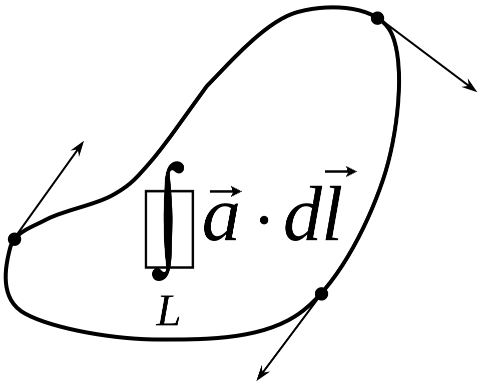
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для практических занятий по курсу «Спецглавы математики»
для студентов направления 22.03.02 «Металлургия»
очной формы обучения



Воронеж 2021

Составители: канд. техн. наук С.А. Кострюков,
канд. техн. наук В.В. Пешков,
канд. физ.-мат. наук Г.Е. Шунин

Векторный анализ и элементы теории поля: Методические указания для практических занятий по курсу «Спецглавы математики» для студентов направления 22.03.02 «Металлургия» очной формы обучения / Воронеж. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: С.А. Кострюков, В.В. Пешков, Г.Е. Шунин. Воронеж, 2021. 59 с. Электронный ресурс кафедры высшей математики и физико-математического моделирования.

Настоящие методические указания предназначены в качестве руководства для практических занятий и самостоятельной работы для студентов очной формы обучения. Приведены темы практических занятий, основные теоретические сведения, большое количество задач и примеры их решения. Методические указания подготовлены в электронной форме и содержатся в файле ВА и ЭТП.pdf.

Ил. 4. Библиогр.: 5 назв.

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Публикуется по решению методического семинара кафедры высшей математики и физико-математического моделирования.

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля. Векторное поле. Векторные линии. Производная по направлению и градиент.

Криволинейные и поверхностные интегралы первого и второго родов. Циркуляция векторного поля. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция и ротор векторного поля. Их физический смысл. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Формулы Грина.

Дифференциальные операции второго порядка. Специальные виды скалярных и векторных полей. Основная теорема векторного анализа. Криволинейные координаты в векторном анализе.Дифференциальные операции в цилиндрических и сферических координатах..

ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Вычисление производных по направлению и градиентов скалярного поля.
2. Вычисление криволинейных интегралов.
3. Вычисление поверхностных интегралов.
4. Нахождение дивергенции векторного поля и применение формулы Остроградского–Гаусса.
5. Нахождение ротора векторного поля и применение формулы Стокса.
6. Применение оператора Гамильтона и дифференциальные операции второго порядка.
7. Специальные типы векторных полей

ТЕМЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ

1. Формулы Грина.
2. Дифференциальные операции первого и второго порядков в криволинейных координатах. Основная теорема векторного анализа.

1. СКАЛЯРНЫЕ, ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Основные определения. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей. Пусть D – область в пространстве двух, трех или n измерений. Говорят, что в области D задано скалярное поле, если в D задана скалярная функция точки $u(P) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(\boldsymbol{r})$, называемая функцией поля ($\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Если каждой точке $P \in D$ поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, то говорят, что в области D задано векторное поле, определяемое векторной функцией $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Тензорным полем m-го ранга $\hat{T}(P) = T_{i_1 \ldots i_m}(x_1, \ldots, x_n)$ называется совокупность n^m скалярных функций, образующих в любой точке $P \in D$ тензор m-го ранга. Индексы $i_1, \ldots, i_m$ принимают значения от 1 до n. Скалярное и векторное поля являются частными случаями тензорных полей нулевого и первого ранга.

Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются линии уровня $u(x, y) = C$ в пространстве двух измерений, поверхности уровня, или эквипотенциальные поверхности, $u(x, y, z) = C$ в пространстве трех измерений и гиперповерхности уровня $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ в пространстве $n > 3$ измерений. Простейшими геометрическими характеристиками векторных полей являются векторные линии и векторные трубки. Векторной линией называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии для векторного поля $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)}$$

(аналогично для плоских и многомерных полей). Векторной трубкой называется поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не совпадающей (даже частично) с какой-либо векторной линией.

Определить вид линий или поверхностей (гиперповерхностей) уровня следующих скалярных полей:

1. $u = y^2 + x$. **2.** $u = xy$. **3.** $u = y/x$. **4.** $u = x + y + z$. **5.** $u = x^2 + y^2 - z^2$.
6. $u = x^2 + y^2 - z$. **7.** $u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. **8.** $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Найти векторные линии следующих полей:

9. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$. **10.** $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$. **11.** $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. **12.** $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

13. $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}]$ ($\boldsymbol{c}$—постоянный вектор).

◀ Пусть $\boldsymbol{c} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$. Тогда

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (cy - bz)\boldsymbol{i} + (az - cx)\boldsymbol{j} + (bx - ay)\boldsymbol{k}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий поля $\boldsymbol{a}$ имеют вид:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}.$$

Умножая числитель и знаменатель первой дроби на x, второй – на y и третьей на z, находим

$$\frac{xdx}{cxy - bxz} = \frac{ydy}{ayz - cxy} = \frac{zdz}{bxz - ayz}.$$

Складывая почленно и используя свойство пропорции, окончательно выводим:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Следовательно, $xdx + ydy + zdz = 0$, или $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

Отсюда получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$.

Аналогично, умножая числитель и знаменатель первой дроби на a, второй на b, третьей на c и складывая почленно, находим

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{adx + bdy + cdz}{0}$$

Следовательно, $adx + bdy + cdz = 0$, или $ax + by + cz = C_2$.

Таким образом, уравнения векторных линий имеют вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2, \quad (C_1 \geq 0), \\ ax + by + cz = C_2. \end{cases}$$

Векторные линии поля $\boldsymbol{a}$ представляют собой окружности, являющиеся сечениями сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ плоскостями $ax + by + cz = C_2$, перпендикулярными вектору $\boldsymbol{c}$. ▶

14. $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{i}}{x} + \dfrac{\boldsymbol{j}}{y} + \dfrac{\boldsymbol{k}}{z}$. **15.** $\boldsymbol{a} = (y-z)\boldsymbol{i} + (z-x)\boldsymbol{j} + (x-y)\boldsymbol{k}$.

16. $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_4\boldsymbol{e}_4$.

17. Найти векторную линию поля $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$, проходящую через точку $P(1, 0, 0)$.

18. Найти векторную линию поля $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, проходящую через точку $P(1/2, -1/2, 1)$.

19. Определить вид векторных трубок:

а) в задаче 12; б) в задаче 15.

Производная по направлению и градиент скалярного поля. Дифференцирование тензорного поля. Пусть $\boldsymbol{s} = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + \cos\beta \cdot \boldsymbol{j} + \cos\gamma \cdot \boldsymbol{k}$ – единичный вектор данного направления s, $\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ – радиус-вектор точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$. *Производная* скалярного поля $u(P)$ в точке P_0 *по направлению* s, обозначаемая через $\dfrac{\partial u}{\partial s}$, определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau \to 0} \frac{u(\boldsymbol{r}_0 + \tau \boldsymbol{s}) - u(\boldsymbol{r}_0)}{\tau}$$

и характеризует скорость изменения функции $u(P)$ в направлении s. Производная $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ вычисляется по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} \cos\gamma. \quad (1)$$

Градиентом скалярного поля $u(P)$, обозначаемым символом $\operatorname{grad} u$, называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные функции $u(P)$, т. е.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \quad (2)$$

Аналогично определяется производная по направлению и градиент для n-мерных скалярных полей.

Т е о р е м а . Если $T_{i_1 \dots i_m}(\boldsymbol{r})$ – тензорное поле m-го ранга, то его частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \dots i_m}(\boldsymbol{r})$ есть тензорное поле (m+1)-го ранга $T_{i_1 \dots i_m, i}(\boldsymbol{r})$.

С л е д с т в и е . Если $u(\boldsymbol{r})$ – скалярное поле, то $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – компоненты вектора (i = 1, … , n), являющегося градиентом скалярного поля ($\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \equiv [\operatorname{grad} u]_i$).

Исходя из выражения производной по направлению (1) и определения градиента (2), доказать следующие свойства градиента:

20. Производная поля по направлению $\boldsymbol{s}$ равна скалярному произведению градиента поля на единичный вектор данного направления, т.е. равна проекции градиента на данное направление

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{s}) = |\operatorname{grad} u| \cos \varphi ,$$

где φ – угол между градиентом и вектором $\boldsymbol{s}$.

21. Направление градиента есть направление наибыстрейшего возрастания функции поля.

22. В каждой точке поля градиент направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня в сторону возрастания потенциала поля, т. е.

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial n} .$$

где n – направление нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции поля.

23. Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ – дифференцируемые функции, c – постоянная. Доказать следующие соотношения:

а) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;

б) $\operatorname{grad}(c + u) = \operatorname{grad} u$;

в) $\operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u$;

г) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;

д) $\operatorname{grad}(u^n) = nu^{n-1}\operatorname{grad} u$;

е) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v}{v^2}, \quad v \neq 0$.

Найти градиенты следующих скалярных полей:

24. $u = |\boldsymbol{r}|$. **25.** $u = \ln|\boldsymbol{r}|$. **26.** $u = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$; $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

27. $u = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ – постоянные векторы.

28. $u = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}]|^2$; $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

Пусть $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Показать, что:

29. $(\operatorname{grad} u(r), \boldsymbol{r}) = u'(r)\, r$. **30.** $[\operatorname{grad} u(r), \boldsymbol{r}] = 0$.

Найти производные от следующих полей в заданных точках по заданному направлению:

31. $u = x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$ в точке $P_0(2, -1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где P_1 (6, 2).

32. Найти производную скалярного поля $u = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 + z$ в точке $P(2, 1, 1)$ по направлению прямой $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.

33. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ в точке $P(1, 3, 2, -1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_4$.

34. Найти производную скалярного поля $u = 1/|\boldsymbol{r}|$ по направлению его градиента.

35. Найти производную поля $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ в точке $M(a; b; c)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

36. Найти угол между градиентами поля $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $P_1(2, 3, -1)$ и $P_2(1, -1, 2)$.

37. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = xyz$ в точке $P(1, 2, 2)$.

38. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня поля $u = x^2 + 2xy - 4yz$ в точке $P_0(1, 1, -1)$, направленный в сторону возрастания поля.

39. Найти стационарные точки поля $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$.

Убедиться в ортогональности линий уровня полей:

40. $u = x^2 - y^2$, $v = xy$. **41.** $u = 2x^2 + y^2$, $v = y^2/x$.

Убедиться в ортогональности поверхностей уровня следующих полей:

42. $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz + yz$. **43.** $u = x^2 + y^2 - 2z^2$, $v = xyz$.

44. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, $v = x_1x_3 + x_2x_4$, $w = x_1x_4 - x_2x_3$.

Найти семейство линий наибыстрейшего возрастания для следующих полей:

45. Плоского поля $u = x^2 - y^2$. **46.** Трехмерного поля $u = xyz$.

47. Трехмерного поля $u = x^2 + y^2 - z^2$.

2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть $\breve{AB}$ – дуга кусочно гладкой кривой, $u(P)$ – заданное на $\breve{AB}$ скалярное поле, и $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ – произвольное разбиение дуги $\breve{AB}$ и P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) – произвольные точки на частичных дугах $A_{\nu-1}A_\nu$, длины которых обозначим через Δs_ν. Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\Delta s_\nu$ при $\max\limits_{\nu} \Delta s_\nu \to 0$ (и $n\to\infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги $\breve{AB}$ точками A_ν, ни от выбора точек P_ν в частичных дугах $A_{\nu-1}A_\nu$, то этот предел называется *криволинейным интегралом* 1-*го рода* от функции $u(P)$ по кривой $\breve{AB}$ и обозначается через

$$\int\limits_{AB} u(P)ds = \int\limits_{AB} u(x, y, z)ds$$

(ds – дифференциал дуги), т. е.

$$\int\limits_{AB} u(P)ds = \lim_{\max\limits_{\nu} \Delta s_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\Delta s_\nu \,. \qquad (1)$$

Если функция $u(P)$ непрерывна на $\overset{\smile}{AB}$, то интеграл (1) существует.

Физически интеграл (1) можно рассматривать как массу кривой $\overset{\smile}{AB}$. Вычисление интеграла (1) сводится к вычислению определенного интеграла. Например, если уравнение дуги $\overset{\smile}{AB}$ задано в виде $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t_0 \le t \le t_1$, то

$$\int\limits_{AB} u(P)ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} u(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt \,.$$

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от того, в каком направлении проходится дуга $\overset{\smile}{AB}$, иными словами,

$$\int\limits_{AB} u(P)ds = \int\limits_{BA} u(P)ds \,.$$

П р и м е р 1. Определить массу M первого витка винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht$, если плотность $\mu(P)$ *в* каждой ее точке пропорциональна длине радиус-вектора этой точки.

◀ Так как $\mu = kr = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то в точках винтовой линии $\mu = k\sqrt{a^2 + h^2t^2}$. Первому витку отвечает изменение параметра t от 0 до 2π и

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{a^2 + h^2}\,dt \,.$$

Отсюда

$$M = \int\limits_0^{2\pi} k\sqrt{a^2 + h^2}\sqrt{a^2 + h^2t^2}\,dt =$$

$$= k\sqrt{a^2 + h^2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2 + h^2t^2} + \frac{a^2}{2h}\ln\left(ht + \sqrt{a^2 + h^2t^2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= k\sqrt{a^2 + h^2}\left(\pi\sqrt{a^2 + 4\pi^2h^2} + \frac{a^2}{2h}\ln\frac{2\pi h + \sqrt{a^2 + 4\pi^2h^2}}{a}\right). \ ▶$$

В задачах 48 – 54 вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

48. $\int\limits_C (x+y)ds$, где C – контур треугольника ABO с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ и $O(0, 0)$.

