Л. В. Акчурина, М. Ю. Глазкова, В. К. Каверина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Воронеж 2019

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

**Л. В. АКЧУРИНА, М. Ю. ГЛАЗКОВА,
В. К. КАВЕРИНА**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Воронеж 2019

УДК 517(07)
ББК 22.161я7
А448

Рецензенты:
Кафедра математики и физики
Воронежского государственного аграрного университета
зав. кафедрой, д-р техн. наук, профессор В.П. Шацкий
Кафедра цифровых технологий
Воронежского государственного университета
к. физ.-мат. наук, доц. С.В. Борзунов

Акчурина, Л.В.
А 448 Математический анализ: учебное пособие / Л. В. Акчурина, М. Ю. Глазкова, В. К. Каверина; ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет». – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2019. – 89 с.

ISBN

Учебное пособие содержит материал по разделам математического анализа. Теоретический материал сопровождается примерами с подробным решением, что предназначено для овладения студентами практическими навыками решения задач по дисциплине «Математический анализ».

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлениям 07.03.01. “Архитектура”, 07.03.02 “Реконструкция и реставрация архитектурного наследия” дисциплине «Математика». Предназначено для студентов 1-го курса.

Ил. 30. Библиогр.: 12 назв.

УДК 517(07)
ББК 22.161я7

Печатается по решению учебно-методического совета Воронежского государственного технического универститета

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

В современной науке и технике математические методы исследования играют все большую роль, что обусловлено, прежде всего, быстрым ростом вычислительной техники, благодаря которой существенно расширяются возможности успешного применения математики при решении многих прикладных задач.

Для успешного изучения теоретической и прикладной механики, архитектурной физики, начертательной геометрии, а также других общетеоретических и специальных дисциплин необходимо понимать смысл математических терминов, таких как уравнение, функция, предел, производная, интеграл и других математических определений, поэтому курс математики является фундаментом технической составляющей обучения.

Настоящее учебное пособие определяет важнейшие понятия математики – такие как функция одной переменной, предел функции, производная функции и указывает, как эти определения применять к исследованию функции, в пособии рассматриваются интегралы, которые применяются для решения геометрических задач вычисления площадей, длины дуг и объемов. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров и задач.

Предлагаемое пособие ориентировано на студентов очной формы обучения направления "Архитектура" и "Реконструкция и реставрация архитектурного наследия". Материал издания делится на параграфы, объединенные одной темой, которые в свою очередь разбиваются на более мелкие подразделы, в рамках которых рассматриваются и решаются отдельные конкретные вопросы.

Практическая значимость пособия состоит в подборе задач, помогающих студенту установить связь теоретических методов математического анализа с их практическим применением. Составлены варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы.

Настоящие методические указания ставят своей задачей помочь студентам овладеть приёмами решения задач по теме «Математический анализ», а также обеспечить самостоятельность выполнения индивидуального задания.

Авторы надеются, что работа с учебным пособием поможет студентам успешно подготовится к зачету или экзамену.

§ 1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Основные определения

Определение 1.1. Две переменные величины x и y связаны функциональной зависимостью, если каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой.

Если одна из двух функционально связанных между собой переменных величин может принимать свои значения независимо, то такая величина называется независимой переменной или аргументом. В этом случае другая величина называется зависимой переменной или функцией.

Определение 1.2. Переменная y называется функцией от переменной x, если каждому значению x из некоторой области D соответствует единственное значение y, обозначаемое $y(x)$ (читается « y от x »).

Запись $y(a)$ указывает, что речь идет о значении функции $y = y(x)$ в точке a. Например, если функция задана формулой $y = x^2$, то $y(2)=4$, а $y(0.3) = 0.09$.

Определение 1.3. Множество всех возможных значений аргумента x, при которых существует значение функции y, называется областью определения функции и обозначается $D(y)$.

Определение 1.4. Множество всех возможных значений, которые может принимать функция y, когда x пробегает всю область определения $D(y)$, называется областью изменения или областью значений функции и обозначается $E(y)$.

Существует очень наглядный способ представить функциональную связь между x и y – это график функции.

Определение 1.5. Графиком функции называется множество точек $M(x\,;y\,(x))$ на координатной плоскости xOy, чьи координаты имеют вид $(x\,;y\,(x))$, причем первая координата x пробегает всю область определения функции $D(y)$. Таким образом, горизонтальная ось Ox связывается с аргументом, а вертикальная ось Oy с функцией.

1.2. Способы задания функций

Графический способ. В этом способе задания для вычисления значений функции предлагается ее график, нарисованный на координатной плоскости.

Для удобства график чертится на бумаге, на которой изображена координатная сетка, тогда для нахождения значения функции от некоторого значения x из области определения надо:

1) найти на горизонтальной оси абсцисс точку, изображающую число x;
2) провести через эту точку вертикальную прямую до ее пересечения с графиком функции, то ее координаты имеют вид $M(x\,;y\,(x\,))$;
3) провести через точку M горизонтальную прямую до ее пересечения с осью ординат в некоторой точке N;
4) определить с помощью масштаба или координатной шкалы то число, которое соответствует точке N на оси ординат. Это число и будет приближенным значением величины $y(x)$.

Преимуществом этого способа является его наглядность. По графику видно, где функция возрастает, а где убывает, где находятся ее наибольшее или наименьшее значения, где функция меняется быстро, а где медленно.

Недостатком этого способа является низкая точность, с которой вычисляются значения функции.

Табличный способ. Функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции, где в одной графе таблицы перечисляются значения аргумента – $x_1, x_2,...,x_n$, а в другой – соответствующие им значения функции $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2),...,$ $y_n = y(x_n)$. При этом в хороших таблицах значения аргумента задаются с малым шагом (часто), а соответствующие значения функции вычислены с высокой точностью.

Удобством этого способа является простота и высокая точность получения значений функции для табличных значений аргумента.

Недостатком является ограниченная точность вычисления значений функции для промежуточных (не вошедших в таблицу) значений аргумента. Недостатком также является отсутствие наглядности, по сравнению, например, с графиком функции.

Табличный способ может быть полезен как промежуточный этап при построении графика функции, например:

X	−5	0	7	12
Y	2	5	9	25

Известные школьные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы, таблицы степеней и другие.

Аналитический способ. Функция задаётся в виде одной или нескольких формул (уравнений): $8^{x+y} = x \cdot y$, $y = x^2 + 2x - \sqrt{4x}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{при } x \le 0, \\ \sin x + 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным и эффективным способом, так как позволяет проводить ее исследование методами математического анализа.

В классическом математическом анализе выделены пять типов основных элементарных функций, укажем их далее.

1.3. Основные элементарные функции

1. **Степенные функции** $y = x^a$, где показатель степени a – любое число; в зависимости от показателя степени a область определения такой функции может быть различной, но она всегда содержит $(0,+\infty)$; отметим, что в этот класс входят $y=c$ – «функция-константа», принимающая только одно значение c, $-\infty < c < +\infty$; прямая $y = x$, парабола $y = x^2$, гипербола $y = \frac{1}{x}$ и другие кривые.

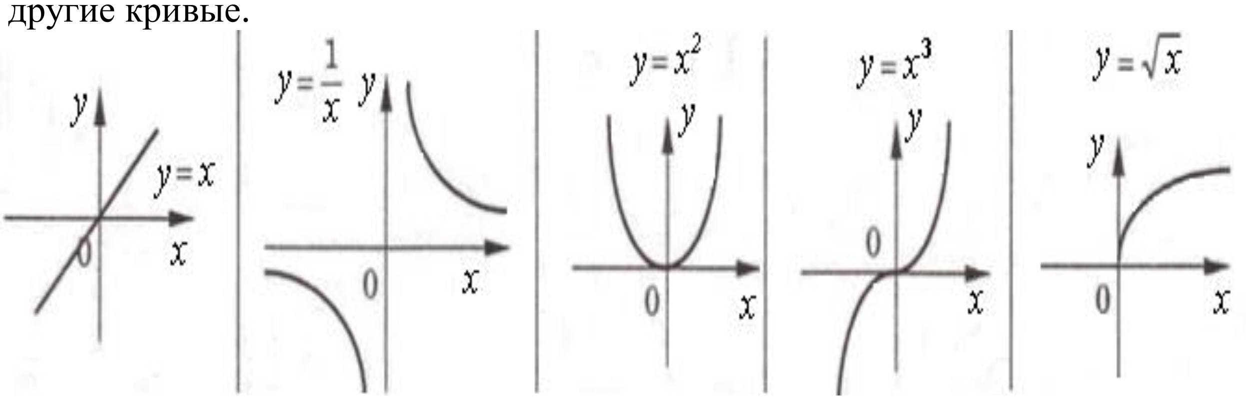


Рис. 1. Графики некоторых степенных функций

2. **Показательные функции**, где основание степени a – положительное, не равное единице число, $D(y) = (-\infty,+\infty)$, $E(y) = (0;+\infty)$, их два подтипа: возрастающие при $a > 1$ и убывающие при $0 < a < 1$.

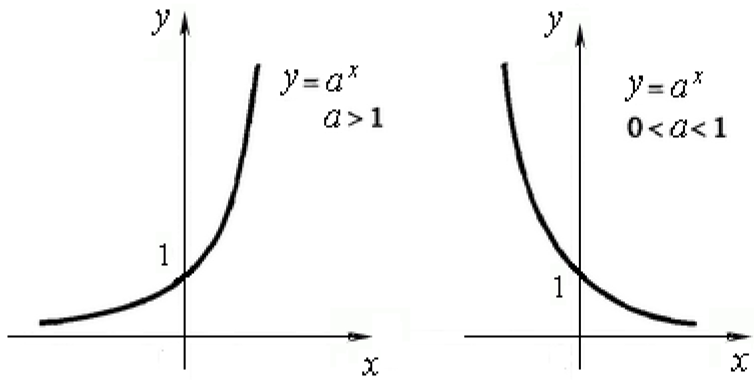


Рис. 2. Показательная функция

3. **Логарифмические функции** $y = \log_a x$, где основание a – положительное, не равное единице число, $D(y) = (0,+\infty)$, $E(y) = (-\infty,+\infty)$, так как они обратные к показательным функциям, то у них такая же ситуация с монотонностью.

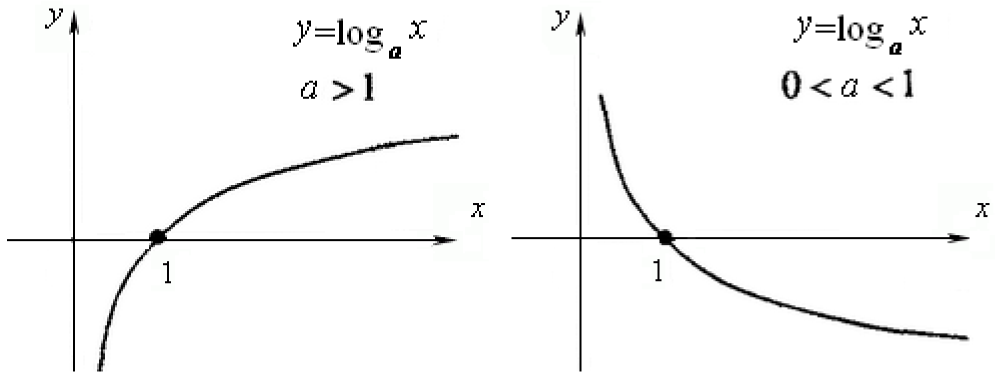


Рис. 3. Логарифмическая функция

4. **Тригонометрические функции:**
$y = \sin x$ – функция «синус», $y = \cos x$ – функция «косинус», их области определения – вся числовая ось $D(y) = (-\infty, +\infty)$, они ограничены (по абсолютной величине не превышают единицы) $E(y) = [-1, +1]$ и обладают основным периодом $T = 2\pi$;
$y = tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ – функция «тангенс», область определения – вся числовая ось за исключением точек $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$
$y = ctg\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ – функция «котангенс», область определения – вся числовая ось за исключением точек $\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$
У двух последних функций основной период $T = \pi$.
Графики функций приведены на рис. 4.

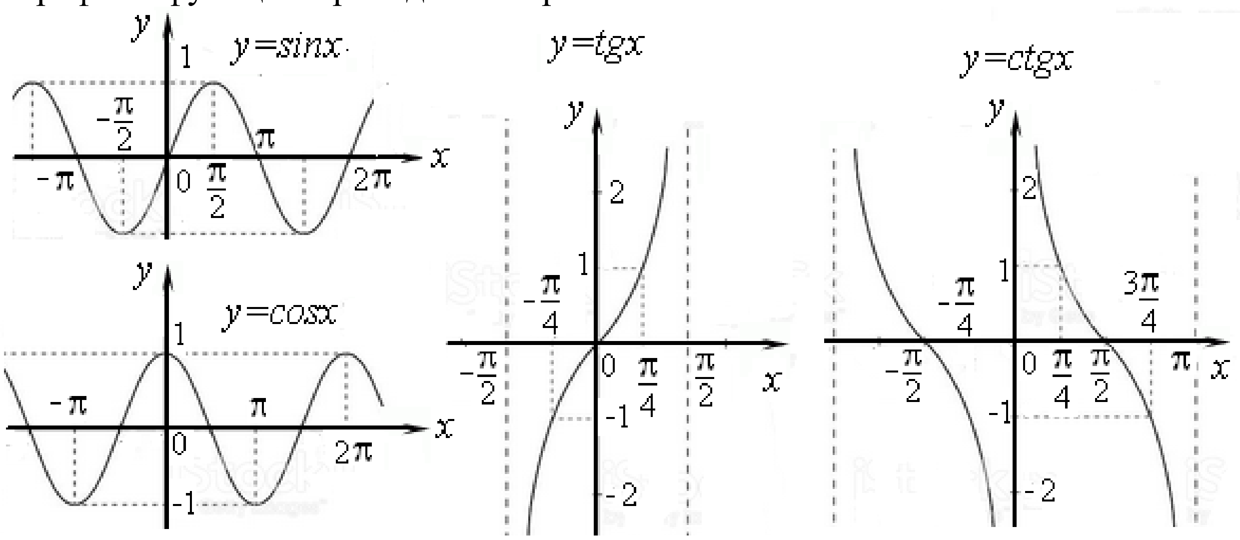


Рис. 4. Графики тригонометрических функций

5. **Обратные тригонометрические функции:**

$y = \arcsin x$ – функция «арксинус», областью определения которой является отрезок [–1, 1], а областью значений – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$y = \arccos x$ – функция «арккосинус», областью определения которой является отрезок [–1, 1], а областью значений – отрезок $[0, \pi]$;

$y = arctg\ x$ – функция «арктангенс», областью определения которой является вся числовая ось, а областью значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

$y = arcctg\ x$ – функция «арккотангенс», областью определения которой является вся числовая ось, а областью значений – интервал $(0, \pi)$.

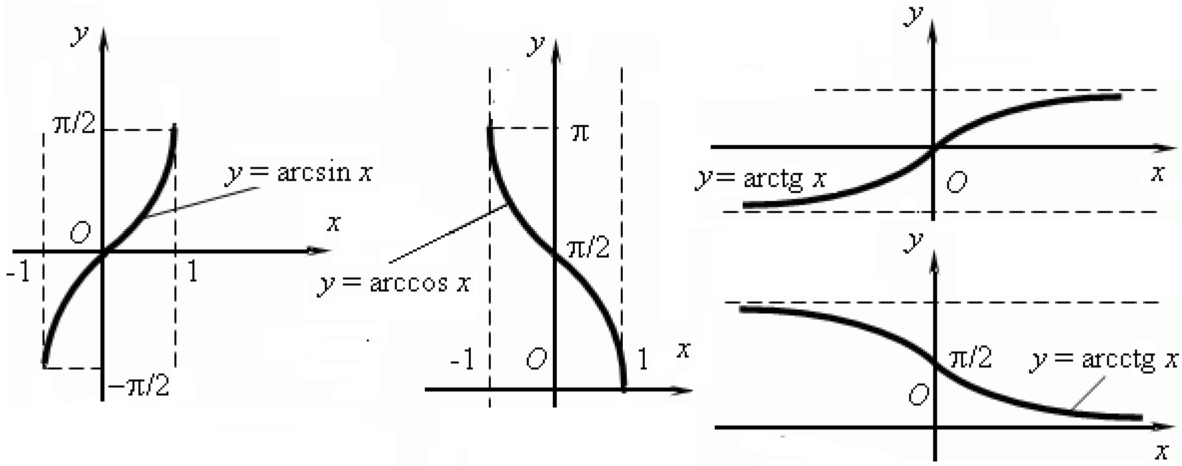


Рис. 5. Графики обратных тригонометрических функций

На рис. 5 показаны графики кривых на соответствующих областях определений, т. к. на этих интервалах соответствующие тригонометрические функции – монотонны.

Однако, например, функция $y = \sin x$ определена не только на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, где и построен график $y = \arcsin x$, синусоида определена на всей числовой оси, и там тоже есть интервалы монотонности функции, на которых можно определить обратную функцию. Построив обратные функции на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$,..., далее объединяя их в единые графики, получим графики, которые приводятся на рис. 6.

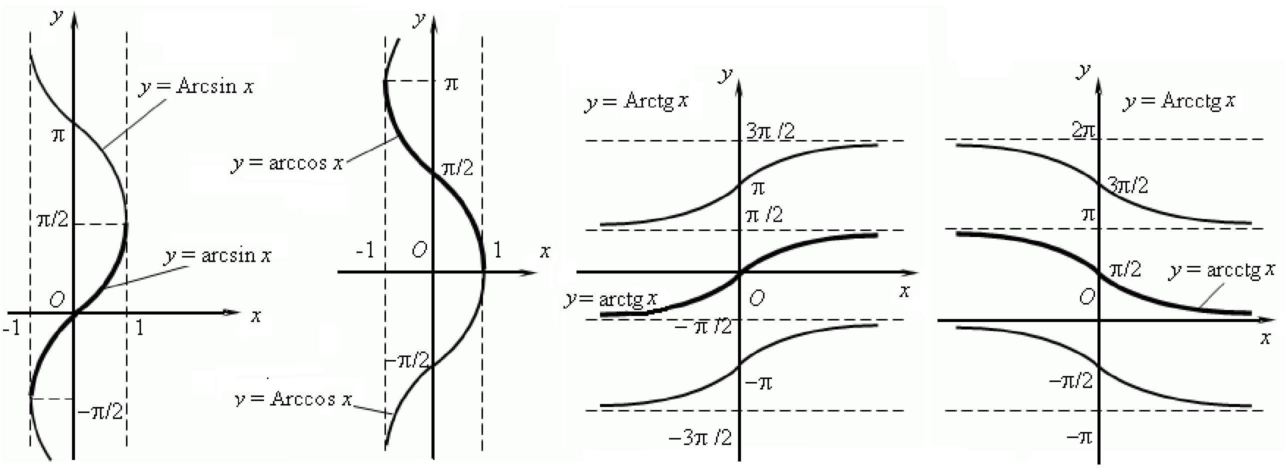


Рис. 6. Графики обратных тригонометрических функций

Определение 1.6. *Элементарными функциями* называется множество функций, полученных из вышеперечисленных основных элементарных функций с применением к ним конечного числа арифметических действий и операции суперпозиции.

Рассмотрим простейшую сложную функцию, содержащую операцию суперпозиции для двух функций: $y = w(u(x))$. Сначала берется значение аргумента x, затем находится значение $u(x)$, наконец, от получившегося числа $u(x)$ находится значение $w(u(x)) = y(x)$. Та функция, которая выполняется последней (у нас это $w(u(x))$), называется внешней функцией, а все, что является аргументом внешней функции, образует внутреннюю функцию $u(x)$.

Например, функции $y = \cos(x^2)$, $y = \lg(x + 2^x)$ являются сложными с внешними функциями – косинусом и логарифмом соответственно, а элементарной функцией с тангенсами и логарифмами является $y(x) = tgx - 10\log_3(x) - tgx \cdot \log_3(x) - \dfrac{tgx + 12\log_3(x)}{tgx - \log_3(x)}$.

Рассмотрим некоторые примеры нахождения области определения функции. Напомним, что элементарная функция составляется из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и подстановок одной функции в аргумент другой. Поэтому в область определения элементарной функции войдут те x, для которых аргументы каждой из функций, присутствующих в $y(x)$, будут находиться в пределах их областей определения. Пересечение областей определения каждой из функций, присутствующих в $y(x)$, и будет областью определения функции $y(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти область определения функции $y=\sqrt[8]{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}+\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

Найдем области определения каждого из слагаемых:

1) извлечь $\sqrt[8]{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}$ возможно только тогда, когда $\dfrac{\pi^2}{4}-x^2\ge 0$, отсюда $x^2\le\dfrac{\pi^2}{4}$ или $|x|\le\dfrac{\pi}{2}$, что означает $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$;

2) вычислить отношение $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ возможно, если выбрать x так, чтобы выполнялось деление $\sin x$ на $(1-\cos x)$, что возможно лишь тогда, когда $(1-\cos x)\ne 0$, т. е. $\cos x\ne 1$, тогда $x\in R/\{0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\ldots\}$.

Итак, областью определения функции $y(x)$ является пересечение отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ и $x\in R/\{0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\ldots\}$. Так как на отрезок попадает только одна точка $x=0$, где второе слагаемое не определено, то, исключив ее, мы получим все x, при которых $y(x)$ определена. Ответ: $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Пример 2. Найти область определения функции $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{2}{\sqrt{1-\log_2 x}}$.

Функция $y(x)$ существует тогда, когда существуют оба слагаемых:

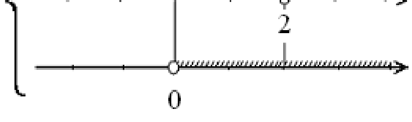
1) $\arcsin\dfrac{2x-1}{5}$ определен только тогда, когда аргумент его ограничен единицей по абсолютной величине $-1\le\dfrac{2x-1}{5}\le 1$;

2) $\dfrac{2}{\sqrt{1-\log_2 x}}$ существует тогда, когда знаменатель дроби не равен нулю и не отрицательно подкоренное выражение, т. е. $1-\log_2 x>0$;

3) второе слагаемое содержит функцию $\log_2 x$, которая определена только при положительном аргументе, т. е. $x>0$.

Таким образом, получим систему неравенств, которую решим графически:

$$\begin{cases}-1\le\dfrac{2x-1}{5}\le 1\\ 1-\log_2 x>0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5\le 2x-1\le 5\\ \log_2 x<\log_2 2\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le x\le 3\\ x<2\\ x>0\end{cases}\Rightarrow$$



Ответ: $x\in(0;2)$.

