

Введение	4
Глава 1. Неопределенный интеграл.....	5
§1. Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства	5
§2. Табличные интегралы	6
§3. Почленное интегрирование. Метод внесения под знак дифференциала	7
§4. Интегралы, содержащие в знаменателе квадратный трехчлен или квадратный корень из него ...	9
§5. Интегрирование рациональных дробей.....	11
§6. Замена переменной.....	16
§7. Метод интегрирования по частям	18
§8. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций	21
§9. Тригонометрические и универсальная тригонометрическая подстановки.....	22
§10. Применение различных методов интегрирования	24
Глава 2. Определенный интеграл и его приложения.....	26
§1. Определенный интеграл, его геометрический смысл и свойства	26
§2. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.....	28
§3. Некоторые частные случаи вычисления определенных интегралов для четных, нечетных и периодических функций	29
§4. Метод интегрирования по частям и замена переменной в определенном интеграле	31
§5. Вычисление площади плоской фигуры в декартовой, полярной системах координат и в случае, когда граница задана параметрически.....	32
§6. Дифференциальный метод.....	35
§7. Вычисление длины дуги плоской кривой	36
§8. Вычисление объемов тел с известными площадями поперечных сечений. Нахождение объемов тел вращения	38
§9. Физические приложения определенного интеграла: вычисление длины пути, работы переменной силы	41
и многие другие	41
§10. Несобственные интегралы первого и второго рода	43
§11. Приближенное вычисление определенных интегралов.....	48
Расчетно-графические задания по теме «Неопределенный и определенный интегралы»	52
Заключение.....	77
Библиографический список.....	78

Введение

Со времен Ньютона методы математического анализа сначала в науке, а затем и в технике все шире и глубже используются по мере их развития. Вы уже овладели его началами, важнейшей операцией которого является дифференцирование. Теперь мы будем заниматься обратной к ней операцией интегрирования, которая, как и любая обратная операция, гораздо сложнее (например, извлечение корня существенно сложнее возведения в степень и приводит к иррациональным и комплексным числам) и, кроме разработки различных методов интегрирования, тоже выводит за привычные рамки элементарных функций. Кроме того, на практике громадное количество приложений при решении геометрических и физических задач связано с введением сначала определенного интеграла Римана, а затем его обобщения как по увеличению размерности (двух и трехмерного), так и по «направлению» множества, по которому берутся интегралы (кривые, вместо отрезков, поверхности вместо плоских областей). Естественно, при этом потребовалось распространить математический анализ на функции двух и большего количества переменных.

В первой главе изучается неопределенный интеграл от функции одной переменной и излагаются основные методы интегрирования, но вы должны быть готовы к тому, что в отличие от операции дифференцирования, здесь требуется хорошее знание алгебры и тригонометрии. Во второй главе для нахождения площади криволинейной трапеции вводится определенный интеграл Римана и рассмотрены его основные геометрические и физические приложения. Но основное, что желательно понять и научиться применять – это дифференциальный метод (см. §6). Суть метода в том, что считается дифференциал интересующей нас глобальной величины, причем он вычисляется очень грубо: кривые заменяются отрезками прямых (их линейной частью), а если в качестве множителя присутствует дифференциал независимой переменной, то интегральные функции можно считать постоянными на этом маленьком кусочке; но при переходе к интегралу, ответ получается (и это следует подчеркнуть) абсолютно точным.

В конце главы рассматриваются обобщения интеграла Римана на бесконечный отрезок интегрирования (несобственный интеграл первого рода), и на случай бесконечного разрыва функций (несобственный интеграл второго рода), а в последнем параграфе рассмотрены приближенные методы вычисления определенных интегралов.

Усвоение понятий, методов интегрирования и многочисленных приложений определенных интегралов потребует значительных усилий. Успеха вам!

Глава 1. Неопределенный интеграл

§1. Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Например, если $f(x) = \cos x$, то из табличной производной $(\sin x)' = \cos x$ следует, что можно взять в качестве первообразной от косинуса $F_1(x) = \sin x$. Так как производная от константы C равна нулю, то первообразными от косинуса будут также функции $F(x) = \sin x + C$.

Для первообразных справедлива

Лемма. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные от функции $f(x)$. Тогда они отличаются друг от друга на константу, то есть

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Доказательство. Для функции $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ производная $\Phi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Мы уже воспользовались табличной производной $C' = 0$. Покажем, что других первообразных нуля, кроме константы не существует. По теореме Лагранжа $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(C)(b - a)$, $C \in (a, b)$. Так как $\Phi'(x) = 0$, то $\Phi(b) - \Phi(a) = 0$ для любых действительных a и b . Зафиксируем a , и будем произвольно менять $b = x \in R$. Тогда $\Phi(x) = \Phi(a) = C$.

Определение 2. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных и обозначается $\int f(x)dx$.

Пусть найдена одна из первообразных $F(x)$. Тогда в силу леммы о первообразных множество всех первообразных можно описать формулой

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (1.2)$$

Итак, мы ввели операцию интегрирования функций, обратную операции дифференцирования (но, в отличие от последней, она оказалась не однозначной, а бесконечнозначной!). Отсюда и из свойств производной вытекают

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ или $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
2. $\int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C$ или $\int d\varphi(x) = \int d(\varphi(x) + C) = \varphi(x) + C$.
3. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, λ – число.
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

5. В формуле (1.2) вместо независимой переменной x можно подставить любую функцию $\varphi(x)$:

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C. \quad (1.3)$$

Замечание. Первое свойство позволяет проверить ответ для неопределенного интеграла дифференцированием, в том числе линейные свойства 3, 4; вторые формулировки первого и второго свойств показывают, что знаки дифференциала и интеграла «уничтожают» друг друга; а пятое свойство вытекает из инвариантности первого дифференциала и резко расширяет возможности интегрирования.

§2. Табличные интегралы

В формулах, приведенных ниже, C означает произвольную постоянную.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$6. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$7. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$8. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a > 0$$

$$9. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$10. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C,$$

частные случаи

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C,$$

$$13. \int e^x dx = e^x + C,$$

$$14. \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

В качестве доказательства достаточно проверить в силу свойства 1 ответы дифференцированием, более того половина из них получается из табличных производных (например, для $f(x) = \sin x$, §1); но появление знака модуля для второго табличного интеграла обосновывается следующим образом. Если переписать табличную производную $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ для соответствующего интеграла, то слева в $\int \frac{1}{x} dx$ область определения подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ будет $x \neq 0$, а справа для $F(x) = \ln x$ остаются только положительные значения x , т.е. мы теряем половину области определения функции. Проверим, что производная $\ln |x|$ будет, как и у $\ln x$ тоже $\frac{1}{x}$. Действительно, при $x < 0$ $|x| = -x$ и $(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$. Отсюда следует, что и в табличных интегралах 8,

11 и вообще, если при интегрировании некоторой функции в ответе появляется $\ln \varphi(x)$, то всегда нужно брать функцию внутри логарифма по модулю: $\ln |\varphi(x)|$.

§3. Почленное интегрирование. Метод внесения под знак дифференциала

Как уже отмечалось выше, деление сложнее умножения, извлечение корня сложнее возведения в степень. Как и любая обратная операция, интегрирование функций гораздо сложнее дифференцирования. Заметим, что обратные операции приводят к расширению множества, на котором действуют: деление приводит к рациональным числам, извлечение корня – к иррациональным и комплексным числам, а при интегрировании появляются неэлементарные функции. И только простейший метод почленного интегрирования (на основе свойств 3, 4) не сложнее почленного дифференцирования, да и то только в случае табличных интегралов.

$$\begin{aligned} \text{Пример 1. } & \int \left(6x^2 + 8 \cdot 2^x + \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{7}{\sqrt{5 - x^2}} \right) dx = \\ & = 6 \int x^2 dx + 8 \int 2^x dx + 4 \int \frac{1}{x^2 - 2^2} dx - 7 \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} dx = 6 \frac{x^3}{3} - 8 \frac{2^x}{\ln 2} + \\ & + \frac{4}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - 7 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C = 2x^3 - \frac{2^{x+3}}{\ln 2} + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - 7 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

В случае, когда подынтегральная функция есть дробь, знаменатель которой является одночленом, иногда удастся почленно разделить и затем почленно проинтегрировать.

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } & \int \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2 - 6x + 9}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - 6 \frac{x}{\sqrt{x}} + 9 \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \\ & = \int x^{\frac{3}{2}} dx - 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 9 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 6 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 9 \cdot 2\sqrt{x} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - 4x\sqrt{x} + 18\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 3. } & \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ & \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \end{aligned}$$

Замечание. Вообще говоря, нахождение первообразных в примере 2 требует знать бином Ньютона. Например, если бы было выражение $(x-3)^{2019}$, то потребовалось бы 2020 слагаемых. Взять производную от частного с показателем 2019 технически не сложнее, чем с показателем степени равным двум, но при нахождении первообразных начнутся трудности, связанные с количеством слагаемых

под знаком интеграла. В примере 3 для оптимального метода решения прежде всего необходимо знать основное тригонометрическое тождество, а главное – умение нестандартно мыслить. Подытоживая, заметим, что хороший уровень знаний элементарной математики недостаточен, еще необходим творческий подход в задачах интегрирования.

Метод внесения под знак дифференциала

Пусть под знаком интеграла стоит произведение сложной функции на производную от внутренней функции. Это позволяет воспользоваться формулой (1.3), а именно

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C. \quad (1.4)$$

Пример 4. $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} (\sin x)' dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$

Сделаем проверку: $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x.$ Верно.

Отметим, что метод внесения под знак дифференциала эквивалентен правилу дифференцирования сложной функции, но в обратном порядке: сначала интегрируется внутренняя тригонометрическая функция, а затем внешняя показательная функция.

Возможно два подхода к применению метода внесения под знак дифференциала.

1. Если под знаком интеграла есть сложная функция, то берем производную от внутренней функции (в нашем примере $(\sin x)' = \cos x$) и ищем её в качестве множителя, чаще всего с точностью до константы $c\varphi'(x)$.

2. Вносим одну из функций, которая является одним из множителей в подынтегральном выражении под знак дифференциала, при этом она интегрируется и в результате под знаком дифференциала появляется одна из её первообразных (в последнем примере в силу табличного интеграла 5. косинус пропадает в качестве множителя, а под знаком интеграла вместо него появляется синус) и ищем её присутствие во внутренней функции для данной сложной функции (или пытаемся выразить через неё оставшееся выражение под знаком интеграла).

В примере 4 возможно применение обоих подходов (отметим, забегая вперед, что можно сделать замену переменной $\sin x = z$), но иногда можно взять интеграл только с помощью второго подхода.

Пример 5. $\int \frac{x^3}{x^8 + 1} dx = \int \frac{d\left(\frac{x^4}{4}\right)}{x^8 + 1} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + C.$

Мы сначала внесли x^3 под знак дифференциала, затем появившуюся в табличном интеграле константу $\frac{1}{4}$ вынесли и за знак дифференциала и за знак интеграла, и, наконец, выразили x^8 через x^4 , что привело к табличному интегралу 14.

Рассмотрим частные случаи метода внесения под знак дифференциала.

1) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax) = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b)$, что с помощью формулы (1.3) даёт

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (1.5)$$

Пример 6. $\int 2^{3x+5} dx = \frac{1}{3} \frac{2^{3x+5}}{\ln 2} + C.$

2) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C. \quad (1.6)$

Пример 7. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C.$

Замечание. Часто этот интеграл входит в список табличных интегралов, также, как и интегралы от других основных элементарных функций, но мы считаем, что достаточно взять минимально возможное количество табличных интегралов, приведенных на странице 6, что позволяет с помощью различных методов интегрирования брать все возможные интегралы, первообразные от которых являются элементарными функциями.

3) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} = 2\sqrt{\varphi(x)} + C. \quad (1.7)$

Пример 8. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx = \int \frac{(\ln x + 1)'}{\sqrt{\ln x + 1}} dx = 2\sqrt{\ln x + 1} + C.$

§4. Интегралы, содержащие в знаменателе квадратный трехчлен или квадратный корень из него

I. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ берутся с помощью выделения полного квадрата для квадратного трехчлена и использование табличных интегралов № 8 – 11.

Пример 9. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 + 4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$ В случае с квадратным корнем только на последнем шаге применяется другой табличный интеграл (10-11 вместо 8-9).

Пример 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \ln\left(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}\right) + C.$

Замечание. Так как у нас подкоренное выражение, очевидно, положительно, то выражение под знаком логарифма тоже положительно и проще избавиться в ответе от знака модуля.