49. $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} ds$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$.

50. $\int\limits_C xyds$, где C – контур квадрата $|x|+|y|=a,\ (a>0)$.

51. $\int\limits_C y^2 ds$, где C – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

52. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, где C – дуга развертки окружности $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)\quad (0\le t\le 2\pi)$.

53. $\int\limits_C \frac{yds}{x+3z}$, где C – дуга линии $x=t,\quad y=t^2/\sqrt{2}$, $z=t^3/3$ от $O(0, 0, 0)$ до $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}/3)$.

54. $\int\limits_C (x^2+y^2)ds$, где C – дуга логарифмической спирали $r=ae^{3\varphi}$ от точки $A(a, 0)$ до точки $O(0, 0)$.

55. Найти массу всей астроиды $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке P выражается формулой $\mu(P)=k|xy|$, где $k>0$ – коэффициент пропорциональности.

58. Найти массу дуги конической винтовой линии $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$, если плотность в каждой ее точке P выражается формулой $\mu=ke^t$ (где $k>0$ – коэффициент пропорциональности), от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(a, 0, a)$.

60. Найти массу четверти окружности $x^2+y^2=r^2$, расположенной в первом квадранте, если плотность ее в каждой точке пропорциональна абсциссе этой точки (коэффициент пропорциональности α).

61. Найти массу полуокружности $x^2+y^2=r^2$, расположенной в верхней полуплоскости, если плотность ее в каждой точке пропорциональна кубу ординаты этой точки (коэффициент пропорциональности β).

Криволинейный интеграл 2-го рода. Пусть на дуге $\overset{\smile}{AB}$ кусочно гладкой кривой задано векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+$ $+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$, и пусть $A=A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n=B$ – произвольное разбиение дуги $\overset{\smile}{AB}$ на частичные дуги, P_ν (ν = 1, 2, ..., n) – произвольные точки на дугах $A_{\nu-1}A_\nu$, а приращение радиус-вектора $\boldsymbol{r}(P)$ на концах дуги $A_{\nu-1}A_\nu$. Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{a}(P_\nu)\Delta\boldsymbol{r}_\nu$ при $\max\limits_{\nu}|\Delta\boldsymbol{r}_\nu|\to 0$ (и $n\to\infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги $\overset{\smile}{AB}$ на частичные дуги, ни от выбора точек P_ν в этих частичных дугах, то этот предел называется *криволинейным интегралом 2-го рода* по дуге $\overset{\smile}{AB}$ и обозначается через

$$\int\limits_{AB}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=\int\limits_{AB}a_x dx+a_y dy+a_z dz\,,$$

т.е.

$$\int\limits_{AB}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=\lim_{\max\limits_{\nu}|\Delta\boldsymbol{r}_\nu|\to 0}\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{a}(P_\nu),\Delta\boldsymbol{r}_\nu)\,. \tag{2}$$

Здесь $(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})$ и $(\boldsymbol{a}(P_\nu),\Delta\boldsymbol{r}_\nu)$ – скалярные произведения векторов. Если вектор-функция $\boldsymbol{a}(P)$ непрерывна на $\overset{\smile}{AB}$, то интеграл (2) существует.

Интеграл (2) называют также *линейным интегралом* вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Аналогично определяются линейные интегралы в плоских и многомерных векторных полях. Если даны параметрические уравнения дуги AB: $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t_0\le t\le t_1$, то

$$\int\limits_{AB}(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[a_x\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+a_y\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+$$
$$+a_z\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big]dt \tag{3}$$

Здесь t_0 и t_1 – значения параметра t, отвечающие точкам A и B. В отличие от криволинейных интегралов 1-го рода, линейные интегралы (2) зависят от направления, по которому производится интегрирование вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}$:

$$\int_{AB} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int_{BA} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}).$$

Простейший физический смысл линейного интеграла – работа силового поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ при перемещении в нем материальной точки по кривой AB из точки A в точку B.

Пример 2. Найти работу силового поля $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ при перемещении материальной точки вдоль первого витка конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ из точки $A(0, 0, 0)$ в точку $B(a, 0, a)$.

◀ Так как $dx = ae^t(\cos t - \sin t)\,dt$, $dy = ae^t(\cos t + \sin t)\,dt$, $dz = ae^t dt$ и $(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = xdx + ydy + zdz =$

$$= a^2 e^{2t}((\cos t - \sin t)\cos t + (\cos t + \sin t)\sin t + 1)dt = 2a^2 e^{2t} dt,$$

то, учитывая, что $t = -\infty$ в точке A и $t = 0$ в точке B, имеем

$$\int_{AB} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 2a^2 \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt = a^2. \blacktriangleright$$

Линейный интеграл вектора $\boldsymbol{a}$, взятый по замкнутому контуру C, называется *циркуляцией* вектора поля по данному контуру и обозначается символом $\oint_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$. Направление обхода контура указывается заранее, причем положительным считается обход против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.

Для плоских векторных полей $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y)$ имеет место следующее утверждение:

Если векторная функция $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\boldsymbol{i} + a_y(x, y)\boldsymbol{j}$ непрерывна вместе с производными $\partial a_x/\partial y$ и $\partial a_y/\partial x$ в замкнутой области $\overline{G} = G \bigcup C$, то

$$\iint_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C a_x dx + a_y dy \quad \text{(формула Грина).}$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C (x + y)dx - (x - y)dy, \quad \text{где } C \text{ – окружность } x^2 + y^2 = r^2.$$

◀ Применяя формулу Грина, можем записать:

$$\oint_C (x+y)dx-(x-y)dy=\iint_K(-1-1)dxdy=-2\pi r^2,$$

так как $\iint_K dxdy$ есть площадь круга K: $x^2+y^2\le r^2$. ▶

62. Вычислить работу силового поля $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ из точки $A(a, 0)$ в точку $B(-a, 0)$.

63. Вычислить линейный интеграл $\int_{OB}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j},$ $O(0,0)$, $B(1,1)$, по следующим путям: **а**) отрезок прямой OB; **б**) дуга параболы $x^2=y$; **в**) дуга параболы $y^2=x$; **г**) ломаная $OAB,$ где $A(1,0)$; **д**) ломаная $OCB,$ где $C(0,1)$.

64. Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ вдоль окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ в отрицательном направлении.

65. Вычислить линейный интеграл $\int_{OA}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k},$ уравнение дуги OA: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k},$ $0\le t\le 1$.

66. Вычислить линейный интеграл $\int_{OA}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a}=-yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k},$ OA – первый виток винтовой линии $x=a\cos t,$ $y=a\sin t,$ $z=ht$ $(0\le t\le 2\pi)$.

67. Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ вдоль эллипса $\frac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2,$ $y=x$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{i}$.

68. Вычислить работу силового поля $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$ при перемещении материальной точки вдоль сечения гиперболоида $x^2+y^2-2z^2=2a^2$ плоскостью $y=x$ от точки $(a,$ $a,$ $0)$ до точки $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

Используя формулу Грина, вычислить интегралы:

69. $\oint\limits_C (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, где C – контур, образованный полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и осью Ox.

70. $\oint\limits_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, где C – контур, образованный синусоидой $y = \sin x$ и отрезком оси Ox при $0 \le x \le \pi$.

71. $\oint\limits_C x^2 y dx - xy^2 dy$, C – окружность $x^2 + y^2 = r^2$.

72. $\oint\limits_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, где C – треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

Поверхностный интеграл 1-го рода. Гладкая поверхность G в трехмерном пространстве называется *двусторонней,* если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности G и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальное положение. Выбор определенной стороны поверхности, т. е. выбор направления нормали к поверхности, называется *ориентацией* поверхности.

Пусть G – кусочно гладкая поверхность, $u(P)$ – заданное на G скалярное поле, $G_1, G_2, ..., G_n$ – произвольное разбиение поверхности G на частичные поверхности, площади которых равны $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$ и пусть P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) – произвольные точки на частичных поверхностях G_ν. Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\Delta\sigma_\nu$ при $\max\limits_\nu \Delta\sigma_\nu \to 0$ (и $n \to \infty$), который не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом* 1-*го рода* от функции $u(P)$ по поверхности G и обозначается через

$$\iint\limits_G u(P)d\sigma = \iint\limits_G u(x, y, z)d\sigma$$

($d\sigma$—дифференциал площади поверхности), т. е.

$$\iint\limits_G u(P)d\sigma = \lim_{\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\Delta\sigma_\nu . \qquad (4)$$

Если $u(P)$ непрерывна на G, то интеграл (4) существует. Вычисление интеграла (4) сводится к вычислению обычного двойного интеграла. Если поверхность G задана параметрически:

$$x = x(\xi, \eta),\ \ y = y(\xi, \eta),\ \ z = z(\xi,\eta),\ (\xi, \eta) \in D,$$

или в векторной форме – $\boldsymbol{r}(\xi,\ \eta) = x(\xi, \eta)\,\boldsymbol{i} + y(\xi, \eta)\,\boldsymbol{j} + z(\xi, \eta)\,\boldsymbol{k}$, то

$$\iint\limits_G u(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_D u\big(x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta),\ z(\xi,\eta)\big) \cdot |\,\vec{N}(\xi,\eta)\,|\, d\xi d\eta , \qquad (5)$$

где $\vec{N}(\xi,\eta) = [\boldsymbol{r}_\xi, \boldsymbol{r}_\eta] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \end{vmatrix}$ – вектор нормали (не единичной длины) к поверхности G; $\boldsymbol{r}_\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}; \frac{\partial y}{\partial \xi}; \frac{\partial z}{\partial \xi}\right)$, $\boldsymbol{r}_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}; \frac{\partial y}{\partial \eta}; \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$;

$|\,\vec{N}(\xi,\eta)\,| = \sqrt{|\,\boldsymbol{r}_\xi\,|^2 \cdot |\,\boldsymbol{r}_\eta\,|^2 - (\boldsymbol{r}_\xi, \boldsymbol{r}_\eta)^2}$.

Допустим, что прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность G лишь в одной точке, т. е. уравнение поверхности имеет вид $z = f(x, y)$, и пусть G проектируется на плоскость Oxy в область D. Элемент $d\sigma_1$ площади D выражается в виде $d\sigma_1 = d\sigma \cos\gamma$, где γ – острый угол, который нормаль к поверхности G составляет с осью Oz: $\cos\gamma = (1 + z'^2_x + z'^2_y)^{-1/2}$.

Таким образом,

$$\iint\limits_G u(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_D u(x, y, z)\frac{d\sigma_1}{\cos\gamma} = \iint\limits_D u(x, y, z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy .$$

Это же выражение можно получить из более общей формулы (5), положив $x = \xi,\ y = \eta,\ z = f(\xi, \eta)$. Если прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность G в двух или более точках, то G разбивается на части, каждая из которых пересекается с прямой, параллельной оси Oz, лишь в одной точке. Интегрирование следует выполнять по каждой из полученных частей.

Вместо плоскости Oxy поверхность G можно проектировать на плоскости Oxz или Oyz.

Для двусторонних поверхностей поверхностный интеграл 1-го рода не зависит от того, по какой стороне поверхности он берется. Физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода зависит от физического характера данного скалярного поля: он может определять массу, распределенную по данной поверхности, электрический заряд и т. д.

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_G \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где G – часть цилиндрической поверхности $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$; $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le H$.

◀ В данном случае применима формула (5), причем $|\vec{N}| = R$. Поэтому

$$\iint\limits_G \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^H \frac{R\,du\,dv}{\sqrt{R^2+v^2}} = 2\pi R\int\limits_0^H \frac{dv}{\sqrt{R^2+v^2}} = 2\pi R\ln\frac{H+\sqrt{R^2+H^2}}{R}.$$ ▶

Пример 5. Определить статический момент относительно плоскости Oxy и положение центра масс однородной полусферы G (плотности 1): $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z \ge 0)$.

◀ Имеем

$$M_{xy} = \iint\limits_G z\,d\sigma = \iint \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

где D – круг $x^2+y^2 \le R^2$, $z = 0$. Так как на полусфере $xdx+ydy+zdz=0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

откуда

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

и $$M_{xy} = \iint\limits_G z\,d\sigma = \iint\limits_D R\,dxdy = R\iint\limits_D dxdy = R\cdot\pi R^2 = \pi R^3.$$

Определим теперь координаты центра масс полусферы. В силу симметрии $x_0 = y_0 = 0$. Далее, так как площадь Q поверхности полусферы

G есть $2\pi R^2$, то

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{Q} = \frac{R}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 6. На всей поверхности конуса с высотой h и радиусом основания a распределены электрические заряды. В каждой точке поверхности плотность заряда пропорциональна аппликате этой точки ($e = kz$). Вершина конуса – в начале координат, его ось направлена по оси Oz. Определить суммарный заряд всей поверхности конуса.