Замечание. На практике удобно пользоваться двумя правилами:
1. При арифметических действиях с функциями область определения является пересечением областей определений, входящих в выражение функций.
2. Чтобы найти область определения сложной функции, надо выписать область определения внешней функции, решить полученное неравенство и взять пересечение с областью определения внутренней функции.

Например, в последнем примере применение этих правил позволяет сразу выписать систему трех неравенств.

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Укажите графики функций: $y=3^x$, $y=(0.25)^x$, $y=\log_4 x$, $y=tgx$, $y=x^4$, $y=\sqrt{x}$.
2. Приведите пример элементарной функции.
3. Приведите пример сложной функции.
4. Укажите область значения функций: $y=\log_{0.5} x$, $y=x^4$, $y=-\sqrt{x}$, $y=-2x^2-4x+4$.
5. Какая из функций является четной: $y=\sqrt[3]{x}+\cos x$, $y=\sqrt[3]{x}\sin x+x^2$, $y=\sqrt[3]{x}\cos x+e^x+e^{-x}$.
6. Указать область определения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-e^{\sqrt{x}}$.
7. Указать область определения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\ln x+1$.
8. Указать область определения функции $f(x)=\arccos\dfrac{x}{2-x}$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Предел функции в точке, его свойства

Понятие предела функции является основным понятием математического анализа, так как является основой таких операций, как дифференцирование и интегрирование.

Определение 2.1. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для всех аргументов из окрестности точки $x = a$: $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

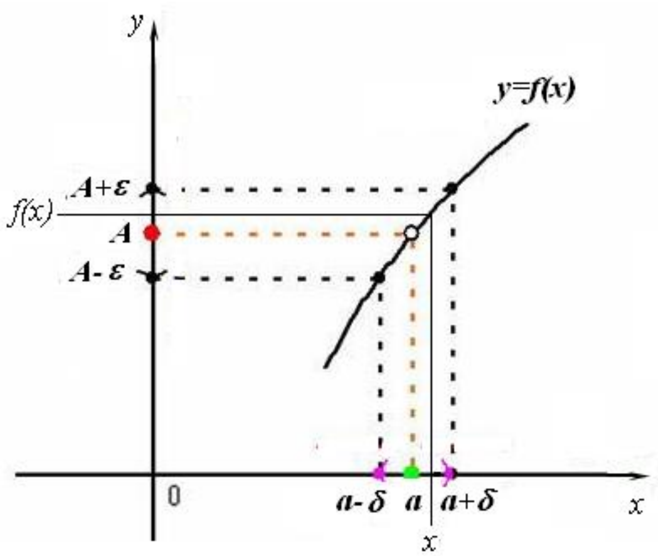


Рис. 7. Определение предела функции в точке

Число A есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, что обозначают $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, это значит, что для всех x, достаточно близких к числу a (т. е. для $|x - a| < \delta$), соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются близкими к числу A (т. е. $|f(x) - A| < \varepsilon$), что и показано на рис. 7.

Свойства предела функции в точке

1. Функция в точке может иметь только один предел.
2. Предел константы равен ей самой, т. е. $\lim\limits_{x \to a} C = C$.
3. Предел алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов:
$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) .$$
4. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) \ .$$

5. Постоянный множитель выносится за знак предела:

$$\lim_{x\to a}[k\cdot g(x)] = k\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

6. Если предел знаменателя отличен от нуля, то есть $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$, то предел частного равен частному пределов: $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

7. Теорема о промежуточной функции: если в окрестности точки $x=a$ даны такие функции, что выполняется двойное неравенство $f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)$ и $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_3(x) = A$, то $\lim_{x\to a} f_2(x) = A$.

Функция является непрерывной в точке x_0, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке, т. е. $A = f(x_0)$.

Все изучаемые элементарные функции непрерывны на области определения.

Замечание. На понятии предела функции в точке основывается понятие производной функции в точке, где роль аргумента играет приращение аргумента Δx, которое всегда стремится к нулю $\Delta x\to 0$. Роль функции играет ее приращение с аргументом Δx: $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

Все указанные ранее свойства предела функции в точке работают и для такой функции $\Delta f(\Delta x)$.

2.2. Определение производной, ее геометрический и физический смысл

Производная функции – одно из важнейших понятий математики. С помощью производной можно находить различные характеристики функции: определять промежутки монотонности, интервалы выпуклости и вогнутости, находить точки экстремумов и точки перегибов, а в конечном итоге строить функции по аналитически заданной формуле.

С введением производной появляется возможность решать задачи трудно или вообще недоступные для методов элементарной математики.

Задача о касательной. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка графика функции $y = f(x)$ и $M(x, y)$ – точка графика функции, где $x = x_0+\Delta x$, $y = f(x_0+\Delta x)$ (рис. 8).

Составим уравнение касательной M_0T к кривой $y = f(x)$ в точке M_0.

Из прямоугольного треугольника ΔM_0MN находим $\mathrm{tg}\varphi = \frac{MN}{M_0M} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где φ - угол, образуемый секущей M_0M с осью Ox. Пусть $M \to M_0$ вдоль кривой $y = f(x)$, M_0T – касательная к ней в т. M_0, α - угол наклона касательной к оси Ox, тогда при $\Delta x \to 0$, $\mathrm{tg}\varphi \to \mathrm{tg}\alpha$, следовательно, $\mathrm{tg}\alpha = \lim\limits_{\varphi\to\alpha} \mathrm{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Так как $tg\alpha = k$ угловой коэффициент касательной, то

$$k = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} . \qquad (2.1)$$

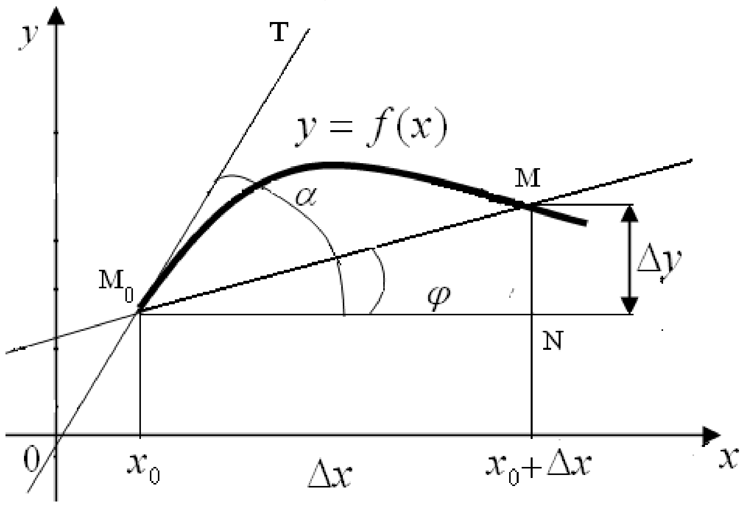


Рис. 8. График функции $y = f(x)$ с касательной M_0T

Таким образом, задача о касательной приводит к вычислению предела отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последний стремится к нулю. Приращения функции Δy и аргумента Δx показаны на рис. 8 и на рис. 9.

Производная $f'(x_0)$ определяет тангенс угла наклона касательной, построенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, к оси Ox, что получено в формуле (2.1).

Далее, составим уравнение прямой (касательной M_0T на рис. 8) по найденному угловому коэффициенту k и точке $M_0(x_{0,}y_0)$, принадлежащей прямой:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (2.2)$$

Подставив $y_0 = f(x_0)$ и $k = f'(x_0)$ в уравнение (2.2), получим уравнение касательной, показанной на рис. 10:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.3)$$

Нормалью к кривой на плоскости является прямая, ортогональная к касательной, проходящая через точку касания $M_0(x_0, y_0)$. Зная условие ортогональности прямых на плоскости, получаем уравнение нормали

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (2.4)$$

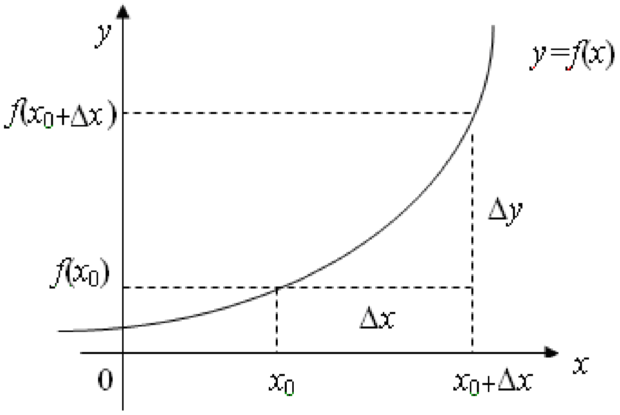


Рис. 9. Приращения функции Δy и аргумента Δx

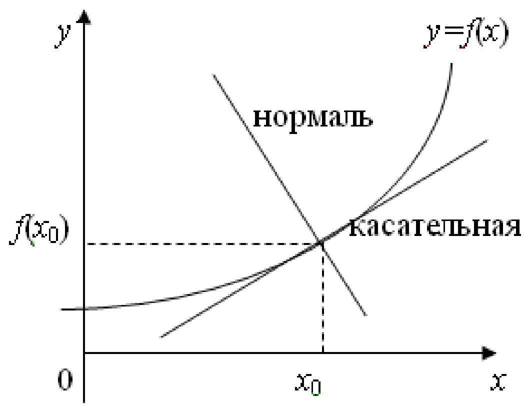


Рис. 10. Нормаль и касательная к графику функции

Пример 3. Составим уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 3x^2 - 2\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Вычислим значение функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$: $y_0 = y(1) = 3 \cdot 1^2 - 2\sqrt{1} = 1$.

Вычислим значение производной $y'(x) = 6x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ в той же точке $x_0 = 1$: $y'(1) = 5$.

Уравнения касательной (2.3) и уравнение нормали (2.4) имеют соответственно вид:

$$y - 1 = 5 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 5x - 4 \text{ (касательная);}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{5} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5} \text{ (нормаль).}$$

Задача о скорости движения. Пусть материальная точка М движется вдоль некоторой прямой по закону $S = S(t)$, где S − путь, пройденный точкой за время t, и необходимо найти скорость точки в момент t_0.

К моменту времени t_0 движущаяся точка занимает положение М_0 и пройденный путь равен $S(t_0)$.

В момент времени $t_0 + \Delta t$ материальная точка переместится в точку М, т. е. за время Δt пройденный путь $\text{М}_0\text{М} = \Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$.

Средняя скорость движения $V_{ср}$ за промежуток времени Δt определяется отношением пройденного пути ко времени $V_{ср} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Средняя скорость характеризует движение тем точнее, чем меньше Δt, поэтому за скорость точки в момент $t = t_0$ принимается предел $V_{ср}$ при условии $\Delta t \to 0$, т. е.

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (2.5)$$

Отвлечёмся от конкретного смысла рассматриваемых выше задач и проведём рассуждения для произвольной непрерывной функции $y = f(x)$, заданной в интервале (a, b):

1) возьмём произвольное значение аргумента $x \in (a,b)$;
2) зададим аргументу столь малое приращение Δx, что $(x + \Delta x)$ и $x \in (a,b)$, и вычислим значение функции $f(x+\Delta x)$ и $f(x)$;
3) найдём приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;
4) найдём предел отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, когда $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение 2.2. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2.6)$$

Для производной применяют разные обозначения: y', y'_x, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

Функция, имеющая конечную производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке.

Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала, называется дифференцируемой на интервале.

2.3. Правила дифференцирования функций

Пусть даны дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$.

Теорема 2.1. *Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{2.7}$$

Доказательство. Рассмотрим производную суммы двух слагаемых: $(u+v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x))-(u(x)+v(x))}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x)-u(x))+(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{предел суммы} \\ \text{функций равен сумме} \\ \text{пределов функций} \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'. \ \blacksquare$$

Следствие. Формула (2.7) легко обобщается на случай любого конечного числа слагаемых, например, для трех слагаемых:

$$(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'.$$

Теорема 2.2. *Производная произведения двух функций вычисляется по формуле*

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{2.8}$$

Доказательство. $(u \cdot v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$.

Добавим и вычтем в числители одинаковое выражение и перегруппируем слагаемые:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)\cdot v(x)] + [u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)] + v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + v(x)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} =$$

$$= u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x). \ \blacksquare$$

Следствие 1. Формула (2.8) легко обобщается на случай любого конечного числа множителей, например для трех:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Следствие 2. Постоянный множитель выносится за знак производной:

$$(cu)' = cu'. \tag{2.9}$$

Теорема 2.3. *Производная частного двух функций вычисляется по формуле*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ где } v \neq 0. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Пусть $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Для доказательства формулы, сначала прологарифмируем равенство $\ln y(x) = \ln \dfrac{u(x)}{v(x)} = \ln u(x) - \ln v(x)$.

Далее продифференцируем его, заметив, что каждое слагаемое является функцией сложной $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{u'}{u} - \dfrac{v'}{v}$, откуда выразим y', где $y = \dfrac{u}{v}$:
$y' = y\dfrac{u'v - uv'}{uv} = \dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{u'v - uv'}{uv} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. ■

Теорема 2.4. *Пусть функция* $u = u(v)$ *дифференцируема в точке* v_0 *и функция* $v = v(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *где* $v_0 = v(x_0)$, *тогда сложная функция* $u = u(v(x))$, *которая является функцией аргумента* x, *дифференцируема по независимому аргументу* x, *и ее производная в точке* x_0 *равна произведению производной внешней функции* $u = u(v)$ *по промежуточному аргументу* v *на производную внутренней функции* $v = v(x)$ *по независимому аргументу, то есть* $u'(x_0) = u'_v(v_0) \cdot v'_x(x_0)$ *или, короче,*

$$u'(x) = u'_v(v) \cdot v'_x(x). \qquad (2.11)$$

2.4. Таблица производных основных элементарных функций

1. $(c)' = 0$, (c = const).
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in R$; в частности $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; в частности $(e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Примеры. Вычислить производные заданных функций.

1) $y = 4x^5 - 3\sqrt[4]{x} + 2$.

Функция является элементарной, так как составлена из основных элементарных функций с применением арифметических операций над ними, тогда для нахождения производной применим формулы дифференцирования:

а) $(u - v + w)' = u' - v' + w'$;   б) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

в) $(u^{\alpha}) = \alpha \cdot u^{\alpha-1}$;   г) $(c)' = 0$.

$$y' = (4x^5 - 3\sqrt[4]{x} + 2)' = \Big|\ \text{а})\ \Big| = (4x^5)' - (3\sqrt[4]{x})' + (2)' = \Big|\ \text{б})\ \Big| = 4(x^5)' - 3(x^{1/4})' + (2)' =$$

$$= \Big|\ \text{в}),\text{г})\ \Big| = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-3/4} + 0 = 20x^4 - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

2) $y = (x^3 + 4) \cdot (5x - 1)$.

Применим формулу производной произведения двух функций $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ и формулы б) и в) из примера 1.

В нашем случае $u = x^3 + 4,\ v = 5x - 1$.

$$y' = (x^3 + 4)'(5x - 1) + (x^3 + 4)(5x - 1)' = 3x^2 \cdot (5x - 1) + (x^3 + 4) \cdot 5 = 20(x^3 + 1) - 3x^2.$$

3) $y = \dfrac{3x^5}{a^2 - x^4}$.

Воспользуемся формулой производной частного двух функций $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$. В данном примере $u = x^5,\quad v = a^2 - x^4$.

$$y' = 3 \cdot \left(\frac{x^5}{a^2 - x^4}\right)' = 3 \cdot \frac{(x^5)' \cdot (a^2 - x^4) - x^5 \cdot (a^2 - x^4)'}{(a^2 - x^4)^2} = 3 \cdot \frac{5x^4(a^2 - x^4) - x^5(-4x^3)}{(a^2 - x^4)^2} =$$

$$= 3 \cdot \frac{5x^4 a^2 - 5x^8 + 4x^8}{(a^2 - x^4)^2} = 3 \cdot \frac{5x^4 a^2 - x^8}{(a^2 - x^4)^2}.$$

4) $y=\dfrac{\cos(7x)}{x^2}$.

В этом примере необходимо применять формулы дифференцирования частного двух функций и дифференцирования сложной функции (функции от функции), а для такой функции $y=u(v(x))$ производная вычисляется по формуле $u'(x)=u'_v(v)\cdot v'_x(x)$.

$$y'=\frac{(\cos(7x))'x^2-\cos(7x)(x^2)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{-\sin(7x)(7x)'x^2-2x\cos(7x)}{x^4}=$$

$$=\frac{-7x^2\cdot\sin(7x)-2x\cdot\cos(7x)}{x^4}=-\frac{7x\cdot\sin(7x)+2\cdot\cos(7x)}{x^3}.$$

5) $y=\arcsin\sqrt{x-3}$.

По формуле дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=(\arcsin\sqrt{x-3})'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{x-3}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-(x-3)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\cdot(x-3)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\cdot 1=\frac{1}{2\sqrt{(4-x)(x-3)}}.$$

6) $y=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

По формуле дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=\left(2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right)'=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\ln 2\cdot\left(\sin^{-2}x\right)'=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\ln 2\cdot(-2)\cdot\sin^{-3}x\cdot(\sin x)'=$$

$$=-2\cdot\ln 2\cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\sin^{-3}x\cdot\cos x=-2\cdot\ln 2\cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

7) $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}-\sin 2x\right)$.

По формуле дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=\left(\ln\left(\frac{1}{x}-\sin 2x\right)\right)'=\frac{1}{\frac{1}{x}-\sin 2x}\cdot\left(\frac{1}{x}-\sin 2x\right)'=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{x}-\sin 2x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}-2\cos 2x\right)=\frac{x}{x\sin 2x-1}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+2\cos 2x\right)=\frac{1+2x^2\cos 2x}{x^2\sin 2x-x}.$$

8) $y=\ln x\cdot\arcsin\dfrac{1}{1-x}$.

Функция является произведением функций, одна из которых сложная:

$$\left(\ln x\cdot\arcsin\frac{1}{1-x}\right)'=(\ln x)'\cdot\arcsin\frac{1}{1-x}+\ln x\cdot\left(\arcsin\frac{1}{1-x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\arcsin\frac{1}{1-x}+\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}}\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{x}\cdot\arcsin\frac{1}{1-x}+\frac{\ln x\cdot\left((1-x)^{-1}\right)'}{\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)^2}}}=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\arcsin\frac{1}{1-x}+\frac{(1-x)\ln x}{\sqrt{(1-x)^2-1}}\frac{-1\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{x}\cdot\arcsin\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x}\frac{\ln x}{\sqrt{(1-x)^2-1}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется производной функции $f(x)$?
2. Укажите правила дифференцирования элементарных функций.
3. Укажите правила дифференцирования сложной функции.
4. Множество первообразных функции $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{2+x^3}}$ имеет вид:

1. $2\sqrt{2+x^3}+C$.	3. $\sqrt{2+x^3}+C$.
2. $\dfrac{1}{2\sqrt{2+x^3}}+C$.	4. $\ln\left(2+x^3\right)+C$.

5. Установите соответствие между функцией и ее производной:

1. $y=3^x\cdot arctg3x$.	А. $y'=e^x\left(\dfrac{3}{1+9x^2}+arctg3x\right)$.
2. $y=tg3x\cdot e^x$.	Б. $y'=3^x\left(\ln 3\cdot arctg3x+\dfrac{3}{1+9x^2}\right)$.
3. $y=arctg3x\cdot e^x$.	В. $y'=e^x\dfrac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}$.
	Г. $y'=e^x\dfrac{6+\sin 6x}{2\cos^2 3x}$.
	Д. $y'=3^x\left(arctg3x+\dfrac{1}{1+9x^2}\right)$.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

3.1. Определение дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема при некотором значении аргумента x, то есть в точке x существует конечная производная $f'(x)$.

Определение. 3.1. Главную (линейную) часть приращения функции называют *дифференциалом функции* и обозначают dy (или df, $df(x)$).

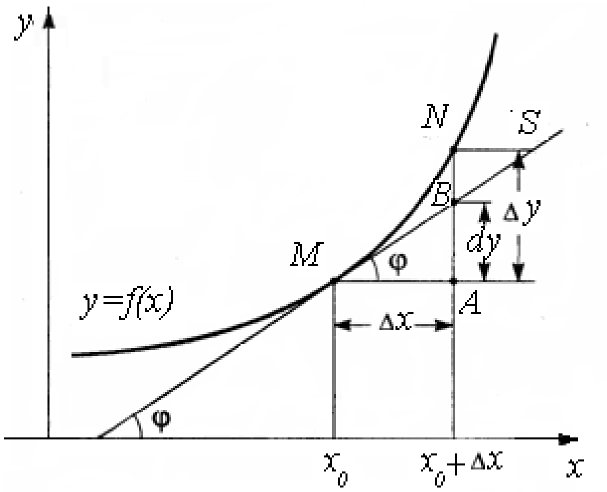


Рис. 11. Связь дифференциала dy и приращения Δy функции

Из рис. 11 видно, что дифференциалом функции является отрезок AB, для определения его длины рассмотрим прямоугольный ΔABM, в котором катет $AB = dy$, катет $AM = \Delta x$ есть приращение аргумента, тогда $tg\varphi = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{dy}{\Delta x}$.

С другой стороны, $tg\varphi = y'(x_0)$.

Приравнивая правые части, получим $\dfrac{dy}{\Delta x} = y'(x_0)$, т. е. $dy = y'(x)\Delta x$, или, что то же самое,

$$dy(x) = y'(x)dx \tag{3.1}$$

(для функции $y=x$ легко убедиться, что дифференциал независимой переменной dx совпадает с ее приращением Δx, поэтому всегда $\Delta x = dx$).

3.2. Свойства дифференциала функции. Таблица дифференциалов основных функций

Перечислим наиболее важные *свойства дифференциала*, знание которых позволит легко научиться вычислять интегралы:

1. Внесение слагаемого под знак дифференциала:

$$dx = d(x + C). \tag{3.2}$$

Очевидно, по формуле (3.1) имеем $d(x+C)=(x+C)'d(x)=dx$.

1) Внесение множителя под знак дифференциала:

$$dx=\frac{1}{k}d(kx). \qquad (3.3)$$

Очевидно, по формуле (3.1) имеем $\frac{1}{k}d(kx)=\frac{1}{k}(kx)'dx=\frac{1}{k}kdx=dx$.