II. Интегралы вида $\int \frac{kx + e}{ax^2 + bx + c} dx$ или $\int \frac{kx + e}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ берутся с помощью

выделения в числителе производной от знаменателя $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$:

$kx + e = A(2ax + b) + B$, где A и B находятся методом неопределенных коэффициентов (раскрываются скобки и после приведения подобных членов приравниваются коэффициенты при x и свободные члены, что дает систему двух линейных уравнений относительно A и B , определитель которой всегда отличен от нуля); подставив полученное выражение в числитель и почленно разделив, мы сводим первые слагаемые к формулам (1.6) или (1.7), а вторые будут интегралами I типа.

Пример 11. $\int \frac{4x - 9}{x^2 - 6x + 5} dx$.

Применим, описанный выше метод:

$$(x^2 - 6x + 5)' = 2x - 6, \quad 4x - 9 = A(2x - 6) + B, \quad 4x - 9 = 2Ax + (-6A + B),$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , выписываем систему для определения коэффициентов

$$\begin{cases} 2A = 4, \\ -6A + B = -9, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2, \\ B = 6A - 9 = 3, \end{cases}$$

значит, $4x - 9 = 2(2x - 6) + 3$.

Отметим, что в простых случаях с целыми числами A, B можно сразу найти A и B подбором т.е. а) на что нужно умножить $2x$, чтобы получить $4x$, очевидно, $A=2$; б) подставив в первое равенство $A=2$, уже раскрыв скобки $4x - 12$ легко ответить, какое число надо добавить к -12 , чтобы получить -9 , это позволяет найти $B=3$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{4x - 9}{x^2 - 6x + 5} dx &= \int \frac{2(2x - 6) + 3}{x^2 - 6x + 5} dx = 2 \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 5} dx + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \\ &= 2 \int \frac{(x^2 - 6x + 9)'}{x^2 - 6x + 5} dx + 3 \int \frac{d(x - 3)}{(x - 3)^2 - 4} = 2 \ln |x^2 - 6x + 5| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 3 - 2}{x - 3 + 2} \right| + C = \\ &= 2 \ln |x^2 - 6x + 5| + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x - 5}{x - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Аналогичный пример с квадратным корнем отличается только применением последнего частного случая внесения под знак дифференциала и иного табличного интеграла.

Пример 12. $\int \frac{9 - 4x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} dx = \int \frac{2(6 - 2x) - 3}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} dx = 2 \int \frac{(6x - x^2 - 5)'}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} dx -$
 $- 3 \int \frac{d(x - 3)}{\sqrt{4 - (x - 3)^2}} = 4\sqrt{6x - x^2 - 5} - 3 \arcsin \frac{x - 3}{2} + C.$

Проверьте, что из-за смены знака квадратного трехчлена и знака числителя по сравнению с предыдущим примером A не изменится, а B сменит знак.

§5. Интегрирование рациональных дробей

Определение. Правильной рациональной дробью называется отношение двух многочленов

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}, \quad (1.8)$$

если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то есть при $m < n$. Если дробь неправильная, то разделив уголком, всегда можно выделить целую часть и добавить остаток, деленный на многочлен $P_n(x)$ в знаменателе.

Пример 13. $\int \frac{x^5}{x^2 + 9} dx$.

Так как степень числителя больше степени знаменателя, значит подынтегральная дробь неправильная: $Q_5(x) = x^5$, $P_2(x) = x^2 + 9$, $m = 5 > 2 = n$. При делении уголком на каждом шаге степень многочлена понижается на $n = 2$, и, как только она станет меньше двух, процесс останавливаем.

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^2 + 9 \\ \hline x^5 + 9x^3 & x^3 - 9x \\ \hline -9x^3 & \\ -9x^3 - 81x & 81x \end{array}$$

В нашем случае целая часть равна $x^3 - 9x$, а остаток $81x$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{x^5}{x^2 + 9} &= x^3 - 9x + \frac{81x}{x^2 + 9}. \text{ Тогда } \int \frac{x^5}{x^2 + 9} dx = \int \left(x^3 - 9x + \frac{81x}{x^2 + 9} \right) dx = \int x^3 dx - \\ &- 9 \int x dx + 81 \int \frac{x dx}{x^2 + 9} = \frac{x^4}{4} - 9 \frac{x^2}{2} + 81 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 9)' dx}{x^2 + 9} = 0,25x^4 - 4,5x^2 + \\ &+ 40,5 \ln(x^2 + 9) + C. \end{aligned}$$

Замечание. Первоначальный интеграл свелся к сумме трех интегралов, первые два из которых (от целой части) берутся как табличные, а последний сводится к выделению в числителе производной от знаменателя (см (1.6)), но пока в сумме есть хотя бы один интеграл, произвольную постоянную C не пишут, т.к. она содержится в нем, и появляется в ответе только после взятия последнего интеграла.

Рассмотрим теперь **общую схему интегрирования рациональных дробей**.

1. Если дробь неправильная, то **выделить целую часть** (см. пример 13.).

2. **Разложить знаменатель**, если это возможно, на **множители**:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_2)^k \cdot \dots \\ &\cdot (x^2 + p_1 x + q_1) \cdot \dots \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^s, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где x_1 является простым корнем многочлена $P_n(x)$, x_2 – корнем кратности k , а дискриминанты $D_1 = p_1^2 - 4q_1$, $D_2 = p_2^2 - 4q_2$ отрицательны, им у квадратных трехчленов соответствуют пары комплексно-сопряженных корней. Отметим, что по основной теореме алгебры у каждого многочлена в области комплексных чисел существует хотя бы один корень, отсюда вытекает, что у многочлена нечетной степени с действительными коэффициентами точно будет хотя бы один действительный корень, но нахождение корней для многочленов старших степеней и соответствующее разложение (1.9) на множители на практике часто затруднительно. Например, чтобы разложить на множители многочлен четвертой степени $P_4 = x^4 + 4$, у которого нет действительных корней, нужно догадаться добавить и отнять $4x^2$, то есть дополнить до полного квадрата.

$$P_4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2),$$

проверьте, что оба дискриминанта отрицательны.

3. Пусть по формуле (1.9) знаменатель разложен на множители. Правильную рациональную дробь $\frac{R(x)}{P_n(x)}$, где $R(x)$ – остаток, полученный при делении

многочленов или, если изначально была правильная дробь, многочлен $R(x) = Q_m(x)$ можно **разложить на сумму простейших дробей**. Кроме того, без ограничения общности, можно считать многочлен $P_n(x)$ приведенным, когда первый коэффициент равен единице (так как мы можем первый коэффициент $a_n \neq 0$ перенести в числитель). Тогда разложение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{P_n(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x - x_2)^k} + \dots + \frac{Cx + D}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots \\ & \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_2x + q_2} + \dots + \frac{C_sx + D_s}{(x^2 + p_2x + q_2)^s}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

При разложении мы руководствовались следующими правилами:

- каждому корню соответствует столько слагаемых, какова его кратность;
- для действительных корней в числителях ставятся константы; для квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами в числителях ставятся линейные выражения, то есть многочлены первой степени.

Отметим, что все коэффициенты разложения: $A_1, \dots, D_s$ необходимо обозначать разными буквами, их можно просто нумеровать $A_1, A_2, \dots, A_n$, так как их количество совпадает со степенью многочлена знаменателя $P_n(x)$ равной n .

4. **Метод неопределенных коэффициентов**, который заключается в следующем:

а) привести к общему знаменателю полученное разложение. Заметим, что дополнительные множители можно выписывать по разложению на множители (1.9) (только без a_n);

б) раскрыть скобки и привести подобные члены в правой части;

в) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, при этом получится система n уравнений с n неизвестными $A_1, A_2, \dots, A_n$;

г) решить полученную в пункте в) систему n уравнений с n неизвестными и найти её единственное решение (доказано, что основной определитель этой системы отличен от нуля);

д) подставив найденные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_n$ в (1.10), и добавив (если она была для первоначальной неправильной дроби) целую часть, почленно проинтегрировать.

Пример 14. $\int \frac{6x^3 + 10x^2 + 6x + 15}{x^4 + 2x^3 + 5x^2} dx.$

Решение. 1) Рациональная дробь правильная, поэтому начинаем с пункта 2).

2) Разложим многочлен в знаменателе на множители: $x^4 + 2x^3 + 5x^2 = x^2(x^2 + 2x + 5)$, так как $D = 4 - 20 = -16 < 0$, то квадратный многочлен на линейные множители в области действительных чисел разложить нельзя.

3) Разложим исходную правильную рациональную дробь на сумму простейших:

$$\frac{6x^3 + 10x^2 + 6x + 15}{x^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + 2x + 5};$$

приведем дроби, стоящие в правой части к общему знаменателю, раскроем скобки и приведем подобные члены, тогда

$$4) 6x^3 + 10x^2 + 6x + 15 = A_1x^3 + 2A_1x^2 + 5A_1x + A_2x^2 + 2A_2x + 5A_2 + A_3x^3 + A_4x^2,$$

$$6x^3 + 10x^2 + 6x + 15 = (A_1 + A_3)x^3 + (2A_1 + A_2 + A_4)x^2 + (5A_1 + 2A_2)x + 5A_2,$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему

$$5) \begin{cases} A_1 + A_3 = 6, & A_3 = 6 - A_1, & A_3 = 6, \\ 2A_1 + A_2 + A_4 = 10, & A_4 = 10 - 2A_1 - A_2, & A_4 = 7, \\ 5A_1 + 2A_2 = 6, & 5A_1 = 6 - 2A_2, & A_1 = 0, \\ 5A_2 = 15. & A_2 = 3, & A_2 = 3. \end{cases}$$

В данном примере система, также, как и приведение её методом Гаусса к треугольному виду (если расположить неопределенные коэффициенты в порядке A_3, A_4, A_1, A_2), двигаясь снизу вверх найдем A_2 , затем A_1, A_4 и A_3 . Подставив найденные коэффициенты в разложение из п. 3), получим

$$\frac{6x^3 + 10x^2 + 6x + 15}{x^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{3}{x^2} + \frac{6x + 7}{x^2 + 2x + 5}.$$

$$\int \frac{6x^3 + 10x^2 + 6x + 15}{x^2(x^2 + 2x + 5)} dx = \int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{6x + 7}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{3(2x + 2) + 1}{x^2 + 2x + 5} dx =$$

$$= 3 \int x^{-2} dx + 3 \int \frac{(x^2 + 2x + 5)'}{x^2 + 2x + 5} dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = -\frac{3}{x} + 3 \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \text{ (см. пример 9).}$$

Решим пример 11 $\int \frac{4x-9}{x^2-6x+5} dx$ по общей схеме.

Решение. 1) дробь правильная;

2) $x^2 - 6x + 5 = 0$, по теореме Виета $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ и $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$;

$$3) \frac{4x-9}{(x-1)(x-5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-5};$$

$$4) 4x-9 = A_1(x-5) + A_2(x-1).$$

Если все корни многочлена в знаменателе действительны и различны, то можно сразу найти неопределенные коэффициенты, полагая по очереди x равным найденным в пункте 2 корням. В нашем случае

$$\text{а) при } x=1 \quad 4-9 = A_1 \cdot (1-5) + A_2 \cdot 0, \quad -4A_1 = -5, \quad A_1 = \frac{5}{4};$$

$$\text{б) при } x=5 \quad 20-9 = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot (5-1), \quad 4A_2 = 11, \quad A_2 = \frac{11}{4}.$$

Поэтому, минуя остальные подпункты 4) и 5), сразу получим

$$\frac{4x-9}{(x-1)(x-5)} = \frac{\frac{5}{4}}{x-1} + \frac{\frac{11}{4}}{x-5}.$$

$$6) \int \frac{4x-9}{x^2-6x+9} dx = \int \left(\frac{\frac{5}{4}}{x-1} + \frac{\frac{11}{4}}{x-5} \right) dx = \frac{5}{4} \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{11}{4} \int \frac{d(x-5)}{x-5} = \frac{5}{4} \ln|x-1| + \frac{11}{4} \ln|x-5| + C.$$

Замечание 1. Сравним данный ответ с ответом на стр. 10, полученного с помощью выделения в числителе производной от знаменателя, но упростив тот первоначальный ответ с помощью свойств логарифма, можно свести его к новому ответу. Такая ситуация при взятии интеграла разными методами типична: ответы получаются часто совершенно на первый взгляд разные, но отличаются друг от друга на константу (см. лемму о первообразных).