$\blacktriangleleft$ Суммарный заряд основания конуса равен произведению его площади πa^2 на плотность точечного заряда, т. е. kh. Таким образом, $E_{осн} = k\pi a^2 h$. Заряд боковой поверхности G определяется интегралом

$$E_{бок.пов} = \iint_G kzd\sigma.$$

Уравнение поверхности конуса $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$, $0 \le z \le h$. Дифференцируя, находим $zdz = \frac{h^2}{a^2}(xdx + ydy)$, откуда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h^2}{a^2}\frac{y}{z}$ и, следовательно,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{h^4}{a^4}\cdot\frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a}.$$

Поэтому $E_{бок.\ пов} = k\iint_G zd\sigma = \frac{kh}{a}\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a}dxdy$,

где D – круг $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = 0$. Переходя к полярным координатам, получаем:

$$E_{бок.пов} = \frac{kh\sqrt{a^2 + h^2}}{a^2}\iint_G r^2 drd\varphi = \frac{kh\sqrt{a^2 + h^2}}{a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2 + h^2}.$$

Находим весь заряд:

$$E = E_{осн} + E_{бок.пов} = k\pi a^2 h + \frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2 + h^2} = \frac{k\pi ah}{3}(3a + 2\sqrt{a^2 + h^2}). \blacktriangleright$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

73. $\iint\limits_G x^2yz\,d\sigma$, где G – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

74. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, где G – часть поверхности конуса $x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le 1$.

75. $\iint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma$, где G – сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

76. $\iint\limits_G (x+y+z)\,d\sigma$, где G – часть сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

77. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az=x^2-y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k|z|$, где $k>0$ – коэффициент пропорциональности.

78. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2=x^2+y^2+a^2$ $(0\le z\le a\sqrt{2})$, если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки ($e=kz$).

79. Определить массу, распределенную по поверхности куба $|x|\le a,\ |y|\le a,\ |z|\le a$, если поверхностная плотность в точке $P(x,y,z)$ равна $k\sqrt[3]{|xyz|}$, где $k>0$ – коэффициент пропорциональности.

80. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности параболоида $2az=x^2+y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2+y^2=a^2$, если плотность заряда в каждой точке равна $k\sqrt{z}$, где $k>0$ – коэффициент пропорциональности.

Вычислить интегралы:

С81. $\iint\limits_G z^2\,d\sigma$, где G – часть конической поверхности $x=\xi\cos\eta\sin\alpha,\quad z=\xi\sin\eta\sin\alpha,\quad z=\xi\cos\alpha,\quad (\alpha=\text{const}, \alpha\in(0;\pi/2)),\ \ \xi\in[0;1],\ \eta\in[0;2\pi]$.

С82. $\iint\limits_G z d\sigma$, где G – поверхность $x=\xi\cos\eta,\ z=\xi\sin\eta,\ z=\eta,$ $\xi\in[0;1],\ \eta\in[0;2\pi]$.

Поверхностный интеграл 2-го рода. Пусть G – кусочно гладкая ориентированная поверхность и $\boldsymbol{a} = a_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$ – векторное поле. Разобьем поверхность G на частичные поверхности $G_1, G_2, \ldots, G_n$, площади которых обозначим через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ соответственно, а площади частичных поверхностей G_ν, снабженных единичными нормалями $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$ в точках $P_\nu \in G_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), – через $\Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu$ (т. е. считаем каждую такую площадь вектором длины $\Delta\sigma_\nu$ и направления $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$). Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu)$ при $\max\limits_{\nu}\Delta\sigma_\nu \to 0$ (и $n\to\infty$), который не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом 2-го рода* по поверхности G и обозначается через

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_G a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy, \tag{6}$$

т. е.
$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{\max\limits_{\nu} |\Delta\sigma_\nu| \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu).$$

Если поле $\boldsymbol{a}(P)$ непрерывно на G, то интеграл (6) существует.

Поверхностный интеграл 2-го рода называют также *потоком* векторного поля $\boldsymbol{a}(P)$ через поверхность G. Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающего за единицу времени в заданном направлении через поверхность G. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности, а потому и знак поверхностного интеграла 2-го рода.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению поверхностного интеграла 1-го рода

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) d\sigma = \iint\limits_G (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma) d\sigma, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ – единичная нормаль к поверхности, или к вычислению суммы трех двойных интегралов

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \pm\iint_{D_1} a_x(x(y,z),y,z)dydz \pm$$

$$\pm\iint_{D_2} a_y(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint_{D_3} a_z(x,y,z(x,y))dxdy,$$

где D_1, D_2 и D_3 – проекции G соответственно на плоскости Oyz, Oxz и Oxy, а $x(y,z)$, $y(x,z)$ и $z(x,y)$ – выражения, полученные из уравнения поверхности G разрешением относительно соответствующих координат. Знак “+” или “–” зависит от того, острый или тупой угол составляет вектор нормали с положительным направлением соответственно осей Ox, Oy, Oz.

В случае параметрического задания поверхности G $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in D$, справедлива следующая формула:

$$\iint_G a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy = \iint_D (\boldsymbol{a}, \vec{N})dudv = \iint_D \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv. \quad (8)$$

В частном случае $a_x = a_y = 0$, $a_z = R$ (8) принимает вид

$$\iint_G Rdxdy = \iint_D R(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.$$

Аналогично записываются формулы, когда $a_x = a_z = 0$, $a_y \neq 0$ и $a_y = a_z = 0$, $a_x \neq 0$.

П р и м е р 7. Найти поток вектора $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

◀ Имеем в силу (7)

$$\iint_G (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iint_G (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma.$$

Так как в первом октанте внешняя нормаль эллипсоида со всеми осями координат образует острые углы, то все три направляющих косинуса неотрицательны. Поэтому

$$\iint_G (\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_{D_1} xdydz + \iint_{D_2} ydxdz + \iint_{D_3} zdxdy = 3v = 3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi abc}{2}$$

(каждый из интегралов по D_1, D_2 и D_3 определяет объем v одной восьмой части эллипсоида). ▶

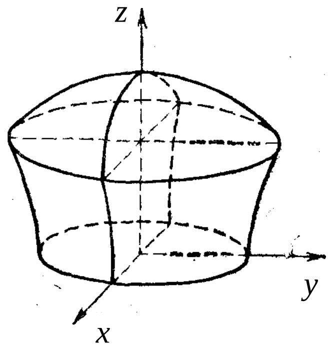
Пример 8. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 3R^2$, $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ в направлении внешней нормали.

◀ Имеем: $\iint_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) d\sigma = \iint_G (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma) d\sigma =$

$$= \iint_G x^2\cos\alpha d\sigma - \iint_G y^2\cos\beta d\sigma + \iint_G z^2\cos\gamma d\sigma.$$

Заданная поверхность ограничена сверху сегментом сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$, с боков – частью поверхности гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$, снизу кругом $x^2 + y^2 \le R^2$, $z = 0$ (см. рис.). На плоскости Oyz и Oxz поверхность G проектируется дважды с разных сторон, поэтому, в силу симметрии поверхности относительно этих плоскостей, первые два интеграла в записи потока равны нулю:

$$\iint_G x^2\cos\alpha d\sigma = \iint_G y^2\cos\beta d\sigma = 0.$$



На плоскость Oxy сферический сегмент проектируется в круг (область D_{31}) $x^2 + y^2 \le 2R^2$, часть поверхности гиперболоида – в кольцо (область D_{32}) $R^2 \le x^2 + y^2 \le 2R^2$, а нижним основанием служит лежащий в этой плоскости круг (область D_{33}) $x^2 + y^2 \le R^2$. Но для сегмента сферы $\cos\gamma > 0$, для гиперболоида $\cos\gamma < 0$, а на нижнем основании $z = 0$. Поэтому

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) d\sigma = \iint_G z^2\cos\gamma\, d\sigma =$$

$$= \iint_{D_{31}} (3R^2 - x^2 - y^2) dxdy - \iint_{D_{32}} (x^2 + y^2 - R^2) dxdy.$$

Для вычисления интегралов перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_{D_{31}}(3R^2-x^2-y^2)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R\sqrt{2}}(3R^2-r^2)rdr=4\pi R^4,$$

$$\iint\limits_{D_{32}}(x^2+y^2-R^2)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_R^{R\sqrt{2}}(r^2-R^2)rdr=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Таким образом, окончательно находим: $\iint\limits_G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma=\frac{7}{2}\pi R^4$. ▶

Пример 9. Вычислить интеграл $K=\iint\limits_G\frac{dxdy}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$, где G – часть эллипсоида $x=a\cos u\cos v$, $y=b\sin u\cos v$, $z=c\sin v$, $u\in[\pi/4;\pi/3]$, $v\in[\pi/6;\pi/4]$.

◀ Заметим, что функции $1/x$, $1/y$, $1/z$ положительные, а углы, образованные внешней нормалью с осями координат, – острые, поэтому $K>0$. Воспользуемся формулой (8). Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix}1/x & 1/y & 1/z\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{a\cos u\cos v} & \frac{1}{b\sin u\cos v} & \frac{1}{c\sin v}\\ -a\sin u\cos v & b\cos u\cos v & 0\\ -a\cos u\sin v & -b\sin u\sin v & c\cos v\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\right)\cos v.$$

Поэтому

$$K=\left(\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\right)\times\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}du\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\cos v\,dv=\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{24}\left(\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\right).$$ ▶

В задачах 83-86 вычислить поверхностные интегралы 2 рода:

83. $\iint\limits_G y\,dxdz$, где G – верхняя сторона части плоскости $x+y+z=a$, лежащей в первом октанте.

84. $\iint\limits_G\frac{dxdy}{z}$, где G – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

85. $\iint\limits_G x^2 dydz$, где G – внешняя сторона части поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq H$.

86. $\iint\limits_G z^2 dxdy$, где G – внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

87. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

88. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ через часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

89. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $z \leq H$ в направлении внутренней нормали.

90. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, в направлении внешней нормали.

91. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность куба $|x| \leq a$, $|y| \leq a$, $|z| \leq a$ в направлении внешней нормали.

92. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = 2x^2\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ в направлении внешней нормали.

93. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, вырезаемую плоскостями $x = R$, $z = 0$, $x = 0$, ориентированной в соответствии с направлением орта $\boldsymbol{k}$.

94. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, вырезаемую цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, ориентированной в соответствии с направлением орта $\boldsymbol{k}$.

Используя формулу (8), вычислить интегралы:

С95. $\iint\limits_G x^3 dydz + y^3 dzdx$, где G – внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $z \ge 0$.

С96. $\iint\limits_G zxdydz + xydzdx + yzdxdy$, G – внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \le 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le H$.

С97. Найти объем V тела, ограниченного гладкой поверхностью G:

1) поверхностью $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = -u + a\cos v$ ($u \ge 0$, $a > 0$) и плоскостями $x = 0$, $z = 0$;

2) поверхностью $x = (b + a\cos u)\cos v$, $y = (b + a\cos u)\sin v$, $z = a\sin u$, $b \ge a > 0$;

3) поверхностью $x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v$, $y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v$, $z = c\sin u$ и плоскостями $z = c$, $z = -c$.

У к а з а н и е . Воспользоваться формулой (см. задачу **105**)

$$V = \left|\frac{1}{3}\iint\limits_G xdydz + ydzdx + zdxdy\right|$$

(G – кусочно гладкая замкнутая поверхность, охватывающая объем V).

3. ТЕОРЕМЫ ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО И СТОКСА

Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса-Остроградского. *Дивергенцией* (или расхождением) векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, обозначаемой через $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность Σ_P к величине V_P объема тела, ограниченного этой поверхностью, при $V_P \to 0$, т. е. при условии, что поверхность стягивается в точку P:

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P = \lim_{V_P \to 0}\frac{1}{V_P}\oiint\limits_{\Sigma_P}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}). \qquad (1)$$

Дивергенция характеризует отнесенную к единице объема мощность потока векторного поля, “исходящего” из точки P, т.е. мощность источника (при $(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P > 0$) или стока (при $(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P < 0$), находящегося в точке P.

В трехмерном евклидовом пространстве дивергенция поля выражается следующим образом:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса-Остроградского. *Поток векторного поля* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ *через замкнутую поверхность* Σ, *лежащую в этом поле, в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области* V, *ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля,* т.е.

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\, dv. \tag{2}$$

Эта теорема справедлива в случае гладкого векторного поля, т.е. поля, каждая компонента которого обладает непрерывными частными производными по всем аргументам.

Задание. Выпишите соотношение (2) в координатной форме.

Обобщенная теорема Гаусса-Остроградского. Пусть дано гладкое тензорное поле $T_{i_1 \ldots i_m}(x_1, x_2, x_3)$. Тогда имеет место равенство

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \sum_{i_1=1}^{3} T_{i_1 \ldots i_m} \cdot n_{i_1} d\sigma = \iiint_V \sum_{i_1=1}^{3} T_{i_1 \ldots i_m,\, i_1} dv, \tag{3}$$

где n_{i_1} – компоненты внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности Σ.

Пример 1. Используя теорему Гаусса-Остроградского, найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + R^2 z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность G тела $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \le z \le H$ в направлении внешней нормали.

◀ Имеем $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 3(x^2 + y^2) + R^2$. Поэтому

$$\oint\!\!\!\oint_{G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iiint_V (3(x^2 + y^2) + R^2)dv.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение поверхности примет вид $z = Hr^2/R^2$,

$$\iiint\limits_V (3(x^2+y^2)+R^2)dv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (3r^2+R^2)rdr \int\limits_{Hr^2/R^2}^{H} dz =$$

$$=2\pi\int\limits_0^R (3r^2+R^2)\left(H-\frac{Hr^2}{R^2}\right)rdr=\frac{2\pi H}{R^2}\int\limits_0^R (R^4+2R^2r^2-3r^4)rdr=\pi HR^4. \blacktriangleright$$

98. Найти $\operatorname{div}(xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k})$.