Зная основную формулу дифференциала (3.1) и производные основных элементарных функций, укажем дифференциалы основных функций:

1. $d(c)=0$.

2. $d(x^n)=(x^n)'dx=nx^{n-1}dx$, $n\neq 0$ (в частности $d(x^2)=2xdx$, $d(\sqrt{x})=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$).

3. $d(a^x)=(a^x)'dx=a^x\cdot\ln a\cdot dx$ (в частности $d(e^x)=e^x\cdot dx$).

4. $d(\log_a x)=(\log_a x)'dx=\dfrac{1}{x\ln a}dx$ (в частности $d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$).

5. $d(\sin x)=(\sin x)'dx=\cos xdx$.

6. $d(\cos x)=\ldots=-\sin xdx$.

7. $d(tgx)=(tgx)'dx=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$.

8. $d(ctgx)=\ldots=-\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$.

9. $d(arctgx)=(arctgx)'dx=\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

10. $d(arcctgx)=\ldots=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

11. $d(\arcsin x)=(\arcsin x)'dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

12. $d(\arccos x)=\ldots=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Обучающемуся предлагается самостоятельно заполнить пропущенную часть равенств.

Например. Вынести из под дифференциала функции:

1) $d\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'dx=-\dfrac{1}{x^2}dx$;

2) $d(\sin 10x)=(\sin 10x)'dx=10\cos 10xdx$;

3) $d(arctg8x)=(arctg8x)'dx=\dfrac{8}{1+(8x)^2}dx$.

Полезно уметь выполнять и обратную операцию – операцию внесения функции под знак дифференциала. При этом важно понимать, что формула (3.1), записанная в виде $y'(x)dx = dy(x)$, обозначает, что под дифференциал записывается функция, которая является первообразной для той, которая находится перед дифференциалом dx.

Вычисление первообразных функции в настоящем пособии не рассматривается, считая, что этот материал изучался в школьном курсе математики.

Например. Внести под знак дифференциала функцию.

1) $\left(\dfrac{1}{x}\right)dx = (\ln x)'\,dx = d\ln x$;

2) $(\sin 10x)dx = \left(-\dfrac{\cos 10x}{10}\right)'dx = -\dfrac{1}{10}(\cos 10x)'\,dx = -\dfrac{1}{10}d(\cos 10x)$;

3) $(2x-1)^9\,dx = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{(2x-1)^{10}}{10}\right)'dx = \dfrac{1}{20}\left((2x-1)^{10}\right)'dx = \dfrac{1}{20}d\left((2x-1)^{10}\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Укажите свойства дифференциала функции.
2. Применяя свойства дифференциала, укажите, чему равен дифференциал суммы $d(U(x)+V(x))$ и дифференциал произведения функций $d(U(x)V(x))$.
3. Вынесите функцию из под дифференциала (например, $d\sin^2 x = \sin 2x dx$):

   $d(\sin 4x)$, $d(2x+3)$, $d(2x^2+3)$, $d(x^5)$, $d\left(\sqrt{4+x^2}\right)$, $d(\sqrt{x^3})$, $d(\cos^2 x)$.
4. Внесите функцию под знак дифференциала (например, $\cos 3x dx = \dfrac{d(\sin 3x)}{3}$):

   $\sin 4x dx$, $\dfrac{dx}{2x+3}$, $\dfrac{dx}{x^2}$, $\dfrac{dx}{x^2+9}$, $\dfrac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$, $\dfrac{dx}{\sqrt{x^3}}$, $\sqrt{x^3}dx$, $\sqrt[3]{x^2}dx$.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

4.1. Возрастание и убывание функций

Определение 4.1. Функция $f(x)$ *возрастает* (или *убывает*) на $[a;b]$, если для любых точек x_1, $x_2 \in [a;b]$, где $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (или $f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 4. 1.

1. *Если функция* $f(x)$ *имеет производную на отрезке* $[a;b]$ *и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т. е. для всех* $x \in [a;b]$: $f'(x) \geq 0$.

2. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в интервале* (a, b), *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и на отрезке выполняется условие* $f'(x) > 0$, *то эта функция возрастает на отрезке* $[a, b]$.

Замечание. Аналогично можно сделать вывод о том, что если *убывающая* функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале $(a;b)$, то $f'(x) \leq 0$ на отрезке $[a;b]$.

А если $f'(x) < 0$ в интервале $(a;b)$, то $f(x)$ убывает на отрезке $[a;b]$.

4.2. Точки экстремума

Определение 4.2. Точка x_1 называется точкой *максимума*, если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше значений функции в некоторой окрестности этой точки: $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любом $\Delta x \neq 0$, $|\Delta x| < \delta$, где Δx может быть любого знака.

Аналогично x_2 называется точкой *минимума*, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом $\Delta x \neq 0$, $|\Delta x| < \delta$, где Δx может быть любого знака.

Определение 4.3. Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

Теорема 4. 2. (*Необходимое условие существования экстремума.*)

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна в интервале* $(a;b)$, *который содержит точку* x_0, *и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки* x_0*).*

Пусть точка x_0 *является точкой экстремума, то* $f'(x_0)=0$ *либо* $f'(x_0)$ *не существует*.

Замечание. Обратное утверждение неверно, то есть, если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке x=0 равна нулю, но экстремума в точке нет.

Рассмотренная выше теорема дает нам одно из необходимых условий существования экстремума, которое не является достаточным.

Определение 4.4. *Критическими (особыми)* точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Примером являются функции: $f(x) = |x|$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Первая из них не дифференцируема в точке $x = 0$ (она не гладкая), а вторая имеет производную, которая не определена в нуле.

Теорема 4. 3. (*Достаточные условия существования экстремума.*)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a;b)$, который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с "–" на "+", то в точке x_1 функция имеет минимум.

Замечание. Из теоремы, очевидно, следует, что вторым условием достаточности существования экстремума является изменение знака производной при переходе через точку x_1.

4.3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение 4.5. Кривая называется *выпуклой* в интервале $(a;b)$, если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

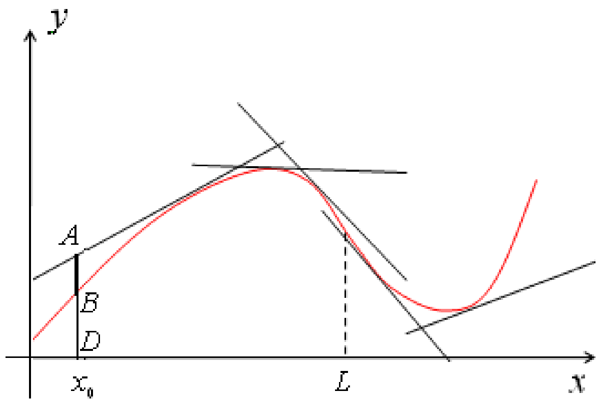


Рис. 12. График функции, имеющей перегиб в точке x=L

Кривая называется *вогнутой* в интервале $(a;b)$, если все ее точки лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

На рис. 12 представлена кривая, которая при $x<L$ выпукла, так как точки кривой находятся ниже проведенных к кривой касательных, и наоборот, вогнута правее точки $x=L$.

Теорема 4.4. *Если во всех точках интервала $(a;b)$ вторая производная функции $f''(x)$ отрицательна (положительна), то кривая $y=f(x)$ выпукла (вогнута) на этом интервале.*

Пример. Определить направление выпуклости кривой $y(x)=\ln x$ с помощью второй производной.

Решение. Вычислим вторую производную: $y''=(\ln x)''=(1/x)'=-1/x^2<0$. Следовательно, логарифмическая функция по основанию e везде на области определения выпуклая.

Определение 4.6. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой части, называется *точкой перегиба*.

Очевидно, что в точке перегиба кривая пересекает касательную. На рис. 12 это точка $x=L$.

Теорема 4.6. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a;b)$, который содержит критическую точку x_0, и дважды дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0).*

Пусть вторая производная $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Если при переходе через точку x_0 меняет знак $f''(x)$, то точка кривой с абсциссой $x=x_0$ является точкой перегиба.

Замечание. Отметим, что ситуация применения первой производной для нахождения точек экстремума полностью аналогична ситуации со второй производной для нахождения точек перегиба (единственное отличие, что по определению точки экстремума лежат на числовой оси Ox, а точки перегиба на графике функции). Поэтому в обоих случаях сначала применяют необходимые условия и находят нули соответствующих производных, потом, расставив знаки производных, проверяют достаточное условие смены знаков производных в особых точках.

Пример. Исследовать кубическую параболу $y(x)=x^3/3-2x^2+3x+1$ с помощью первой и второй производных.

Решение. Исследуем функцию по первой производной: $y'=x^2-4x+3=0$.

По теореме Виета $x_1=1$, $x_2=3$. Расставим знаки производной (в нашем случае для параболы, ветви которой идут вверх), график производной этой функции указан на рис. 13.

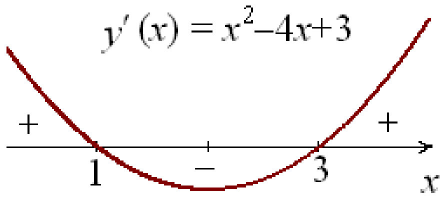


Рис. 13. График производной функции $y(x)=x^3/3-2x^2+3x+1$

Следовательно, исследуемая кубическая парабола убывает при $x\in(1,3)$ и возрастает при $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, тогда

$$x_{\max} = 1,\ f_{\max} = f(1) = 2\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad x_{\min} = 3,\ f_{\min} = f(3) = 1.$$

Экстремумами являются точки $A_1(1;2\frac{1}{3})$, $A_2(3;1)$.

Исследуем функцию по второй производной: $y'' = (x^2-4x+3)'=2x-4=0$, тогда $x=2$, причем $y''<0$ при $x<2$ и $y''>0$ при $x>2$, значение функции в точке $f(2) = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, т. е. в точке $B(2;1\frac{2}{3})$ есть перегиб. Схематический график кубической параболы проиллюстрирован на рис. 14.

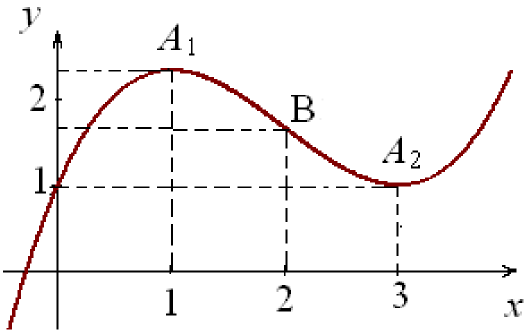


Рис. 14. График функции кубической параболы $y(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x + 1$

4.4. Асимптоты

Функция имеет асимптоту, если при стремлении аргумента функции $x \to x_0$, где $x_0 < \infty$ или $x_0 = \infty$, сама кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение 4.7. Прямая называется *асимптотой*, если кратчайшее расстояние от переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю при $x \to x_0$, где x_0 конечное или бесконечное число.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту.

Асимптоты можно классифицировать. Асимптоты бывают вертикальные (в точках разрыва функции) и наклонные. Частным случаем наклонных асимптот являются горизонтальные асимптоты. Исследование функций на асимптотическое поведение имеет большое значение и при наличии асимптот позволяет более точно определить характер поведения функции, что упрощает построение графика кривой.

На рис. 15 показаны вертикальная, наклонная и горизонтальные асимптоты соответственно.

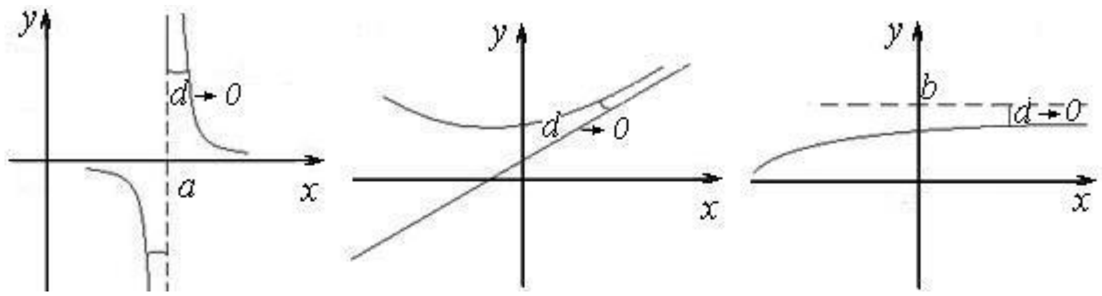


Рис. 15. Иллюстрация функций, имеющих асимптоты

4.5. Общая схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и построения ее графика предлагается руководствоваться следующим планом исследования:

1) найти область определения и область значения функции;
2) установить четность, нечетность, периодичность функций, найти точки пересечения с осями;
3) определить точки экстремума функции, промежутки возрастания и убывания функции;
4) определить точки перегиба функции, промежутки выпуклости и вогнутости функции;
5) составить таблицу по всем особым точкам функции, к которым относят все точки, в которых обращаются в ноль или не определены производные (см. особые точки п. 3 и п. 4);
6) построить график по таблице.

Пример 1. Исследовать функцию $y = x^3 + 3x^2$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции, которая есть многочлен, является вся числовая ось $(-\infty; \infty)$.
2. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

   с осью Oy (при x=0): $y(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow A(0;0)$;

   с осью Ox (при y =0): $0 = x^3 + 3x^2 \Rightarrow 0 = x^2(x+3) \Rightarrow A(0;0)$ и $B(-3;0)$.

   Функция не периодическая, т. к. не содержит тригонометрических функций.
   Функция не является ни четной, ни нечетной:

   $y(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$, т. е. $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$.
3. Найдем точки возможного экстремума функции, определив, при каких x обращается в ноль или не определена первая производная функции:

$$y'(x) = \left(x^3 + 3x^2\right)' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2),$$

тогда $y'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = -2$.

Проверять достаточное условие смены знака первой производной в полученных точках можно в данном пункте, либо эту проверку можно выполнить при заполнении таблицы далее в п. 6.

4. Найдем точки возможного перегиба функции, определив, при каких x обращается в ноль или не определена вторая производная функции:

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(3x^2 + 6x\right)' = 6x + 6 = 6(x+1),$$

$$\text{тогда} \quad y''(x) = 0 \ \text{при} \quad x = -1.$$

Проверять достаточное условие смены знака второй производной в полученных точках можно в данном пункте, либо тоже выполнить эту проверку при заполнении таблицы далее в п. 6.

5. Составим таблицу, в которую будут включены все критические точки производных: $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$. Далее в найденных точках (в самой таблице) будут проверены достаточные условия существования точек перегиба и экстремума – условия смены знаков у производных $y'(x)$ и $y''(x)$. В последней строке таблицы вычисляем значения функции в критических точках.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; \infty)$
$y'(x)$	$y'(-3) > 0$	0	$y'(-3/2) < 0$			0	$y'(1) > 0$
	$\nearrow$	max	$\searrow$			min	$\nearrow$
$y''(x)$	$y''(-3) < 0$			0	$y''(1) > 0$		
	$\frown$			перегиб	$\smile$		
$y(x)$		$y(-2)=4$ $D(-2;4)$		$y(-1)=2$ $C(-1;2)$		$y(0)=0$ $A(0;0)$	

6. Для построения графика (рис. 16):

- укажем в системе координат все точки, определенные в п. 2 и п. 5.;
- на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ и $(0; \infty)$ построим график функции, руководствуясь таблицей и точками графика $A(0;0)$, $B(-3;0)$, $C(-1;2)$, $D(-2;4)$.

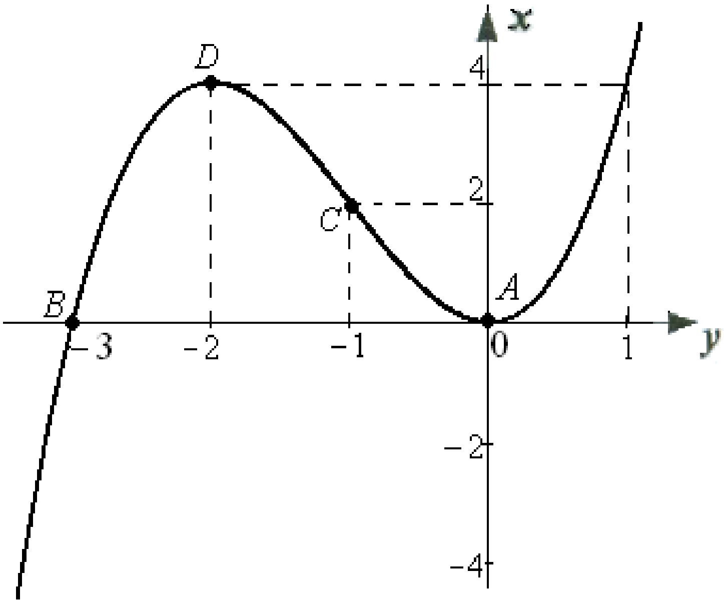


Рис. 16. График функции $y = x^3 + 3x^2$

Пример 2. Исследовать функцию $y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции является вся числовая ось $(-\infty; \infty)$, т. к. каждое слагаемое определено при любом значении аргумента.
2. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

   с осью *Oy* (при *x*=0): $y(0) = 0 + 3\sqrt[3]{0^2} = 0 \Rightarrow \; A(0;0)$;

   с осью *Ox* (при *y*=0): $0 = x + 3\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow 0 = \sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + 3) \Rightarrow A(0;0)$ и $B(-27;0)$.

   Функция не периодическая, т. к. не содержит тригонометрических функций.
   Функция не является ни четной, ни нечетной:

   $y(-x) = (-x) + 3\sqrt[3]{(-x)^2} = -x + 3\sqrt[3]{x^2}$, т. е. $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$.
3. Найдем точки возможного экстремума функции, определив, при каких x обращается в ноль или не определена первая производная функции:

$$y'(x) = \left(x + 3\sqrt[3]{x^2}\right)' = 1 + 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}},$$

тогда $y'(x) = 0$ при $x = -8$ и $y'(x) = 0$ не определена при $x = 0$.

Проверим достаточное условие для последующего заполнения таблицы, определим знаки производной $y'(x)$, они указаны на рис. 17:

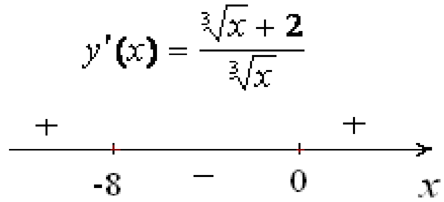


Рис. 17. Знаки производной $y'(x)$ функции $y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$

По смене знаков производной $y'(x)$, очевидно, что в точке $x=-8$ функция имеет максимум, а в точке $x=0$ функция имеет минимум (хотя производная не определена, но функция в этой точке вычисляется – в этой точке функция имеет "излом").

4. Найдем точки возможного перегиба функции, определив, при каких x обращается в ноль или не определена вторая производная функции:

$$y''(x)=\left(1+2x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}},$$

тогда $y''(x)\neq 0$ ни при каких x и не определена при $x=0$.

Проверим достаточное условие смены знаков $y''(x)$ для последующего заполнения таблицы, знаки производной указаны на рис. 18:

$$y''(x)=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

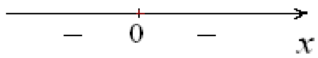


Рис. 18. Знаки производной $y''(x)$ функции $y=x+3\sqrt[3]{x^2}$

В точке $x=0$ вторая производная не определена, но знак не меняет, т. к. знак на всей числовой оси "минус", то перегибов нет и функция везде выпукла.

6. Составим таблицу, в которую будут включены все особые точки: $x=-8$, $x=0$, в которых уже проверены достаточные условия существования перегиба и экстремума. В последней строке таблицы вычисляем значения функции в особых точках.

χ	$(-\infty;-8)$	-8	$(-8;0)$	0	$(0;+\infty)$
$y'(x)$	↗	0	↘	0	↗
$y''(x)$	∩		∩	-	∩
$y(x)$		$y(-8)=4$ $C(-8;4)$		$y(0)=0$ $A(0;0)$	

7. Для построения графика:
   - отметим на плоскости xOy все точки, определенные в п. 2 и п. 6;

- на каждом из промежутков $(-\infty;-8)$, $(-8;0)$ и $(0;+\infty)$ построим график функции, руководствуясь таблицей и точками графика $A(0;0)$, $B(-27;0)$, $C(-8;4)$.

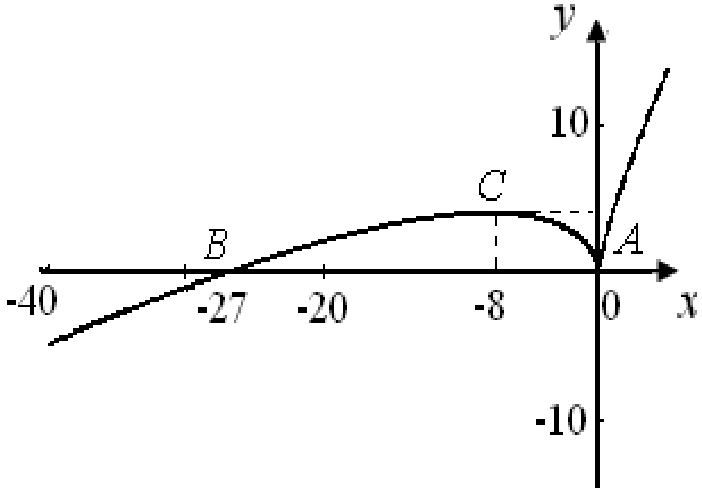


Рис. 19. График функции $y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется точкой максимума и точкой минимума функции?
2. Что называется точкой перегиба функции?
3. Какая функция является выпуклой в точке, выпуклой в интервале?
4. Укажите необходимое условие существования экстремума функции в точке.
5. Укажите достаточное условие существования экстремума функции в точке.
6. Укажите условия существования перегиба функции в точке.
7. Установите соответствие между производными функций и количеством точек экстремума:

1. $f'(x) = 27 - x^3$.	А. 0.
2. $f'(x) = 25 - x$.	Б. 1.
3. $f'(x) = 25x^2$.	В. 2.

8. Определить точки экстремума функции $y(x) = (x+2)e^{2x-1}$, указать интервалы возрастания и убывания функции.
9. Определить точки перегиба функции $y(x) = (2x+1)e^{3x}$, указать интервалы выпуклости и вогнутости функции.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ “ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ”

Задача 1. Продифференцировать функции.