Замечание 2. Отметим, что чем больше степень многочлена в знаменателе, тем выгоднее применение предложенного метода нахождения неопределенных коэффициентов в случае разложения этого многочлена только на различные линейные множители. В качестве упражнения, возьмите с помощью этого метода

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 7x + 5}{x(x-1)(x+1)(x-2)} dx \text{ (полагая по очереди } x=0, x=1, x=-1, x=2).$$

Приведем еще один метод интегрирования выражений, содержащих корень из квадратного трехчлена, а именно, метод неопределенных коэффициентов для нахождения интегралов вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ или $\int P_n(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$, где

$P_n(x)$ — многочлен степени n . Отметим, что второй интеграл сводится к первому умножением и делением на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, а потому остановимся на первом интеграле. Докажем, что имеет место его представление в виде

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + L \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ — некоторый многочлен, степени на единицу меньшей степени многочлена $P_n(x)$, L — некоторая константа.

Продифференцировав обе части записанного равенства, получим

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q'_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + Q_{n-1}(x) \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{L}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

откуда при умножении правой и левой частей на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ придем к равенству двух многочленов степени n

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + Q_{n-1}(x) \left(ax + \frac{b}{2} \right) + L,$$

которое должно выполняться тождественно. Это условие даёт возможность определения коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и константы L обычным методом неопределенных коэффициентов. Отметим также, что система уравнений для определения этих коэффициентов будет иметь треугольный вид.

Пример 15. $\int x^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{x^2(x^2 + 2x + 2)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \int \frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$

В соответствии с рассмотренным методом запишем равенство

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + L \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = (3Ax^2 + 2Bx + C) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D).$$

$\frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \frac{L}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ и, умножив обе его части на $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$, придем к тождественному равенству двух многочленов четвертой степени:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 = (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^2 + 2x + 2) + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)(x + 1) + L.$$

Раскройте скобки сами и приведите подобные члены; приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему линейных алгебраических уравнений (кто-то сможет это сделать сразу в уме)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & 4A=1, & A=1/4, \\
x^3 & 7A+3B=2, & B=1/12, \\
x^2 & 6A+5B+2C=2, \text{ откуда} & C=1/24, \\
x & 4B+3C+D=0, & D=-11/24, \\
x^0 & 2C+D+L=0. & L=3/8.
\end{array}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx &= \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x - \frac{11}{24} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \\
&= \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x - \frac{11}{24} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{3}{8} \ln \left(x+1 + \sqrt{(x+1)^2 + 1} \right) + C.
\end{aligned}$$

§6. Замена переменной

I. Рассмотрим сначала замену в явном виде

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz. \quad (1.11)$$

Здесь мы положили $x = \varphi(z)$, тогда $dx = \varphi'(z) dz$. На первый взгляд для функций $f(x)$ и $\varphi(z)$ в общем виде правый интеграл выглядит сложнее левого (вспомните метод внесения под знак дифференциала, когда мы двигались в обратном направлении), но чаще всего замена применяется для выражений с иррациональностями, которые пропадают в правой части. Рассмотрим стандартные замены.

1) $\int f(x, \sqrt[n]{x}) dx$, замена

$$x = z^n, \quad dx = (z^n)' dz = n z^{n-1} dz \quad (1.12)$$

2) $\int f(x, \sqrt[n]{x}, \sqrt[m]{x}) dx$, замена

$$x = z^k, \quad (1.13)$$

где k — это наименьшее общее кратное чисел n и m .

В случае, когда под знаком корня стоит некоторая функция, то пробуют сделать замену в неявном виде:

$$1б) \int f(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}) dx, \text{ замена } \varphi(x) = z^n, \quad \varphi'(x) dx = n z^{n-1} dz \quad (1.12б)$$

$$2б) \int f(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}, \sqrt[m]{\varphi(x)}) dx, \text{ замена } \varphi(x) = z^k, \quad (1.13б)$$

где k — это наименьшее общее кратное чисел n и m . Но в случаях 1б, 2б замены (1.12б); (1.13б) подходят, если под знаком интеграла удастся выделить в качестве

множителя $\varphi'(x)$ (см. метод внесения под знак дифференциала) и, кроме того, выразить оставшуюся функцию вне корня, используя замену.

Мы ограничимся этими часто встречающимися простейшими случаями и отсылаем к литературе по интегрированию, справочникам, интернету (например, для $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ см. подстановка Эйлера), а для таких выражений с корнем из квадратного трехчлена мы ниже рассмотрим тригонометрические подстановки.

Пример 16. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{2x+1}+1}$ с помощью подстановки $2x+1 = z^4$, тогда $2dx = 4z^3 dz$, $dx = 2z^3 dz$. Получим,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{2x+1}+1} &= \int \frac{2z^3}{z+1} dz = 2 \int \frac{z^3+1-1}{z+1} dz = 2 \int \left(\frac{(z+1)(z^2-z+1)}{z+1} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \\ &= 2 \int z^2 dz - 2 \int z dz + 2 \int dz - 2 \int \frac{d(z+1)}{z+1} = 2 \frac{z^3}{3} - z^2 + 2z - 2 \ln|z+1| + C = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt[4]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1} + 2\sqrt[4]{2x+1} - 2 \ln(\sqrt[4]{2x+1}+1) + C. \end{aligned}$$

Замечание. Для выделения целой части мы в числителе добавили и отняли единицу и воспользовались формулой для суммы кубов.

Пример 17. Для вычисления $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$ сделаем замену $x = z^6$ (см. 1.13, наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 – это 6); $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$ $dx = 6z^5 dz$, для обратной замены $z = \sqrt[6]{x}$, тогда получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{(z^6-1)6z^5 dz}{z^3-z^2} = \\ &= 6 \int \frac{(z-1)(z^2+z+1)(z^3+1)z^3}{z-1} dz = 6 \int (z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)z^3 dz = 6 \int (z^8+z^7+ \\ &+ z^6+z^5+z^4+z^3) dz = 6 \left(\frac{z^9}{9} + \frac{z^8}{8} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^6}{6} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^4}{4} \right) + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + \\ &+ \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + x + \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C. \end{aligned}$$

Замечание. Так как у нас знаменатель при сокращении пропал, то в данном примере разложив $x-1$ как разность шестых степеней и работая с корнями можно было громоздкими алгебраическими преобразованиями также избавиться от знаменателя и обойтись без замены.

Пример 18. Найти интеграл $\int \frac{e^{4x} dx}{\sqrt[3]{e^{2x}+4}}$. Сделаем замену переменных $e^{2x}+4 = z^3$, $e^{2x} = z^3 - 4$, $d(e^{2x}+4) = d(z^3)$, откуда $e^{2x} dx = \frac{3}{2} z^2 dz$. Имеем,

$$\int \frac{e^{2x} e^{2x} dx}{\sqrt[3]{e^{2x} + 4}} = \int \frac{(z^3 - 4) \frac{3}{2} z^2 dz}{z} = \int \frac{3}{2} (z^4 - 4z) dz = \frac{3}{2} \left(\frac{z^5}{5} - 2z^2 \right) + C = \frac{3}{10} \sqrt[3]{(e^{2x} + 4)^5} - 3 \sqrt[3]{(e^{2x} + 4)^2} + C.$$

Замечание. В случаях 1б и 2б замена пройдет, если как и в случае при внесении под знак дифференциала в подынтегральном выражении можно выделить $\varphi'(x)$ в качестве множителя, но кроме того, то что останется после этого, должно выражать её без корней через новую переменную z . Если бы в примере 17 в числителе стояло бы x^2 вместо x^3 , то так как $x^2 dx = x \cdot x dx$, оставшийся $x = \sqrt{z^3 - 4}$ снова оставил бы теперь уже другой корень под знаком интеграла.

Приведем пример нестандартной замены.

Пример 19. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx$. Заменяем $\ln \operatorname{tg} x = z$, $d(\ln \operatorname{tg} x) = (\ln \operatorname{tg} x)' dx$, отсюда $\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = dz$, $\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x} dx = dz$, $\frac{dx}{\sin x \cos x} = dz$. С учетом замены получим $\int z dz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{\ln^2(\operatorname{tg} x)}{2} + C$.

Замечание. Одним из возможных подходов к замене может быть следующая идея: обозначить самую сложную функцию за новую переменную (в нашем случае $\varphi(x) = \ln \operatorname{tg} x$) или то, что мешает взять интеграл (например, в стандартных заменах 1 и 1б корень n -ой степени) и поискать $\varphi'(x)$ в качестве множителя перед dx , а затем замена работает как крупноблочное строительство ($\ln \operatorname{tg} x = z$, $\frac{dx}{\sin x \cos x} = dz$). Выразить в последнем примере x через z ($x = \operatorname{arctg} e^z$) приведет к очень сложным функциям (например, $\sin(\operatorname{arctg} e^z)$) и вряд ли вы сведете их к $z dz$.

§7. Метод интегрирования по частям

Проинтегрируем обе части равенства формулы производной произведения:

$$\int (uv)' dx = \int (u'v + uv') dx,$$

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx,$$

откуда выразим последнее слагаемое

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx,$$

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx,$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (1.14)$$

– это есть **формула интегрирования по частям**. Чтобы понять, как она работает, из предыдущей формулы с производными заметим, что интеграл от произведения двух функций она заменяет на интеграл от произведения производной от первой функции на первообразную от второй.

Пример 20. $\int x e^x dx$.

Дифференцирование x приводит к упрощению, поэтому полагаем $u = x$, $dv = e^x dx$, так что $du = dx$, $v = \int dv = \int e^x dx$ и $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$.

В рассмотренном примере, вообще говоря для e^x неважно, что с ней делать, она не меняется ни при интегрировании, ни при дифференцировании, но интеграл от x даст повышение степени x , а значит это не «выгодно», так как приводит к усложнению первоначального интеграла.

Пример 21. $\int x \ln x dx$.

Принимая за $u = \ln x$, $dv = x dx$, найдем $du = (\ln x)' \cdot dx = \frac{1}{x} dx$, $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$ и получим $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

В этом примере, в отличие от предыдущего, дифференцирование $\ln x$ упрощает заданный интеграл, а значит его и надо принимать за u .

Можно обобщить примеры 20, 21 и выделить следующие **общие стандартные случаи** применения формулы интегрирования по частям:

I. $\int P_n(x) f(x) dx$. Здесь $P_n(x)$ – многочлен степени n , а $f(x)$ – показательная или тригонометрические функции синус или косинус. В этом случае полагают $u = P_n(x)$, $dv = f(x) dx$.

II. $\int f(x) P_n(x) dx$. $P_n(x)$ – многочлен степени n , а $f(x)$ – логарифмическая или обратные тригонометрические функции. В этом случае полагают $u = f(x)$, $dv = P_n(x) dx$.

III. Интегралы вида $\int e^{ax} \cos bxdx$ или $\int e^{ax} \sin bxdx$ – можно выбирать любую из функций в качестве u , а другую в качестве dv .

К сожалению, никаким другим способом эти интегралы вычислить нельзя.

Пример 22. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Этот интеграл относится к интегралам II типа, для которых применима формула интегрирования по частям. Значит полагаем $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, откуда

$$\begin{aligned} du &= (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x. \text{ Применяя формулу (1.14), получим } \int \operatorname{arctg} x dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Пример 23. Найти $I = \int e^x \cos x dx$.

Этот интеграл относится к интегралам III типа, для которых применима формула интегрирования по частям, и не важно, что принимать за u , а что за dv ; положим $u = e^x$, $dv = \cos x dx$, тогда $du = e^x dx$, $v = \sin x$.
 $I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$. Для вновь полученного интеграла применим формулу интегрирования по частям еще раз, снова выбрав в качестве $u = e^x$, а в качестве $dv = \sin x dx$, тогда $du = e^x dx$, $v = -\cos x$. Получим

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Мы вернулись к первоначальному интегралу, но, выбросив промежуточную цепочку равенств, получили линейное уравнение относительно этого интеграла, то есть

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I,$$

$$2I = e^x (\sin x + \cos x) + C,$$

$$I = e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} + \frac{C}{2}.$$

Таким образом, $\int e^x \cos x dx = e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} + C_1$.

Замечание 1. Как только мы перебросим оба интеграла по одну сторону, справа нужно добавить произвольную постоянную C , так как неопределенный интеграл задает бесчисленное множество всех первообразных; наконец, при делении произвольной постоянной на 2, снова останется множество всех действительных чисел, которое мы обозначим за C_1 , иногда оставляют обозначение C .

Замечание 2. Часто возникает ситуация, когда метод интегрирования по частям применяется несколько раз подряд, например, в I случае для многочлена третьей степени $P_3 = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ необходимо его продифференцировать три раза, чтобы свести к константе $6a_3$, и тогда во второй и последующие разы нужно выбирать u , dv аналогично тому, как и в первый раз (в примере 23 взяли оба раза за $u = e^x$).

