11,535M_2 + 12,267M_3 = -17971,1534;$$

$$n = 2 \dots - 11,535M_1 + 110,8818M_2 - 30,4563M_3 = 13230,5443;$$

$$n = 3 \dots 12,267M_1 - 30,4572M_2 + 102,758M_3 = -3826,00188.$$

Решая систему уравнений любыми известными способами, получаем $M_1 = -458,0353$ кН/м ; $M_2 = 83,241$ кН/м ; $M_3 = 42,1183$ кН/м .

Проверка (с подстановкой):

$$n = 1 \dots 38,267 \cdot (-458,0353) - 11,535 \cdot 83,241 + 12,267 \cdot 42,1183 + \\ + 17971,1534 = -17527,6368 - 960,1849 + 516,6652 + 17971,1534 = -0,0031;$$

$$n = 2 \dots - 11,535 \cdot (-458,0353) + 110,8818 \cdot 83,241 - 30,4563 \cdot 42,1183 - \\ - 13230,5443 = 5283,4372 + 9229,9119 - 1282,7676 - 13230,5443 = 0,0372;$$

$$n = 3 \dots 12,267 \cdot (-458,0353) - 30,4572 \cdot 83,241 + 102,758 \cdot 42,1183 + \\ + 3826,00188 = -5618,719 - 2535,2878 + 4327,9923 + 3826,00188 = \\ = -0,01262.$$

$$f_2 = [0,1923M_1 - 0,3846M_2 + 0,1923M_3 + 267,6] \cdot 10^{-4} = [0,1923 \cdot \\ (-458,0353) - 0,3846 \cdot 83,241 + 0,1923 \cdot 42,1183 + 267,6] \cdot 10^{-4} =$$

$$= [-88,0802 - 32,0145 + 8,0993 + 267,6] \cdot 10^{-4} =$$

$$= (-120,0947 + 275,6993) \cdot 10^{-4} = 155,6046 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,556046 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$f_3 = [0,1538M_2 - 0,2966M_3 + 0,1428M_4 + 199,92] \cdot 10^{-4} =$$

$$= [0,1538 \cdot 83,241 - 0,2966 \cdot 42,1183 + 0,1428(-13) + 199,92] \cdot 10^{-4} =$$

$$= [12,8025 - 12,4923 - 1,8564 + 199,92] \cdot 10^{-4} =$$

$$= (212,7225 - 14,3487) \cdot 10^{-4} = 198,3738 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$f_3 = 1,983738 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Полученные значения вертикальных перемещений над упруго-податливыми опорами f_2 и f_3 совпадают с результатами, полученными при ре-

шении данной задачи смешанным методом. Во вспомогательных состояниях смешанного метода перемещения $f_2 = Z_2$ и $f_3 = Z_3$, совершенные верх от базовой линии, принимались со знаком плюс. Полученный знак минус у вертикальных перемещений над упруго-оседающими опорами при расчёте смешанном методом свидетельствует о проседании опор, т.е. имеет место соотношение $f_2 = -Z_2$ и $f_3 = -Z_3$.

Построения окончательной эпюры изгибающего момента M (рис. 76).