1.	a) $y=\dfrac{x^3-6\sqrt[3]{x^2}+7}{3x}$; b) $y=(\ln 2x+1)\cdot e^x$; c) $y=(x-1)/(\cos x-1)$; d) $y=1/tg^2 3x$; e) $y=\arcsin(2/x)$.	2.	a) $y=\dfrac{12\sqrt[4]{x^3}-x^2-1}{2x}$; b) $y=\ln 3x\cdot(e^{2x}-1)$; c) $y=4\sin x/(3x-1)$; d) $y=1/\sqrt{x^2+1}$; e) $y=2arctg(x/\sqrt{2})$.
3.	a) $y=(3-3x+x^3)/2\sqrt{x}$; b) $y=e^{-2x}(4-\sin x)$; c) $y=2\cos x/(5x+2)$; d) $y=6\sqrt[3]{(2x-3)^2}$; e) $y=\arcsin(x+1)$.	4.	a) $y=(3x^2+6\sqrt[3]{x-2})/x^2$; b) $y=(2x+e^{-x})\ln(x-3)$; c) $y=3ctg/(6x+3)$; d) $y=4/\sqrt{3+4x}$; e) $y=arctg(3x-2)$.
5.	a) $y=\dfrac{(2x+1)^2}{3\sqrt{x}}$; b) $y=(\ln 7x+1)\cdot e^{3x}$; c) $y=4\sin x/(x^2+2)$; d) $y=\sqrt[3]{x^2-x+1}$; e) $y=\arccos x^2$.	6.	a) $y=\dfrac{8\sqrt[4]{x}-x^3+x}{2x^3}$; b) $y=\log_2 3x\cdot(e^{2x-1}-5)$; c) $y=e^x/\sqrt{16x^3}$; d) $y=5\sin(\sqrt{x}-1)$; e) $y=arctg\,4x^2$.
7.	a) $y=\dfrac{x^4-4\sqrt{x}+1}{(6x)^2}$; b) $y=(2-\log_2 x)\cdot e^{-3x}$; c) $y=2\cos x/(2x+3)$; d) $y=6\sqrt[3]{x^3-3x+6}$; e) $y=2\arcsin(x/2)$.	8.	a) $y=\dfrac{6-6\sqrt[3]{x^2}+x^2}{2\sqrt{x}}$; b) $y=\cos 5x\cdot(3-e^{x^2})$; c) $y=3tgx/(x^2-3x)$; d) $y=1/\sqrt{3x^2+6x}$; e) $y=\arccos(2x-1)$.

9.	a) $y=(x+8\sqrt[4]{x^3}-x^2)/2x^3$; b) $y=e^{2x-5}\cdot(\ln x-3)$; c) $y=\frac{1}{3}\sin x/(x^3+6)$; d) $y=4/\sqrt{1-4x^2}$; e) $y=arctg(-x^4)$.	10.	a) $y=(5-4\sqrt[4]{x^3}+3x^2)/4x$; b) $y=\ln(2x^2-1)\cdot e^{2x^2}$; c) $y=5ctgx/\sqrt[3]{x^5}$; d) $y=\sqrt[7]{(2x^2-6)^2}$; e) $y=4\arcsin(1-x^2)$.
11.	a) $y=\frac{\sqrt{2x}+2x-1/x}{\sqrt[3]{x}}$; b) $y=(e^{\sin x}-2)\ln x$; c) $y=\cos x/(4x^2-3)$; d) $y=20\sqrt[5]{x^4+3x^2}$; e) $y=arctg\,\frac{3}{x}$.	12.	a) $y=\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2}+x^2}{x^3}$; b) $y=(e^{-3x}-2)\ln(x^2+1)$; c) $y=5tgx/(4-2x^3)$; d) $y=1/\sqrt[4]{6-3x+x^2}$; e) $y=\frac{1}{4}\arccos 4x^2$.
13.	a) $y=\frac{1+x^2+\sqrt{x^5}}{\sqrt[3]{x}}$; b) $y=(e^x-2)\ln(x^3+1)$; c) $y=x/\sqrt{\sin 2x}$; d) $y=\sqrt[7]{14x+2x^7}$; e) $y=arctge^x$.	14.	a) $y=\frac{6x^2-x^3+2}{6\sqrt[3]{x^2}}$; b) $y=e^{2x-3}\cdot\ln(2x^2-1)$; c) $y=0{,}5\cos x/(4x-x^2)$; d) $y=1/\sqrt[3]{3x^2+5x}$; e) $y=\arcsin(1-3x)$.
15.	a) $y=\frac{2x+10\sqrt[3]{x^2}-3x^3}{3\sqrt{x^7}}$; b) $y=(e^{\sin x}-2)\ln x$; c) $y=5\cos x/x^2$; d) $y=6\sqrt{(x^2-6x+1)^3}$; e) $y=\arcsin(1-2x^2)$.	16.	a) $y=\frac{2x^2-3x^5+7}{\sqrt[4]{x}}$; b) $y=(e^{x^2}+x^2)\ln(1-2x)$; c) $y=4tg(2x+1)/x^2$; d) $y=\frac{1}{\sqrt{(1+2x-3x^2)^5}}$; e) $y=arctg(2-3x)$.

17.	a) $y=\dfrac{x-4x^2-5\sqrt[5]{3x^2}}{6\sqrt{x}}$; b) $y=e^{1-3x}\ln(1-2x^2)$; c) $y=\cos x/(2x-7)^2$; d) $y=1/\sqrt{1-e^{2x}}$; e) $y=\arccos(1/x^2)$.	18.	a) $y=\dfrac{x^5+6x-10\sqrt{x}}{(2x)^4}$; b) $y=(4x-e^{-8x})\ln(5x-1)$; c) $y=\ln x/(x\cos x)$; d) $y=6\sqrt[4]{(x^3-3x)^3}$; e) $y=arctg(4/x)$.
19.	a) $y=\dfrac{x-5x^4+30\sqrt[3]{x^4}}{15\sqrt[5]{x}}$; b) $y=e^{3x}(\ln x-3x)$; c) $y=\cos x/(tg9x)$; d) $y=\sqrt[3]{\sin^2 x+4}$; e) $y=\arccos x^3$.	20.	a) $y=\dfrac{4x-x^7+1}{9\sqrt[3]{x}}$; b) $y=e^{1-x^2}\ln x$; c) $y=\ln x/(x\sin x)$; d) $y=1/\sqrt{1-\sqrt{x}}$; e) $y=\arcsin(1+x^4)$.
21.	a) $y=\dfrac{x^4-x^3-20\sqrt[5]{x^4}}{4\sqrt{x}}$; b) $y=(e^{-3x}+x^3)\ln(\sqrt[3]{x^4}-3x)$; c) $y=\sin(e^x)/2e^x$; d) $y=\sqrt{4\sqrt{x}+x^2}$; e) $y=5arctg6x^3$.	22.	a) $y=\dfrac{1-6\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{6x}}{x^2}$; b) $y=(e^{\sqrt{x}}+\sqrt{x})(\ln\sqrt{x}-x)$; c) $y=\ln x/(x^2\cos x)$; d) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+5x^2}}$; e) $y=\arcsin(2x+1)$.
23.	a) $y=\dfrac{4+\sqrt[5]{5x^4}-x^4}{6\sqrt[3]{x}}$; b) $y=x^2\cos(3x)$; c) $y=\ln x/(x^2)$; d) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{6-\sqrt{x}}}$; e) $y=\arcsin(1/2x)$.	24.	a) $y=\dfrac{x^2+12\sqrt[4]{x}-6\sqrt[3]{x}}{3x^4}$; b) $y=(e^x-x^2)\ln(1-x)$; c) $y=\dfrac{\cos 3x}{2\sin x}$; d) $y=\sqrt{6-\sqrt{4x^4}}$; e) $y=8\arccos 3x^2$.

25.	a) $y=(6x^2-2x^6+2)/(6\sqrt[3]{x})$; b) $y=\left(2x^6-e^{4x}\right)\ln\left(1-4x\right)$; c) $y=tg\left(e^{-x}\right)/e^x$; d) $y=\sqrt[3]{4x^3-e^{3x}}$; e) $y=arctg\left(1/x^2\right)$.	26.	a) $y=\dfrac{10\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt{x^2}+x}{3x^3}$; b) $y=e^{2x}\ln\left(x^2+8\right)$; c) $y=\ln\left(\cos 4x\right)/\left(\cos 4x\right)$; d) $y=1/\sqrt{x^2-e^{x^2}}$; e) $y=\arcsin\sqrt{x}$.
27.	a) $y=\dfrac{16-x^4+\sqrt[4]{x}}{12\sqrt{x^5}}$; b) $y=e^{x^2+2}\ln 5x$; c) $y=\cos\left(e^{2x}\right)/e^x$; d) $y=\sqrt[3]{e^{x^2}+x^2}$; e) $y=arctg 5\sqrt{x}$.	28.	a) $y=\dfrac{4+8\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\left(2x^2\right)^2}$; b) $y=\left(4x^2-e^{-x}\right)\ln 3x$; c) $y=\sin x/\left(e^{3x-1}\right)$; d) $y=1/\sqrt[4]{\left(1-e^x\right)^2}$; e) $y=\arcsin\left(x/\left(1+x\right)\right)$.
29.	a) $y=\dfrac{10x^2-5\sqrt[3]{x^2}-x}{\sqrt{5x}}$; b) $y=\left(4-e^{-4x}\right)\ln\left(4x^3+1\right)$; c) $y=\ln\left(4-5x\right)/\sqrt{\left(4-5x\right)^3}$; d) $y=\sqrt{1+1/x-x}$; e) $y=\arcsin 4\sqrt{x}$.	30.	a) $y=\dfrac{14\sqrt[7]{x^2}-3x^2+9x^5}{\left(3x^3\right)^2}$; b) $y=\left(15x-3e^{5x}\right)\ln\left(15-5x\right)$; c) $y=\cos x^5/\left(15\sin x^3\right)$; d) $y=1/\sqrt{x+2\sqrt{x}}$; e) $y=\arccos\sqrt[3]{x^2}$.

Задача 2. Провести полное исследование и построить графики функций.

1.	a) $y = x-5\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = 13x^2-x^4-36$.	2.	a) $y = -x+5\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = 5x^2-x^4-6$.
3.	a) $y = 4x-2\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = x^4-3x^2+4$.	4.	a) $y = 2x+4\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = x^5-x^3-2$.

5.	a) $y = x + 2\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = x^2 + 2x^3$.	6.	a) $y = ln(x^2+1)$; b) $y = x^5 + 12x$.
7.	a) $y = (x-2)\cdot e^{3-x}$; b) $y = 3((x^4/2) - x^2)$.	8.	a) $y = 3x + 5\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = 1 - x^2 + x^4/8$.
9.	a) $y = -2x + 5\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = 16x\cdot(x-1)^3$.	10.	a) $y = 5x - 2\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = x^3\cdot(1-x^2)$.
11.	a) $y = -4x + 3\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = (x^4/4) - 2x^2$.	12.	a) $y = -3x - 4\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = (x^3)/3 + x^2$.
13.	a) $y = (x+1)\cdot e^{-2x}$; b) $y = x^3\cdot(x+2)$.	14.	a) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = x^2\cdot(1-x)$.
15.	a) $y = 2 + x\cdot e^{x+2}$; b) $y = 1 - 2x^3 - x^4/4$.	16.	a) $y = (x+4)\cdot e^{2x}$; b) $y = 4x^2 - x^3/3$.
17.	a) $y = e^{-x^2}$; b) $y = 4x - x^3/3$.	18.	a) $y = e^{2x-x^2}$; b) $y = x^4 - 2x^2 - 8$.
19.	a) $y = e^x - e^{-x}$; b) $y = x^2\cdot(5-x^2)$.	20.	a) $y = e^x + e^{-x}$; b) $y = x^4 - 8x^2 - 9$.
21.	a) $y = 3x + 4\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = (x^3)/3 - x^2 - 3x$.	22.	a) $y = 5x + \sqrt[3]{x^2}$; b) $y = x^4 - 10x^2 + 9$.
23.	a) $y = 2x + 6\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = x^4/4 - x^3$.	24.	a) $y = -x + 3\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = (x-2)\cdot(x-3)^2$.
25.	a) $y = ln(2x^2+3)$; b) $y = x\cdot(x^2-1)^3$.	26.	a) $y = ln(x^2+4)$; b) $y = 2x^2 - x^4$.
27.	a) $y = x\cdot e^x$; b) $y = 2x^3 - 3x^2$.	28.	a) $y = -6x + 2\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = x^2 + x^3/3 - x^4/4$.
29.	a) $y = ln(x^2+4)$; b) $y = (x+4)^2\cdot(x-5)$.	30.	a) $y = 2x + \sqrt[3]{x^2}$; b) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$.

Задача 3. Составить уравнение касательной и нормали к графику данной функции в точке с абсциссой $x = x_0$.

1.	$y = \dfrac{x - x^2}{2}$, $x_0 = 2$.	2.	$y = 12\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x} + 1$, $x_0 = 1$.
3.	$y = \dfrac{x^6 + 6}{x^4 + 4}$, $x_0 = -1$.	4.	$y = 2x - \left(1/\sqrt[3]{x}\right)$, $x_0 = 1$.
5.	$y = 2\sqrt{x^3} + 5x - 2$, $x_0 = 2$.	6.	$y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)$, $x_0 = 1$.
7.	$y = 2x + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$.	8.	$y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $x_0 = 4$.
9.	$y = \dfrac{x + 9}{1 - x^3}$, $x_0 = 2$.	10.	$y = \dfrac{x^3 + 3}{1 + 3x}$, $x_0 = 1$.
11.	$y = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$, $x_0 = 64$.	12.	$y = \dfrac{x + 8}{1 - 9x}$, $x_0 = 1$.
13.	$y = 2\sqrt{x^3} + x$, $x_0 = 1$.	14.	$y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 1}$, $x_0 = -2$.
15.	$y = 5\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$.	16.	$y = 2x - \sqrt[5]{x^3}$, $x_0 = -1$.
17.	$y = \dfrac{x}{2x^2 + 1}$, $x_0 = -1$.	18.	$y = 4\sqrt[4]{x} - 10$, $x_0 = 16$.
19.	$y = \dfrac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$, $x_0 = 2$.	20.	$y = \dfrac{2x^3 - x}{3}$, $x_0 = 1$.
21.	$y = \dfrac{x^3 - 3x + 6}{x}$, $x_0 = 2$.	22.	$y = \sqrt[3]{3x^2} - 3x + 2$, $x_0 = 1$.
23.	$y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{x}$, $x_0 = 4$.	24.	$y = 5\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.
25.	$y = x^3 - 2\sqrt{x} - 32$, $x_0 = 1$.	26.	$y = 2\left(\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x}\right)$, $x_0 = 1$.
27.	$y = 2\sqrt[3]{x^2} - 10$, $x_0 = -8$.	28.	$y = \dfrac{x^2 + 2}{2x}$, $x_0 = -8$.
29.	$y = \dfrac{1}{2 + 5x}$, $x_0 = 2$.	30.	$y = \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{3}{x}$, $x_0 = -2$.

§ 5 . НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. Понятие неопределенного интеграла, его свойства

Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Для функции $f(x)$ существует бесконечное множество первообразных, которые отличаются на произвольную постоянную величину C (константу). Действительно, $\left(F(x)+C\right)'=\left(F(x)\right)'$, то $\left(F(x)+C\right)$ тоже является первообразной для $f(x)$.

Определение 5.1. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$, т. е.

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{5.1}$$

Нахождение неопределенного интеграла функции является операцией обратной дифференцированию, поэтому основные формулы интегрирования получаются обращением формул дифференцирования.

Свойства неопределенного интеграла

1. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:
$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx. \tag{5.2}$$
2. Постоянный множитель выносится за знак неопределённого интеграла:
$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k\neq 0 \text{ – const}). \tag{5.3}$$
3. Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого:
$$\int df(x)=f(x)+C. \tag{5.4}$$
4. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:
$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$
5. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:
$$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx.$$

5.2. Таблица интегралов основных элементарных функций

Нахождение неопределенного интеграла – это задача нахождения первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача, а в некоторых случаях не решаемая. В рассматриваемом параграфе рассматривается вычисление неопределенных интегралов для функций из таблицы производных. Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальных таблицах интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Таблица интегралов легко составляется по таблице производных основных элементарных функций (п. 2.4), т. к. интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными операциями.

Например, $(\sin x)' = \cos x$, т. е. функция $\cos x$ есть производная от функции $\sin x$. А значит, в обратную сторону, $\sin x$ есть первообразная для $\cos x$, что и обозначают $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Повторяя аналогичные рассуждения: $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, т. е. дробь $\frac{1}{\cos^2 x}$ есть производная от функции tgx. В обратную сторону: tgx есть первообразная для дроби $\frac{1}{\cos^2 x}$, что и обозначают $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

Так как $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, т. е. дробь $\frac{1}{1+x^2}$ есть производная от функции $arctgx$. В обратную сторону: $arctgx$ есть первообразная для дроби $\frac{1}{1+x^2}$, что и обозначают $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Повторяя рассуждения дальше по таблице производных, можно составить следующую таблицу неопределенных интегралов основных элементарных функций:

1. $\int 1 dx = \int dx = x + C.$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Замечание. Указанные формулы инвариантны относительно переменной интегрирования, т. е. остаются справедливыми, если переменную x заменить любой другой переменной или дифференцируемой функцией $x = u(t)$:

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \cos t dt = \sin t + C;$$
$$\int \cos e^x de^x = \sin e^x + C;$$
$$\int \cos \sqrt[3]{x} d\sqrt[3]{x} = \sin \sqrt[3]{x} + C;$$
$$\int \cos(\sin x + 3) d(\sin x + 3) = \sin(\sin x + 3) + C.$$

Чтобы научиться эффективно применять свойство инвариантности переменной интегрирования, нужно хорошо уметь работать с дифференциалом функции (§3, п. 3.2), т. е. знать таблицу дифференциалов и свойства дифференциалов.

Например, $\int \cos(\sin x + 3)\cos x dx$, который уже вычислен в замечании к таблице интегралов, но в такой форме записи не кажется легко вычисляемым интегралом. Его можно вычислить, если заметить, что $\cos x dx = d(\sin x)$, а используя свойство дифференциала о внесении слагаемого под знак дифференциала, получим $d(\sin x) = d(\sin x + 3)$, итак:

$$\int \cos(\sin x + 3)\cos x dx = \int \cos(\sin x + 3) d(\sin x) =$$

$$= \int \cos(\sin x + 3) d(\sin x + 3) = \sin(\sin x + 3) + C.$$

Аналогично можно вычислить интеграл $\int \frac{\cos \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ (он тоже вычислен в замечании об инвариантности таблицы интегралов), если заметить, что $\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3d\left(\sqrt[3]{x}\right)$, т. е. $\int \frac{\cos \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \cos \sqrt[3]{x} 3d\sqrt[3]{x} = 3\int \cos \sqrt[3]{x} d\sqrt[3]{x} = 3\sin \sqrt[3]{x} + C$.

5.3. Непосредственное интегрирование

Интегрирование, основанное на прямом использовании таблицы интегралов и свойствах неопределенного интеграла, называется непосредственным интегрированием.

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие правила нахождения производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах дифференцирования и знания таблицы производных, всегда приводили к результату, то при нахождении первообразной, опираясь на знания правил дифференцирования и таблицы интегралов, положительный итог решения не всегда гарантирован. Это обусловлено тем, что есть просто не вычисляемые интегралы либо неправильно выбранный способ решения.

Труднее всего сориентироваться в том, какое преобразование необходимо применить к функции, чтобы получить результат. Главным помощником в этом случае, конечно, является знание таблицы и правил интегрирования, но также необходимо знание основных приемов интегрирования для разных классов функций.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Очень мало функций, для которых возможно, выполняя простейшие преобразования в подынтегральном выражении, найти первообразную среди табличных интегралов. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные в последующих главах пособия, – это замена переменной и интегрирование по частям.

Укажем несколько примеров непосредственного интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{3x^3 - 2\sqrt{x^3} + 2}{x}dx$.

Применяя свойства интеграла 1, 2 и формулы 2 и 3 таблицы интегралов, получим

$$\int \frac{3x^3 - 2\sqrt{x^3} + 2}{x}dx = \int\left(3x^2 - 2x^{\frac{3}{2}-1} + \frac{2}{x}\right)dx = 3\int x^2 dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + 2\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\ln|x| + C = x^3 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\ln|x| + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{5^{x+2}}{4^{x+1}}dx$.

$$\int \frac{5^{x+2}}{4^{x+1}}dx = \frac{25}{4}\int \frac{5^x}{4^x}dx = \frac{25}{4}\int \left(\frac{5}{4}\right)^x dx = \frac{25}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln\frac{5}{4}} + C = -\frac{1}{(\ln 0.8)}\frac{5^{x+2}}{4^{x+1}} + C.$$

При нахождении интеграла использовалась формула 4 таблицы интегралов.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{(x^2 + 1 - x^2)}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx - \int \frac{x^2}{x^2(x^2+1)}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - arctgx + C.$$

5.4. Замена переменной в неопределенном интеграле

Если $\int f(x)dx$ нельзя найти непосредственно, используя свойства и таблицу интегралов, то подынтегральное выражение преобразуют заменой переменной.

Целью преобразования “замена переменной” является *упрощение* подынтегрального выражения. В зависимости от вида функции уже имеется наработанный набор положительно работающих замен, которые всегда приводят к положительному результату.

Итак, замену можно сделать двумя способами – либо переменную x заменяют функцией, зависящей от другой переменной ($x = \varphi(t)$), либо какое-нибудь выражение, зависящее от x, считают новой переменной $\psi(x) = t$:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ (\psi(x) = t) \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (5.5)$$

Оба пути решения ведут, как правило, к упрощению подынтегрального выражения, чтобы полученный интеграл стал табличным или раскладывался на сумму табличных. После вычисления полученного интеграла необходимо вернуться к старой переменной.

Замечание. В формуле (5.5) содержится выражение $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Именно благодаря этому произведению метод замены переменной особенно легко применяется в том случае, если в подынтегральном выражении присутствуют некоторая функция $\varphi(t)$ (которая может являться частью другой функции $f(\varphi(t))$) и ее производная $\varphi'(t)$, которая тоже является множителем в подынтегральном выражении, то ее (функцию $\varphi(t)$) и обозначают за новую переменную.