Отметим, что бывают и не стандартные случаи применения метода интегрирования по частям.

Пример 24. $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Этот интеграл не относится ни к одному из стандартных типов интегралов, для которых необходимо применять формулу интегрирования по частям. Тем не

менее, положив за $u = x$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ и определив $du = dx$, $v = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2 + 1}} =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1}, \text{ получим } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = x\sqrt{x^2 + 1} - \int \sqrt{x^2 + 1} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Следовательно,

$$I = x\sqrt{x^2+1} - I - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx, \text{ и } 2I = x\sqrt{x^2+1} - \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C,$$

в итоге, поделив на два, приходим к ответу:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C \right).$$

§8. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

I. Интегралы от произведения тригонометрических функций синусов и косинусов:

$$\int \sin nx \cos mx dx, \int \sin nx \sin mx dx, \int \cos nx \cos mx dx$$

берутся с помощью известных тригонометрических формул

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример 25. $\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin(2x + 3x) + \sin(2x - 3x)) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) - \int \sin x dx \right] =$

$$= -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

II. Интегралы от произведения в различных степенях $\sin x$ и $\cos x$

$$\int \sin^n x \cos^m x dx$$

а) если среди n, m есть нечетное число, то ту функцию, которая в нечетной степени, вносят под знак дифференциала (если обе степени нечетные, то проще вносить ту, которая обладает меньшим положительным показателем);

б) если оба показателя четные, то перейти к двойному углу по формулам

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

так как при этом степень уменьшается в два раза, то или сразу, или после нескольких шагов, появится нечетная степень и полученный интеграл сведется к случаю 1).

Пример 26. $\int \sin^{2019} x \cos^3 x dx = \int \sin^{2019} x \cos^2 x \cos x dx =$

$$= \int \sin^{2019} x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \int (\sin^{2019} x - \sin^{2021} x) d(\sin x) = \int \sin^{2019} x d(\sin x) -$$

$$-\int \sin^{2021} x d(\sin x) = \frac{1}{2020} \sin^{2020} x - \frac{1}{2022} \sin^{2022} x + C.$$

Пример 27. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x - \sin^2 2x \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx -$$

$$- \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cos 2x d(2x) = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16} \int dx -$$

$$- \frac{1}{64} \int \cos 4x d(4x) - \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

III. Интегралы $\int \operatorname{tg}^n x dx$ или $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) берутся с помощью формул $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ или $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, так как $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ и $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, то можно понизить степени на две единицы: например,

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot (\operatorname{tg} x)' dx -$$

$$- \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx \text{ и так далее.}$$

Пример 28. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx = \int \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \operatorname{ctg} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$

$$= \int \operatorname{ctg} x (-\operatorname{ctg} x)' dx - \int \operatorname{ctg} x dx = - \int \operatorname{ctg} x d(\operatorname{ctg} x) - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C.$$

Замечание. В случае нечетной степени, как в примере 28, можно перейти к синусам и косинусам (см. II а).

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin^3 x} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^3 x} d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^{-3} x d(\sin x) - \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x} - \ln |\sin x| + C.$$

Если же показатель степени четное число, то остается только III способ.

§9. Тригонометрические и универсальная тригонометрическая подстановки

Рассмотрим еще три стандартных замены, когда под квадратным корнем есть алгебраическая сумма x^2 и константы:

1) $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$. В этом случае делается замена

$$x = \sin t, \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t, dx = a \cos t; \quad (1.15)$$

2) $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$. В этом случае возьмем

$$x = \frac{a}{\cos t}, \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \cdot \operatorname{tg} t, dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt; \quad (1.16)$$

3) $\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$. В этом случае примем

$$x = a \operatorname{tg} t, \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2} = \frac{a}{\cos t}, dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt. \quad (1.17)$$

Пример 29. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$. Сделаем замену по формуле (1.17) $x = \operatorname{tg} t$,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{\cos^2 t} dt, \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \text{ тогда } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t \cdot \frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \\ &= \int \frac{dt}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot \cos t} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg} x)} + C. \end{aligned}$$

Замечание. В случае, если имеется $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, то сначала надо выделить полный квадрат, а затем применить соответствующую замену, обобщающую одну из формул (1.16)–(1.17).

Пример 30. $\int \sqrt{6x - x^2 - 5} dx = \int \sqrt{4 - (x-3)^2} dx$

Сделаем замену $x-3 = 2 \sin t$, $\sqrt{4 - (x-3)^2} = 2 \cos t$ (см 1.15), $dx = 2 \cos t dt$, $\sin t = \frac{x-3}{2}$, $t = \arcsin \frac{x-3}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - (x-3)^2} dx &= 4 \int \cos^2 t dt = \frac{4}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = 2 \int dt + \int \cos(2t) d(2t) = 2t + \\ &+ \sin 2t = 2 \arcsin \frac{x-3}{2} + \sin \left(2 \arcsin \frac{x-3}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Замечание. Можно вернуться к корням во втором слагаемом по формулам: $\sin(2 \arcsin a) = 2 \sin(\arcsin a) \cos(\arcsin a) = 2a \sqrt{1-a^2}$.

Универсальная тригонометрическая подстановка использует тригонометрические формулы $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ и $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, что позволяет свести интегралы от тригонометрических функций к рациональным дробям с помощью замены

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (1.18)$$

Если попробовать применить эту подстановку в примере 27, то получится рациональная дробь, у которой в знаменателе будет многочлен 14-ой степени $(1+t^2)^7$. Так как dx всегда в числителе, а знаменатели всех дробей в (1.18) одинаковы, то выгодно, когда $\sin x$ и $\cos x$ встречаются в первой степени в алгебраической сумме в знаменателе, а именно, **стандартное применение** универсальной тригонометрической подстановки рекомендовано для интегралов вида

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$$

Пример 31. $\int \frac{dx}{2 \cos x - \sin x + 3}$. Сделаем замену $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,
 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 \cos x - \sin x + 3} &= 2 \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(2 \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 \frac{t}{1+t^2} + 3 \right)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 5} = 2 \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2 + 2^2} \\ &= \operatorname{arctg} \frac{t-1}{2} + C = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{2} + C. \end{aligned}$$

Замечание. Если в знаменателе будут $\sin nx$ и $\cos nx$, то замена будет $\operatorname{tg} \frac{nx}{2} = t$, при этом измениться только $dx = \frac{2dt}{n(1+t^2)}$.

§10. Применение различных методов интегрирования

1. Часто бывает, что данный интеграл можно взять различными способами. В этом случае перебор методов надо начинать от простых к более сложным.

Пример 32. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

а) Применим самый простой из возможных – метод внесения под знак дифференциала:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{d(\frac{x^2}{2})}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Отметим, что еще быстрее воспользоваться формулой (1.7) третьего частного случая метода внесения под знак дифференциала.

б) Сделайте в качестве упражнения замену $x^2 + 1 = z^2$.

в) Сделайте еще более сложную тригонометрическую подстановку $x = \operatorname{tg} t$.

Чтобы понять, зачем нужны все три метода достаточно чуть усложнить числитель: для $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ пропадает метод внесения под знак дифференциала

а), но работают б) и в), но для $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ годится только в). Отметим, что последний из интегралов мы взяли нестандартно методом по частям (см. пример 24).

Пример 33. $\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$

Не торопитесь применять схему интегрирования правильной рациональной дроби: зная, что при дифференцировании степень многочлена понижается на единицу (в данном случае с 3 до 2), то проверьте, что $(x^3 - x^2 + x - 1)' = 3x^2 - 2x + 1$, а так как здесь $c=1$, по формуле (1.6) можно сразу написать ответ: натуральный логарифм знаменателя.

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \int \frac{(x^3 - x^2 + x - 1)'}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \ln |x^3 - x^2 + x - 1| + C.$$

2. Надо знать стандартные методы и сферу их применимости.

Например, не только знать формулу (1.14) интегрирования по частям, но и основные типы интегралов (I-III на стр.19), которые берутся только этим методом.

3. Интегрирование – творческий процесс, поэтому не раз нестандартные идеи позволяют легко взять интеграл (например, решение примера 3, с помощью идеи заменить 1 в числителе с помощью основного тригонометрического тождества вместо стандартного пути: дважды перейти к двойному углу, понизив степень синусов, косинусов с четвертой до первой и затем сделав универсальную тригонометрическую подстановку). Приведем еще один пример.

Пример 34. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x}.$

Вместо стандартного пути: а) переход к двойному углу, б) универсальная тригонометрическая подстановка, есть кратчайший путь взятия этого интеграла, но надо догадаться вынести $\cos^2 x$ за скобку и с помощью внесения под знак дифференциала выходим на табличный интеграл.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 9} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{3} + c.$$

4. Мы уже говорили, что первообразные некоторых функций не являются элементарными, поэтому, как нельзя изобрести «вечный двигатель», так и невозможно никаким методом взять интеграл от таких функций (эти интегралы называют «не берущимися».) Поэтому желательно знать самые известные из «не берущихся» интегралов, например $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int e^{\frac{x^2}{2}} dx$ (последний один из основ-

ных в теории вероятностей) и так далее. В заключении мы укажем идею взятия таких интегралов с помощью бесконечного степенного ряда Маклорена!

Глава 2. Определенный интеграл и его приложения

§1. Определенный интеграл, его геометрический смысл и свойства

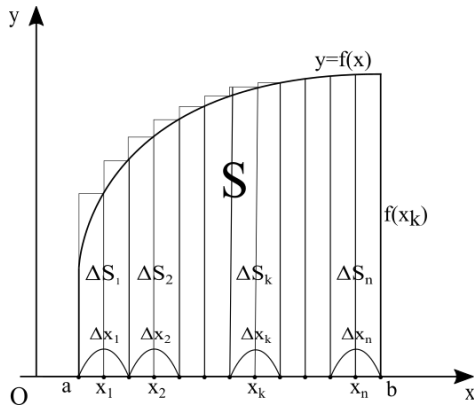


Рис. 1

Рассмотрим задачу о вычислении площади плоской фигуры. Пусть дана функция $y = f(x)$ непрерывная на $[a, b]$. Кроме того, сначала предположим, что $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции S (см. рис. 1)

1) Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей и разрежем фигуру на вертикальные полосы, обозначим при этом Δx_k — длину k -го разбиения, а ΔS_k — площадь соответственно k -ой полосы ($k = 1, 2, \dots, n$), оче-

видно, $S = \sum_{k=1}^n \Delta S_k$.

2) Выберем в каждой части разбиения по точке x_k и заменим каждую k -ую полосу на прямоугольник с высотой $h_k = f(x_k)$, обозначим площадь k -ого прямоугольника $\Delta S_{\square k}$, при малых Δx_k очевидно $\Delta S_k \approx \Delta S_{\square k}$, тогда вся площадь

$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_{\square k} = \sum_{k=1}^n h_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$. Полученную $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$ называют **интегральной суммой**.

3) Чем на большее число n разбивается отрезок $[a, b]$ и чем соответственно будут меньше Δx_k , тем точнее мы сможем вычислить площадь S . Поэтому для получения точного ответа пусть n будет неограниченно расти, но при этом все длины разбиений Δx_k должны стремиться к нулю.

Определение 1. Определенным интегралом

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \quad (2.1)$$

называется предел интегральных сумм, когда число разбиений стремится к бесконечности и максимальные длины разбиений стремятся к нулю. Так как в пределе (если он существует) мы должны получить S (фактически формула (2.1) является математически строгим определением площади плоской фигуры) и поэтому геометрическим смыслом определенного интеграла для положительной функции $y = f(x)$ является площадь S криволинейной трапеции между графиком функции и отрезком $[a, b]$. Очевидно, что при умножении $f(x)$ на (-1) площадь для отрицательной функции будет со знаком минус. В силу интуитивного понимания существования и единственности площади фигуры (строгое

обоснование и доказательство соответствующей теоремы занимает многие страницы, и мы дадим её без доказательства) справедлива следующая

теорема Римана. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел (2.1) интегральных сумм существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек x_k в каждой части.