99. Найти $\operatorname{div}\dfrac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$.

100. Найти дивергенцию векторного поля

$\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ в точке $P(1, 2, -1)$.

101. Найти дивергенцию градиента скалярного поля $u=x^3y^2z$ в точке $P(1, -1, 1)$.

102. Магнитное поле, создаваемое электрическим током силы I, текущим по бесконечному проводу, определяется формулой $\boldsymbol{H}(P)=\boldsymbol{H}(x,y)=2I\dfrac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$. Вычислить $\operatorname{div}\boldsymbol{H}(P)$.

103. Найти $\operatorname{div}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}]$, где $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор.

104. Найти $\operatorname{div}(r[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}])$, где $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор.

Используя теорему Гаусса-Остроградского, решить следующие задачи:

105. Доказать, что поток радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ через любую кусочно гладкую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

106. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}-z^3\boldsymbol{k}$ через всю поверхность куба $0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a$ в направлении внешней нормали.

107. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r$ через всю поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в направлении внешней нормали.

108. Распространить понятие потока и дивергенции на случай плоского (двумерного) поля и сформулировать теорему Гаусса-Остроградского для этого случая.

109*. Используя решение предыдущей задачи, преобразовать циркуляцию вектора по замкнутому контуру L в плоском поле в двойной интеграл по площади, ограниченной этим контуром.

110. Найти с помощью теоремы Гаусса-Остроградского поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ в направлении внешней нормали.

111. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$ в направлении внешней нормали.

С112. 1) Доказать формулы Грина

$$\iiint\limits_V (\nabla u, \nabla v)d\Omega = \oint\!\!\!\!\oint\limits_\Gamma u(\boldsymbol{n}, \nabla v)d\sigma - \iiint\limits_V u\Delta v d\Omega, \qquad \text{(A)}$$

$$\iiint\limits_V (u\Delta v - v\Delta u)d\Omega = \oint\!\!\!\!\oint\limits_\Gamma (u\nabla v - v\nabla u, \boldsymbol{n})d\sigma. \qquad \text{(B)}$$

Здесь u, v – дважды непрерывно дифференцируемые скалярные поля, V – ограниченная область с кусочно гладкой границей Г, ориентированной внешней нормалью $\boldsymbol{n}$.

2) С помощью (A) и (B) получить соотношения

$$\iiint\limits_V |\nabla u|^2 \, d\Omega = \oint\!\!\!\!\oint\limits_\Gamma u(\boldsymbol{n}, \nabla v)d\sigma - \iiint\limits_V u\Delta v d\Omega,$$

$$\iiint\limits_V \Delta u d\Omega = \oint\!\!\!\!\oint\limits_\Gamma (\boldsymbol{n}, \nabla u)d\sigma.$$

С113. Показать, что в случае тензорного поля 1-го ранга из формулы (3) следует формула (2).

Ротор векторного поля. Теорема Стокса. *Ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, обозначаемым $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, называется вектор, который в каждой точке P дифференцируемости поля определяется следующим образом:

$$(np_s \operatorname{rot}\boldsymbol{a})_P = \lim_{\sigma_P \to 0} \frac{1}{\sigma_P} \oint\limits_{l_P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}).$$

Здесь $\boldsymbol{s}$ – единичный вектор произвольного направления, l_P – малый замкнутый контур, окружающий точку P, лежащий в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{s}$ и обходимый в положительном по отношению к вектору s направлении, σ_P – площадь области, ограниченной контуром l_P ; предел ищется при условии, что контур l_P стягивается в точку P. В трехмерном пространстве $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ через декартовы прямоугольные координаты вектора $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ выражается следующим образом:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{dz}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{dx}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{dy}\right)\boldsymbol{k}\,.$$

Т е о р е м а   С т о к с а. *Циркуляция дифференцируемого векторного поля* $\boldsymbol{a}$ *по произвольному кусочно гладкому замкнутому контуру* L *равна потоку вектора* $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ *через поверхность* G, *ограниченную этим контуром* L:

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint_G (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma})\,. \qquad (4)$$

При этом единичной вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности G направлен в такую сторону, чтобы обход контура L происходил в положительном по отношению к $\boldsymbol{n}$ направлении.

З а д а н и е . Выпишите соотношение (4) в координатной форме.

П р и м е р 2. Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ по окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = R$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

◀ Так как $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, то $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. За поверхность G, ограниченную контуром L, примем сам круг, образованный сечением шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ плоскостью $x + y + z = R$. Центр круга $O'(R/3, R/3, R/3)$; его радиус $R_1 = R\sqrt{2/3}$. Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})/\sqrt{3}$. Так как $(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$, то находим

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint_G (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma = \sqrt{3}\iint_G d\sigma = \sqrt{3}\pi R_1^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}\,. \;\blacktriangleright$$

П р и м е р 3. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $y = x$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{i}$. Ответ проверить при помощи теоремы Стокса.

◀ Параметрические уравнения заданного эллипса $x = R\cos t$, $y = R\cos t$, $z = R\sin t$. Для обхода в заданном направлении параметр t надо изменять от 0 до 2π. Следовательно,

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \oint_L ydx - 2zdy + xdz = R^2 \int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t + 2\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 3\pi R^2.$$

Применим теорему Стокса. Имеем $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. За поверхность G, ограниченную контуром L, примем часть секущей плоскости, лежащей внутри эллипса. Единичный вектор нормали, направленный в нужную сторону, имеет вид $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$. Поэтому $(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 3/\sqrt{2}$ и

$$\iint_G (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}}\iint_G d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}}\pi ab.$$

Но так как эллипс имеет полуоси $a = R\sqrt{2}$ и $b = R$, то $\iint_G (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma = 3\pi R^2$. ▶

114. Найти $\operatorname{rot} xyz(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$.

115. Найти $\operatorname{rot}(P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j})$.

116. Показать, что магнитное поле $\boldsymbol{H}(P)$ (см. задачу 102) в области своего определения является безвихревым.

117. Найти ротор поля $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

118. Найти $\operatorname{rot}\dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{rot}\dfrac{\boldsymbol{r}}{|r|}$.

119. Вывести формулу Грина, применяя теорему Стокса к двумерному векторному полю $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$.

120. Пользуясь формулой Грина, убедиться в том, что площадь Q плоской области D, ограниченной кусочно гладким контуром L, можно найти при помощи любого из трех следующих интегралов:

$$Q = \oint_L xdy, \quad Q = -\oint_L ydx, \quad Q = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$$

121. При помощи теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = z^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y + z = R$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

122. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = z^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} + y^3\boldsymbol{k}$ по сечению гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y = 0$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{i}$. Проверить при помощи теоремы Стокса.

123. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2 + y^2 = Rz$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = R$ в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида. Проверить при помощи теоремы Стокса.

4. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Оператор Гамильтона и его применение. Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона – символического вектора ∇ (читается – набла), определяемого равенством

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя известные операции умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного произведения двух векторов, находим:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} u) = (\boldsymbol{s}, \nabla u) = (\boldsymbol{s}, \nabla)u,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{dz}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{dx}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{dy}\right)\boldsymbol{k} = [\nabla, \boldsymbol{a}].$$

По аналогии с производной по направлению от скалярной функции $\frac{\partial u}{\partial s}$, вводится понятие производной по направлению единичного вектора $\boldsymbol{s}$ от векторной функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Именно,

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial s} = (\boldsymbol{s},\nabla)\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_x)\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_y)\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_z)\boldsymbol{k} =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial s}\boldsymbol{i} + \frac{\partial a_y}{\partial s}\boldsymbol{j} + \frac{\partial a_z}{\partial s}\boldsymbol{k}\ .$$

Производные по направлению произвольного (не единичного) вектора $\boldsymbol{c}$ отличаются от производных по направлению единичного вектора $\boldsymbol{l}$ только тем, что в них входит дополнительный скалярный множитель $|\,\boldsymbol{c}\,|$:

$$(\boldsymbol{c},\nabla)\, u = (\boldsymbol{c},\ \operatorname{grad} u) = |\,\boldsymbol{c}\,|\,\frac{\partial u}{dl},$$

$$(\boldsymbol{c},\nabla)\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_x)\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_y)\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_z)\boldsymbol{k} = |\,\boldsymbol{c}\,|\,\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial l},$$

где $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{c}\,/\,|\,\boldsymbol{c}\,|$.

С помощью оператора Гамильтона удобно выполнять дифференциальные операции векторного анализа над сложными выражениями (произведение двух или более скалярных функций, произведение скалярной функции на вектор, скалярное и векторное произведения векторов и т. п.). Следует лишь помнить, что это оператор дифференцирования произведения.

Пример 4. Найти градиент произведения двух скалярных функций u и v.

◀ Имеем

$$\operatorname{grad}(uv) = \nabla(uv) = \nabla(\overset{\downarrow}{u}\,v) + \nabla(u\,\overset{\downarrow}{v}).$$

(стрелка указывает функцию, на которую “действует” оператор). Но

$$\nabla(\overset{\downarrow}{u}\,v) = v\nabla u = v \operatorname{grad} u\,, \qquad \nabla(u\ \overset{\downarrow}{v}) = u\nabla v = u \operatorname{grad} v\ .$$

Таким образом, $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$. ▶

Пример 5. Найти $\operatorname{rot}\,[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$, где $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор.

◀ Так как по известной формуле векторной алгебры

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

то, учитывая соотношение $[\nabla,[\boldsymbol{a},\overset{\downarrow}{\boldsymbol{c}}]] = 0$, имеем:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}] = [\nabla,[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]] = [\nabla,[\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{c}]] + [\nabla,[\boldsymbol{a},\overset{\downarrow}{\boldsymbol{c}}]] = (\nabla,\boldsymbol{c})\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}} - (\nabla,\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}})\,\boldsymbol{c}\,.$$

Но $(\nabla,\boldsymbol{c})\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{c},\nabla)\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}$, а это есть производная вектора $\boldsymbol{a}$ по направлению вектора $\boldsymbol{c}$. Далее, $(\nabla,\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\nabla,\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

Таким образом, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}] = (\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. ▶

Выполнить следующие дифференциальные операции ($\boldsymbol{c}$ – постоянный, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – переменные векторы):

124. Найти $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}u)$ и $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}u)$.

125*. Найти $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$ и $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

126. Найти $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ и $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

127*. Найти $\operatorname{rot}(\boldsymbol{c}u)$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}u)$ и $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Дифференциальные операции 2-го порядка. Можно образовать пять дифференциальных операций 2-го порядка:

1) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla)u = \nabla^2 u = \Delta u$ (лапласиан функции);
2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla]u$;
3) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{a})$;
4) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = (\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}])$;
5) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]]$.

Кроме того, операцию ∇^2 можно применять и к векторным полям, т.е. рассматривать операцию $\nabla^2\boldsymbol{a}$. Вторая и четвертая операции приводят к нулю:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla]u = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]] = 0.$$

Это следует из векторного смысла оператора ∇: в первом случае формально мы имеем векторное произведение двух коллинеарных векторов, а во втором – смешанное произведение компланарных векторов.

128. Получить выражения для:

$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla^2 u$,
$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{a})$,
$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]]$,
$\nabla^2\boldsymbol{a} = \Delta\boldsymbol{a} = \nabla^2 a_x\boldsymbol{i} + \nabla^2 a_y\boldsymbol{j} + \nabla^2 a_z\boldsymbol{k}$

через производные скалярного или векторного полей.

129. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$.

130. Найти $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = xy^2\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} + zx^2\boldsymbol{k}$.

131. Найти $\Delta\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = (y^2 + z^2)x\boldsymbol{i} + (x^2 + z^2)y\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)z\boldsymbol{k}$.

132. Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad}(uv)$.

133. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})$ и $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})$ ($\boldsymbol{c}$ – постоянный, $\boldsymbol{a}$ – переменный вектор).

134. Найти $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\boldsymbol{c})$.

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *потенциальным,* если вектор поля $\boldsymbol{a}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(P)$:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} u(P). \qquad (1)$$

Функцию $u(P)$ в этом случае называют *потенциалом* векторного поля. Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ является равенство нулю ротора этого поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0. \qquad (2)$$

Поле в произвольной области Ω, для которого выполняется условие (2), называется безвихревым. В односвязной области безвихревое поле потенциально. Для многосвязной области последнее утверждение, вообще говоря, неверно.

П р и м е р 1. Проверить, что ротор трехмерного векторного поля $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$ тождественно равен нулю (функцию $u(P)$ предполагаем дважды дифференцируемой).

◀ Так как $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u = (\partial u/\partial x,\ \partial u/\partial y,\ \partial u/\partial z)$ и учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\boldsymbol{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\boldsymbol{k} = 0\,. \ ▶$$

В п. 2 предыдущего параграфа это равенство было получено с использованием свойств символического вектора набла.

Потенциальное поле обладает следующими свойствами.

1. В области непрерывности потенциала поля линейный интеграл от вектора поля, взятый между двумя точками поля, не зависит от пути интегрирования и равен разности значений потенциала поля в конце и начале пути интегрирования

$$\int_A^B (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_A^B (\operatorname{grad} u, dr) = \int_A^B du = u(B) - u(A) \tag{3}$$

(использована легко проверяемая формула $(\operatorname{grad} u,\ d\boldsymbol{r}) = du$).

2. Циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области непрерывности поля, равна нулю.

3. Если поле $\boldsymbol{a}$ потенциально, то потенциал поля $u(P)$ в произвольной точке P может быть вычислен по формуле (3):

$$u(P) = \int_A^P (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C, \tag{4}$$

причем $C = u(A)$, что легко получается подстановкой в (4) вместо переменной точки P фиксированной точки A.

Для вычисления интеграла (4) можно выбрать любой путь – проще всего в качестве такого пути выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат, соединяющую точки A и P**.** За точку A удобно принимать начало координат (если оно лежит в области непрерывности поля).

Пример 2. Найти потенциал поля $\boldsymbol{a} = 2xy\boldsymbol{i} + (x^2 - 2yz)\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{k}$.

◀ Убедимся, что поле потенциально. Вычисляя ротор, получаем: $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$.

За путь интегрирования примем ломаную $OABP$, где $O(0, 0, 0)$, $A(X, 0, 0)$, $B(X, Y, 0)$, $P(X, Y, Z)$. Находим:

$$u(X,Y,Z) = \int_{OABP} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C = \int_0^A (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int_A^B (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int_B^P (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C,$$

$$(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 2xy\,dx + (x^2 - 2yz)dy - y^2dz.$$

Так как на $[OA]$ имеем $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, $0 \le x \le X$, то

$$\int_0^A (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 0.$$

Аналогично на $[AB]$ имеем $x = X$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, $0 \le y \le Y$, поэтому

$$\int_A^B (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_0^Y X^2 dy = X^2 Y .$$

На $[BP]$ имеем $x = X,\ y = Y,\ dx = dy = 0,\ 0 \le z \le Z,$ значит,

$$\int_B^P (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int_0^Z Y^2 dz = -Y^2 Z .$$

Таким образом, $u(X,\ Y,\ Z) = X^2Y - Y^2Z + C$. Возвращаясь к переменным $x, y, z,$ получаем

$$u(P) = x^2y - y^2z + C. \blacktriangleright$$

Замечание. Изложенный метод отыскания потенциала поля применяется также для восстановления функции двух, трех и n переменных по их полным дифференциалам и интегрирования дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

Если в плоском потенциальном поле есть точки, в которых поле теряет свойство непрерывности (так называемые *особые* точки), то циркуляция по замкнутому контуру, окружающему такую точку, может быть отлична от нуля. В этом случае циркуляция по контуру, обходящему данную особую точку один раз в положительном направлении, не зависит от формы контура и называется *циклической постоянной* относительно данной особой точки. Аналогичными свойствами обладают трехмерные поля с особыми линиями, вдоль которых поле теряет свойство непрерывности.

Найти потенциалы следующих плоских и трехмерных полей:

135. $\boldsymbol{a} = (3x^2y - y^3)\boldsymbol{i} + (x^3 - 3xy^2)\boldsymbol{j}.$

136. $\boldsymbol{a} = \dfrac{\sin 2x \cos 2y \cdot \boldsymbol{i} + \cos 2x \sin 2y \cdot \boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}.$

137. $\boldsymbol{a} = (yz - xy)\boldsymbol{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\boldsymbol{j} + (xy + y^2 z)\boldsymbol{k}.$

138*. $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\boldsymbol{k}.$

139*. $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{z}{y^2} - \dfrac{y}{z^2} - \dfrac{2yz}{x^3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2xz}{y^3}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2xy}{z^3}\right)\boldsymbol{k}.$

140*. Доказать, что во всюду непрерывном потенциальном векторном поле векторные линии не могут быть замкнутыми.

141. Убедиться в потенциальности поля $a = \dfrac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{x^2 + y^2}$. Определить его особую точку и ее циклическую постоянную.

Соленоидальное поле. Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *соленоидальным,* если дивергенция этого поля равна нулю: $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$. Для трехмерного поля это условие можно переписать в виде

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv 0.$$

В таком поле в силу теоремы Гаусса-Остроградского равен нулю поток вектора поля через любую замкнутую поверхность. Исключение может быть только в случае наличия в таком поле особых точек (в которых вектор поля не определен и дивергенция поля, если ее определять в такой точке при помощи формулы (1) § 3, отлична от нуля). В этом случае поток через замкнутую поверхность может быть отличен от нуля, но будет иметь одно и то же значение для всех замкнутых поверхностей, окружающих данную группу особых точек.

Векторное поле $\boldsymbol{A}$ называют *векторным потенциалом* поля $\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$. Условие $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$ необходимо, но, вообще говоря, не достаточно для существования векторного потенциала.

Любое гладкое поле $\boldsymbol{a}$ в области Ω является суммой потенциального (в общем случае, безвихревого) и соленоидального полей (теорема Гельмгольца).

П р и м е р 3. Доказать, что для любого дважды дифференцируемого трехмерного векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ поле вихрей соленоидально.

◀ Имеем $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$.

Учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \equiv 0. \text{ ▶}$$

В п. 2 предыдущего параграфа это соотношение доказано с помощью оператора набла.

142. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек, равен нулю.

Проверить соленоидальность следующих полей:

143. $\boldsymbol{a}=(x^2y+y^3)\boldsymbol{i}+(x^3-xy^2)\boldsymbol{j}$. **144.** $\boldsymbol{a}=xy^2\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-(x^2+y^2)z\boldsymbol{k}$.

145. $\boldsymbol{a}=\dfrac{x}{yz}\boldsymbol{i}+\dfrac{y}{xz}\boldsymbol{j}-\dfrac{(x+y)\ln z}{xy}\boldsymbol{k}$. **146.** $\boldsymbol{a}=\dfrac{x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{(x^2-y^2)z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Лапласово (или гармоническое) поле. Векторное поле называется *лапласовым* (или *гармоническим),* если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное, т. е. если

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\equiv 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\boldsymbol{a}\equiv 0.$$

П р и м е р 4. Доказать, что потенциал u двумерного или трехмерного лапласова поля является *гармонической функцией* двух или трёх переменных $\left(\text{т. е.}\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \text{ или }\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\right)$.

◀ Действительно, имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

для двух переменных,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

для трех переменных. ▶

П р и м е р 5. Показать, что потенциал поля сил тяготения, возникающего в пространстве, окружающем некоторую точечную массу, равен k/r ($k>0$ – коэффициент пропорциональности) и что поле сил тяготения лапласово.

◀ Поместим начало координат в центре притяжения. Тогда

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\frac{k}{r}=k\operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-k\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{k\boldsymbol{r}}{r^3}\,.$$

Но это – вектор силы притяжения. Действительно, он направлен к центру притяжения, поскольку $-\boldsymbol{r}/r$ – единичный вектор радиус-вектора точки $P(\boldsymbol{r})$, направленный к началу координат, а его модуль равен k/r^2, т.е. обратно пропорционален квадрату расстояния от центра притяжения. Покажем, что $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = -k\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$. Имеем:

$$a_x = -\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial x} = -k\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -k\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = -k\frac{x^2+z^2-2y^2}{r^5}; \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -k\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5},.$$

и потому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} = -\frac{k}{r^5}((y^2+z^2-2x^2)+(x^2+z^2-2y^2)+(x^2+y^2-2z^2)) \equiv 0.$$

Итак, поле сил тяготения лапласово. ▶

147. Доказать, что плоское векторное поле, потенциалом которого служит функция $u = \ln r$ $(r = \sqrt{x^2+y^2})$, лапласово.

148*. Для гармонических в области G функций u и w доказать следующие формулы Грина:

а) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S u\frac{\partial w}{\partial n}d\sigma = \iiint_G (\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}w)dv$ (первая формула Грина),

б) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma = 0$ (вторая формула Грина),

в) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial(uw)}{\partial n}d\sigma = 2\iiint_G (\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}w)dv$ (третья формула Грина).

Являются ли гармоническими следующие функции:

149. $u = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **150.** $u = r - x = \sqrt{x^2+y^2} - x$.

151. $u = Ax + By + C$. **152**. $u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

153. $u = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$.

154. $u = Ax + By + Cz + D$.

155. $u = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$.

156. $u = a_{111}x^3 + a_{222}y^3 + a_{333}z^3 + 3a_{112}x^2y + 3a_{113}x^2z + 3a_{122}xy^2 + 3a_{223}y^2z + 3a_{133}xz^2 + 3a_{233}yz^2 + 6a_{123}xyz$.

С157. Пусть ограниченная область Ω имеет кусочно-гладкую границу Γ, функция u гармонична в Ω и определена на Γ, а $\operatorname{grad} u$ непрерывен в $\Omega + \Gamma$. Доказать, что:

1) $\displaystyle\oiint\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0$, где n – нормаль к поверхности Γ;

2) если $u = 0$ на Γ, то $u = 0$ в Ω, т.е. гармоническая функция однозначно определяется своими значениями на границе;

3) если $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ на Γ, то $u = \text{const}$ в Ω, т.е. гармоническая функция определяется с точностью до постоянной значениями своей нормальной производной на границе.

С158. Доказать принцип максимума: гармоническая функция достигает максимального и минимального значения на границе области гармоничности.

6. ПРИМЕНЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ В ВЕКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

Криволинейные координаты. Основные соотношения. В пространстве задана система координат, если каждой точке P поставлена в соответствие тройка чисел ξ, η, ζ, причем различным тройкам чисел отвечают различные точки пространства. Числа ξ, η, ζ называются *координатами* (или *криволинейными координатами*) точки $P = P(\xi, \eta, \zeta)$. Наиболее употребительными являются следующие системы координат:

1) Декартова прямоугольная система координат. Здесь $\xi = x$ – абсцисса точки P, $\eta = y$ – ордината и $\zeta = z$ – аппликата.

2) Цилиндрическая система координат. Здесь за ξ принимается расстояние r от точки P до оси z, $\xi = r$ $(0 \le r < +\infty)$, $\eta = \varphi$ – угол, составленный проекцией радиус-вектора OP на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox $(0 \le \varphi < 2\pi)$, а $\zeta = z$ – аппликата точки P.

При этом цилиндрические координаты связаны с декартовыми прямоугольными координатами при помощи формул

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

3) Сферическая система координат. Здесь $\xi = r$ – длина радиус-вектора точки P ($0 \le r < +\infty$), $\eta = \theta$ – угол между положительным направлением оси Oz и радиус-вектором OP точки $P(0 \le \theta \le \pi)$, $\zeta = \varphi$ – угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиус-вектора OP на плоскость Oxy ($0 \le \varphi < 2\pi$). Имеют место формулы:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Иногда за координату η сферической системы принимают угол между радиус-вектором OP и плоскостью Oxy.

Линия, вдоль которой изменяется только одна координата ξ, называется *координатной ξ-линией*, а единичный касательный вектор к этой линии, направленный в сторону возрастания ξ, – *единичным координатным ортом* $\boldsymbol{e}_\xi$ в точке $P(\xi^0, \eta^0, \zeta^0)$. Аналогично определяются η- и ζ-линии и единичные орты $\boldsymbol{e}_\eta$, $\boldsymbol{e}_\zeta$.

Если векторы $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$, $\boldsymbol{e}_\zeta$ попарно ортогональны в любой точке пространства, то соответствующая система криволинейных координат ξ, η, ζ называется *ортогональной.*

Пусть $P(\xi, \eta, \zeta)$ – произвольная точка пространства, $P_1(\xi + \Delta\xi, \eta, \zeta)$ – точка, лежащая на ξ-линии точки P, и $|\overset{\smile}{PP_1}|$ – длина дуги $\overset{\smile}{PP_1}$. Тогда число

$$L_1 = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{|\overset{\smile}{PP}|}{\Delta q_1}$$

называется *коэффициентом Ламе* координаты ξ в точке P. Аналогично определяются коэффициенты Ламе L_2 и L_3 координат η и ζ.

Если точка $P(x, y, z)$ имеет криволинейные координаты $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$, то дифференциалы радиус-векторов $d\boldsymbol{r}_q$, ($q = \xi, \eta, \zeta$) координатных линий и дифференциалы их дуг ds_q определяются с помощью равенств

$$d\boldsymbol{r}_q = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial q}dq + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial q}dq + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial q}dq = L_q\,\boldsymbol{e}_q\,dq,$$

$$ds_q = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2}\,dq = L_q\,dq,$$

где L_q – коэффициенты Ламе.

Множество точек $P(\xi, \eta, \zeta)$, для которых одна из координат постоянна, называется *координатной поверхностью.*

Дифференциалы площадей координатных поверхностей определяются по формулам

$$d\sigma_\xi = L_\eta L_\zeta d\eta\, d\zeta, \quad d\sigma_\eta = L_\xi L_\zeta d\xi\, d\zeta, \quad d\sigma_\zeta = L_\xi L_\eta d\xi\, d\eta,$$

а дифференциал объема

$$dv = L_\xi L_\eta L_\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Найти вид координатных линий и координатных поверхностей и построить их в произвольной точке для следующих случаев:

159. Для декартовой прямоугольной системы координат.

160. Для цилиндрической системы координат.

161. Для сферической системы координат.

Получить выражения для коэффициентов Ламе (**162–164**):

162. В декартовой прямоугольной системе координат

163. В цилиндрической системе координат r, φ, z.

164. В сферической системе координат r, θ, φ.

Получить формулы для дифференциалов дуг координатных линий, дифференциалов площадей координатных поверхностей и дифференциалов объема (**165–167**).

165. В декартовой прямоугольной системе координат.