Рассмотрим примеры:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) \quad = |x = \varphi(t)| = \int f(x)dx;$$

$$\int \sqrt{tgt}\,\frac{1}{\cos^2 t}dt \quad = \int \sqrt{tgt}\,dtgt \quad = |x = tgt| = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2(tgt)^{\frac{3}{2}}}{3} + C;$$

$$\int \sqrt{\ln t}\,\frac{1}{t}dt \quad = \int \sqrt{\ln t}\,d(\ln t) \quad = |x = \ln t| = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2(\ln t)^{\frac{3}{2}}}{3} + C;$$

$$\int (\ln t)^7 \frac{1}{t}dt \quad = \int (\ln t)^7 d(\ln t) \quad = |x = \ln t| = \int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C = \frac{(\ln t)^8}{8} + C;$$

$$\int (\sin t)^7 \cos t dt \quad = \int (\sin t)^7 d(\sin t) \quad = |x = \sin t| = \int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C = \frac{(\sin t)^8}{8} + C;$$

$$\int (\sin t)^3 \cos t dt \quad = \int (\sin t)^3 d(\sin t) = \quad |x = \sin t| = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C = \frac{(\sin t)^4}{4} + C.$$

Рассмотрим примеры произвольного вида, где применение замены переменной дает положительный результат.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Заметим, что $\int \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int \frac{1}{\ln^3 x}\frac{1}{x}dx = \int \ln^{-3} x \underbrace{(\ln x)' dx}_{(f(x))' dx = df(x)} = \int \ln^{-3} x d(\ln x)$.

Подынтегральное выражение выражается через функцию $t = \ln x$ и ее производную, тогда получим интеграл $\int \ln^{-3} x d(\ln x) = \int t^{-3}dt$, который имеется среди табличных интегралов: $\int t^{-3}dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2t^2} + C$.

Далее выполним обратную замену переменных: $-\frac{1}{2t^2} + C = |t = \ln x| = -\frac{1}{2\ln^2 x} + C$.

Итак, коротко получим: $\int \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int \frac{1}{\ln^3 x}\frac{1}{x}dx = \int \ln^{-3} x d(\ln x) =$

$$= \left| \begin{matrix} \text{замена} \\ \ln x = t \end{matrix} \right| = \int t^{-3}dt = \frac{1}{-2t^2} + C = \left| \begin{matrix} \text{обратная замена} \\ t = \ln x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2\ln^2 x} + C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int x^8 \cdot \sqrt[3]{5-7x^9}\,dx$.

Здесь можно обозначить через новую переменную t подкоренное выражение, т. к. его производная $\left(5-7x^9\right)' = -63x^8$, с точностью до множителя (-63), является множителем подынтегрального выражения, т. е.

$$\int \sqrt[3]{5-7x^9}\cdot x^8 dx = \left| \begin{array}{l} t = 5-7x^9 \Rightarrow \\ dt = d(5-7x^9) = -63x^8 dx \\ \Rightarrow x^8 dx = -\dfrac{dt}{63} \end{array} \right| = \int t^{\frac{1}{3}}\left(\frac{dt}{-63}\right) = -\frac{1}{63}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{t^{\frac{4}{3}}}{84} + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обратная замена} \\ t = 5-7x^9 \end{array} \right| = -\frac{1}{84}\sqrt[3]{\left(5-7x^9\right)^4} + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx.$

Здесь можно обозначить через новую переменную выражение $t = x^2+1$, т. к. его производная $\left(x^2+1\right)' = 2x$, с точностью до множителя, является множителем в подынтегральном выражении, т. е.

$$\int (x^2+1)^{\frac{3}{2}} x dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = dt/2 \end{array} \right| = \int t^{\frac{3}{2}}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + C.$$

Укажем еще один способ вычисления этого же интеграла $\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx$. Как было сказано ранее, замена применяется с целью упрощения подынтегрального выражения – избавимся от иррациональности $\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} = t$, тогда $x = \sqrt{t^2-1}$, а $dx = d\sqrt{t^2-1} = \left(\sqrt{t^2-1}\right)' dt = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$.

Выполним подстановку:

$$\int x\left((x^2+1)^{1/2}\right)^3 dx = \left| \begin{array}{l} t = \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \\ x = \sqrt{t^2-1} \\ dx = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t^2-1}\cdot t^3 \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обратная замена} \\ t = \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right| = \frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}{5} + C.$$

Как видим, введение разных замен переменных в одном примере привело к одинаковому результату, т. е. действительно, для одного и тоже примера можно указать несколько различных способов его решения, которые, конечно, приводят к одинаковому результату.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{x}{x^2-9}dx$.

$$\int \frac{x}{x^2-9}dx = \left| \begin{array}{l} x^2-9=t \\ x=\sqrt{t+9} \\ dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t+9}} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{t+9}}{t}\frac{dt}{2\sqrt{t+9}} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-9\right| + C.$$

5.5. Интегрирование некоторых дробно-рациональных выражений

Интегрирование элементарных дробей осуществляется приемом замены переменной. Укажем основные виды элементарных дробно-рациональных выражений и способы введения замены для них.

Элементарными называются дроби следующих четырех видов:

$$I_1 = \frac{1}{ax+b}, \qquad I_2 = \frac{1}{(ax+b)^m}, \qquad I_3 = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \qquad I_4 = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

где m, n – натуральные числа.

Интегрирование дроби вида I_4 в нашем курсе не рассматривается, рекуррентная формула понижения степени многочлена знаменателя приводится в справочниках.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей I_1 и I_2 приводятся к табличным интегралам заменой $t = ax + b$, тогда $dt = adx$, а $dx = \frac{dt}{a}$:

$$\int I_1 dx = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C;$$

$$\int I_2 dx = \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = \frac{1}{a}\int t^{-m}dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{t^{-m+1}}{1-m} + C.$$

В последнем примере замена переменной работает для m – любого действительного числа ($m \neq 1$, т. к. это $\int I_1 dx$).

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{10x+7}$.

$$\int \frac{1}{10x+7}dx = \left| \begin{array}{l} t = 10x+7 \\ dt = d(10x+7) = 10dx \\ dx = dt/10 \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{10} = \frac{1}{10}\ln|t| + C = \frac{\ln|10x+7|}{10} + C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(10x+7)^{0.4}}$.

$$\int \frac{dx}{(10x+7)^{0.4}} = \left| \begin{array}{l} t = 10x+7 \\ \ldots.. \\ (\text{пример } 9) \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^{0.4}}\frac{dt}{10} = \frac{1}{10}\int t^{-0.4}dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{t^{-0.4+1}}{1-0.4} + C = \frac{1}{6}t^{0.6} + C =$$

$$= \frac{1}{6}(10x+7)^{0.6} + C.$$

Укажем метод интегрирования элементарной **дроби вида** I_3.

1. Предварительно вынесем старший коэффициент знаменателя:

$$I_3 = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{Ax+B}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \left| \begin{array}{c} \text{обозначим} \\ p = \frac{b}{a} \text{ и } q = \frac{c}{a} \end{array} \right| = \frac{1}{a}\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

2. В выражении знаменателя (x^2+px+q) выделим полный квадрат:

$$x^2+px+q = x^2+\left(2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)+q = \left(x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q =$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+M, \quad \text{где обозначим } M = q-\left(\frac{p}{2}\right)^2;$$

3. Введем замену переменной $t = x+\frac{p}{2} \to x = t-\frac{p}{2} \to dt = dx$, тогда получим:

$$\int I_3 dx = \frac{1}{a}\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{a}\int\frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+M}dt =$$

$$= \frac{1}{a}\int\frac{At}{t^2+M^2}dt + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+M} = \frac{1}{a}\frac{A}{2}\int\frac{d\left(t^2+M\right)}{t^2+M} + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+M} =$$

$$= \frac{1}{a}\frac{A}{2}\ln\left|t^2+M\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+M} = \left| \begin{array}{l} \text{выполняя} \\ \text{обратную замену} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+M}.$$

Последний интеграл является табличным, но в зависимости от знака выражения $M = \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$ его значение различно, (см. в таблице интегралы 11 или 12).

Пример 11. Вычислить интеграл $\int \frac{5x}{x^2+6x-40}dx$.

Заметим, что $x^2+6x-40 = x^2+6x+9-9-40 = (x+3)^2-49$.

$$\int \frac{5x}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x}{(x+3)^2-49}dx = \left| \begin{matrix} t = x+3 \to \\ dt = dx,\ \ x = t-3 \end{matrix} \right| = \int \frac{5t-15}{t^2-49}dt =$$

$$= 5\int \frac{tdt}{t^2-49} - 15\int \frac{dt}{t^2-49} = 5\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-49)}{t^2-49} - 15\int \frac{dt}{t^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|t^2-49\right| - 15\frac{1}{2\cdot 7}\ln\left|\frac{t-7}{t+7}\right| =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{обратная замена} \\ t = x+3 \end{matrix} \right| = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{15}{14}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Замечание. Интегрирование выражений вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ выполняется аналогичной заменой, применяемой для интегрирования выражения I_3.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int \frac{4dx}{-x^2+6x-20}$.

Заметим, что $\int \frac{4dx}{-x^2+6x-20} = -4\int \frac{dx}{x^2-6x+20}$. В знаменателе выделим полный квадрат, тогда $x^2-6x+20 = x^2-6x+9-9+20 = (x-3)^2+11$, итак:

$$-4\int \frac{dx}{x^2-6x-7} = -4\int \frac{dx}{(x-3)^2+11} = \left| \begin{matrix} t = x-3 \to \\ dt = dx,\ \ x = t+3 \end{matrix} \right| = -4\int \frac{dt}{t^2+11} =$$

$$= -4\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\frac{t}{\sqrt{11}} + C = \left| \begin{matrix} \text{обратная замена} \\ t = x+3 \end{matrix} \right| = -\frac{4}{\sqrt{11}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{11}} + C.$$

Если интегрируется *неправильная дробь*, то вычисление интеграла начинают с выделения целой части в дроби и дальнейшего ее представления в виде суммы целой части и правильной дроби (она из элементарных дробей).

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \frac{5x^2+1}{3x^2-27}dx$.

Подынтегральное выражение является неправильной дробью, выделим целую часть:

$$\frac{5x^2+1}{3x^2-27}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x^2+1/5}{x^2-9}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x^2-9+9+1/5}{x^2-9}=\frac{5}{3}\left(1+\frac{46/5}{x^2-9}\right).$$

Проинтегрируем:

$$\int\frac{5x^2+1}{3x^2-27}dx=\int\frac{5}{3}\left(1+\frac{46/5}{x^2-9}\right)dx=\frac{5}{3}\left(\int dx+\frac{46}{5}\int\frac{1}{x^2-9}dx\right)=\frac{5}{3}x+\frac{23}{9}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C.$$

5.6. Интегрирование по частям неопределенного интеграла

Пусть $U=U(x)$ и $V=V(x)$ две дифференцируемые функции.

Найдём дифференциал от произведения этих функций: $d(U\cdot V)=(U\cdot V)'dx=UV'dx+VU'dx=UdV+VdU$, или, что тоже самое, $UdV=d(UV)-VdU$.

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\int UdV=UV-\int VdU. \tag{5.6}$$

Формула (5.6) называется формулой интегрирования по частям, она применяется в основном, если в подынтегральном выражении находится произведение многочлена $P_n(x)$ на одну из функций: e^{kx}, a^{kx}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$.

Напомним, что многочленом является выражение вида $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. В частности, $P_1(x)=a_0x+a_1$, $P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$, а многочлен нулевой степени $P_0(x)=a_0$ – есть число.

Для получения положительного результата при вычислении интеграла нужно руководствоваться следующим правилом выбора функции U и дифференциала dV в левой части формулы (5.6), далее составить из них правую часть указанной формулы. В случае правильного выбора функции U и дифференциала dV вновь полученный интеграл будет проще исходного.

Случай 1

$$\int P_n(x)\cdot\begin{Bmatrix}e^{kx}\\ a^{kx}\\ \sin ax\\ \cos ax\end{Bmatrix}dx=\left|\begin{matrix}U(x)=P_n(x)\\ dV=\begin{Bmatrix}e^{kx}\\ a^{kx}\\ \sin ax\\ \cos ax\end{Bmatrix}dx\end{matrix}\right|=\ldots. \tag{5.7}$$

Формула (5.6) в данном случае применяется такое количество раз, какова степень многочлена $P_n(x)$, т. е. n раз.

Случай 2

$$\int P_n(x)\cdot\begin{Bmatrix}\ln x\\ \arcsin x\\ \arccos x\\ \mathrm{arctg}\, x\\ \mathrm{arcctg}\, x\end{Bmatrix}dx=\left|\begin{matrix}U(x)=\begin{Bmatrix}\ln x\\ \arcsin x\\ \arccos x\\ \mathrm{arctg}\, x\\ \mathrm{arcctg}\, x\end{Bmatrix}\\ dV=P_n(x)dx\end{matrix}\right|=\ldots. \quad (5.8)$$

Формула (5.6) в данном случае применяется один раз, что приводит вычисления к интегралу от дробно-рациональной функции.

Случай 3

$$\int\begin{Bmatrix}\sqrt{x^2\pm a^2}\\ \sqrt{a^2-x^2}\\ \cos\ln x\\ \sin\ln x\\ a^{mx}\cos(nx)\\ a^{mx}\sin(nx)\end{Bmatrix}dx=\left|\begin{matrix}U(x)=\begin{Bmatrix}\sqrt{x^2\pm a^2}\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\end{Bmatrix}\\ dV=dx\end{matrix}\right|=\ldots. \quad (5.9)$$

Получить результат в данном случае возможно после одно- или двукратного применения формулы, вычисления приводят к исходному интегралу. Приравнивая начало и конец вычислений, получаем уравнение с неизвестной – заданным интегралом.

Пример 15. Вычислить интеграл $\int(3x+1)\cos x dx$.

Согласно правилу (5.7) $U(x)=3x+1$. Степень многочлена $P_1(x)=(3x+1)$ равна одному, тогда для вычисления достаточно один раз применить формулу (5.6): $\underbrace{\int(3x+1)\cos x dx}_{\int U dV}=$

$$=\left|\begin{matrix}U=3x+1\rightarrow\left|\begin{matrix}\textit{продифференцируем}\\ \textit{обе части}\end{matrix}\right|\rightarrow dU=d(3x+1)=3dx\\ \\ dV=\cos x dx\rightarrow\left|\begin{matrix}\textit{проинтегрируем}\\ \textit{обе части}\end{matrix}\right|\rightarrow\int dV=\int\cos x dx\rightarrow V=\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=\underbrace{(3x+1)\sin x}_{UV}-\underbrace{\int\sin x\cdot 3dx}_{\int V dU}=(3x+1)\sin x+3\cos x+C.$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int (x^2+5)e^{5x}dx$.

Согласно правилу (5.7) $U = x^2+5$. Степень многочлена $P_2(x) = \left(x^2+5\right)$ равна двум, тогда потребуется двукратное применение формулы (5.6):

$$\int (x^2+5)e^{5x}dx = \left| \begin{array}{l} U = x^2+5 \to dU = 2xdx \\ dV = e^{5x}dx \to V = \dfrac{e^{5x}}{5} \end{array} \right| = \frac{e^{5x}}{5}(x^2+5) - \int \frac{e^{5x}}{5}2xdx = \frac{e^{5x}}{5}(x^2+5) -$$

$$-\frac{2}{5}\int xe^{5x}dx = \left| \begin{array}{l} U = x \quad \to dU = dx \\ dV = e^{5x}dx \to V = \dfrac{e^{5x}}{5} \end{array} \right| = \frac{e^{5x}}{5}(x^2+5) - \frac{2}{5}\left(\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}dx\right) =$$

$$= e^{5x}\frac{x^2+5}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx = e^{5x}\frac{x^2+5}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{127}{25}\right) + C.$$

Пример 17. Вычислить интеграл $\int \ln x dx$.

Согласно правилу (5.8) $U(x) = \ln x$.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{lll} U = \ln x & \to & dU = d\ln x = \dfrac{dx}{x} \\ dV = dx & \to & \qquad V = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

Пример 18. Вычислить интеграл $\int x\,arctgx dx$.

Согласно правилу (5.8) $U(x) = arctgx$.

$$\int x\,arctgxdx = \left| \begin{array}{lll} U = arctgx & \to & dU = darctgx = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dV = xdx & \to & \qquad V = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \left| \text{интеграл содержит неправильную дробь, выделим целую часть} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 arctgx - x + arctgx\right) + C.$$

Пример 19. Вычислить интеграл $\int \sqrt{x^2+3}dx$.

Согласно правилу (5.9) $U = \sqrt{x^2+3}$.

$$\int \sqrt{x^2+3}dx = \left| \begin{array}{ll} U = \sqrt{x^2+3} & dU = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx \\ dV = dx & V = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2+3} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+3} - \int \frac{x^2+3-3}{\sqrt{x^2+3}}dx = x\sqrt{x^2+3} - \int \sqrt{x^2+3}dx + \int \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+3} - \int \sqrt{x^2+3}dx + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|,$$

то есть однократное применение формулы привело к уравнению с неизвестной – исходным интегралом

$$\underline{\int \sqrt{x^2+3}dx} = x\sqrt{x^2+3} - \underline{\int \sqrt{x^2+3}dx} + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|,$$

откуда находим $\underline{\int \sqrt{x^2+3}dx} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+3} + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|\right) + C$.

5.7. «Неберущиеся» интегралы

При дифференцировании любой элементарной функции снова получается функция элементарная. Однако первообразная от элементарной функции может и не быть элементарной функцией, т. е. не может быть записана через привычные для нас символы степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

В том случае, когда первообразная $F(x)$ для $f(x)$ тоже является элементарной функцией, говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ «берётся», т.е. первообразная выражается через элементарные функции (интеграл вычисляем). Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл «не берётся», его называют «неберущимся» интегралом. В этом случае, какие бы преобразования вы не применяли, привести его к табличному интегралу не получится. Приведём примеры некоторых таких «неберущихся» интегралов, которые часто встречаются в приложениях:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},\ \int \frac{e^x dx}{x},\ \int \frac{\sin xdx}{x},\ \int \frac{\cos xdx}{x},\ \int e^{x^2} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x},\ \int \sqrt{x}\cos xdx,\ \int \sqrt{x}\sin xdx,\ \int \frac{x^2 dx}{\sin x},\ \int \frac{x^2 dx}{\sin x},\ \int \frac{\sin xdx}{x^2}\ \ldots$$

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют неопределенным интегралом для функции $f(x)$?
2. Укажите свойства неопределенного интеграла.
3. Для чего применяют замену переменной в неопределенном интеграле?
4. Установите соответствие между интегралами и методами их вычисления:

1. Непосредственное интегрирование. А. $\int x^3 \cos xdx$.
2. Метод замены переменной. Б. $\int x^4 dx$.
3. Метод интегрирования по частям. В. $\int \left(x^2+3\right)^5 xdx$.

5. Интеграл $\int \frac{2^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$ равен …

1. $2^{ctgx}+C$. 2. $-\frac{2^{ctgx}}{\ln 2}+C$. 3. $\frac{2^{ctgx}}{\ln 2}+C$. 4. $-ctgx2^{ctgx}+C$.

6. Дан интеграл $\int \frac{\sqrt{4-x}}{x}dx$, тогда для его решения нужна замена…

1. $4-x$. 2. $\frac{1}{x}$. 3. $\sqrt{4-x}$. 4. $\frac{\sqrt{4-x}}{x}$.

7. Если в неопределенном интеграле $\int (x-1)\cos\frac{x}{4}dx$, применяя метод интегрирования по частям, положить $u(x)=x-1$, тогда функция $v(x)$ будет равна …

1. $\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}$. 2. $-4\cos\frac{x}{4}$. 3. $4\sin\frac{x}{4}$. 4. $\cos\frac{x}{4}$.

8. Чему равна функция $v(x)$, если в неопределенном интеграле $\int \arcsin xdx$ применить метод интегрирования по частям.

9. Значение интеграла $\int \frac{3x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx$ равно …

1. $\frac{1}{2\sqrt{2+x^3}}+C$. 2. $\sqrt{2+x^3}+C$. 3. $2\sqrt{2+x^3}+C$. 4. $\ln\left(2+x^3\right)+C$.

10. Значение интеграла $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-x^2+1\right)dx$ равно …

1. $-ctgx-\frac{x^3}{3}+x+C$. 2. $ctgx-\frac{x^3}{3}+x+C$. 3. $-ctgx-\frac{x^3}{2}+1+C$.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана *непрерывная* функция $y = f(x)$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$

В каждом из интервалов $(x_0;x_1)$, $(x_1;x_2)$, $\ldots,(x_{n-1};x_n)$ возьмем по точке, которые соответственно обозначим ξ_1, $\xi_2,...,$ ξ_n, и вычислим в них значения функции $f(\xi_1)$, $f(\xi_2),\ldots,$ $f(\xi_n)$.

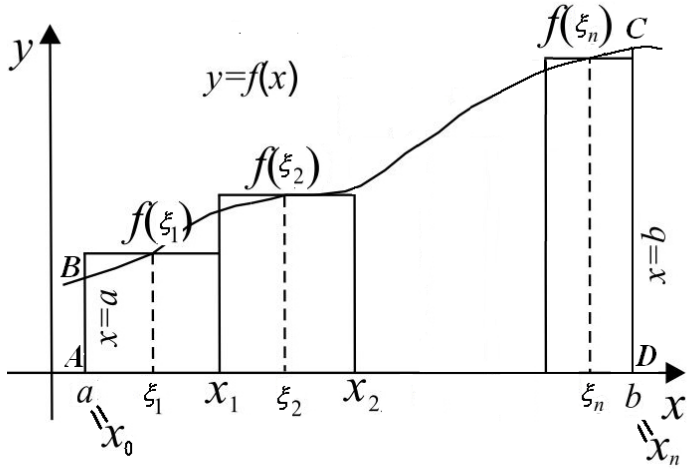


Рис. 20. Определение интегральной суммы

Вычислим площадь ступенчатой фигуры, указанной на рис. 20, называемой интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2,..., n$.

Определение. 6.1. Если при любых разбиениях отрезка $[a;b]$ точками $x_0, x_1,...,x_n$, такими, что $\max\limits_{i} \Delta x_i \to 0$, и при любом выборе точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1};x_i]$, $i = 1, 2,..., n$, интегральная сумма $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ стремится к одному и тому же пределу (числу), то этот предел и называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (6.1)$$

Число a называется нижним пределом интегрирования, а b – верхним пределом интегрирования.

Замечание 1. Доказанным фактом является то, что в наших предположениях *о непрерывности функции* $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ предел в левой части формулы (6.1) всегда существует и конечен.