Свойства определенного интеграла.

$$\begin{aligned} 1^0. \int_a^b cf(x)dx &= c \int_a^b f(x)dx, \quad c = const. \\ 2^0. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \\ 3^0. \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

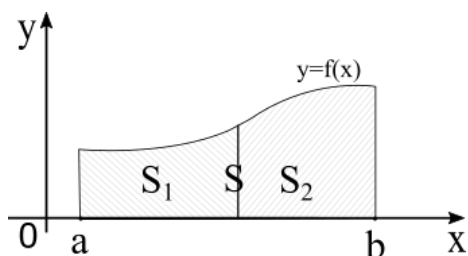


Рис. 2

Первые два (линейные) свойства непосредственно вытекают из свойств предела, в то же время они очевидны из геометрического смысла интеграла. Например, третье свойство вытекает из аддитивного свойства площади (см. рис. 2) $S = S_1 + S_2$.

4⁰. Оценочное свойство. Пусть $m \leq f(x) \leq M$ при $x \in [a, b]$ (см. рис. 3. Для определенности выберем в качестве $m = f_{\text{наим}}$, а в качестве $M = f_{\text{наиб}}$). Тогда, если $f(x) \neq const$, то $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$.

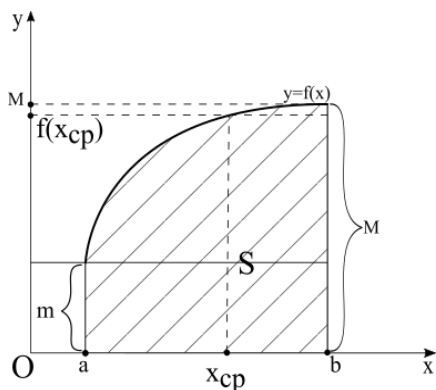


Рис. 3

Обозначим площадь меньшего прямоугольника с высотой m через $S_{\square m}$, а большего с высотой M — $S_{\square M}$. Очевидно, $S_{\square m} < S < S_{\square M}$, что и требовалось доказать.

5⁰. Определение 2. Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ назовем

$$f_{cp} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Если разделить двойное неравенство в 4⁰ на $(b-a)$, то получим

$$m < f_{cp} < M$$

и по теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$ существует такое $x_{cp} \in (a, b)$, что $f_{cp} = f(x_{cp})$ задает среднюю высоту функции (геометрически площадь прямоугольника с высотой f_{cp} равна площади криволинейной трапеции под кривой $y = f(x)$). Поэтому справедлива теорема о среднем.

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_{cp})(b-a). \quad (2.3)$$

Пример 1. Оценить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{100+21\sin^2 x}}$.

Так как при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, то $100 \leq 100 + 21\sin^2 x \leq 121$, тогда

$$10 \leq \sqrt{100 + 21\sin^2 x} \leq 11, \text{ и } \frac{1}{11} \leq \frac{1}{\sqrt{100 + 21\sin^2 x}} \leq \frac{1}{10}.$$

Так как длина отрезка интегрирования $b-a = \frac{\pi}{2}$, то по свойству 4⁰ получим,

$$\text{что } \frac{1}{11} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{100 + 21\sin^2 x}} \leq \frac{1}{10} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ откуда следует, что}$$

$$0,143 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{100 + 21\sin^2 x}} \leq 0,157.$$

§2. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Очевидно, что вычислять значение определенного интеграла из (2.1) невозможно, но оказалось, что это легко сделать с помощью неопределенного интеграла. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда по **формуле Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2.4)$$

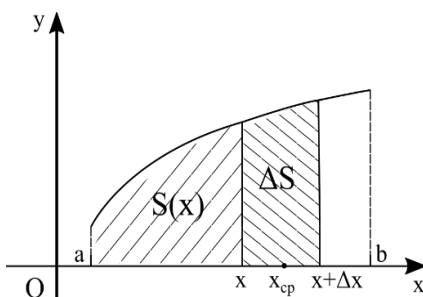


Рис. 4

определенный интеграл равен разности значений первообразной от подынтегральной функции: из её значения на правом конце отрезка вычитается значение на левом конце (специально для этой разницы ввели обозначение $F(x)\Big|_a^b$). Отметим, что неважно, какую из первообразных взяли для вычисления (так как, если $F_2(x) = F(x) + C$, то $C - C$ уничтожится и ответ не изменится).

Доказательство. Рассмотрим переменную площадь $S(x)$ (см. рис. 4) криволинейной трапеции на отрезке $[0, x]$, которая из геометрического смысла определенного интеграла задается $\int_a^x f(t)dt$ с переменным верхним пределом и покажем, что $S(x)$ является одной из первообразных от подынтегральной функции $f(x)$. По определению производной

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}.$$

Используя свойство 3⁰, разобьём отрезок $[a, x + \Delta x]$ на два и применим теорему о среднем (см. формулу 2.3, у нас $b - a = \Delta x$), так как $x_{cp} \rightarrow x$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (см. рис. 4), получим

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_{cp})\Delta x}{\Delta x} = f(x).$$

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$, так как любые первообразные отличаются на константу, обозначим её C_0 , то $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C_0$.

а) положим $x = a$, $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C_0$. Так как, очевидно, $\int_a^a f(t)dt = 0$, то

$C_0 = -F(a)$, отсюда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

б) положим $x = b$, что дает $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Сменив обозначение независимой переменной t на x , мы получим формулу (2.4).

Пример 2. Найти площадь под косинусоидой

$y = \cos x$ в первой четверти при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Из геометрического смысла определенного интеграла

$$S = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Этот простой пример показывает, какой мощнейший метод решения непростой задачи – вычисление произвольной площади мы приобрели!

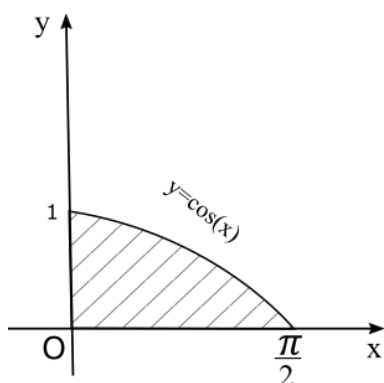


Рис. 5

§3. Некоторые частные случаи вычисления определенных интегралов для четных, нечетных и периодических функций

I. Интеграл от четной функции $y = f_{\text{четн}}(x)$ в симметричных пределах равен удвоенному интегралу от этой функции по положительной части отрезка:

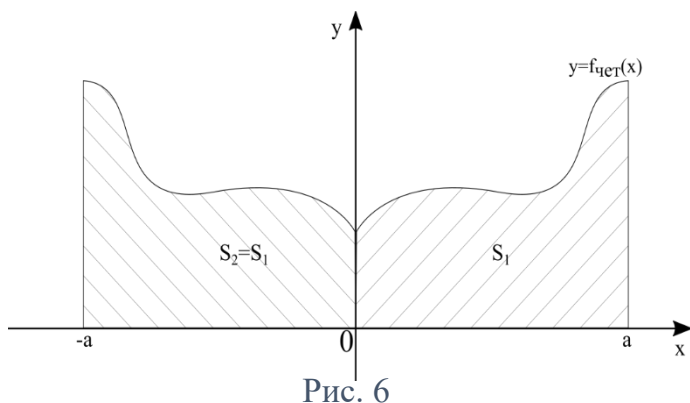


Рис. 6

$$\int_{-a}^a f_{\text{четн}}(x) dx = 2 \int_0^a f_{\text{четн}}(x) dx, \quad (2.5)$$

а интеграл от нечетной функции $y = f_{\text{нечетн}}(x)$ в симметричных пределах равен нулю:

$$\int_{-a}^a f_{\text{нечетн}}(x) dx = 0. \quad (2.6)$$

Доказательство. Для четной функции $y = f_{\text{четн}}(x)$, график которой симметричен относительно оси Oy , из соображений симметрии (см. рис. 6)

$S_1 = S_2$ и $S = S_1 + S_2 = 2S_1$. Для нечетной функции $y = f_{\text{нечетн}}(x)$, график которой симметричен относительно начала координат, из соображений симметрии (см. рис. 7)

$$S_2 = -S_1 \text{ и } S_1 + S_2 = S_1 - S_1 = 0.$$

Пример 3. Вычислить

$$\int_{-1}^1 (5 \arctg^3 x - 2 \sin^5 x + 4x\sqrt[3]{x} + 3x^2) dx$$

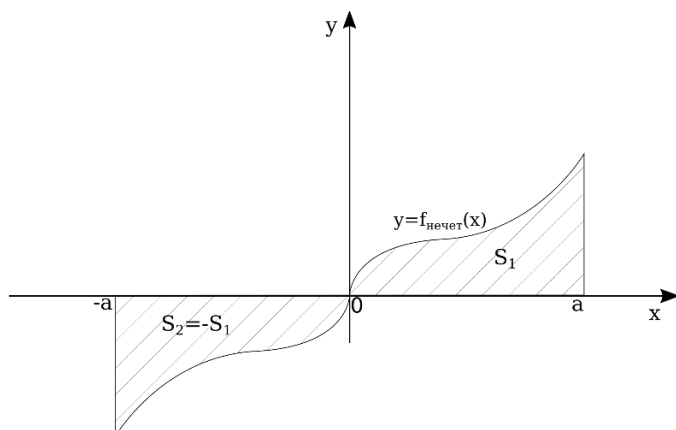


Рис. 7

В каждом из первых трех слагаемых функция нечетная, а последняя функция четная, тогда в силу (2.5), (2.6), получим

$$\int_{-1}^1 (5 \arctg^3 x - 2 \sin^5 x + 4x\sqrt[3]{x} + 3x^2) dx = 2 \int_0^1 3x^2 dx = 2x^3 \Big|_0^1 = 2.$$

II. Интегралы от тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$ по длине периода равны нулю:

$$\int_a^{a+2\pi} \sin x dx = \int_a^{a+2\pi} \cos x dx = 0.$$

Для доказательства рассмотрим $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$, так как $y = \sin x$ нечетная функция. При сдвиге в силу периодичности $S_1 = S_2$ (см. рис. 8), ответ не изменится.

Отметим, что если взять эти функции в нечетной степени, например, $\int_a^{a+2\pi} \sin^3 x dx$, то равенство $S_1 = S_2$ останется и интеграл обнулится.

Пример 4. Вычислить

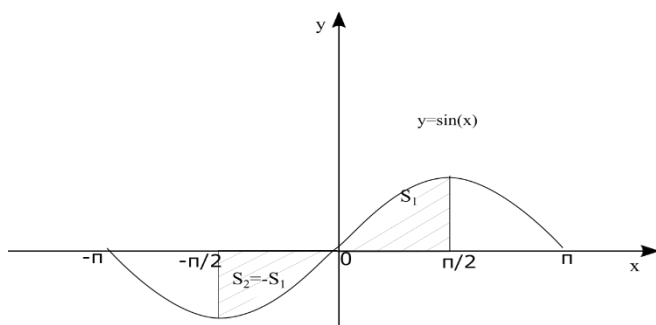


Рис. 8

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^6 x dx &= \int_0^{\pi} (\sin^2 x)^3 dx = \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \\ &\quad - \cos^3 2x) dx.\end{aligned}$$

Так как для функции $\cos 2x$ период $T = \pi$, то есть равен длине отрезка интегрирования, то в силу свойства II интеграла от $\cos 2x$ в нечетных степенях обнулятся. Тогда

$$\frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} \left(1 + 3 \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx.$$

Так как функция $\cos 4x$ имеет период $T = \frac{\pi}{2}$, а, следовательно, и π тоже, то интеграл от $\cos 4x$ тоже обнулится, значит $\frac{1}{8} \int_0^{\pi} \left(1 + 3 \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} \frac{5}{2} dx = \frac{5}{16} \pi$.

Замечание. Решение примеров 3, 4 показывает, что использование свойств I, II сильно упрощает вычисление соответствующих определенных интегралов.

§4. Метод интегрирования по частям и замена переменной в определенном интеграле

I. Аналогично тому, как была выведена формула (1.14) интегрирования по частям (см. стр. 18), взяв теперь уже определенные интегралы на отрезке $[a, b]$ от обеих частей в формуле дифференцирования двух функций, получим

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (2.7)$$

Пример 5. Вычислить $\int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \cos 2x dx, v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| =$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u_2 = x, du_2 = dx, \\ dv_2 = \sin 2x dx, v_2 = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \frac{\pi^2}{2} \sin 2\pi - 0 =$$

$$= \frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \pi \cos 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что $\int_0^{\pi} \cos 2x dx = 0$ в силу свойства II (см. §3).

II. Рассмотрим замену с помощью явной функции для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$,

$x = \varphi(z)$, $dx = \varphi'(z) dz$, $\sqrt{x} = z$, $a = \varphi(z_1)$, $b = \varphi(z_2)$. Используя обратную к $\varphi(z)$ функцию, найдем z_1, z_2 , тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{z_1}^{z_2} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz. \quad (2.8)$$

Замечание. По сравнению с заменой в неопределенном интеграле для определенного интеграла добавляется ещё перерасчет новых пределов интегрирования, но потом не нужно возвращаться к первоначальной переменной x .