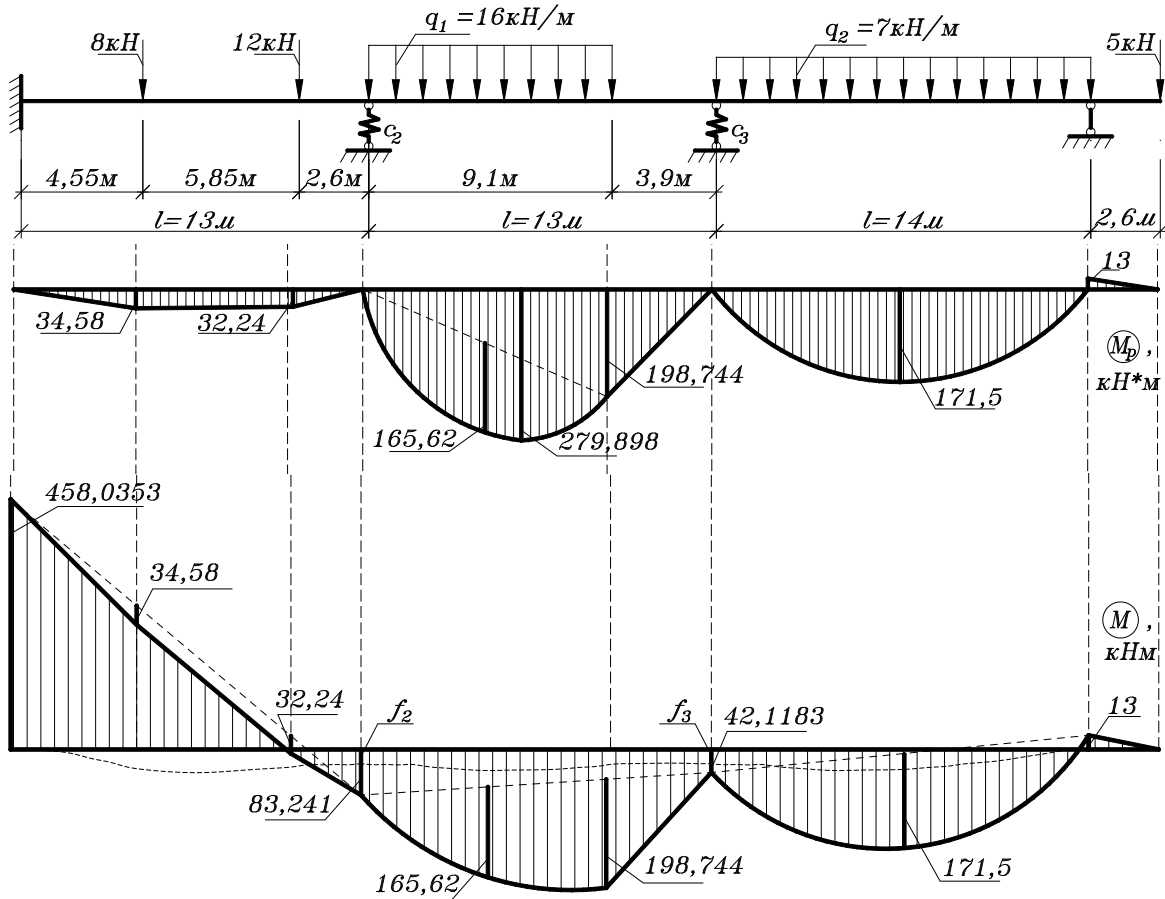


Рис. 76. Окончательная эпюра изгибающего момента M и вертикальные перемещения упруго-оседающих опор