Замечание 2. При введении понятия определенного интеграла составлялась интегральная сумма S_n, представляющая собой площадь ступенчатой фигуры (рис. 20), которая при уменьшении ширины ступенек $\max_i \Delta x_i \to 0$ по значению площади будет стремиться к площади трапециевидной фигуры *ABCD*: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max_i \Delta x_i \to 0}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right) = S_{ABCD}$. т. е.

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.2}$$

6.2. Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt. \tag{6.3}$$

2. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{6.4}$$

3. Константа может быть вынесена за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx. \tag{6.5}$$

4. Если верхний и нижний пределы интегрирования равны, то

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{6.6}$$

5. Перемена местами пределов интегрирования меняет знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{6.7}$$

6. Для любого $c \in (a;b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{6.8}$$

7. Для четных функций на отрезке [-*a;a*] справедливо

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx. \tag{6.9}$$

8. Для нечетных функций на отрезке [-*a;a*] справедливо

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0. \tag{6.10}$$

9. Если функция является знакопостоянной на отрезке, т. е. для всех $x \in [a;b]$ выполняется $f(x) \ge 0$ (или $f(x) \le 0$), то $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$ (или $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$).

6.3. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Если для вычисления интеграла достаточно применения табличных интегралов и правил интегрирования 6.2, т. е. непосредственное интегрирование позволяет найти первообразную функции, то для вычисления такого определенного интеграла достаточной является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{6.11}$$

где $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$, а $F(x)$ – любая из ее первообразных.

Пример 1. $\int\limits_0^{\pi/2} 2\sin x dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -2\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -2(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = 2$.

Пример 2. $\int\limits_1^4 (x - \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3})dx = \int\limits_1^4 xdx - \frac{3}{2}\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx + \frac{1}{3}\int\limits_1^4 dx =$

$= \frac{1}{2}x^2\Big|_1^4 - \frac{3}{2}\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 + \frac{1}{3}x\Big|_1^4 = \frac{1}{2}(16-1) - (4^{3/2} - 1^{3/2}) + \frac{1}{3}(4-1) = \frac{15}{2} - 7 + 1 = \frac{3}{2}$.

Пример 3. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \int\limits_0^{\pi/4} dx - \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^2+1} =$

$= x\Big|_0^{\pi/4} - arctg\, x\Big|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \left(arctg\frac{\pi}{4} - arctg\, 0\right) = \frac{\pi}{4} - arctg\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 1$.

Если для вычисления интеграла требуются более сложные преобразования подынтегрального выражения, то, так же как и в неопределенном интеграле, доступны приемы замены переменной и интегрирования по частям.

6.4. Замена переменной в определенном интеграле

Следует обратить внимание на то, что замена переменной затрагивает не только подынтегральную функцию, но и границы интегрирования, т. е. если $x \in [0;1]$, то при замене $t = x^2 + 3$ новая переменная $t \in [(x^2+3)\big|_{x=0}; (x^2+3)\big|_{x=1}] = [3;4]$.

Если замена имеет вид $x = \varphi(t)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{6.12}$$

где α и β находятся из условий $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Замечание 1. После замены переменной и соответствующего изменения пределов интегрирования возвращение к исходной переменной не требуется, что упрощает вычисления.

Замечание 2. Замена $x=\varphi(t)$ только тогда выполняется корректно, когда функция $x=\varphi(t)$ является *непрерывно-дифференцируемой* и *монотонной* на отрезке $[\alpha;\beta]$. Условие монотонности функции на отрезке необходимо для правильного определения новых границ.

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx$.

$$\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{4-x} \to x=\varphi(t)=4-t^2 \to dx=-2tdt \\ \left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \text{ имеем } \alpha=\sqrt{4-x}\Big|_{x=0}=2 \\ \text{при } x=3 \text{ имеем } \beta=\sqrt{4-x}\Big|_{x=3}=1 \end{array} \right| \Rightarrow \text{т.е. при } x\in[0;3] \to t\in[2;1] \end{array} \right| =$$

$$=-\int\limits_2^1 \frac{4-t^2}{t}2tdt = 2\int\limits_1^2 (4-t^2)dt = 2\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(4(2-1)-\frac{1}{3}(8-1)\right)=\frac{10}{3}.$$

Пример 5. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 x\sin xdx$.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 x\sin xdx = -\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 xd(\cos x) = |\text{замена } t=\cos x| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{определим границы по переменной } t \\ \left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \text{ имеем } \alpha=\cos x\big|_{x=0}=1 \\ \text{при } x=\frac{\pi}{2} \text{ имеем } \beta=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0 \end{array} \right| \Rightarrow \text{при } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to t\in[1;0] \end{array} \right| =$$

$$=-\int\limits_1^0 t^4dt = \int\limits_0^1 t^4dt = \left(\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}\left(1^5-0^5\right)=\frac{1}{5}.$$

6.5. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если для вычисления интеграла требуется применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$, где функции $U(x)$ и $V(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $[a;b]$, то заметим, что правая часть формулы $UV-\int VdU$ является первообразной ее левой части $\int UdV$, тогда, используя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int\limits_a^b UdV = \left(UV-\int VdU\right)\Bigg|_a^b = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU \text{ , т. е.}$$

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU. \qquad (6.13)$$

Пример 6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{matrix} U = x & \to & dU = dx \\ dV = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & \to & V = tgx \end{matrix} \right| = xtgx\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} tgxdx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{4} - 0\right) - \int_0^{\pi/4} tgxdx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi/4}\frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{введем замену } t = \cos x: \\ \text{при } x = 0 \ \to \alpha = \cos 0 = 1 \\ \text{при } x = \dfrac{\pi}{4} \to \beta = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right| = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} + \ln|t|\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$.

$$\int_0^1 (2x+1)e^x dx = \left| \begin{matrix} U = 2x+1 \to & dU = 2dx \\ dV = e^x dx \to & V = e^x \end{matrix} \right| = (2x+1)e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = (3e-1) - 2e^x\Big|_0^1 =$$

$$= (3e-1) - 2(e-1) = e+1.$$

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая геометрическая задача рассматривалась при введении определения определенного интеграл?
2. Укажите свойства определенного интеграла.
3. При введении в определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ замены переменной функция $x = \varphi(t)$ на отрезке $[a;b]$ должна быть:

   1) непрерывной; 2) возрастающей;
   3) монотонной; 4) убывающей.
4. Когда применяется формула Ньютона-Лейбница?
5. Определенный интеграл $\int_{-2}^1 (x - 8x^3)dx$ равен …

   1) -69; 2) $28{,}5$; 3) $-29{,}5$; 4) 72.
6. Определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$ равен …

   1) $\frac{2(\sqrt{8}-1)}{3}$; 2. $\frac{3(\sqrt{8}-1)}{2}$; 3. $\frac{1}{\sqrt{8}}$; 4. $\frac{15}{2}$.

7. Ненулевая функция $y = f(x)$ является нечетной на отрезке $[-8; 8]$, тогда $\int\limits_{-8}^{8} f(x)dx$ равен …

1) 0; 2) $16\int\limits_0^1 f(x)dx$; 3) $2\int\limits_0^8 f(x)dx$; 4) $\frac{1}{16}\int\limits_0^1 f(x)dx$.

8. Определенный интеграл $\int\limits_0^1 xe^{2x}dx$ равен …

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{e^2-1}{2}$; 3) $e-1$; 4) $\frac{e^2+1}{4}$.

§7. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

7.1. Вычисление площади в декартовой системе координат

Если плоская фигура ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 21а.), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx, \tag{7.1}$$

что уже было отмечено при введении понятия определенного интеграла. Случаи, представленные на рис. 21б, 21в и 21г являются более сложными. Подробнее рассмотрим каждый из них.

Площадь фигуры, указанной на рис. 21б может быть вычислена с помощью интеграла, если заметить, что заштрихованная площадь S_{ABC} является суммой площадей $S_{ABD} + S_{DBC}$, каждая из которых может быть вычислена по формуле (7.1):

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b g(x)dx. \tag{7.2}$$

Площадь фигуры, указанной на рис. 21в может быть вычислена с помощью интеграла, если заметить, что S_{BCDE} является разностью площадей $S_{ACDF} - S_{ABEF}$, каждая из которых может быть вычислена по формуле (7.1):

$$S_{BCDE} = S_{ACDF} - S_{ABEF} = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx. \tag{7.3}$$

Площадь фигуры, указанной на рис. 21г может быть вычислена с помощью интеграла, если заметить, что S_{ACDF} является суммой площадей $S_{BCDE} + S_{BAFE}$, каждая из которых может быть вычислена по формуле (7.1):

$$S_{ACDF} = S_{BCDE} + S_{BAFE} = \int\limits_a^b f(x)dx + \left(-\int\limits_a^b g(x)dx\right) = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

Заметим, что для фигур представленных на рис. 21в и 21г применима единая формула (7.3).

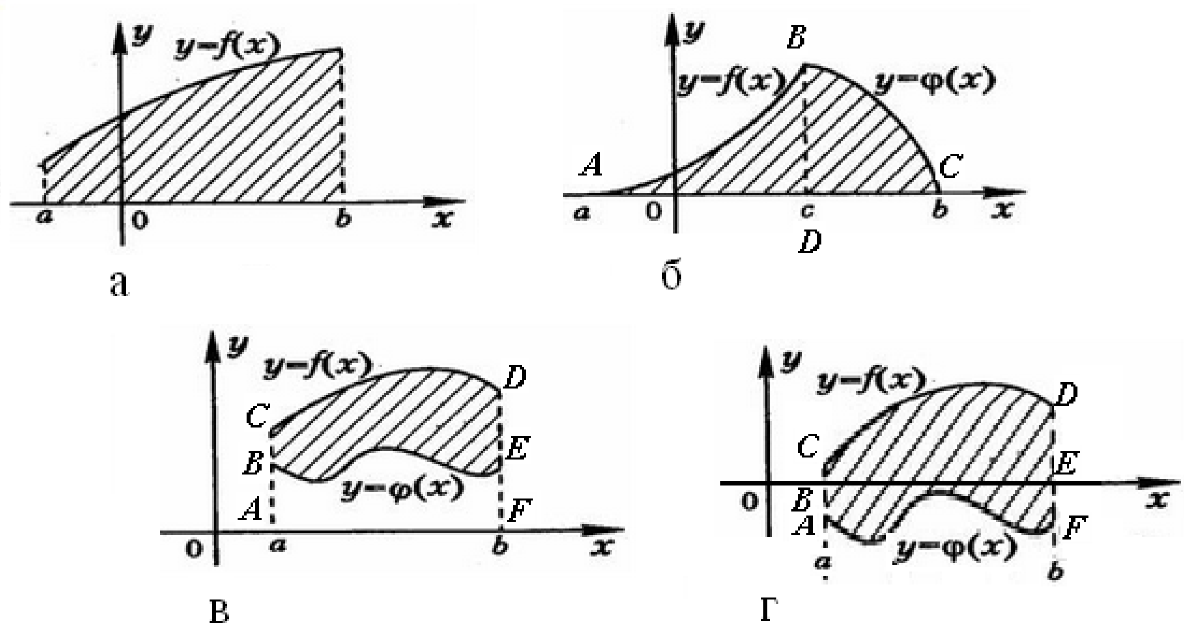


Рис. 21. Различные положения фигур в задачах на вычисление площади

Замечание. Для вычисления площадей фигур произвольного вида, отличающихся от рассмотренных случаев, фигуру нужно разбить на более мелкие детали, для которых работают формулы (7.1) – (7.3).

Для вычисления площади фигуры которая показана на рис. 22, ее можно разбить на мелкие детали и свести вычисления к нескольким интегралам, но значение площадь проще найти, если, составляя интегральную сумму, разбивать отрезок $[c,d]\in Oy$, и выполняя предельный переход в составленной сумме получить интеграл $\int\limits_c^d \varphi(y)dy$, значение которого численно равно площади заштрихованной фигуры.

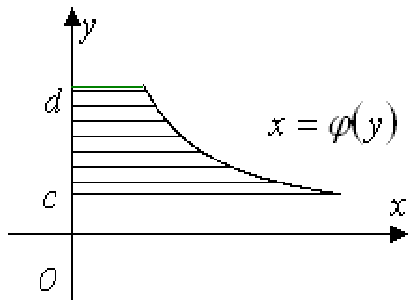


Рис. 22. Площадь фигуры, вычисляемой по формуле (7.4)

Итак, если плоская фигура ограничена справа графиком функции $x=\varphi(y)$, слева осью Oy, сверху и снизу прямыми $y=d$ и $y=c$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy. \qquad (7.4)$$

Если фигура ограничена прямыми $y=d$, $y=c$ ($c<d$) и графиками функций $x=\varphi_1(y)$ и $x=\varphi_2(y)$ ($\varphi_2(y)\le\varphi_1(y)$ на $[c,d]$), то для вычисления площади применяется аналогичная (7.3) формула:

$$S=\int_c^d \big(\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\big)dy. \qquad (7.5)$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2/4-1$ и $y=2-x$.

Решение. Определим точки пересечения линий: $\begin{cases} y=x^2/4-1, \\ y=2-x; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A(2,0), \\ B(-6,8). \end{matrix}$

На рис. 23 показана фигура, площадь которой требуется вычислить.

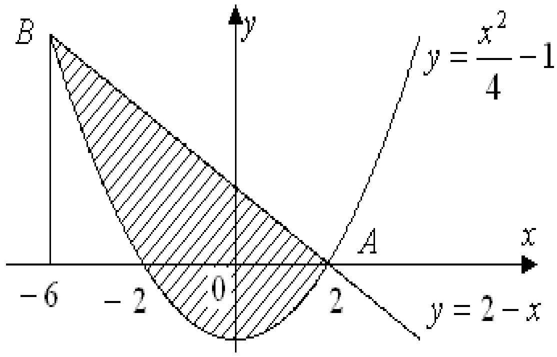


Рис 23. Заштрихована фигура, заданная условием примера 1

Из указанных выше формул вычисления площади выберем формулу (7.3), так как фигура ограничена сверху и снизу кривыми $y(x)=2-x$ и $g(x)=x^2/4-1$, а слева и справа прямыми $x=-6$, $x=2$, проходящими через точки пересечения этих кривых, тогда

$$S=\int_{-6}^{2}\left((2-x)-\left(\frac{x^2}{4}-1\right)\right)dx=\int_{-6}^{2}\left(3-x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-6}^{2}=$$

$$=\left(3\cdot 2-\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{12}\right)-\left(3(-6)-\frac{(-6)^2}{2}-\frac{(-6)^3}{12}\right)=21\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=(x+1)^2$, $y=1-x^2$ и осью Ox.

Решение. Обе кривые являются параболами, определим точки пересечения: $\begin{cases} y=(x+1)^2, \\ y=1-x^2; \end{cases} \Rightarrow A(0;1)$ и $B(-1;0)$.

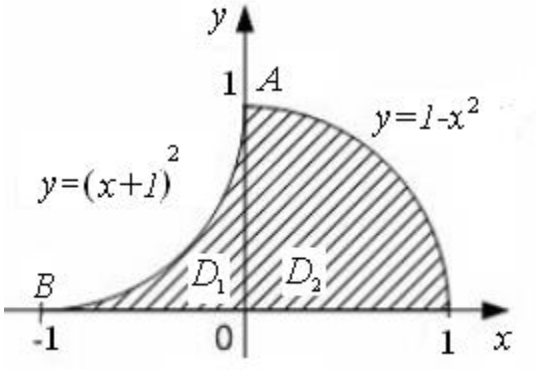


Рис. 24. Заштрихована фигура, заданная условием примера 2

Для вычисления площади фигуры, изображенной на рис. 24, из указанных выше формул вычисления площади выберем формулу (7.2), так как фигуру следует разбить две части:

$$S=S_{D_1}+S_{D_2}=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}(1-x^2)dx=\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_{-1}^{0}+\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{0}^{1}=1\ (ед^2).$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2-4y+x+3=0$ и $y^2-4y+x=0$, где $x\geq 0$.

Решение. Приведем уравнения парабол к каноническому виду:

$$y^2-4y+x+3=0 \quad \Rightarrow (y-2)^2=-(x-1) \quad \Rightarrow \quad x=-(y-2)^2+1; \qquad (1)$$

$$y^2-4y+x=0 \qquad \Rightarrow (y-2)^2=-(x-4) \quad \Rightarrow \quad x=-(y-2)^2+4. \qquad (2)$$

Точек пересечения параболы не имеют. Укажем фигуру на рис. 25.

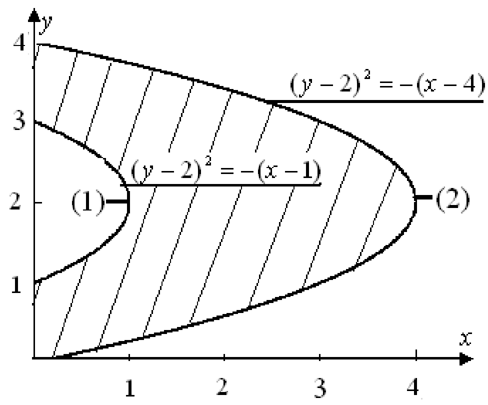


Рис. 25. Заштрихована фигура, заданная условием примера 3

Вычислять площадь проще, если переменной интегрирования считать y, иначе фигуру придется разбить на несколько частей. Заметим, что искомая площадь может быть определена как разность площадей, образуемых с осью Oy параболой (2) – площадь S_1 и параболой (1) – площадь S_2. Определив точки пересечения парабол с осью Oy, применим формулу (7.5):

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^4 (-(y-2)^2 + 4)dy - \int_1^3 (-(y-2)^2 + 1)dy = -\int_0^4 (y-2)^2 dy + 4\int_0^4 dy$$

$$+\int_1^3 (y-2)^2 dy - \int_1^3 dy = -\left.\frac{(y-2)^3}{3}\right|_0^4 + 4y\Big|_0^4 + \left.\frac{(y-2)^3}{3}\right|_1^3 - y\Big|_1^3 = \frac{28}{3}\ (ed^2).$$

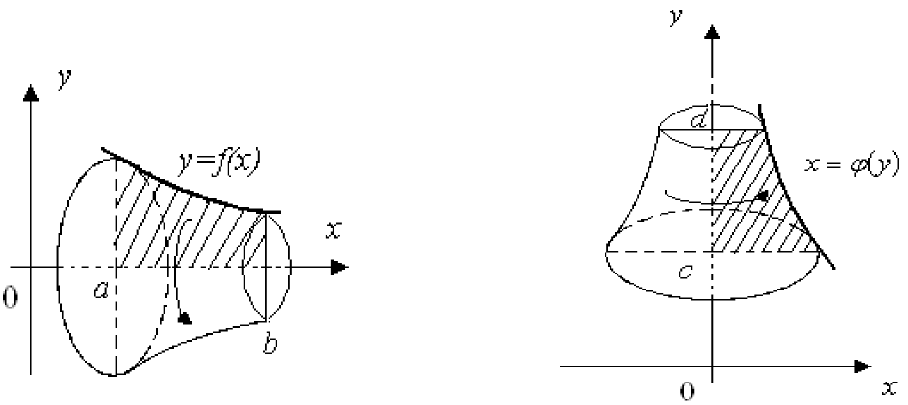
7.2. Вычисление объемов поверхностей вращения

Если плоская заштрихованная фигура (рис. 26а) сверху ограничена графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, то объем тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси Ox, находится по формуле

$$V_{ox} = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx. \tag{7.6}$$

Если плоская фигура (рис. 26б) справа ограничена графиком функции $x = \varphi(y)$, слева осью Oy, сверху и снизу прямыми $y = d$ и $y = c$, то объем тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси Oy, находится по формуле

$$V_{oy} = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy. \tag{7.7}$$



а б

Рис. 26. Поверхности вращения

Если фигура пустая внутри, то ее объем вычисляется через разность объемов – из большего объема вычитают меньший.

Например, для фигуры с осью вращения Ox ее объем находится по формуле

$$V_{ox} = \pi\int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(\varphi(x)\right)^2\right]dx, \qquad (7.8)$$

где для всех $x \in [a;b]$ верно $f(x) \ge \varphi(x)$.

Аналогичную формулу можно привести для фигуры с осью вращения Oy.

Пример 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $x - 2y = 0$ и $x^2 - 4y = 0$.

Решение. Первая линия является прямой, вторая параболой, найдем точки, в которых линии пересекаются, для этого составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x^2 - 4y = 0; \end{cases} \Rightarrow A(0;0) \text{ и } B(2;1).$$

Изобразим на рис. 27 поверхность вращения, заштриховав вращаемую вокруг оси Ox часть плоскости.

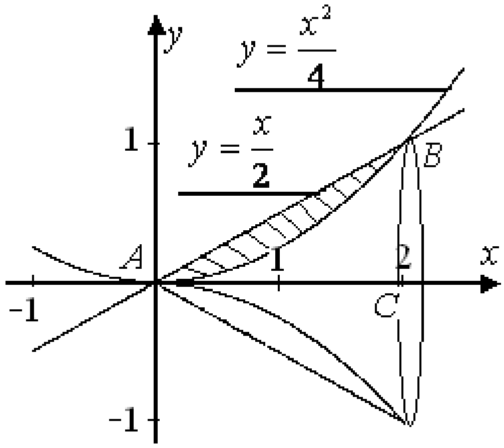


Рис. 27. Поверхность вращения, заданная условием примера 4

Объем тела вращения вокруг оси Ox, в соответствии с формулой (7.8), равен разности объемов V_1 и V_2, где больший объем V_1 получен от вращения ΔABC вокруг оси Ox, а меньший объем V_2 получен от вращения криволинейного треугольника ΔABC, ограниченного сверху параболой:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^2 \left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right)dx = \pi\left(\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^2 - \pi\left(\frac{x^5}{80}\right)\Bigg|_0^2 = \pi\frac{2^3}{12} - \pi\frac{2^5}{80} = \frac{4}{15}\pi\ (ed^3).$$

Пример 5. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + 4y^2 = 8$ и $x^2 - 4y = 0$, где $y \ge 0$.

Решение. Первая линия является эллипсом, вторая параболой. Найдем точки, в которых линии пересекаются, для этого составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8, \\ x^2 - 4y = 0; \end{cases} \Rightarrow A(2;1) \text{ и } B(-2;1).$$

Изобразим на рис. 28 поверхность вращения, заштриховав вращаемую вокруг оси Oy часть плоскости.