Пример 6. Вычислить $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Пусть $x = z^2$, $dx = 2z dz$, $z_1 = \sqrt{4} = 2$, $z_2 = \sqrt{9} = 3$, тогда

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} &= \int_2^3 \frac{2z dz}{z+1} = 2 \int_2^3 \frac{z+1-1}{z+1} dz = 2 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) dz = 2 \left[\int_2^3 dz - \int_2^3 \frac{d(z+1)}{z+1} \right] = \\ &= 2 \left[z \Big|_2^3 - \ln(z+1) \Big|_2^3 \right] = 2 [3 - 2 - \ln 4 + \ln 3] = 2 \left(1 + \ln \frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Замечание. Мы выделили целую часть неправильной рациональной дроби $\frac{z}{z+1}$ методом добавить и отнять, а затем почленно поделить; внутри $\ln(z+1)$ знак модуля можно раскрыть со знаком «плюс», так как в указанных пределах интегрирования, то есть при $z \in [2, 3]$ $z+1 > 0$.

§5. Вычисление площади плоской фигуры в декартовой, полярной системах координат и в случае, когда граница задана параметрически

I. Для вычисления площади плоской фигуры в декартовой системе координат при $x \in [a, b]$ (см. рис. 9) надо взять интеграл в этих пределах от разности верхней и нижней функций:

$$S = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx. \quad (2.9)$$

Доказательство. а) Пусть сначала $0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$.

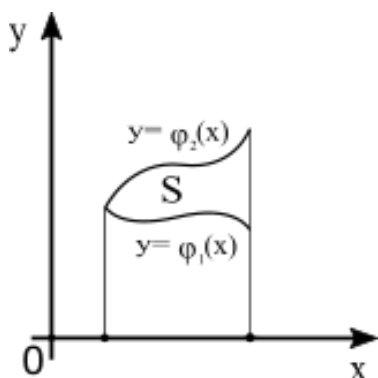


Рис. 9

Обозначим через S_1 площадь криволинейной трапеции под графиком функции $y = \varphi_1(x)$ при $x \in [a, b]$, а через S_2 – площадь под графиком $y = \varphi_2(x)$ при $x \in [a, b]$. Тогда из геометрического смысла определенного интеграла

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx.$$

б) В случае любых знаков у функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ можно добавить к каждой функции такое большее число $M > 0$, чтобы стало $\varphi_1(x) + M > 0$ при $x \in [a, b]$, очевидно, что при параллельном переносе площадь S не изменится. Тогда по доказанному в а)

$$S = \int_a^b [(\varphi_2(x) + M) - (\varphi_1(x) + M)] dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx$$

и формула (2.9) остается справедливой в общем случае.

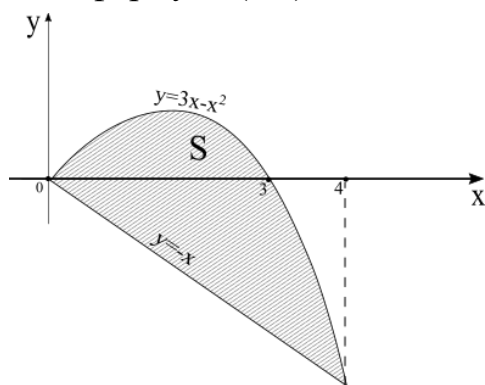


Рис.10

Пример 7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 3x - x^2$, $y = -x$.

1) Построим параболу и прямую (см. рис. 10), ограничивающих данную фигуру, и найдем пределы интегрирования. Из чертежа очевидно, что $a = 0$, для нахождения второго предела интегрирования решим систему из заданных двух уравнений с двумя неизвестными, то есть приравняем правые части: $3x - x^2 = -x$, $x^2 - 4x = 0$, $x(x - 4) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Следовательно, $b = 4$. Отметим, что если аккуратно рисовать чертеж в масштабе, то можно было из чертежа предположить, что $b = 4$.

Для проверки этой гипотезы, надо было подставить $x = 4$ в правые части заданных уравнений: $y = (3x - x^2)|_{x=4} = -4$ и $y = -x|_{x=4} = -4$, значения совпали, значит $b = 4$.

$$\begin{aligned} 2) \text{ По формуле (2.9) } S &= \int_0^4 [3x - x^2 + x] dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \\ &= 2 \cdot 16 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Замечание. Если вы нарисовали чертеж на клеточной бумаге, с единицей масштаба одна клетка, то можно оценить, насколько полученный ответ соответствует данной площади.

II. Пусть кривая задана в полярной системе координат (см. рис. 11) уравнением $r = r(\varphi)$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$). Тогда

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (2.10)$$

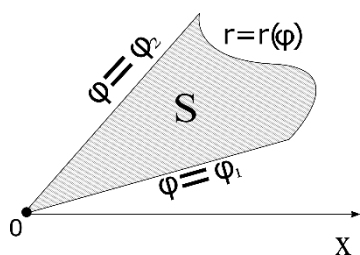


Рис. 11

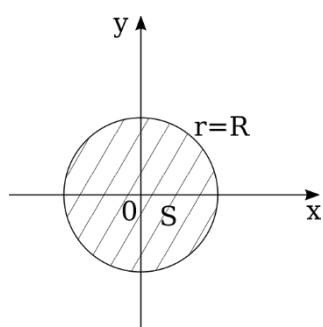


Рис. 12

Доказательство смотрите при вычислении двойного интеграла в полярной системе координат.

Пример 8. Найти площадь круга радиуса R .

В декартовой системе координат уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$. Если разрешить уравнение относительно y ,

то появится квадратный корень и взять интеграл удастся только с помощью тригонометрической подстановки. Поэтому перейдем к полярной системе координат: по определению окружности по каждому лучу надо пройти расстояние равное радиусу R , следовательно уравнение окружности будет $r = R$. Можно формально вывести это уравнение, подставив в $x^2 + y^2 = R^2$ $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Чтобы «обойти» окружность, нужно сделать полный оборот, тогда

$$S_{\text{круга}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi = \frac{R^2}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Замечание. В Древней Греции для вывода площади

круга вписывали правильные многоугольники и удваивали число сторон; как мы только что обсуждали, в декартовой системе координат надо было брать интегралы с иррациональностями, а в полярной системе координат получается чрезвычайно простой вывод (чем больше знаешь, тем часто проще получить ответ).

III. Пусть граница области задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t_1 \leq t \leq t_2$. Тогда

площадь данной фигуры

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)| dt \quad (t_1 \leq t \leq t_2). \quad (2.11)$$

Доказательство. Сделаем замену переменных, выразив подынтегральное

выражение и пределы интегрирования $S = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) d(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt$ (при

условии, что параметризация такова, что x пробегает отрезок от a до b , когда t меняется от t_1 до t_2). Иначе, можно получить ответ со знаком минус (например, при положительном $y(t)$, если $x(t)$ убывает при $t \in [t_1, t_2]$, то $x'(t) < 0$). Поэтому, чтобы не учитывать знак, возьмем подынтегральную функцию по модулю, что и дает (2.11)

Пример 9. Найти площадь внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

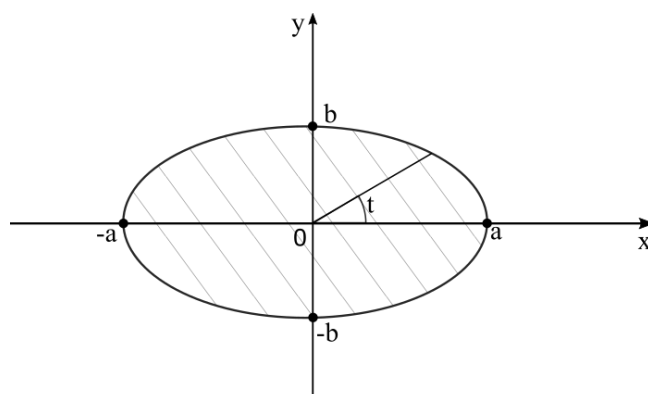


Рис. 13

Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Для такого задания можно использовать основное тригонометрическое тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, откуда $\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t$, $\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t$ и легко получить параметрическое задание эллипса, а так как геометрический смысл t – это угол с положительным направлением оси Ox , то, очевидно, надо сделать полный оборот, чтобы «обойти» эллипс, поэтому $0 \leq t \leq 2\pi$). Воспользуемся формулой (2.11)

$$S_{\text{элл}} = \int_0^{2\pi} |b \sin t \cdot (a \cos t)'| dt = \int_0^{2\pi} |b \sin t \cdot (-a \sin t)| dt = ab \int_0^{2\pi} |-\sin^2 t| dt = \\ = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} t \Big|_0^{2\pi} = \pi ab \text{ (кв. ед.) (интеграл от } \cos 2t \text{ по длине периода равен 0).}$$

Замечание. Так как окружность является частным случаем эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon = 0$, когда два фокуса слились в один – в центр окружности, значит $a = b = R$, и, после подстановки, получим $S_{\text{окруж}} = \pi R^2$ (см. пример 8.)

§6. Дифференциальный метод

Как уже отмечалось в §1, знаки дифференциала и интеграла «уничтожают» друг друга, отсюда $\int_a^b d\varphi(x) = \varphi(x) \Big|_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$. Если вспомнить, что по определению дифференциал есть главная линейная часть приращения функции, то это обосновывает дифференциальный метод:

1) сначала мы находим дифференциал, интересующей нас переменной величины $\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$, на отрезке $[x, x + \Delta x]$, причем при нахождении этого дифференциала можно считать очень «грубо»: а) кривые на её части, соответствующей Δx , можно заменять на отрезки прямых; б) если у нас уже присутствует в качестве множителя Δx , то переменную функцию можно считать константой;

2) затем переходим к интегралу в интересующих нас пределах от a до b , от найденного в пункте 1) дифференциала $d\phi(x)$.

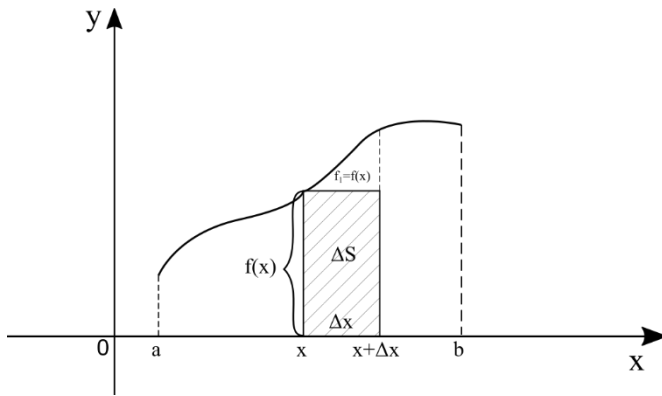


Рис. 14

$f(x)$ меняется от $f(x)$ до $f(x + \Delta x)$ заменим её на $f(x) = h = \text{const}$ высоты прямоугольника, тогда $\Delta S \approx dS = f(x)\Delta x$. Чтобы найти общую площадь криволинейной трапеции, когда x меняется от a до b , перейдем к интегралу от найденного дифференциала dS ; при этом заменим Δx на dx : $S = \int_a^b f(x)dx$.