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой вид имеет расчетная схема многопролетной неразрезной балки (МНБ)?
2. Как определяется степень статической неопределенности МНБ? Как она изменяется при добавлении и при удалении одной опоры?
3. Как записывается типовое уравнение трех моментов (УТМ) для расчета МНБ на заданную нагрузку? Каков его механический смысл?
4. Как выводится типовое УТМ из канонического уравнения метода сил?
5. Как образуется основная система метода сил?
6. Что принимается за основные неизвестные?
7. Сколько различных УТМ необходимо составлять для расчета неразрезной балки?
8. На каких этапах расчета МНБ используются «балочные» эпюры M_p ?
9. Как строится окончательная эпюра Q при расчете МНБ? Чем она отличается от эпюры Q_p для основной системы («балочной эпюры»)?
10. В чем особенность построения эпюр M и Q на консолях МНБ?
11. Как записывается типовое УТМ для расчета МНБ на заданную осадку опор? Какими членами оно отличается от УТМ для расчета на заданную нагрузку?
12. Повторите известные Вам основные сведения по теории линий влияния (механический смысл ординат; размерности ординат; определение с помощью линий влияния усилий от сосредоточенной и сплошной нагрузки при заданном их расположении; порядок опасного размещения временной нагрузки; признак опасного положения подвижной нагрузки; назначение линий влияния в практических инженерных расчетах).
13. Чем отличается очертание линий влияния, построенных для МНБ, от очертания аналогичных линий влияния, построенных для простых балок и для многопролетных шарнирных балок (МШБ)?
14. Как определяются ординаты линий влияния при статическом способе построения?
15. Как обосновывается кинематический способ построения линий влияния для МНБ?
16. Изобразите эскизы линий влияния M , Q , опорной реакции, используя кинематический способ?
17. В чём особенность очертания линий влияния для МНБ в окрестности защемленного конца балки?
18. В чём особенность очертания линий влияния для МНБ на консоли?
19. В чём особенности расчета МНБ на временную нагрузку?
20. Каков смысл ординат объемлющих эпюр изгибающих моментов?
21. Как применить линию влияния M для получения одной из ординат объемлющей эпюры? Сколько линий влияния необходимо построить и загрузить для получения всех ординат объемлющей эпюры?
22. Какой порядок построения объемлющих эпюр изгибающих моментов для МНБ использован Вами при выполнении задания?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии в краткой и доступной форме изложены различные подходы к расчету многопролетных неразрезных балок на опорах различной жёсткости на постоянную и временную нагрузок. Описана техника построения окончательных эпюр M и Q для многопролётной неразрезной балки от действия постоянной нагрузки и определения опорных реакций, построения линий влияния статическим и кинематическим способами. Описан порядок вычисления усилий от постоянной и временной нагрузок загрузением линий влияния. В каждом разделе приводится пример расчета в объеме, предусмотренном планом выполнения задания, с необходимыми комментариями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мухтаров, Р. А. Расчёт многопролётной неразрезной балки / Гриднев, С. Ю., Мухтаров, Р. А. — метод. указ. №503 Воронеж: ВГАСУ, 2011. — 26 с.
2. Мухтаров, Р. А. Расчёт статически неопределимой рамы методом перемещений / Мухтаров, Р. А. — метод. указ. №76 Воронеж: ВГТУ, 2017. — 31 с.
3. Киселев, В. А. Строительная механика / В. А. Киселев. — М.: Стройиздат, 1976. — 520 с.
4. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. — М.: Высшая школа, 1986. — 606 с.
5. Игнатьев, В. А., Галишникова В. В. Основы строительной механики. Учебное пособие, Волгоград: ВолГАСУ, 2016. — 561 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Задание на выполнение расчётной работы.....	4
2. Содержание работы.....	4
3. Общие методические указания.....	5
4. Пример расчета с дополнительными методическими указаниями.....	13
4.1. Задание.....	13
4.2. Определение числа степеней свободы (степень статистической неопределимости)	13
4.3. Расчёт балки на действие постоянной нагрузки.....	13
5. Определение значения ординат линии влияния и объемлющих эпюр на ПЭВМ и их построения.....	21
6. Определение изгибающего момента M в заданном сечении от действия постоянной нагрузки загрузением линии влияния.....	24
7. Аналитическое определение изгибающего момента M в заданном сечении.....	24
8. Определение усилий с помощью линии влияния от действия временной нагрузки.....	25
9. Построение объемлющих эпюр M_{max} и M_{min}	26
10. Построение объемлющей эпюры для неразрезной балки с применением фокусных отношений.....	28
11. Применение моментных фокусных отношений к построению эпюр.....	31
12. Пример расчёта построения объемлющей эпюры для неразрезной балки с применением фокусных отношений.....	33
13. Пример расчёта построения объемлющей эпюры для неразрезной балки с применением уравнений трёх моментов.....	39
14. Построение линий влияния для неразрезной балки статическим и кинематическим способами.....	46
14.1. Статический метод.....	47
14.2. Кинематический метод.....	51
15. Расчёт многопролётной неразрезной балки методом перемещений.....	54
15.1. Общие методические указания.....	54
15.2. Справочные данные и указания об их использовании.....	56
16. Пример расчёта многопролётной неразрезной балки методом перемещений с дополнительными методическими указаниями.....	59
16.1. Задание.....	59
16.2. Определение степени кинематической неопределимости.....	60
16.3. Основная система метода перемещений.....	60
16.4. Единичные состояния основной системы и соответствующие эпюры. Определение коэффициентов канонических уравнений.....	61
16.5. Основная система под действием нагрузки и соответствующие эпюры. Определение свободных членов канонических уравнений.....	64
16.6. Вычисление основных неизвестных.....	68
16.7. Построение окончательной эпюры изгибающего момента M	68

16.8. Построение окончательной эпюры поперечной силы Q	70
16.9. Определение реакций опор.....	71
16.10. Проверка равновесия балки в целом.....	71
17. Расчёт многопролётной неразрезной балки на упруго-оседающих (податливых) опорах смешанным методом.....	72
17.1. Основные положения.....	72
17.2. Пример расчета с дополнительными методическими указаниями...	74
18. Расчёт многопролётной неразрезной балки на упруго-оседающих (податливых) опорах с помощью уравнений пяти моментов.....	80
18.1. Основные положения.....	80
18.2. Пример расчёта многопролётной неразрезной балки на упруго-оседающих (податливых) опорах с помощью уравнений пяти моментов.....	85
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	89
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	90
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	90

Учебное издание

**Мухтаров Ринат Абдуллаевич
Гриднев Сергей Юрьевич**

РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор Мухтарова Р. А.

Рисунок на обложке с сайта yandex: картинки

Редактор Ярцева Ю. А.

Подписано к изданию 20.09.2022.
Объём данных 5,4 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября 84