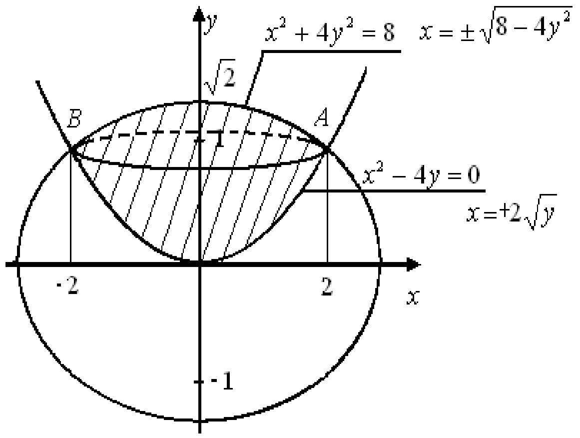


Рис. 28. Поверхность вращения, заданная условием примера 5

Объем всего тела вращения вокруг оси Oy равен сумме объемов верхней части – V_1, полученной от вращения эллипса, и нижней части – V_2, полученной от вращения параболы. Для вычисления объемов V_1 и V_2 применим формулу (7.7):

$$V=V_1+V_2=\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{8-4y^2}\right)^2dy+\pi\int_0^1\left(2\sqrt{y}\right)^2dy=\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(8-4y^2\right)dy+4\pi\int_0^1 ydy=$$

$$=\pi\left(8y-4\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}+4\pi\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=\pi\left((8\sqrt{2}-\frac{4}{3}(\sqrt{2})^3)-(8-\frac{4}{3})\right)+2\pi(1-0)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(8\sqrt{2}-7\right)\pi.$$

7.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть линия – это график функции $y=f(x)$ (рис. 29), где $x\in[a;b]$.

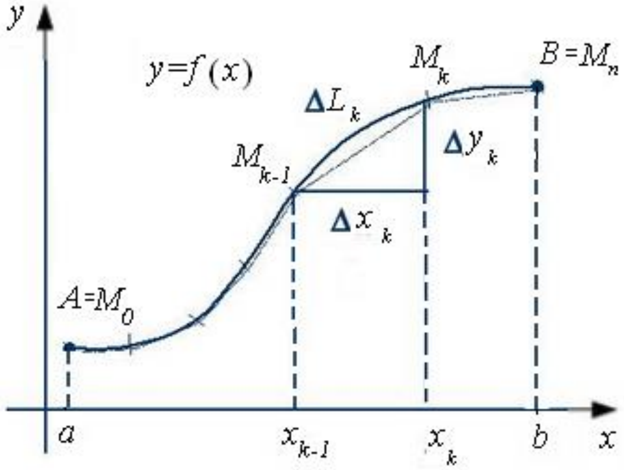


Рис. 29. Иллюстрация кривой для составления интегральной суммы

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема на рассматриваемом отрезке. Для вычисления длины дуги $\overset{\cup}{AB}$ разобьем ее точками $M_0, M_1, \ldots, M_n$ и соединим последовательно точки отрезками. Длина полученной ломаной $M_0, M_1, \ldots, M_n$ легко вычисляется, если на каждом из ребер ломаной применить теорему Пифагора: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.
Полученная сумма S_n называется интегральной суммой. Выполняя предельный переход по $n \to \infty$, измельчая точками $M_0, M_1, \ldots, M_n$ дугу $\overset{\cup}{AB}$, где $\max\limits_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k \to 0$, получим ломаную, по длине стремящуюся к длине дуги $\overset{\cup}{AB}$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k .$$

Очевидно, предел полученной интегральной суммы есть длина дуги $\overset{\cup}{AB}$, которая вычисляется с помощью интеграла:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (7.9)$$

Замечание. Можно считать, что предел интегральной суммы существует всегда, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема (т. е. является гладкой) в интервале $(a;b)$.

Пример 6. Вычислить длину дуги линии $y = \sqrt{x^3}$, где $0 \le x \le 4$.
Используем формулу длины дуги (7.9), получим:

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{x^3}\right)'\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, d\left(1 + \frac{9x}{4}\right) =$$

$$= \frac{4}{9} \frac{(1 + 9x/4)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left((10)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

Пример 7. Вычислить длину дуги линии $y = 1 - \ln(\sin x)$, где $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Используем формулу длины дуги (7.9), получим:

$$l = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left((1 - \ln(\sin x))'\right)^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos x}{\sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos x}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{2} - 1}{\cos\frac{\pi}{2} + 1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{4} - 1}{\cos\frac{\pi}{4} + 1}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие геометрические задачи решаются с помощью определенного интеграла функции одной переменной?
2. Укажите в декартовой системе координат фигуры, площади которых вычисляются с помощью определенных интегралов:

1) $\int_{-1}^{0}\left(\left(-x^2+2\right)-(-x)\right)dx$; 2) $\int_{0}^{1}\left(\left(x^2+2\right)-(-x)\right)dx$;

3) $\int_{-1}^{0}\left((x+1)-(-x)\right)dx$; 4) $\int_{-1}^{2}\left((x+2)-(-x)\right)dx$.

§8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8.1. Понятие дифференциального уравнения

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводит к уравнениям, в которых связываются независимая переменная с какой-либо функцией этой переменной и ее производными.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки. Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и определяется формулой $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$. В свою очередь, скорость $V(t)$ является производной по времени t от перемещения $S(t)$, т. е. $V(t) = S'(t)$, а ускорение $a(t)$ является производной по t от скорости $V(t)$, т. е. $a(t) = S''(t)$. Очевидно, из уравнения $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$ получается уравнение $S(t) = S'(t)t + S''(t)\cdot t^2/2$, связывающее функцию перемещения $S(t)$ с ее производными и независимой переменной.

Определение 8.1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) функции.

Определение 8.2. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Определение 8.3. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Уравнение $x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ – есть обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Оно записывается в виде $F(x, y, y') = 0$.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, или, что тоже самое,

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (8.1)$$

Такое уравнение может быть записано через дифференциалы

$$F(x, y, dx, dy) = 0. \qquad (8.2)$$

Некоторые уравнения первого порядка разрешимы относительно производной и могут быть представлены в виде

$$y' = f(x, y), \qquad (8.3)$$

такая форма записи уравнения называется *нормальной*.

Определение 8.4. Общим решением дифференциального уравнения (8.1) называется дифференцируемая функция вида

$$y = \varphi(x, C), \qquad (8.4)$$

которая при подстановке в уравнение (8.1) обращает его в тождество, здесь x – переменная и C – произвольная постоянная.

На плоскости xOy функции (8.4) образуют множество кривых, которые называются *интегральными кривыми*.

8.2. Частное решение дифференциального уравнения первого порядка. Задача Коши

Частным решением дифференциального уравнения (8.1) называется решение $y = \varphi(x, c^*)$, которое получается из общего (8.4) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной $C = c^*$.

Задачей Коши называют задачу нахождения такого частного решения уравнения, которое проходит через определенную точку плоскости $A(x_0; y_0)$, что определяется начальным условием $y_0 = y(x_0)$.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y_0 = y(x_0), \end{cases} \qquad (8.5)$$

где само уравнение представимо в нормальном виде (8.3).

Теорема Коши. (*Теорема о существовании и единственности частного решения дифференциального уравнения 1- го порядка*).

Если дифференциальное уравнение представимо в виде (*8.3*)*, где функция* $f(x,y)$ *непрерывна в некоторой области* D *в плоскости* xOy *и имеет в этой области непрерывную частную производную* $f'_y(x,y)$, *то какова бы не была точка* $A(x_0;y_0)$ *в области D:*

- *существует решение уравнения* $y=\varphi(x,c^*)$, *удовлетворяющее начальному условию* $y_0=\varphi(x_0,c^*)$, *которое проходит через точку* $A(x_0;y_0)\in D$*;*
- *это решение* $y=\varphi(x,c^*)$ *единственно для дифференциального уравнения.*

Общее решение (8.4) дифференциального уравнения (8.3) на плоскости xOy – это множество интегральных кривых, а каждому частному решению уравнения соответствует одна из них, проходящая через указанную точку плоскости.

Если частное решение определяется начальным условием $y_0=y(x_0)$, то существует интегральная кривая, которая проходит через точку $A(x_0;y_0)$, и эта кривая единственная.

Смысл теоремы Коши можно рассмотреть на примере, который приводится дальше.

Например, решениями дифференциального уравнения $y'=2x$ являются функции $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^2+1$, $y_3(x)=x^2+5$ и т. д., которые можно коротко записать в виде $y=\varphi(x,c)=x^2+c$ – это и есть общее решение, а на плоскости xOy – это интегральные кривые, которые являются непересекающимися параболами, что указано на рис. 30.

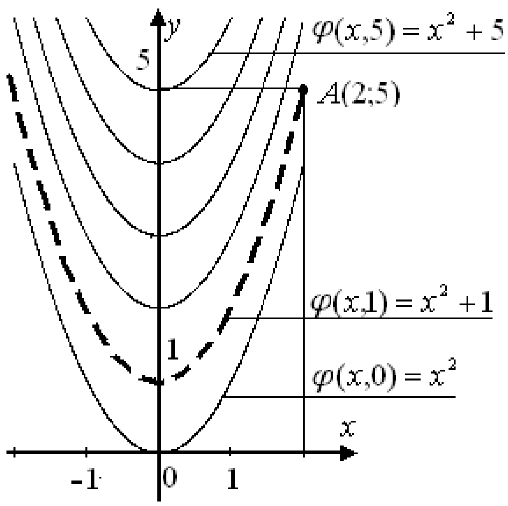


Рис. 30. Множество интегральных кривых $y=x^2+c$ дифференциального уравнения $y'=2x$

Для определения частного решения, т. е. интегральной кривой, проходящей через конкретную точку $A(2;5)$, найдем значение произвольной постоянной c^* из условия $y_0 = y(x_0)$. В нашем случае $5 = y(2)$, т. е. $5 = \varphi(2, c^*) = 2^2 + c^*$, следовательно, $c^* = 1$. Соответствующее частное решение имеет вид $y = x^2 + 1$, его график отмечен на рис. 30 штриховой линией – это единственное решение, проходящее через точку A.

8.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Если дифференциальное уравнение может быть представлено в виде (8.3), где его правая часть $f(x, y)$ допускает представление в виде произведения $f(x, y) = h(x)g(y)$, то такое уравнение называется уравнением *с разделяющимися переменными*. Такое уравнение можно привести к виду

$$y' = h(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{g(y)} dy = h(x)dx, \tag{8.6}$$

где разные переменные сгруппированы в разных частях равенства.

Последнее уравнение называется уравнением *в разделенных переменных*. Интегрируя такое уравнение, получают общее решение (еще называют общий интеграл) уравнения:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + C.$$

Замечание. При разделении переменных потребовалось деление уравнения на $g(y)$, которое должно быть отлично от нуля $g(y) \neq 0$, а следовательно, имеется возможность потерять решение уравнения $y = a$ ($a = const$), где $g(a) = 0$. Чтобы не потерять решение, необходимо отдельно проверить присутствие функции $y = a$ в полученном общем решении и если его там нет, то отдельно дописать его в ответ.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 2x + xy$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = 2x + xy$, заметив, что его правая часть представима в виде произведения $f(x, y) = h(x)g(y) = x(2 + y)$, а значит, является уравнением в разделяющихся переменных.

Исходное уравнение при делении на $(2 + y)$ допускает разделение переменных $\frac{dy}{2 + y} = xdx$ (далее следует проверить, что решение $y = -2$ не будет потеряно).

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int\frac{dy}{2+y}=\int xdx \Rightarrow \ln|y+2|=\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow |y+2|=e^{\frac{x^2}{2}+c} \Rightarrow y+2=e^{\frac{x^2}{2}}C, \text{ где } C=e^c.$$

Итак, общее решение имеет вид $y(x,C)=Ce^{\frac{x^2}{2}}-2$.

При $C=0$ имеем решение $y=-2$, т. е. решение $y=-2$ не потеряно.

Ответ: $y(x)=Ce^{\frac{x^2}{2}}-2$.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными может быть представлено в виде уравнения с дифференциалами (8.2) $f_1(x,y)dx=f_2(x,y)dy$, где $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ допускают представления в виде произведения функций $f_1(x,y)=h_1(x)g_1(y)$, $f_2(x,y)=h_2(x)g_2(y)$:

$$h_1(x)g_1(y)dx=h_2(x)g_2(y)dy.$$

В таком уравнении всегда возможно выполнить разделение переменных, для этого достаточно выполнить деление обеих частей уравнения на произведение $h_2(x)g_1(y)$ и получить уравнение в разделенных переменных:

$$\frac{h_1(x)}{h_2(x)}dx=\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy. \qquad (8.7)$$

Интегрируя обе части уравнения (8.7), получим общее решение

$$\int\frac{h_1(x)}{h_2(x)}dx=\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy+C. \qquad (8.8)$$

Замечание. При делении уравнения на произведение $h_2(x)g_1(y)$ есть возможность потерять решение, а следовательно, следует выполнить соответствующую проверку.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(xy^2-x)dx=(x^2y+y)dy$.

Решение. Представим уравнение в виде $x(y^2-1)dx=y(x^2+1)dy$.

Разделим обе его части на произведение $h_2(x)g_1(y)=(x^2+1)(y^2-1)\neq 0$ (решения $y=\pm 1$ следует проверить отдельно): $\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{y}{y^2-1}dy$.

Очевидно, это уравнение в разделенных переменных вида (8.7), проинтегрируем его: $\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{y}{y^2-1}dy$.

Вычислим каждый из интегралов:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \left| \begin{array}{l} U = x^2+1 \to \\ dU = 2xdx \to \\ xdx = \dfrac{dU}{2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{U}\frac{dU}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dU}{U} = \frac{1}{2}\ln|U| + C_1 = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C_1,$$

аналогично $\int \frac{y}{y^2-1}dy = \frac{1}{2}\ln|y^2-1| + C_2$.

Общее решение имеет вид $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + (C_1 - C_2) = \frac{1}{2}\ln|y^2-1|$, умножим обе части на 2 и, представив $2(C_1 - C_2) = \ln C$, получим $\ln C\left(x^2+1\right) = \ln|y^2-1|$, откуда $C\left(x^2+1\right) = \left(y^2-1\right) \Rightarrow y = \pm\sqrt{C\left(x^2+1\right)+1}$.

При $C = 0$ имеем решение $y = \pm 1$, т. е. решение не потеряно.

Ответ: $y = \pm\sqrt{C\left(x^2+1\right)-1}$.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $\left(1+\ln^2 y\right)dx = \left(\frac{x^2}{y} + \frac{1}{y}\right)dy$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Определим общее решение дифференциального уравнения, для чего представим уравнение в виде (8.7):

$$\left(1+\ln^2 y\right)dx = \frac{1}{y}\left(x^2+1\right)dy \Rightarrow \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{y\left(1+\ln^2 y\right)}dy.$$

Проинтегрируем последнее уравнение: $\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{dy}{y\left(1+\ln^2 y\right)}$.

Интеграл левой стороны табличный.

Интеграл правой стороны вычислим отдельно: $\int \frac{dy}{y\left(1+\ln^2 y\right)} = \int \frac{d\ln y}{1+\ln^2 y} = arctg(\ln y)$.

Итак, общее решение имеет вид $arctgx = arctg(\ln y) + C$.

Определим частное решение, для этого из общего решения определим то единственное решение, которое соответствует начальному условию $y(0)=1$, т. е. при $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$ определим значение постоянной C: $arctg\,0 = arctg(\ln 1) + C \quad \Rightarrow 0 = arctg\,0 + C \quad \Rightarrow C = 0$.

Итак, частное решение имеет вид $arctgx = arctg(\ln y) \Rightarrow \; x = \ln y \Rightarrow y = e^x$.

Ответ: $y = e^x$.

Пример 4. Найти частное решение дифференциального уравнения $ctgx \cdot \cos^2 y = y'$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Решение. Определим общее решение дифференциального уравнения, для чего представим уравнение в виде $ctgx \cdot \cos^2 y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \quad ctgxdx = \frac{dy}{\cos^2 y}$.

Проинтегрируем последнее уравнение: $\int ctgxdx = \int \frac{dy}{\cos^2 y}$.

Интеграл правой стороны табличный.

Интеграл левой стороны вычислим отдельно: $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + c$.

Итак, общее решение имеет вид $\ln|\sin x| + c = tgy$. Обозначив $c = \ln C$, получим общее решение в виде $y = arctg\left(\ln\left(C|\sin x|\right)\right)$.

Из общего решения определяется решение, которое соответствует начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, т. е. при $x_0 = \frac{\pi}{2}$ и $y_0 = 0$ определим значение постоянной C: $0 = arctg\left(\ln C\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|\right) \Rightarrow 0 = arctg(\ln C) \Rightarrow \ln C = 0 \Rightarrow C = 1$.

Ответ: $y = arctg\left(\ln|\sin x|\right)$.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ “НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ”

Задания для самостоятельной работы.

№ 1 - № 7	Вычислите неопределенные интегралы
№ 8 - № 9	Вычислите определенные интегралы
№ 10	Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями
№ 11	Вычислите длину кривой на заданном отрезке
№ 12	Найдите объем тела, полученного в результате вращения плоской фигуры вокруг заданной (в фигурных скобках) оси
№ 13	Найдите общее решение дифференциального уравнения
№ 14	Найдите частное решение дифференциального уравнения

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1. $\int \frac{2x - x^2 + 4\sqrt{x}}{x^3} dx$; 2. $\int x^3 \cdot \sqrt[5]{1 - x^4} dx$; 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}}$; 4. $\int \frac{3x + 8}{2x - 3} dx$; 5. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}}$; 6. $\int (7x - 3) \sin 3x dx$; 7. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$; 8. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$; 9. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$; 10. $4y = 8x - x^2$, $4y = x + 6$; 11. $y = \ln x$, $1 \le x \le 2$; 12. $x^2 + y^2 = 9$, $y \ge 0$, $\{Ox\}$; 13. $(3 + e^x)\, y\, y' = e^x$; 14. $tgx\, y' = tgy$, $y(\pi/6) = \pi/4$.	1. $\int \frac{5x^3 - 6x\sqrt{x} + 2}{2x} dx$; 2. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 2}} dx$; 3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 6\cos x}} dx$; 4. $\int \frac{5x - 2}{9x + 1} dx$; 5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x + 1}}$; 6. $\int (5x + 1) e^x dx$; 7. $\int x^2 \ln(x) dx$; 8. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$; 9. $\int_0^{\pi/3} (7x - 1) \cos x dx$; 10. $y = 4 - x^2$, $y = 1$; 11. $y^2 = x^3$, $0 \le x \le 5$; 12. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y \ge 3$, $\{Ox\}$; 13. $y(1 + \ln y) + x\, y' = 0$; 14. $tgy \sin^2 x dx + \cos^2 y\, ctgx\, dy = 0$, $y(\pi/4) = \pi/4$.
ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
1. $\int \frac{3 \cdot 5^x + (5 + x) \cdot 3^x}{3^x} dx$; 2. $\int \frac{\sqrt[3]{ctg^2 x}}{\sin^2 x} dx$; 3. $\int \frac{dx}{\sin^2 (9x + 1)}$; 4. $\int \frac{2x^2 - 3}{7x^2 + 4} dx$;	1. $\int \frac{2x - 8x^2 + 5x^3}{\sqrt{x}} dx$; 2. $\int x^2 e^{-x^3} dx$; 3. $\int x \sin(4 - x^2) dx$; 4. $\int \frac{x^2}{16x^2 + 1} dx$; 5. $\int \frac{dx}{2 - \sqrt{x}}$;

5. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx$; 6. $\int (5x+7)\cos 2xdx$; 7. $\int x^2 \ln(2+x)dx$; 8. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$; 9. $\int\limits_0^{\pi/3} x^3 arctgxdx$; 10. $y = -x^2 - 2x$, $y = 0,5x$; 11. $9y^2 = 4x^3$, $0 \le x \le 3$; 12. $x + 2y - 4 = 0$, $y = x$, $x = 0$, $\{Ox\}$; 13. $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$; 14. $y' tgx = -y^2$, $y(\pi/4) = -1$.	6. $\int (1-2x)e^{-5x}dx$; 7. $\int \frac{xdx}{\sin^2 3x}$; 8. $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 9. $\int\limits_0^{\pi/6} (x+2)\cos 2xdx$; 10. $y = -x^2 + 6x$, $y = x + 4$; 11. $4 - y = \ln x$, $1 \le x \le 2$; 12. $2y = x^2$, $8y = x^3$, $\{Ox\}$; 13. $2xyy' = 1 - 4x^3$; 14. $xyy' = \frac{1}{\cos y}$, $y(1) = \pi$.
ВАРИАНТ 5 1. $\int ctg^2 2xdx$; 2. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-1}}$; 3. $\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx$; 4. $\int \frac{2x+3}{4x-8}dx$; 5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 6. $\int (3x+2)\cos\frac{x}{3}dx$; 7. $\int arctg\sqrt{x}dx$; 8. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$; 9. $\int\limits_1^e x\ln xdx$; 10. $xy = 6$, $y = 7 - x$;	ВАРИАНТ 6 1. $\int \frac{2^x + 3^x - 6^x}{6^x}dx$; 2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}dx$; 3. $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$; 4. $\int \frac{x+3}{5x+7}dx$; 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; 6. $\int (5x+3)\sin 3xdx$; 7. $\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 8. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$; 9. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx$; 10. $y = -x^2 + 6x$ и осью Ox;

11. $y=(x-1)^{\frac{3}{2}}$, $1\le x\le 5$; 12. $y = x^2$, $y = 2x$, $\{Ox\}$; 13. $4xdx-3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$; 14. $y' ctgx - y = 2$, $y(\pi/3) = -1$.	11. $y = 0{,}25x^2 - 0{,}5\ln x$, $1\le x\le 4$; 12. $y^2 = 4x$, $y = 2$, $x = 3$, $\{Oy\}$; 13. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$; 14. $(1 + \cos x)x = y'\sin y$, $y(2)=\pi/4$.
ВАРИАНТ 7 1. $\int tg^2 3xdx$; 2. $\int x5^{-x^2}dx$; 3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}$; 4. $\int\frac{5x^2-1}{3x^2+5}dx$; 5. $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; 6. $\int(2-3x)\sin 8xdx$; 7. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$; 8. $\int\limits_{-2}^{5}\sqrt{5x+2}dx$; 9. $\int\limits_{1}^{e}(x^2-1)\ln xdx$; 10. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$; 11. $y = \ln\sin x$, $\pi/6\le x\le\pi/3$; 12. $y = x^2 - 9$, $y = -5$, $\{Ox\}$; 13. $dx - ydy = x^2ydy$; 14. $\cos y\cdot\sin xdy = \cos x\cdot\sin ydx$, $y(\pi/2)=\pi/6$.	ВАРИАНТ 8 1. $\int\frac{dx}{\sin^2 2x\cos^2 2x}$; 2. $\int 2^x(x+1)dx$; 3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 4. $\int\frac{3x+1}{5x-4}dx$; 5. $\int\frac{dx}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}$; 6. $\int(10x+1)\sin 7xdx$; 7. $\int\arccos xdx$; 8. $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{1+2x}$; 9. $\int\limits_{e}^{2e}(x^4-x)\ln xdx$; 10. $x^2 + y = 4x$, $y = 2x$; 11. $y = 0{,}5x^2$, $0\le x\le\sqrt{3}$; 12. $y\ge 0{,}5$, $x^2 + y^2 = 2x$, $\{Ox\}$; 13. $(1 + x^3)\,y' - x^2y = 0$; 14. $\cos^2 x\,y' = y^3$, $y(0) = 1/2$.
ВАРИАНТ 9 1. $\int\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)^2dx$; 2. $\int 3x^2\cdot\sqrt[3]{1+2x^3}dx$;	ВАРИАНТ 10 1. $\int\left(\frac{\sin x}{4}+\frac{\cos x}{4}\right)^2dx$; 2. $\int e^{\sin x}\cos xdx$;

3. $\int \sqrt[3]{\sin^2 2x}\cos 2x dx$;

4. $\int \frac{x-2}{5x+1}dx$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$;

6. $\int (3x+4)\cos 7x dx$;

7. $\int arctg\sqrt{2x}dx$;

8. $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$;

9. $\int\limits_1^e \frac{\ln x dx}{x^3}$;

10. $y = (x-1)^2,\ y^2 = x-1$;

11. $y = \ln x - 2,\quad 1 \le x \le 2$;

12. $y = 2-x,\quad y = 2x - x^2,\ \{Ox\}$;

13. $(yx^2 + y)\,y' = x - xy^2$;

14. $\cos^2(y) = x^3 y',\ y(1/2) = 0$.

3. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$;

4. $\int \frac{3x^2+1}{2x^2-7}dx$;

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$;

6. $\int (x-1)e^{-x}dx$;

7. $\int x\ln(x+2)dx$;

8. $\int\limits_{\sqrt{3}/5}^{3/5} \frac{dx}{9+25x^2}$;

9. $\int\limits_0^1 arctgxdx$;

10. $y = 3e^x,\ y = 3,\ x = 2$;

11. $(y-1)^2 = x^3,\quad 0 \le x \le 5$;

12. $xy = 4,\ y = 1,\quad x = 1,\ \{Ox\}$;

13. $(e^x + 3)dy = y^3 e^x dx$;

14. $(1+\cos x)\,y' = y^2 \sin x,\ x(\pi/2) = -1$.

ВАРИАНТ 11

1. $\int \frac{(2x-1)^3}{3x^2}dx$;

2. $\int \frac{x}{(1-x^2)^2}dx$;

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$;

4. $\int \frac{5x^2-10}{x^2-9}dx$;

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$;

6. $\int (3-x)\sin 5x dx$;

7. $\int x\ln(x^2+9)dx$;

8. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

ВАРИАНТ 12

1. $\int (1-8x)^2 dx$;

2. $\int ctgxdx$;

3. $\int (e^x+5)^8 e^x dx$;

4. $\int \frac{2x-1}{3x-9}dx$;

5. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{x}}$;

6. $\int (3+5x)\cos 2x dx$;

7. $\int \frac{xdx}{\cos^2 2x}$;

8. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{3^x}{1+9^x}dx$;

9. $\int_0^1 (x-5)e^{2x}dx$; 10. $y=\sqrt{x}$, $x=\sqrt{y}$; 11. $9(y+2)^2=4x^3$, $0\le x\le 3$; 12. $xy=6$, $y=1$, $x=1$, $\{Ox\}$; 13. $y(x+2)y'=y^2+4$; 14. $y'=4x^3\cos^2 y$, $y(0)=\pi/4$.	9. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$; 10. $y^2+x-5=0$, $x=0$; 11. $x^2+(y-1)^2=4$, $0\le x\le 1$; 12. $y=x^2+1$, $y=3x+1$, $\{Ox\}$; 13. $y'=\frac{y}{x+1}$; 14. $(2+\cos y)y'=\frac{3x^2}{\sin y}$, $y(0)=\pi/4$.
ВАРИАНТ 13 1. $\int \frac{3x^2+2x\sqrt{x}-7\sqrt{x}}{2x^2}dx$; 2. $\int \frac{tgx}{3}dx$; 3. $\int \frac{e^{arctg3x}}{1+9x^2}dx$; 4. $\int \frac{7x^2-5}{2x^2+8}dx$; 5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x+3}}$; 6. $\int x\cos(5x+1)dx$; 7. $\int \frac{\arccos x}{2}dx$; 8. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; 9. $\int_2^3 x\ln(x-1)dx$; 10. $x=4-(y-1)^2$, $x=0$; 11. $y-2=0.25x^2-0.5\ln x$, $1\le x\le e$; 12. $y^2=4-x$, $x=1$, $\{Oy\}$; 13. $xyy'=2+y^2$; 14. $y'\,\mathrm{tg}y=\mathrm{tg}x$, $y(\pi/6)=\pi/4$.	ВАРИАНТ 14 1. $\int \frac{x^2-x\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx$; 2. $\int \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$; 3. $\int e^x \sin e^x dx$; 4. $\int \frac{2x^2-5}{3x^2+9}dx$; 5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-5}}$; 6. $\int (x+2)3^x dx$; 7. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; 8. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+4}}$; 9. $\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx$; 10. $x=y^2-4y+3$, $x=0$; 11. $y+2=\ln\sin x$, $\pi/6\le x\le\pi/3$; 12. $y=2x-x^2$, $y=x$, $\{Oy\}$; 13. $(x^2+x^2y^3)dx=(y^2+y^2x^3)dy$; 14. $\frac{3}{y^2}dx=\frac{dy}{\cos x}$, $y(\pi)=2$.

ВАРИАНТ 15 1. $\int (tgx+2ctgx)^2 dx$; 2. $\int \frac{x}{4+x^4}dx$; 3. $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$; 4. $\int \frac{2x-3}{4x+1}dx$; 5. $\int \frac{3x+2}{x\sqrt{x+1}}dx$; 6. $\int (4-x)e^{-3x}dx$; 7. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 8. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt{x+8}}$; 9. $\int_1^2 x^2\ln x dx$; 10. $y = 7e^x$, $x = 3$, $y = 7$; 11. $y - 3 = \ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/3$; 12. $y + x - 5 = 0$, $yx = 4$, $\{Ox\}$; 13. $e^x(1+e^y)dx + e^y(1+e^x)dy = 0$; 14. $y^2 y' \cos^2 x = 1/3$, $y(0) = 0$.	ВАРИАНТ 16 1. $\int \frac{3x^2-6\sqrt{x}+8}{x^3}dx$; 2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx$; 3. $\int \frac{x^2}{x^6+4}$; 4. $\int \frac{3x-4}{5x+10}dx$; 5. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$; 6. $\int (1-x)e^{-2x}dx$; 7. $\int \arcsin\frac{x}{2}dx$; 8. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos x dx$ 9. $\int_0^1 x\ln(x+1)dx$; 10. $y = 3 - x^2$, $4x + y = 0$; 11. $2y - 1 = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{3}$; 12. $y = 8 - x^2$, $y = x^2$, $\{Ox\}$; 13. $y' = \frac{2xy^5}{1+x^2}$; 14. $x^2\cos^2 y = \frac{y'}{3}$, $y(0) = 0$.
ВАРИАНТ 17 1. $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx$; 2. $\int \cos\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$; 3. $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx$; 4. $\int \frac{3x-9}{4x+2}dx$;	ВАРИАНТ 18 1. $\int \frac{(4-x^2)^2}{2x^2}dx$; 2. $\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+1)}$; 3. $\int \frac{\cos x}{(2\sin x+1)^2}dx$; 4. $\int \frac{1-2x}{x+4}dx$;

5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

6. $\int x5^{2x}\,dx$;

7. $\int x\,arctg\,2x\,dx$;

8. $\int\limits_{5}^{4\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$;

9. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

10. $y = -x^2 + 6x$, $y = x + 4$;

11. $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le x \le 1$;

12. $y^2 = 5x$, $5y = x^2$, $\{Ox\}$;

13. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$;

14. $y'\,\mathrm{tg}x + y = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

5. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x(x-2)}$;

6. $\int xe^{-3x}\,dx$;

7. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$;

8. $\int\limits_{0}^{1} x^2e^{x^3}\,dx$;

9. $\int\limits_{0}^{\pi/6} x\sin 3x\,dx$;

10. $4y = x^2$, $4x = y^2$;

11. $(4 - y)^2 = x^3$, $0 \le x \le 5$;

12. $y = 3x - x^2$, $y = 2$ $\{Ox\}$;

13. $y' = \frac{y\ln^3 y}{x+1}$;

14. $y' = y^2\mathrm{ctg}x$, $y(\pi/2) = -1$.

ВАРИАНТ 19

1. $\int \left(\sqrt{2} - \sqrt{x}\right)^2 dx$;

2. $\int \frac{x^2}{(27+9x^3)^2}\,dx$;

3. $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$;

4. $\int \frac{7x+14}{2x-14}\,dx$;

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{2x+1}\,dx$;

6. $\int (x-1)3^{2x}\,dx$;

7. $\int x^2\ln(x^3+1)dx$;

8. $\int\limits_{\sqrt{e}}^{e^2} \frac{1}{x}\frac{dx}{\sqrt{1+\ln^2 x}}$;

9. $\int\limits_{0}^{1} (x-3)2^x\,dx$;

10. $2y = x + 1$, $y^2 = 1 + x$;

ВАРИАНТ 20

1. $\int \left(\frac{1}{2} - \sqrt[4]{x}\right)^2 dx$;

2. $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$;

3. $\int \frac{x^3}{x^8+4}\,dx$;

4. $\int \frac{2x+10}{3x-1}\,dx$;

5. $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-1}}$;

6. $\int (2x+3)\cos\frac{x}{2}\,dx$;

7. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

8. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$;

9. $\int\limits_{1}^{e} x^3\ln x\,dx$;

10. $x = 1$, $y^2 = 4 - x$;

11. $(y-1)^2 = 9x^3$, $0 \le x \le 3$; 12. $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$, $\{Ox\}$; 13. $\frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{x}$; 14. $yy' = -\frac{2x}{\cos y}$, $y(0) = \pi/2$.	11. $x^2 + (y-5)^2 = 4$, $0 \le x \le 1$; 12. $y = x^2/2$, $y = x^3/8$, $\{Ox\}$; 13. $xydy = (2 + x^2)dx$; 14. $y' = -\frac{y\cos x}{2+\sin x}$, $y(-\pi/2) = e$.
ВАРИАНТ 21 1. $\int 5^x(3^x+1)dx$; 2. $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$; 3. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$; 4. $\int \frac{5x-1}{x-5}dx$; 5. $\int \frac{dx}{(2+\sqrt[3]{x})}$; 6. $\int (9x+1)\sin 3xdx$; 7. $\int \sqrt[3]{x}\ln xdx$; 8. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$; 9. $\int_0^1 x^3 arcctgxdx$; 10. $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$; 11. $2 + 4y = x^2 - 2\ln x$, $1 \le x \le e$; 12. $y^2 = 3x$, $x^2 = 3y$, $\{Ox\}$; 13. $x\sqrt{1+y^2}dx - y\sqrt{1+x^2}dy = 0$; 14. $(2 + \cos x)\, y' = y\sin x$, $y(\pi) = e$.	ВАРИАНТ 22 1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{3}}{3\sqrt{x}}dx$; 2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; 3. $\int \frac{\sqrt{\ln x}-3}{x\ln x}dx$; 4. $\int \frac{2x^2-1}{x^2-4}dx$; 5. $\int \frac{2dx}{\sqrt{x}-x}$; 6. $\int (3x+2)\sin 6xdx$; 7. $\int x\ln(x+1)dx$; 8. $\int_0^1 \frac{2xdx}{x^4+1}$; 9. $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln xdx}{x^5}$; 10. $y = 8 - x^2$, $y = x^2$; 11. $7 + y = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$; 12. $y = e^{2x}$, $y = 1$, $x = 1$, $\{Ox\}$; 13. $(x^2 - 1)\, y' = 2y^2$; 14. $y'\, tgx - y = 2$, $y(\pi/4) = -1$.

ВАРИАНТ 23	ВАРИАНТ 24
1. $\int \frac{(1+x^2)^2}{3x^3}dx$; 2. $\int \frac{x}{3-6x^2}dx$; 3. $\int e^{2x^2+\ln x}dx$; 4. $\int \frac{5x-4}{3x+2}dx$; 5. $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x}}dx$; 6. $\int (8x+1)\cos 6x dx$; 7. $\int \frac{\ln x+x^2}{x^3}dx$; 8. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x e^{2\cos x}dx$; 9. $\int\limits_0^{\pi/4} arctgx dx$; 10. $xy = 2$, $x + 2y - 6 = 0$; 11. $y = 3 + \ln\cos x$, $\pi/6 \le x \le \pi/3$; 12. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $\{Ox\}$; 13. $x^2 y' - (2x-1)y = 0$; 14. $y' = \text{tg}x \cdot \text{tg}y$, $y(0) = \pi/6$.	1. $\int \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{2x}}dx$; 2. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$; 3. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$; 4. $\int \frac{x^4}{1-x^2}dx$; 5. $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}dx$; 6. $\int (7x+1)\cos x dx$; 7. $\int arctg 2x dx$; 8. $\int\limits_0^1 e^{2x+1}dx$; 9. $\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx$; 10. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$; 11. $2y - 7 = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{3}$; 12. $x^2 + 4y - 16 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$, $\{Ox\}$; 13. $y' + \frac{2x-1}{x^2}y = 0$; 14. $y'\text{tg}x - y = 1$, $y(\pi/3) = 0$.
ВАРИАНТ 25	ВАРИАНТ 26
1. $\int \frac{2-3x+4x^2}{12x}dx$; 2. $\int \frac{x^2}{25-x^3}dx$; 3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x+3}}dx$; 4. $\int \frac{x^2-9}{x^2+1}dx$;	1. $\int (x-1)^2(x-3)dx$; 2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3. $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$; 4. $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$;

5. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{x+7}}$; 6. $\int (1-2x)\sin 2x dx$; 7. $\int \frac{1+\ln x}{x^2} dx$; 8. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$; 9. $\int_0^1 (2x-3)e^{-x} dx$; 10. $y=x^2-5x+6$, $y=0$, $x=-1$; 11. $y-3=\ln x$, $1\le x\le 2$; 12. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=-1$, $\{Ox\}$; 13. $yy'=\frac{1+y^2}{1+x^2}x$; 14. $\cos x\cdot\sin y dy=\sin x\cdot\cos y dx$, $y(0)=\pi/4$.	5. $\int (5x+7)\sin 5x dx$; 6. $\int \ln(2x+1) dx$; 7. $\int \frac{x^2+2}{x^2+4} dx$; 8. $\int_0^{\pi/3} tgx dx$; 9. $\int_0^{\sqrt{3}} x\, arctgx dx$; 10. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$; 11. $(y-4)^2=x^3$, $0\le x\le 5$; 12. $y=x^2$, $y=2-x^4$, $\{Ox\}$; 13. $y'+\sqrt{\frac{1-y}{x-1}}=0$; 14. $y^3y'=1+2x$, $y(0)=2$.
ВАРИАНТ 27 1. $\int \left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^2 dx$; 2. $\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{1+2e^x}} dx$; 3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+16}} dx$; 4. $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$; 5. $\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} dx$; 6. $\int (4x-2)\cos 4x dx$; 7. $\int (x^2+x)\ln x dx$; 8. $\int_2^3 (3x-2)^3 dx$; 9. $\int_0^1 \arccos x dx$; 10. $x^2-8y-16=0$, $y=x$;	ВАРИАНТ 28 1. $\int \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$; 2. $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx$; 3. $\int tg4x dx$; 4. $\int \frac{2x-1}{x-2} dx$; 5. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-1}}$; 6. $\int (5x-2)\sin 5x dx$; 7. $\int \sqrt[3]{x^5}\ln x dx$; 8. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$; 9. $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$; 10. $y=x^4$, $y=32-x^4$;

11. $(y-1)^2 = 25x^3$, $0 \le x \le 3$; 12. $y = 2x^2$, $y = 3 - x^4$, $\{Ox\}$; 13. $x + yy' = 1$; 14. $(1+\cos x)\, yy' = \sin x$, $y(\pi/2)=2$.	11. $(y+5)^2 + x^2 = 4$, $0 \le x \le 1$; 12. $y = 1 - x$, $y = 7 - x^2$, $\{Ox\}$; 13. $xydy + (x+1)dx = 0$; 14. $y'\,\mathrm{tg}x + y = 2$, $y(\pi/4)=1$.
ВАРИАНТ 29 1. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx$; 2. $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx$; 3. $\int \cos(e^x+2)e^x dx$; 4. $\int \frac{x+3}{x-3}dx$; 5. $\int \frac{7\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; 6. $\int (2x+4)\cos 2x dx$; 7. $\int (x-1)^2 \ln x dx$; 8. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tgx}}$; 9. $\int_0^1 (x+3)e^x dx$; 10. $y = -x^2 + 4$, $y = 2x + 1$; 11. $4y + 1 = x^2 - 2\ln x$, $1 \le x \le e$; 12. $y^2 = 2x - 2$, $y = x - 1$, $\{Oy\}$; 13. $y(x^2+1)\,y' = 1 + y^2$; 14. $(1+e^x)\,yy' = e^x$, $y(0) = 1$.	ВАРИАНТ 30 1. $\int (\sqrt{8}+\sqrt{2x})^3 dx$; 2. $\int \frac{6x}{x^2+6x+10}dx$; 3. $\int \frac{dx}{x\cos^2 \ln x}$; 4. $\int \frac{6x}{3x+2}dx$; 5. $\int \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}dx$; 6. $\int x\cos\frac{x}{3}dx$; 7. $\int \arcsin 5x dx$; 8. $\int_1^e \frac{2-\ln x}{x}dx$; 9. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 10. $y^2 - 2x + 2 = 0$, $x - y - 1 = 0$; 11. $y - 2/3 = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$; 12. $y=3$, $y = 5 - x^2$, $\{Ox\}$; 13. $xyy' = 1 - x^2$; 14. $y'\,\mathrm{ctg}x + y = 0$, $y(\pi/3) = 1$.

ВАРИАНТ 31

1. $\int \frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{x^3}dx$;

2. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

3. $\int \frac{e^{\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx$;

4. $\int \frac{x}{2x+1}dx$;

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+4)}dx$;

6. $\int (3x+1)\sin 3x dx$;

7. $\int arctg\,\frac{x}{2}dx$;

8. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$;

9. $\int\limits_1^e (2x-1)\ln x dx$;

10. $y = 4x - x^4$, $y = 2x$;

11. $y + \frac{1}{2} = \ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/3$;

12. $y = 2^x$, $y=0$, $x=1$, $x=3$, $\{Ox\}$;

13. $\mathrm{tg}x\cdot\sin^2 y dx = \cos^2 x\cdot\mathrm{ctg} y dy$;

14. $(x^2-1)\,y' + 2xy^2 = 0$, $y(\sqrt{2}) = 1$.

ВАРИАНТ 32

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[3]{x} + 8x}{x^2}dx$;

2. $\int x^5\sqrt[3]{3-2x^6}dx$;

3. $\int \frac{dx}{arctg\,2x(1+4x^2)}$;

4. $\int \frac{x^2}{x+4}dx$;

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx$;

6. $\int (2x+3)\cos 2x dx$;

7. $\int \arcsin\frac{x}{3}dx$;

8. $\int\limits_1^e \frac{x^3 - \ln^3 x}{x}dx$;

9. $\int\limits_0^1 (x+2)e^{-x}dx$;

10. $y = 3x$, $x = y$, $x = 2$;

11. $3 + 2y = x^{3/2}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$;

12. $y^2 = 4x$, $y = x$, $\{Oy\}$;

13. $y' = \mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y$;

14. $x^2y^2y' = 1 - x^2$, $y(1) = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вы завершили изучение основных понятий математического анализа. Полученные навыки вычисления производных, понятия и вычисления интегралов будут нужны Вам далее для изучения далее таких дисциплин как прикладная механика, архитектурная физики, а также других общетеоретических и специальных дисциплин. Поэтому, хочется обратить внимание студента на изучение таких понятий как производная функции, на определение и приложения интеграла.

Более подробное изложение данного материала можно найти в книгах, учебных пособиях и монографиях, указанных в списке литературы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. –15-е изд. сер. СПб.: Лань, 2009. – 735 с.
2. Будаев В. Д. Математический анализ. Функции одной переменной: учебник / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон. – СПб.: Лань, 2012. - 544 с.
3. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. - М.: Просвещение, 2002. – 328 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 2009. Ч.1. – 368 с.
5. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. / Б. П. Демидович. -13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
6. Интегральное исчисление: метод. указания и задания по высшей математике / С. М. Алейников [и др.]. – Воронеж: Воронеж. гос. арх.-строит. ун-т, 2008. – 82 с.
7. Ильин В. А. Математический анализ: учебник для бакалавров -14-е изд., пер. и доп. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 660 с.
8. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон.– СПб.: М.; Краснодар: Лань, 2009. – 736 с.
9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. / Н. С. Пискунов. – М.: Интеграл - Пресс, 2008. Ч.1. – 416 с.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск: Вышейш. шк., 1990. Ч.1. – 271 с.
11. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск: Вышейш. шк., 1991. Ч.2. – 350 с.
12. Шипачев В. С. Математический анализ. Теория и практика / В. С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2009. – 350 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

АКЧУРИНА ЛЮДМИЛА ВАСИЛЬЕВНА
ГЛАЗКОВА МАРИЯ ЮРЬЕВНА
КАВЕРИНА ВАЛЕРИЯ КОНСТАНТИНОВНА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать _________. 2019.
Формат 60x84 1/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л._5,6_ Тираж 125 экз. Заказ № _____.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026 Воронеж, Московский просп., 14