§7. Вычисление длины дуги плоской кривой

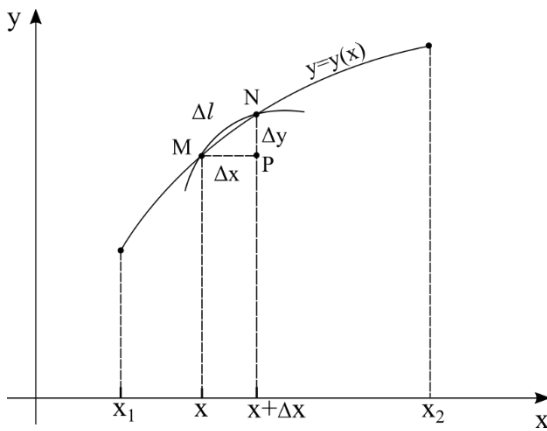


Рис. 15

Для нахождения длины дуги AB воспользуемся дифференциальным методом. Чтобы найти дифференциал дуги dl заменим дугу $\cup MN$ (её длину естественно обозначить Δl) над отрезком $[x, x + \Delta x]$ на отрезок MN (см. рис. 15), затем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника MNP $\Delta l \approx MN = \sqrt{MP^2 + NP^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

а) В случае декартовой системы координат пусть сначала дуга AB задана $y = y(x)$ при $x \in [x_1, x_2]$. Вынесем $(\Delta x)^2$ за скобку, а

затем за знак квадратного корня $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$. Так как $\Delta x \ll 1$

и чем меньше Δx , тем точнее дифференциал dl описывает приращение дуги Δl , то при переходе к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ из определения производной получим дифференциал дуги $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ и

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (2.12a)$$

б) Пусть дуга AB задана $x = x(y)$ при $y \in [y_1, y_2]$. Аналогично а), вынося $(\Delta y)^2$, получим $dl = \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy$ и

$$l = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (2.126)$$

в) В случае, если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ при $t \in [t_1, t_2]$, то

$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$ и при переходе к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ и

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (2.13)$$

Отметим, что если рассмотреть кривую в пространстве и задать её пара-

метрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ при $t \in [t_1, t_2]$ (вспомните, как считаются длины векторов

на плоскости и в пространстве), то в формуле (2.13) добавится квадрат третьей производной:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (2.14)$$

г) Пусть кривая задана в полярной системе координат $r = r(\varphi)$ при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Зададим по формулам перехода к полярной системе координат $x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$ и, выбрав в качестве параметра $t = \varphi$, получим

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\varphi = \sqrt{(r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= \sqrt{(r'(\varphi))^2 \cos^2 \varphi + (r'(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + r^2(\varphi) \sin^2 \varphi + r^2(\varphi) \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi, \text{ и} \end{aligned}$$

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (2.15)$$

Замечание. Во всех случаях в интегралах, вычисляющих длину дуги, присутствует корень квадратный, что вызывает значительные трудности при их вычислении или даже приводит к «неберущимся» интегралам. Поэтому желательно правильно выбрать систему координат или параметрически задать кривую для упрощения взятия соответствующих интегралов. В качестве примера мы

рассмотрим все три возможных варианта выражения длины дуги окружности радиуса R и сравним сложность вычисления интегралов.

Пример 10. Вычислить длину окружности радиуса R .

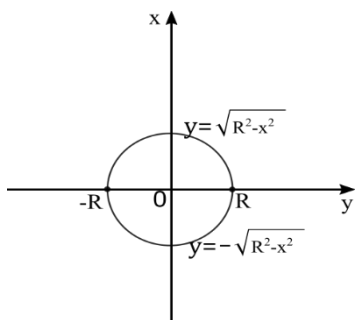


Рис. 16

а) В декартовой системе координат из канонического уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (в качестве центра окружности проще всего выбрать начало координат) выразим $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Верхней половине окружности соответствует $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, а нижней — $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ (см. рис. 16). Из соображений симметрии можно вычислить длину верхней полуокружности по формуле (2.12а), а ответ умножить на 2:

$$l_{\text{окружн}} = 2 \int_{-R}^R \sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)' \right]^2} dx = 2 \int_{-R}^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx.$$

Так как подынтегральная функция четная, а пределы интегрирования симметричны, то

$$2 \int_{-R}^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R =$$

$$= 4R(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 4R \frac{\pi}{2} = 2\pi R \text{ (лин. ед.)}.$$

б) Зададим окружность параметрически $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases}$ при $t \in [0, 2\pi]$, тогда по формуле (2.13)

$$l_{\text{окружн}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[(R \cos t)' \right]^2 + \left[(R \sin t)' \right]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = R \int_0^{2\pi} dt =$$

$$= 2\pi R \text{ (лин. ед.)}.$$

в) В полярной системе координат $r = R$ при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и по формуле (2.15)

$$l_{\text{окружн}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + (R')^2} d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R \text{ (лин. ед.)}.$$

Вывод, что проще, сделайте сами. Отметим, что всегда $\int_a^b dx = b - a$, то есть равен длине отрезка интегрирования, чем мы и воспользовались в случае в).

§8. Вычисление объемов тел с известными площадями поперечных сечений. Нахождение объемов тел вращения

Пусть для некоторого тела известны площади поперечных сечений $S(x)$, перпендикулярных оси Ox (см. рис. 17).

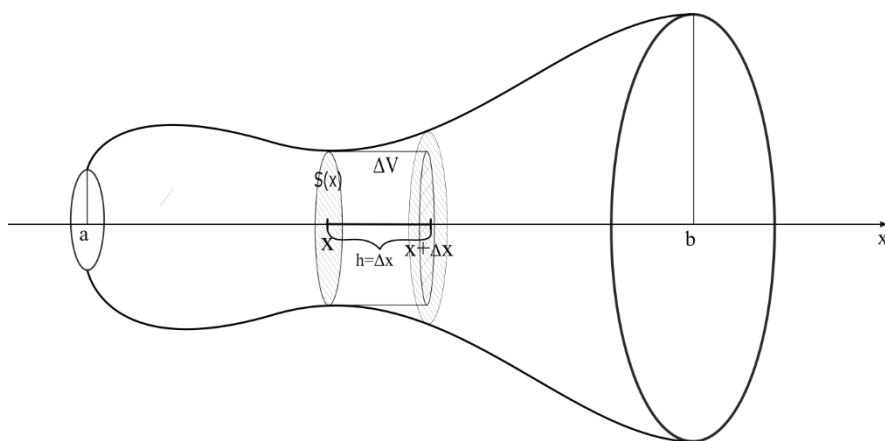


Рис. 17

Воспользуемся дифференциальным методом: возьмем произвольный $x \in (a, b)$, дадим приращение Δx и рассмотрим объем полученного кусочка ΔV . Так как высота его $h = \Delta x$, то построим на основании $S(x)$ цилиндр с образующими, параллельными оси Ox . Тогда $dV = S(x)\Delta x = S(x)dx$. Перейдя к интегралу, найдем объем тела

$$V = \int_a^b S(x)dx. \quad (2.16)$$

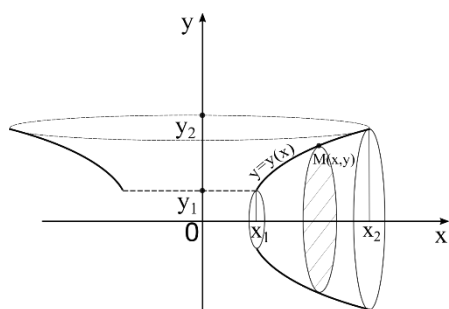


Рис. 18

Для произвольного тела $S(x)$ неизвестно, мы рассмотрим частный случай тела вращения, образованного вращением кривой $y = y(x)$ при $x \in [x_1, x_2]$ вокруг оси Ox . Так как каждая точка $M(x, y(x))$ вращается по окружности, то $S(x)$ есть площадь круга радиуса $R = y(x)$: $S(x) = \pi y^2(x)$. Подставив $S(x)$ в формулу (2.16) и, вынеся константу π за знак интеграла, получим

$$V_{Ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx. \quad (2.17)$$

Если ту же самую кривую вращать вокруг оси Oy (очевидно, тело за исключением окружности с центром в начале координат, будет другим (см. рис. 18)) и, взяв обратную функцию $x = x(y)$ при $y \in [y_1, y_2]$, получим формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси Oy , в которой по сравнению с (2.17) x и y поменяются ролями:

$$V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y)dy. \quad (2.18)$$

В случае, если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ при $t \in [t_1, t_2]$, то подставив функции $x(t)$, $y(t)$ в формулы (2.17), (2.18) и для положительности объема, взяв $x'(t)$ или $y'(t)$ по модулю (также как в (2.11)) получим

$$V_{Ox} = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) |x'(t)| dt, \quad (2.19)$$

$$V_{Oy} = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) |y'(t)| dt. \quad (2.20)$$

Пример 11. Вывести формулу для объема шара радиуса R .

Возьмем окружность радиуса R с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$ и будем её вращать вокруг оси Ox . По формуле (2.17) получим

$$V_{шара} = \pi \int_{-R}^R y^2(x) dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2 \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Пример 12. Найти объем тела, полученного вращением кривой $y = \arcsin x$ при $x \in [0, 1]$ вокруг оси Oy .

Найдем обратную функцию $x = \sin y$ при $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда по формуле

$$(2.18) \text{ получим } V_{Oy} = \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 y dy = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2y}{2} dy = \frac{\pi}{2} \left(y - \frac{1}{2} \sin 2y \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Пример 13. Найти объем тела, полученного вращением циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ при $0 \leq t \leq 2\pi$ вокруг оси Ox . Циклоида – это кривая, которая описывает движение точки, зафиксированной на движущейся по горизонтальной прямой окружности.

По формуле (2.19)

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 |a(t - \sin t)'| dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt, \text{ так как интегралы по длине периода от } \cos t \text{ и } \cos^3 t \text{ обращаются в ноль, то } V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) \right) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \frac{5}{2} dt = 5\pi^2 a^3.$$

§9. Физические приложения определенного интеграла: вычисление длины пути, работы переменной силы и многие другие

I. Из физического смысла производной $s'(t) = v(t)$ следует, что если известна скорость $v(t)$ за время от t_1 до t_2 , то пройденный путь за это время

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (2.21)$$

Пример 14. Найти путь тела, падающего под действием силы тяжести (сопротивлением воздуха пренебречь, например, в первые минуты при затяжном парашютном прыжке с большой высоты, пока парашют не раскрыт).

В нашем случае будет равноускоренное движение с ускорением g м/с², поэтому $v = g\tau$, время τ меняется от 0 до t . По формуле (2.21) $s = \int_0^t g\tau d\tau = \frac{gt^2}{2}$.

Так легко выводится с помощью интегрирования хорошо известная из школьного курса физики формула равноускоренного движения.

II. Пусть тело движется по прямой под действием непрерывной переменной силы $F(x)$ при $x_1 \leq x \leq x_2$ (см. рис. 19). Воспользуемся дифференциальным методом: возьмем произвольный x , дадим приращение Δx и найдем элементарную работу ΔA на этом отрезке.

Так как при постоянной силе F работа $A = Fl$ равна произведению силы на путь, а длина пути равна как раз Δx , поэтому можно считать на этом отрезке, что сила не меняется и равна $F(x)$: $dA = F(x)\Delta x = F(x)dx$. Следовательно, суммарная работа на всем отрезке $[x_1, x_2]$ будет равна

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (2.22)$$

В примере 18 на странице 43 формула (2.22) используется для нахождения потенциальной энергии, накопленной телом при его удалении с поверхности Земли в бесконечность.

III. Дифференциальный метод позволяет решить большое количество всевозможных задач.

Пример 15. Найти работу, потраченную на подъем всех блоков, из которых сложена пирамида Хеопса. В основании четырехугольной правильной пирамиды лежит квадрат со стороной $a = 200$ м, высота $h = 140$ м, удельный вес камня, из которого вырезались блоки $d = 2,5 \frac{\text{Т}}{\text{м}^3}$.

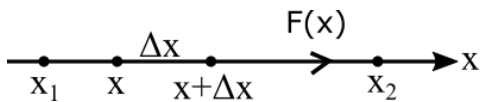


Рис. 19

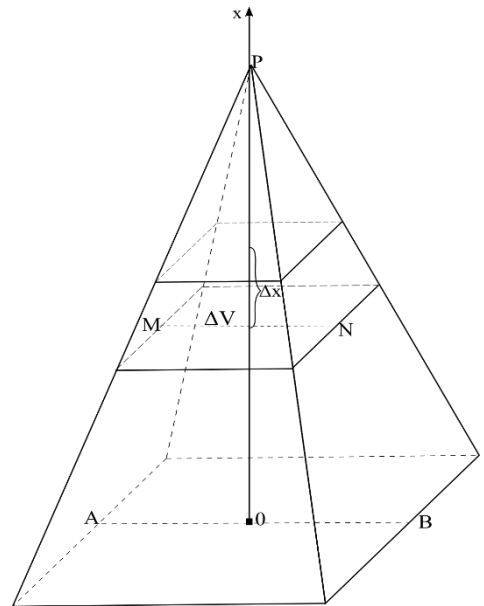


Рис. 20

Для решения воспользуемся дифференциальным методом. Введем ось Ox , направленную по вертикали, для произвольного $x \in [0; 140)$, дадим приращение Δx и найдем элементарную работу по подъему на высоту x усеченной пирамиды (ΔP – её вес, а ΔV – объем): $\Delta A = x \cdot \Delta P = x \cdot d \cdot \Delta V$. Так как высота пирамиды равна Δx , которая будет в качестве множителя, то заменим усеченную пирамиду на параллелепипед со стороной основания $a(x)$, тогда $dA = 2,5 \cdot x \cdot a^2(x) \Delta x$. Чтобы найти $a(x)$, которая с высотой убывает от 200 до 0, возьмем вертикальное сечение PAB (см. рис. 20). Из подобия $\triangle PMN \sim \triangle PAB$ (см. рис. 21) $\frac{MN}{AB} = \frac{PK}{PO}$, $\frac{a(x)}{a} = \frac{h-x}{h}$, $a(x) = \frac{a}{h}(h-x) = \frac{200}{140}(140-x) = \frac{10}{7}(140-x)$.