166. В цилиндрической системе координат.

167. В сферической системе координат.

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах. Указанные операции определяются следующими формулами:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{L_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\boldsymbol{e}_\xi + \frac{1}{L_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\boldsymbol{e}_\eta + \frac{1}{L_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\boldsymbol{e}_\zeta ,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{L_\xi L_\eta L_\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(L_\eta L_\zeta a_\xi\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(L_\xi L_\zeta a_\eta\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(L_\xi L_\eta a_\zeta\right)\right)$$

(здесь $a = a_\xi \boldsymbol{e}_\xi + a_\eta \boldsymbol{e}_\eta + a_\zeta \boldsymbol{e}_\zeta$),

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{L_\xi L_\eta L_\zeta}\begin{vmatrix} L_\xi \boldsymbol{e}_\xi & L_\eta \boldsymbol{e}_\eta & L_\xi \boldsymbol{e}_\xi \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi} & \dfrac{\partial}{\partial \eta} & \dfrac{\partial}{\partial \varsigma} \\ L_\xi a_\xi & L_\eta a_\eta & L_\zeta a_\zeta \end{vmatrix} = \frac{1}{L_\eta L_\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\left(L_\zeta a_\zeta\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(L_\eta a_\eta\right)\right)\boldsymbol{e}_\xi +$$

$$+\frac{1}{L_\xi L_\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(L_\xi a_\xi\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(L_\zeta a_\zeta\right)\right)\boldsymbol{e}_\eta + \frac{1}{L_\xi L_\eta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(L_\eta a_\eta\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(L_\xi a_\xi\right)\right)\boldsymbol{e}_\zeta ,$$

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{1}{L_\xi L_\eta L_\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{L_\eta L_\zeta}{L_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{L_\xi L_\zeta}{L_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{L_\xi L_\eta}{L_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)\right)$$

Для цилиндрических координат r, φ, z вывести следующие выражения:

168. $\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z .$

169. $\Delta u = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$

170. $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\dfrac{\partial a_z}{\partial z}\right).$

171. $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_r \boldsymbol{e}_r + (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_z \boldsymbol{e}_z$, где

$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial a_\varphi}{\partial z}$, $(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\varphi = \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r}$,

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right).$$

С172. $\Delta\boldsymbol{a} = (\Delta\boldsymbol{a})_r\,\boldsymbol{e}_r + (\Delta\boldsymbol{a})_\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi + (\Delta\boldsymbol{a})_z\,\boldsymbol{e}_z$, где

$$(\Delta\boldsymbol{a})_r = \Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi},\ (\Delta\boldsymbol{a})_\varphi = \Delta a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi},\ (\Delta\boldsymbol{a})_z = \Delta a_z .$$

Получить формулы для сферических координат r, θ, φ:

173. $\mathrm{grad}\,u = \dfrac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi .$

174. $\Delta u = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right).$

175. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a_r\right) + r\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\theta\sin\theta\right) + r\dfrac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right).$

176. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\varphi\sin\theta\right) - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r +$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(ra_\varphi\right)\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(ra_\theta\right) - \frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi .$$

С177. $\Delta\boldsymbol{a} = (\Delta\boldsymbol{a})_r\,\boldsymbol{e}_r + (\Delta\boldsymbol{a})_\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + (\Delta\boldsymbol{a})_\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$, где

$$(\Delta\boldsymbol{a})_r = \Delta a_r - \frac{2}{r^2}\left[a_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot a_\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

$$(\Delta\boldsymbol{a})_\theta = \Delta a_\theta + \frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + \frac{a_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

$$(\Delta\boldsymbol{a})_\varphi = \Delta a_\varphi - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} + \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} - \frac{a_\varphi}{2\sin\theta}\right].$$

П р и м е р 1. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ и найти $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ и $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$.

◀ Так как в данном случае $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r}$, то $\boldsymbol{a} = \dfrac{r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$.

По формулам, полученным при решении задач 170 и 171, находим:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{2r(r^2+z^2) - r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} - r\frac{(r^2+z^2) - z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{2z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z =$$

$$= -\frac{2rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\varphi.$$ ▶

178. Вывести формулы:

а) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\xi = \dfrac{1}{L_\xi L_\eta L_\zeta}\dfrac{\partial(L_\eta L_\zeta)}{\partial \xi}$ и аналогичные для $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\eta$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\zeta$;

б) $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_\nu}\left[\operatorname{grad} L_\nu, \boldsymbol{e}_\nu\right]$.

179. Используя формулы, выведенные при решении задачи 178, найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ для единичных координатных векторов цилиндрической системы координат:

а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; б) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$; в) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_z$.

180. Решить задачу, аналогичную 179, для сферической системы координат:

а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; б) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\theta$; в) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$.

181. Найти все гармонические функции вида:

а) $u = f(r)$; б) $u = f(\varphi)$; в) $u = f(z)$

(r, φ, z – цилиндрические координаты).

182. Найти все гармонические функции вида:

а) $u = f(r)$; б) $u = f(\theta)$; в) $u = f(\varphi)$

(r, θ, φ – сферические координаты).

183. Перейти к сферическим координатам в выражении скалярного поля $u = \dfrac{2xy(z^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ и найти u, $\operatorname{grad} u$, и $\nabla^2 u$.

184. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении скалярного поля $u = \dfrac{2xyz + (x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и найти u, $\operatorname{grad} u$ и $\nabla^2 u$.

185. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и найти $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

186. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $a = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - z\sqrt{x^2 + y^2}\,\boldsymbol{k}$ и найти $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

Центральные, осевые и осесимметрические скалярные поля. Скалярное поле называется *центральным,* если функция поля $u = u(P)$ зависит только от расстояния точки P поля от некоторой постоянной точки – его центра. Если начало координат поместить в центр поля, то функция u примет вид

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться сферическими координатами. Поверхностями уровня такого поля будут сферы с центром в центре поля, и потому эти поля часто называют *сферическими.*

Скалярное поле называют *осевым,* если функция поля $u(P)$ зависит только от расстояния точки поля P от некоторой оси. Если принять эту ось за ось Oz и обозначить расстояние от точки P до нее через r, то функция u примет вид

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться цилиндрическими координатами. Поверхностями уровня таких полей являются круговые цилиндры, оси которых совпадают с осью поля. Эти поля называют также *цилиндрическими.*

Если функция $u(P)$ скалярного поля принимает одни и те же значения в соответствующих точках всех полуплоскостей, проходящих через одну и ту же прямую (ось поля), то такое поле называют *осесимметрическим.* Поверхности уровня такого поля – поверхности вращения, оси которых совпадают с осью поля. Если ось поля принять за ось Oz, то при исследовании таких полей целесообразно пользоваться либо сферическими, либо цилиндрическими координатами. Функцию $u = u(P)$ можно в этом случае представить либо в виде $u = u(r, \theta)$ (в сферических координатах), либо в виде $u = u(r, z)$ (в цилиндрических координатах).

Замечание. Градиенты центральных, осевых и осесимметрических полей образуют векторные поля того же характера – центральные, осевые и осесимметрические.

Найти градиенты и лапласианы следующих полей:

187. $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

188. $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

189. $u = F(r, \theta)$ (r, θ – сферические координаты).

190. $u = F(r, z)$ (r, z – цилиндрические координаты).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТИПОВОГО РАСЧЕТА
(из книги Кузнецова Л.А. «Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)», раздел «Векторный анализ», вариант № 31)

З а д а ч а 1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2, 1, 1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{I} = 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$.

◀ Находим градиент

$$\nabla u = 2x\boldsymbol{i} - \frac{\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{1+(y^2+z^2)^2}; \qquad \nabla u(M) = 4\boldsymbol{i} - \frac{1}{5}\boldsymbol{j} - \frac{1}{5}\boldsymbol{k}.$$

Искомая производная есть

$$(\nabla u, \boldsymbol{I})\big|_M = 4\cdot 0 - \frac{1}{5}\cdot 3 - \frac{1}{5}\cdot(-4) = \frac{1}{5}. \ ▶$$

З а д а ч а 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $v = x^2 - y^2 + z^2$ и $u = \dfrac{x}{yz^2}$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\right)$.

◀ Угол определим из формулы скалярного произведения двух векторов: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$.

Имеем $\nabla v = (2x; -2y; -6z)$, $\nabla v(M) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{3}\right)$,

$$\nabla u = \left(\frac{1}{yz^2}; -\frac{x}{y^2z^2}; -\frac{2x}{yz^3}\right), \ \nabla u(M) = \left(3\sqrt{2}; -\frac{6}{\sqrt{2}}; -6\sqrt{3}\right),$$

$$|\nabla v(M)| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4, \quad |\nabla u(M)| = \sqrt{144} = 12.$$

Таким образом,

$$\cos\varphi = \frac{(\nabla u, \nabla v)}{|\nabla u|\cdot|\nabla v|} = \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + (-6/\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2}) + (-6\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3})}{4\cdot 12} = \frac{48}{48} = 1,$$

или $\varphi = 0°$. ▶

З а д а ч а 3. Найти векторные линии в векторном поле $\boldsymbol{a} = 9x\boldsymbol{j} - 4y\boldsymbol{k}$.

◀ Для плоского поля векторные линии определяются дифференциальным уравнением $\dfrac{dx}{a_x} = \dfrac{dy}{a_y}$. Так как $a_x = 9x$, $a_y = -4y$, то $\dfrac{dx}{9x} = -\dfrac{dy}{4y}$.

Имеем уравнение с разделяющимися переменными; интегрируя левую и правую части, последовательно получаем:

$$\int \frac{dx}{9x} = -\int \frac{dy}{4y}; \quad \frac{1}{9}\ln x = -\frac{1}{4}\ln y + C_1; \quad 4\ln x = -9\ln y + 36C_1;$$

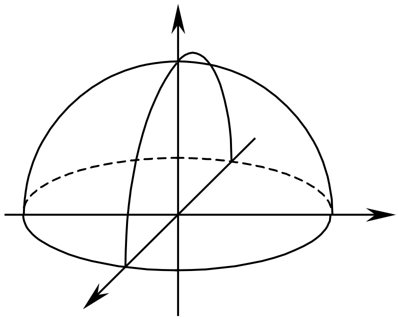
$$\ln x^4 = \ln y^{-9} + \ln C; \quad x^4 = \frac{C}{y^9}.$$

Итак, уравнение векторных линий имеет вид $x^4 y^9 = C$. ▶

З а д а ч а 4. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + (y+z)\boldsymbol{j} + (z-y)\boldsymbol{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вырезаемую плоскостью $z = 0$, $(z \geq 0)$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

◀ *Первый способ*. Поверхность интегрирования G представляет собой полусферу радиуса 3 с центром в начале координат при $z \geq 0$. Имеем

$$\Pi = \iint_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iint_{D_1} xdydz + \iint_{D_2} (y+z)dxdz + \iint_{D_3} (z-y)dxdy \cdot$$



D_1 – это проекция полусферы на плоскость Oyz, т.е. полукруг $y^2 + z^2 \leq 9$, $x = 0$, $z \geq 0$. Заметим, что полусфера проецируется на эту плоскость дважды, причем знаки перед интегралами для этих проекций разные (т.к. в одном случае соответствующий направляющий косинус ($\cos\alpha$) нормали больше нуля, а в другом случае – меньше нуля). Однако и подынтегральная функция для данных проекций различается лишь знаком, так что первый интеграл равен удвоенной величине двойного интеграла, взятого по проекции только с одной стороны:

$$\iint_{D_1} xdydz = 2\iint_{y^2+z^2\leq 9} \sqrt{9-y^2-z^2}\,dydz = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^3 \sqrt{9-\rho^2}\,\rho d\rho = 2\int_0^{\pi} -\frac{1}{3}(9-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^3 d\varphi = 18\pi \cdot$$

Второй интеграл вычисляется по D_2 –проекции G на плоскость Oxz – полукругу $x^2 + z^2 \leq 9$, $y = 0$, $z \geq 0$. Как и в предыдущем случае, проецирование осуществляется с двух сторон плоскости, и в силу симметрии области заключаем, что часть этого интеграла (от функции z)

равна нулю, а оставшаяся часть вычисляется аналогично интегралу по D_1. Таким образом,

$$\iint\limits_{D_2}(y+z)dxdz = \iint\limits_{D_2} ydxdz + \iint\limits_{D_2} zdxdz = 2\iint\limits_{x^2+z^2\le 9}\sqrt{9-x^2-z^2}\,dxdz + 0 = 18\pi \cdot$$

И, наконец, последний интеграл – по кругу D_3: $x^2+y^2\le 9$, $z=0$ (проецирование только с одной стороны, $\cos\gamma > 0$). Переходя к полярным координатам, находим

$$\iint\limits_{D_3}(z-y)dxdy = \iint\limits_{D_3}\left(\sqrt{9-x^2-y^2}-y\right)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(\sqrt{9-\rho^2}-\rho\sin\varphi\right)\rho d\rho =$$

$$= 9\varphi + 9\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi\,.$$

Окончательный результат: $\Pi = 18\pi + 18\pi + 18\pi = 54\pi$.

Следует отметить, что каждый из интегралов $\iint\limits_{D_1} x(y,z)dydz$, $\iint\limits_{D_2} y(x,z)dxdz$, $\iint\limits_{D_3} z(x,y)dxdy$ определяет объем полушара $x^2+y^2+z^2\le 9$, $z\ge 0$.

Второй способ.

$$\Pi = \iint\limits_G (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma = \iint\limits_D (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\frac{dxdy}{\cos\gamma} = \iint\limits_D (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\frac{dxdy}{\cos\gamma}\,.$$

Здесь D –проекция поверхности G на плоскость Oxy – круг $x^2+y^2\le 9$, $z=0$. Направляющие косинусы найдем с учетом того, что вектор нормали направлен в сторону градиента функции $u(x,y,z) =$ $= x^2+y^2+z^2$ (т.е. считаем G поверхностью уровня). Итак,

$$\nabla u = (2x, 2y, 2z);\ \boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$$

(ввиду того, что $\cos\gamma = z/3 \ge 0$, то при таком задании нормаль составляет острый угол с осью Oz);

$\boldsymbol{a} = (x,\ z+y,\ z-y)$; $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ (знак “+” перед радикалом, т.к. $z\ge 0$);

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) = (1/3)[x^2 + y(z+y) + z(z-y)] = (1/3)[x^2+y^2+z^2] =$
$= (1/3)[x^2+y^2+(9-x^2-y^2)] = 3.$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$\Pi=\iint_D 3\cdot\frac{3}{z}dxdy=9\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\frac{\rho d\rho}{\sqrt{9-\rho^2}}=9\int_0^{2\pi}-\sqrt{9-\rho^2}\Big|_0^3 d\varphi=54\pi\cdot$$

Третий способ. Область интегрирования G зададим в параметрическом виде

$x=3\cos u\cos v,\ \ y=3\cos u\sin v,\ z=3\sin u;\ \ \Omega:\{0\le v\le 2\pi,\ 0\le u\le \pi/2\}$

(фактически это означает переход к сферической системе координат). Найдем нормаль:

$$\vec N=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3\sin u\cos v & -3\sin u\sin v & 3\cos u\\ -3\cos u\sin v & 3\cos u\cos v & 0\end{vmatrix}=\cdot$$

$$=-9\cos^2 u(\cos v\,\boldsymbol{i}+\sin v\,\boldsymbol{j})-9\sin u\cos u\,\boldsymbol{k}.$$

При таком задании нормаль не составляет острого угла с осью Oz, в чем легко убедиться, взяв какую-либо точку на поверхности сферы, например (0, 0, 3). Эта точка соответствует параметрам $u=\pi/2,\ v=0$ и, тем самым, единичный вектор $\vec N/\left|\vec N\right|=-\mathbf{k}$. Поэтому вектор $\vec N$ необходимо взять со знаком “минус”. Итак,

$$\Pi=\iint_G(a,\boldsymbol{n})d\sigma=-\iint_\Omega(\boldsymbol{a},\vec N)dudv=-27\int_0^{\pi/2}du\int_0^{2\pi}[-\cos^3 u\cos^2 v-$$

$$-\cos^2 u\sin v(\sin u+\cos u\sin v)-\sin u\cos v(\sin u-\cos u\sin v)]dv=$$

$$=27\int_0^{\pi/2}du\int_0^{2\pi}\cos u dv=54\pi.$$ ▶

З а д а ч а 5. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=-x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через часть плоскости $x+2y+3z=1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

◀ Очевидно, все направляющие косинусы нормали положительны. Имеем

$$\Pi=\iint_G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma=-\iint_{D_1}xdydz+\iint_{D_2}2ydxdz+\iint_{D_3}zdxdy\cdot$$

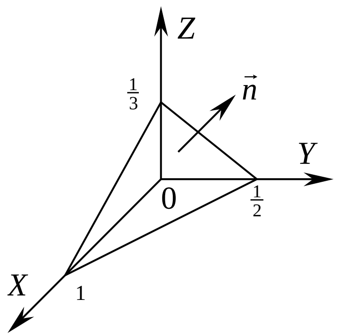
Рассмотрим первое слагаемое. Это двойной интеграл по треугольнику D_1 в плоскости Oyz, ограниченному линиями $2y+3z=1$, $y=0$, $z=0$. Поэтому

$$\iint_{D_1} x\,dydz = \iint_{D_1}(1-2y-3z)dydz = \int_0^{1/2} dy \int_0^{\frac{1}{3}(1-2y)} (1-2y-3z)dz = \frac{1}{36}\cdot$$

Этот интеграл можно посчитать проще, если учесть, что по определению двойного интеграла он равен объему тетраэдра $x+2y+3z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, который можно найти как одну шестую объема параллелепипеда, построенного на трех ребрах, исходящих из одной вершины. Если в качестве такой вершины взять начало координат, то

$$\iint_{D_1} x\,dydz = \frac{1}{6}\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{36}.$$

(Объем тетраэдра можно также вычислить как произведение одной трети площади основания на высоту). Аналогично, второе слагаемое из выражения для потока равно удвоенному объему, а третье слагаемое – просто объему того же тетраэдра. Таким образом,



$$\Pi = -\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}. \blacktriangleright$$

З а д а ч а 6. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = -5\pi x\boldsymbol{i} + (1-2y)\boldsymbol{j} + 4\pi z\boldsymbol{k}$ через часть плоскости $x/2+4y+z/3=1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

◀ Задача в значительной степени схожа с предыдущей. Поэтому

$$\Pi = \iint_G (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma = -5\pi\iint_{D_1} x\,dydz + \iint_{D_2} dxdz - 2\iint_{D_2} y\,dxdz + 4\pi\iint_{D_3} z\,dxdy =$$

$$= \iint_{D_2} dxdz - V(\pi+2) = S_2 - V(\pi+2),$$

где V – объем тетраэдра $x/2+4y+z/3=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$; S_2 – площадь поверхности D_2 – треугольника $x/2+z/3=1$, $x=0$, $z=0$, лежащего в плоскости $y=0$. Ввиду того что заданная плоскость отсекает на осях координат отрезки $a=2$, $b=1/4$, $c=3$, находим $V=abc/6=1/4$; $S_2=(ac)/2=3$. Итак, $\Pi = 3-\dfrac{1}{4}(\pi+2)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\pi}{4}$. ▶

З а д а ч а 7. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=(2y-5x)\boldsymbol{i}+(x-1)\boldsymbol{j}+$ $+(2\sqrt{xy}+2z)\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность S: $2x+2y-z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (нормаль внешняя).

◀ Здесь применима теорема Гаусса-Остроградского:

$$\Pi=\oint\!\!\!\oint_S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}dv=\iiint_V(-5+0+2)dv=-3\iiint_V dxdydz=$$

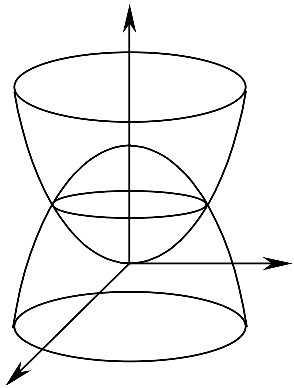
$$=-3V_{\text{тетр}}=-3\cdot 16=-48.$$ ▶

З а д а ч а 8. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=(x-z)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность S: $z=8-x^2-y^2$, $z=x^2+y^2$ (нормаль внешняя).

◀ Данная поверхность состоит из двух частей – сверху она ограничена параболоидом $z=8-x^2-y^2$, снизу – параболоидом $z=x^2+y^2$. Имеем

$$\Pi=\oint\!\!\!\oint_S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}dv=\iiint_V(1+0+0)dv=$$

$$=\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}dz=\iint_D(8-2x^2-2y^2)dxdy,$$



где D – проекция тела объема V на плоскость Oxy. Область D представляет собой круг, радиус которого найдем, исключая переменную z из уравнений параболоидов: $8-x^2-y^2=x^2+y^2$, следовательно, $x^2+y^2=$ $=4$ и радиус равен 2. Переходя к полярным координатам, получаем

$$\Pi=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(4-\rho^2)\rho d\rho=16\pi.$$ ▶

З а д а ч а 9. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+$ $+(xy+y^2)\boldsymbol{j}+(xz+z)\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность S: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$ (нормаль внешняя).

◀ S представляет собой поверхность круглого цилиндра с осью Oz

радиуса 1; снизу и сверху ограничена плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

$$\Pi = \oiint_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dv = \iiint_V (2x + 2y + 1)dv =$$

$$= \iint_D dxdy \int_0^1 (2x + 2y + 1)dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} (2x + 2y + 1)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi + 1)\rho d\rho = \pi .$$ ▶

З а д а ч а 10. Найти работу силы $\boldsymbol{F} = (x - y)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ при перемещении вдоль линии L: $x^2 + y^2 = 4$ ($y \ge 0$) от точки $M(2, 0)$ к точке $N(-2, 0)$.

◀ Линия L – полуокружность с центром в начале координат радиуса 2, лежащая в верхней полуплоскости. При вычислении криволинейного интеграла 2-го рода используем параметрическое уравнение окружности: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Точке M соответствует значение параметра $t_0 = 0$, а точке N – значение $t_1 = \pi$.

$$A = \int_L F_x dx + F_y dy = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x(t)x'_t + F_y(t)y'_t \right) dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[(2\cos t - 2\sin t)\cdot(-2\sin t) + 1\cdot 2\cos t \right] dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi} (-\sin 2t + 2\sin^2 t + \cos t)dt = \cos 2t\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} (1 - \cos 2t)dt + 2\sin t\Big|_0^{\pi} = 2\pi .$$ ▶

З а д а ч а 11. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i}/3 - 3x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ вдоль контура Г: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 1 - 2\cos t - 2\sin t$ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

◀ По определению, циркуляция есть линейный интеграл вектора $\boldsymbol{a}$, взятый по замкнутому контуру. Полному обходу контура Г соответствует изменение параметра от 0 до 2π. Поэтому можем записать

$$\oint_\Gamma (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \oint_\Gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{t_0}^{t_1} (a_x(t)x'_t + a_y(t)y'_t + a_z(t)z'_t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2\sin t}{3} \right)(-2\sin t) - 3\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t + 2\cos t(2\sin t - 2\cos t) \right] dt = -\frac{52\pi}{3}.$$

Теперь вычислим этот интеграл, используя формулу Стокса. Легко видеть, что контур Г получается пересечением цилиндра $x^2+y^2=4$ и плоскости $z=1-x-y$. Это эллипс. В качестве поверхности G, ограничиваемой этим контуром, удобно взять часть упомянутой плоскости. Из уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ определяем вектор единичной нормали $\boldsymbol{n}=\dfrac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, причем его направление соответствует положительному направлению обхода контура Г. Находим ротор $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{j}-(10/3)\boldsymbol{k}$. Имеем

$$\oint_\Gamma(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=\iint_G(\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma=\iint_G\left(-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)d\sigma=-\frac{13}{3\sqrt{3}}\iint_G d\sigma=-\frac{13}{3\sqrt{3}}\iint_D\frac{dxdy}{\cos\gamma}.$$

Здесь D – проекция поверхности G на плоскость Oxy – круг $x^2+y^2\le 4$, $\cos\gamma$ – один из направляющих косинусов нормали $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$. Очевидно, $\cos\gamma=1/\sqrt{3}$ и окончательно получаем:

$$\oint_\Gamma(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=-\frac{13}{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\iint_D dxdy=-\frac{13}{3}\cdot S_{\text{круг}}=-\frac{13}{3}\cdot\pi\cdot 2^2=-\frac{52}{3}\pi\,. \blacktriangleright$$

З а д а ч а 12. Найти модуль циркуляции векторного поля $\boldsymbol{a}$ вдоль контура Г:

$$\boldsymbol{a}=yz\,\boldsymbol{i}-xz\,\boldsymbol{j}+xy\,\boldsymbol{k}\,,\qquad \Gamma:\ x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=9.$$

◀ Имеем сферу радиуса 3, вписанную в круглый цилиндр с осью Oz. Контур Г представляет собой окружность, лежащую в плоскости $z=0$. Используя формулу Стокса, находим

$$\oint_\Gamma(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})=\iint_G(\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma=\iint_G(2x\cdot 0+0\cdot 0-2z\cdot 1)d\sigma=-2\iint_G zd\sigma=-2\iint_G 0\cdot d\sigma\equiv 0. \blacktriangleright$$

ОТВЕТЫ

1. Линии уровня – параболы $y^2 = C - x$. **2.** Линии уровня – гиперболы $xy = C$ (при $C = 0$ – совокупность координатных осей). **3.** Линии уровня – прямые $y = Cx$. **4.** Поверхности уровня – параллельные плоскости $x + y + z = C$. **5.** Поверхности уровня – одно- и двуполостные гиперболоиды $x^2 + y^2 - z^2 = \pm C^2$ (при $C = 0$ – конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$). **6.** Поверхности уровня – параболоиды вращения $x^2 + y^2 = z + C$. **7.** Гиперповерхности уровня – четырехмерные параллельные плоскости $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = C$. **8.** Гиперповерхности уровня – четырехмерные сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = C^2$. **9.** Окружности $x^2 + y^2 = C^2$. **10.** Гиперболы $xy = C$ (при $C = 0$ – совокупность координатных осей). **11.** Параболы $y^2 = 2(x + C)$. **12.** Прямые $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$. **14.** Линии пересечения гиперболических цилиндров $y^2 - x^2 = C_1$ с такими же цилиндрами $z^2 - x^2 = C_2$. **15.** Окружности, являющиеся линиями пересечения сфер $x^2+y^2+z^2=C_1^2$ с плоскостями $x + y + z = C_2$. **16.** Прямые четырехмерного пространства, перпендикулярные к оси Ox_3 и её пересекающие: $x_3 = C$; $\dfrac{x_1}{l_1} = \dfrac{x_2}{l_2} = \dfrac{x_4}{l_4}$. **17.** $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = bt$. **18.** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z} = 1,\ \ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y^2} = 4$.
19. а) Конические поверхности с вершинами в начале координат, направляющими которых служат заданные замкнутые кривые; б) тороидальные поверхности, образованные окружностями с центрами на прямой $x = y = z$, лежащими в плоскостях $x + y + z = C$, сечениями которых служат заданные замкнутые кривые. **24.** $\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **25.** $\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}$. **26.** $\boldsymbol{a}$. **27.** $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r})$.

28. $2|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{r} - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{a}$. **31.** 13/5. **32.** $4/\sqrt{5}$. **33.** 14/3. **34.** $1/|\boldsymbol{r}|^2$.

35. $6/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **36.** $\cos\varphi = -4/\sqrt{41}$. **37.** $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{6}$, $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$. **38.** $\dfrac{1}{\sqrt{17}}(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$. **39.** $P(3,\ 3,\ -3)$. **45.** $xy = C$.

46. $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x^2 - z^2 = C_2. \end{cases}$ **47.** $\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2 / x. \end{cases}$ **48.** $\sqrt{2}+1$. **49.** $\ln\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$. **50.** 0.

51. $\dfrac{256}{15}a^3$. **52.** $\dfrac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{3/2}-1]$. **53.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **54.** $\dfrac{a^5\sqrt{10}}{15}$. **55.** $\dfrac{9}{64}k\pi a^3$.

58. $\dfrac{ka\sqrt{3}}{2}$. **60.** αr^2. **61.** $\dfrac{4}{3}\beta r^4$. **62.** πab. **63.** а) $\dfrac{2}{3}$; б) 0.7; в) 0.7; г) 1; д) 1. **64.** $2\pi R^2$. **65.** $\dfrac{91}{60}$. **66.** $2\pi^2 a^2 h$. **67.** $2\pi a^2$. **68.** $\left(2\sqrt{2}-\dfrac{7}{3}\right)a^3$. **69.** $2r^2$.

70. -4π. **71.** $-\dfrac{\pi r^4}{2}$. **72.** $-\dfrac{1}{3}$. **73.** $\dfrac{\sqrt{3}}{360}$. 74. $2\sqrt{2}\dfrac{\pi}{3}$ 75**.** 4π. **76.** $\dfrac{3}{2}\pi a^3$.

77. $\dfrac{8ka^3}{15}(\sqrt{2}+1)$. **78.** $\dfrac{k\pi a^3}{3}(3\sqrt{3}-1)$. **79.** $\dfrac{27}{2}ka^3$. **80.** $\dfrac{\pi ka^2\sqrt{a}}{4}\times$ $\times(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))$. **C81.** $\dfrac{\pi}{2}(\sin\alpha\cos^2\alpha)$. **C82.** $\pi^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

83. $a^3/6$. **84.** $2\pi a$. **85.** $4HR^3/15$. **86.** $\pi R^4/2$. **87.** $\pi R^2 H/3$. **88.** $\pi R^2 H/4$. **89.** $\pi R^2 H^2/3$. **90.** $\pi R^4/8$. **91.** 0. **92.** πR^4. **93.** $-R^2 H/3$. **94.** 0. **C95.** $2\pi(a^2+b^2)\,abc/5$. **C96.** $\left(\dfrac{\pi H}{8}-\dfrac{r}{3}\right)r^2 H$. **C97.** 1) $2a^3/9$. 2) $2\pi^2 a^2 b$. 3) $2\pi\,(2a^2+b^2)\,|\,c\,|\,/\,3$. **98.** $x+y+z$. **99.** $-2/(x+y+z)^{5/3}$. **100.** 14. **101.** 1. **102.** 0. **103.** 0. **104.** 0. **106.** a^5. **107.** $4\pi R^2$. **108.** Если $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$, то поток вектора $\boldsymbol{a}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ определится формулой $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})ds = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} a_x dx - a_y dy$. Теорема Гаусса-Остроградского для плоского поля: $\int\limits_L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})ds = \int\limits_L a_x dy - a_y dx = \iint\limits_Q\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial x}+\dfrac{\partial a_y}{\partial y}\right)dx\,dy$.

109. $\oint\limits_L a_x dx + a_y dy = \iint\limits_Q\left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x}-\dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy$ (формула Грина). • Положить в предыдущей формуле (задача 108) $a_x = a_y$, $a_y = -a_x$. **110.** $R^5/3$.

111. $\pi R^4 H/2$. **114.** $x(z^2-y^2)\boldsymbol{i}+y(x^2-z^2)\boldsymbol{j}+z(y^2-x^2)\boldsymbol{k}$. **115.** $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$.

117. $-2y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}-2(3x+2y)\boldsymbol{k}$. **118.** 0. **121.** $\dfrac{4}{3}\pi R^3$. **122.** $\dfrac{3}{2}\pi R^4$. **123.** $\dfrac{R^3}{3}$.

124. $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}u)=(\boldsymbol{c},\operatorname{grad}u)$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}u)=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\operatorname{grad}u)$. **125.** $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=$ $=[\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\boldsymbol{c},\nabla)\boldsymbol{a}$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=[\boldsymbol{b},\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a},\operatorname{rot}\boldsymbol{b}]+(\boldsymbol{b},\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\nabla)\boldsymbol{b}$. ◀ Найдем предварительно $[\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]$. Имеем: $[\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},[\nabla,\boldsymbol{a}]]=$ $=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\nabla-(\boldsymbol{c},\nabla)\boldsymbol{a}=\nabla(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{c},\nabla)\boldsymbol{a}$. Отсюда $\nabla(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\boldsymbol{c},\nabla)\boldsymbol{a}$; далее, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{b})+\nabla(\boldsymbol{a},\overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}})$ и используем предыдущий результат. ▶ **126.** $\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a})$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\operatorname{rot}\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\operatorname{rot}\boldsymbol{b})$. **127.** $\operatorname{rot}(\boldsymbol{c}u)=[\operatorname{grad}u,\boldsymbol{c}]$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}u)=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+[\operatorname{grad}u,\boldsymbol{a}]$, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{b},\nabla)\boldsymbol{a}-$ $-(\boldsymbol{a},\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. • См. решение примера 5. **128.** $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\nabla^2u=$
$=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla(\nabla,\boldsymbol{a})=\dfrac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial z}\boldsymbol{k}$,
$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=[\nabla,[\nabla,\boldsymbol{a}]]=\nabla(\nabla,\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\nabla^2\boldsymbol{a}$, $\nabla^2\boldsymbol{a}=\nabla^2a_x\boldsymbol{i}+$ $+\nabla^2a_y\boldsymbol{j}+\nabla^2a_z\boldsymbol{k}$. **129.** $6\boldsymbol{r}=6(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. **130.** 0. **131**. $4\boldsymbol{r}=4(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. **132**. $u\operatorname{div}\operatorname{grad}v+2(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v)+v\operatorname{div}\operatorname{grad}u$. **133.** $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=$ $=(\boldsymbol{c},\nabla)\operatorname{grad}u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\boldsymbol{u}+[\operatorname{grad}u,\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]$ $+(\operatorname{grad}u,\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\nabla)\operatorname{grad}u$. **134**. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c},\nabla)\operatorname{grad}u-\boldsymbol{c}\nabla^2u$. **135.** x^3y- $-xy^3+C$. **136.** $2\sqrt{\cos^2x\sin^2y+\sin^2x\cos^2y}+C$. **137.** $xyz-\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{y^2z^2}{2}+C$.

138. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}+C$. • За начальную точку A принять точку $(1,1,1)$ или любую другую точку, не лежащую на осях координат. **139.** $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}-\dfrac{xy}{z^2}+C$. • См. указание к предыдущей задаче.

140. ◀ Если бы во всюду непрерывном потенциальном поле могли существовать замкнутые векторные линии, то циркуляция по такой линии не могла бы быть равной нулю, так как произведение $(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})$ вдоль всей линии сохраняло бы постоянный знак, и поэтому $\oint(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{r})\neq 0$. ▶ **141.** Особая точка $O(0,0)$, циклическая постоянная равна 2π. **148.** • Применить теорему Гаусса-Остроградского и учесть, что для гармонических функций $\nabla^2 u = 0$. **149.** Нет. **150.** Нет. **151.** Да. **152.** Только при $A + C = 0$. **153.** Только если $A + C = B + D = 0$. **154.** Да. **155.** Только при $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$. **156.** Только если $a_{111} + a_{122} + a_{133} = a_{112} + a_{222} + a_{233} = a_{113} + a_{223} + a_{333} = 0$. **159.** Линии x: $\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}$; линии y: $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - z_0}{0}$; линии z: $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z}{1}$. **160.** Линии r: $\varphi = \varphi_0$, $z = z_0$ (лучи, исходящие из точек оси Oz, лежащие в горизонтальных плоскостях); линии φ: $r = r_0$, $z = z_0$ (окружности с центрами на оси Oz радиуса r_0, лежащие в плоскостях $z = z_0$); линии z: $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (прямые, параллельные оси Oz). **161.** Линии r: $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ (лучи, исходящие из начала координат); линии θ: $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (полуокружности радиуса r_0 с центром в начале координат, лежащие в полуплоскостях $\varphi = \varphi_0$, проходящих через ось Oz, т.е. меридианы); линии φ: $r = r_0, \theta = \theta_0$ (окружности радиуса $r_0 \sin\theta_0$ с центром на оси Oz, лежащие в горизонтальных плоскостях, т.е. параллели). **162.** $L_x = L_y = L_z = 1$. **163.** $L_r = L_z = 1$, $L_\varphi = r$. **164.** $L_r = 1$, $L_\theta = r$, $L_\varphi = r\sin\theta$. **165.** $ds_x = dx$, $ds_y = dy$, $ds_z = dz$; $d\sigma_x = dy\,dz$, $d\sigma_y = dx\,dz$, $d\sigma_Z = dx\,dy$; $dv = dx\,dy\,dz$. **166.** $ds_r = dr$, $ds_\varphi = r\,d\varphi$, $ds_z = dz$; $d\sigma_r = r\,d\varphi\,dz$, $d\sigma_\varphi = dr\,dz$, $d\sigma_z = r\,dr\,d\varphi$; $dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$. **167.** $ds_r = dr$, $ds_\theta = r\,d\theta$, $ds_\varphi = r\sin\theta\,d\varphi$, $d\sigma_r = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, $d\sigma_\theta = r\sin\theta\,dr\,d\varphi$, $d\sigma_\varphi = r\,dr\,d\theta$; $dv = r^2\sin\theta\,dr\,\mathrm{d}\theta\,d\varphi$. **179.** а) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{r}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_r = 0$; б) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\varphi = 0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\boldsymbol{e}_z}{r}$; в) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_z = 0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_z = 0$. **180.** а) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_r = \frac{2}{r}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_r = 0$; б) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r}$; в) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\varphi = 0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta$.

181. а) $u = C_1 \ln r + C_2$; б) $u = C_1\varphi + C_2$; в) $u = C_1 z + C_2$. **182.** а) $u = \frac{C_1}{r} + C_2$; б) $u = C_1 \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + C_2$; в) $u = C_1 z + C_2$. **183.** $u = r^2 \sin 2\varphi \cos 2\theta$, $\operatorname{grad} u = 2r\left(\sin 2\varphi \cos 2\theta\,\boldsymbol{e}_r - \sin 2\varphi \sin 2\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\cos 2\varphi \cos 2\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$, $\nabla^2 u = 2\sin 2\varphi \times (1 - 2\operatorname{ctg}^2\theta)$. **184.** $u = rz\sin 2\varphi + r\cos 2\varphi$, $\operatorname{grad} u = (z\sin 2\varphi + \cos 2\varphi)\,\boldsymbol{e}_r +$

$+2(z\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)\,\boldsymbol{e}_\theta+r\sin 2\varphi\,\boldsymbol{e}_z$, $\nabla^2 u=-\dfrac{3u}{r^2}$. **185**. $\boldsymbol{a}=\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=0$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{r}(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)$. **186**. $\boldsymbol{a}=rz(\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{e}_z)$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=2z-r$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=(r+z)\boldsymbol{e}_\varphi$. **187**. $\mathrm{grad}\,u=f'(r)\boldsymbol{e}_r=f''(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\nabla^2 u=f''(r)+\dfrac{2f'(r)}{r}$.

188. $\mathrm{grad}\,u=f'(r)\boldsymbol{e}_r=f'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\nabla^2 u=f''(r)+\dfrac{f'(r)}{r}$. **189**. $\mathrm{grad}\,u=$

$$=\frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta,\ \nabla^2 u=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}.$$

190. $\mathrm{grad}\,u=$

$$=\frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,\ \nabla^2 u=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Ч. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления. учебное пособие. Т. 2. - Изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2001. - 544 с..

2. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1997.—512 с.

3. Сборник задач по математике для втузов : В 4 т.: Учеб. пособие. Т. 3 / Под ред А.В.Ефимова, А.С.Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Физматиздат, 2002. - 576 с.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Л.А. Кузнецов. М.: Высш. шк., 1997.

5. Черненко В. Д. Высшая математика в примерах и задачах. Том 2: учебное пособие для вузов [Электронный ресурс]. СПб, Политехника, 2016. –572 с. – 978-5-7325-1105-5. – Режим доступа:http://www.iprbookshop.ru/59560.html

СОДЕРЖАНИЕ