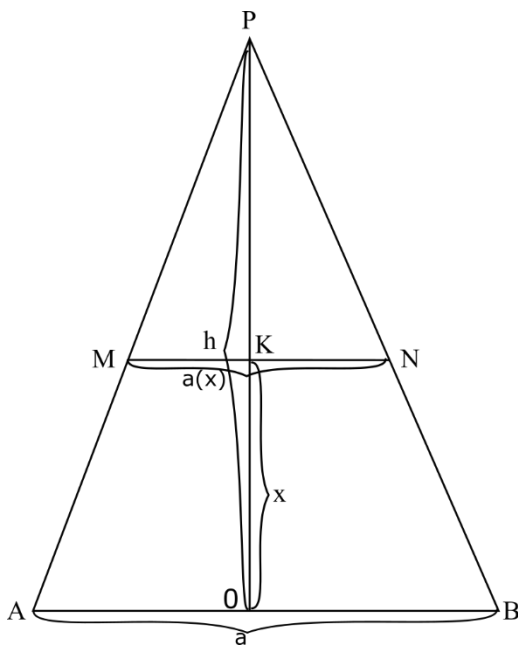


Рис. 21

Подставив в формулу для дифференциала работы, получим $dA = 2,5 \cdot x \cdot \frac{100}{49}(140-x)^2 \cdot \Delta x$.

Переходя к интегралу, получим

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{140} 2,5x \frac{100}{49}(140-x)^2 dx \approx 5 \int_0^{140} 140^2 x - \\ &- 2 \cdot 140x^2 + x^3 dx = \\ &= 5 \left(140^2 \frac{x^2}{2} - 2 \cdot 140 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^{140} = \\ &= 5 \cdot 140^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{3} \cdot 10^8 \text{ (тм)}. \end{aligned}$$

При вычислениях мы приближенно заменили $\frac{100}{49} \approx 2,14^2 = 196 \approx 2 \cdot 10^2$.

Ответ: $A \approx 1,67 \cdot 10^{11}$ кгм.

Отметим, что вычисленная работа в килограммометрах, а не в джоулях, очень наглядна: если разделить 167 миллиардов кгм на 7 миллиардов человек, то каждый житель Земли должен поднять приблизительно пудовую гирю (16 кг) до плеча (1,5 м)!

§10. Несобственные интегралы первого и второго рода

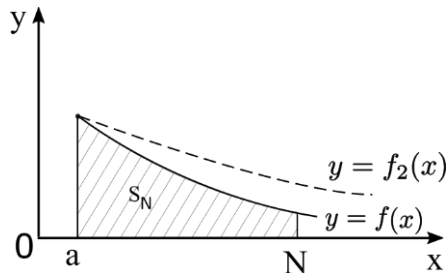


Рис. 22

Рассмотрим задачу о вычислении площади S под кривой $y = f(x)$ ($f(x) > 0$) на бесконечном промежутке (см. рис. 22). Для её вычисления найдем площадь $S(N)$ на конечном отрезке $x \in [a, N]$, а затем в пределе получим площадь S

$$S = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx. \quad (2.23)$$

Интеграл (2.23) называется **несобственным интегралом первого рода** и позволяет вычислять для положительных функций площадь S под кривой $y = f(x)$, если она конечна. По определению в этом случае несобственный интеграл называется **сходящимся**, если же он равен ∞ или не существует (например, $\int_0^{+\infty} \sin x dx$), то говорят, что интеграл (2.23) **расходится**.

Пример 16. Найти площадь под кривой $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Отметим, что данная функция четная, поэтому $S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} =$

$$= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^N = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} (\arctg N - \arctg 0) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Приведем еще один пример из табличных расходящихся интегралов.

Пример 17. Найти площадь под гиперболой $y = \frac{1}{x}$

при $x \in [1, +\infty)$.

$$S = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\ln N - \ln 1) = \infty.$$

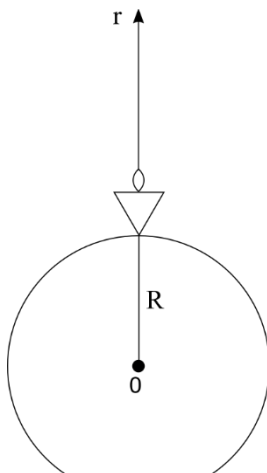


Рис. 23

Пример 18. Вычислить вторую космическую скорость – минимальную скорость, при достижении которой ракета «разорвет» силу притяжения Земли. Предположим, что ракета стартует с Земли (см. рис. 23) и вычислим по формуле (2.22) работу A , которую нужно затратить при движении от поверхности Земли (R – радиус Земли) до бесконечности, в нашем случае по за-

кону тяготения Ньютона $F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$, где m – масса ракеты, а M – масса Земли:

$$A = \int_R^{+\infty} F(r) dr = \int_R^{+\infty} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \gamma mM \lim_{N \rightarrow \infty} \int_R^N r^{-2} dr = \gamma mM \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^N =$$

$$= \gamma m M \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{N} + \frac{1}{R} \right] = \gamma \frac{mM}{R}.$$

Как известно, при наборе высоты затраченная работа накапливает потенциальную энергию Π , если предположить, что тело падает обратно, то эта потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию $T = \frac{mV^2}{2}$. Очевидно, что

ракета преодолевает силу притяжения Земли при $A = \Pi \leq T$, а вторая космическая скорость V_2 получится в случае равенства этих двух видов энергии:

$$\frac{mV_2^2}{2} = \gamma \frac{mM}{R} \quad (\text{так как на } m \text{ можно сократить, то } V_2 \text{ не зависит от массы ракеты!})$$

и $V_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$. Заметим, что на поверхности Земли вес ракеты равен силе тяжести:

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2}, \text{ откуда } \frac{\gamma M}{R} = gR. \text{ Поэтому}$$

$$V_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}} = \sqrt{125,44 \cdot 10^3 \frac{\text{М}}{\text{с}}} \approx 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Интересно, что она в $\sqrt{2}$ больше первой космической скорости $V_1 = \sqrt{gR} \approx 7,9 \frac{\text{км}}{\text{с}}$, чтобы выйти на орбиту вокруг Земли. На практике, если расположить

космодром на экваторе, можно за счет скорости его вращения $V_g = \omega R \approx 0,5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ уменьшить на эту величину V_1 и V_2 , поэтому все ракеты стартуют на восток.

Часто важно знать не количественный, а качественный ответ: сходится данный интеграл, или расходится, например, при применении интегрального признака Коши в теории положительных числовых рядов. В этом случае полезны **признаки сравнения**.

Пусть

$$0 \leq f(x) \leq f_2(x) \text{ при } x \in [a, +\infty) \quad (2.24)$$

(см. рис. 22). Тогда

I. Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f_2(x) dx$ от большей функции сходится,

то и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ от меньшей функции тоже сходится;

II. Если вышеприведенный интеграл от меньшей функции $f(x)$ расходится (а для неотрицательной функции это значит, что он равен ∞), то и от большей функции соответствующий интеграл тоже расходится.

Для доказательства достаточно отметить, что площадь S под кривой $y = f(x)$ меньше площади S_2 под кривой $y = f_2(x)$.

Для того, чтобы сравнивать исследуемый интеграл со степенными функциями, рассмотрим табличные несобственные интегралы первого рода:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } p \leq 1. \end{cases} \quad (2.25)$$

Доказательство. При $p = 1$ в примере 17 мы доказали расходимость соответствующего интеграла. Так как при $x \geq 1$ и $p < 1$, $x^p \leq x$, то $\frac{1}{x^p} \geq \frac{1}{x}$ и по второму признаку сравнения интегралы тоже расходятся и вторая часть (2.25) доказана.

Пусть теперь $p > 1$, тогда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N x^{-p} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^N = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}$. Так как при $p > 1$ N в положительной степени попало в знаменатель и $\left(\frac{1}{\infty} \right) = 0$, то интегралы при таких p сходятся.

Приведем пару примеров на применение признаков сравнения.

Пример 19. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + 1}$.

Так как при больших значениях x единица пренебрежимо мала, естественно, сравнить подынтегральную функцию $f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$ с табличной функцией $f_2(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$, для которой при $p = 2 > 1$ (см. также пример 18) интеграл сходится. Следовательно, надо воспользоваться первым признаком сравнения и проверить выполнение неравенств (2.24) при $x \geq 1$: $\frac{x}{x^3 + 1} \leq \frac{1}{x^2}$. Умножив на $x^2 \cdot (x^3 + 1) > 0$, получим $x^3 \leq x^3 + 1$, $0 < 1$ – верно. Так как интеграл от большей табличной функции сходится, то по первому признаку сравнения исследуемый интеграл тоже сходится.

Замечание. Если бы мы не знали признака сравнения, то пришлось брать достаточно сложный интеграл от рациональной дроби $\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}$, а затем еще и считать непростые пределы. А если бы в знаменателе был бы кубический многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)?

Пример 20. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2x^3 + x^2 + 5x + 10} dx$.

Если оставить в знаменателе только первое слагаемое $2x^3$, которое при $x \rightarrow \infty$ растет в бесконечное число раз быстрее остальных, то, кажется, что надо сравнивать с функцией $f(x) = \frac{x}{2x^3} = \frac{1}{2x^2}$, для которой табличный интеграл (2.25)

при $p=1$ расходится и надо воспользоваться вторым признаком сравнения для

$$f_2(x) = \frac{x^2}{2x^3 + x^2 + 5x + 10}; \text{ но, очевидно, что так как к } 2x^3 \text{ добавляются положи-}$$

тельные слагаемые, то чем больше знаменатель, тем меньше дробь и наша функция будет, наоборот, меньше табличной (а надо в этом случае подбирать табличную $f(x)$ меньше данной функции). Поэтому уменьшим табличную функцию, положив в знаменателе вместо коэффициента 2 больший коэффициент, например, 3. Тогда потребуется доказать неравенство $\frac{1}{3x} < \frac{x^2}{2x^3 + x^2 + 5x + 10}$. Опять,

так как все функции положительны, приведем к общему знаменателю, что дает $2x^3 + x^2 + 5x + 10 < 3x^3$, или $x^2 + 5x + 10 < x^3$. Легко подобрать для натуральных значений x , что уже при $x = 4$ $16 + 20 + 10 < 64$, поэтому требуемое неравенство (2.24) будет заведомо выполнено при $x \geq 4$. Так как исследуемая функция при $x \geq 4$ больше табличной, от которой несобственный интеграл расходится, то и данный интеграл тоже расходится.

Несобственные интегралы второго рода.

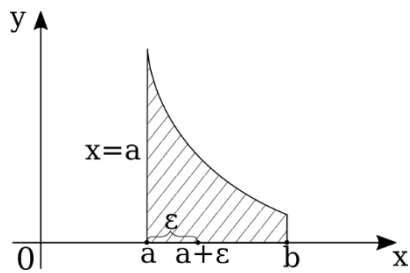


Рис. 24

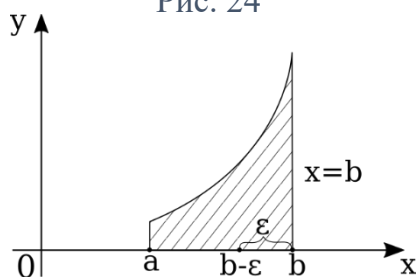


Рис. 25

Рассмотрим теперь случай, когда график функции $y = f(x)$ уходит в бесконечность при подходе x к некоторому конечному числу, то есть у функции в этой точке будет бесконечный разрыв второго рода, а у графика – вертикальная асимптота. Нас будет интересовать $\int_a^b f(x)dx$, где функция непрерывна в ин-

тервале (a, b) , а вертикальная асимптота будет на левом, или правом конце интервала. Тогда пользоваться формулой Ньютона-Лейбница нельзя (функция должна быть непрерывна на отрезке $[a, b]$). Возможно два случая (может быть и оба сразу), они отражены на рис. 24 и рис. 25. В каждом из них мы будем сдвигаться на некоторое маленькое $\varepsilon > 0$

внутри отрезка $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad (2.26)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (2.27)$$

Формулы (2.26), (2.27) определяют **несобственные интегралы второго рода** для каждого из случаев. Определение сходимости общее для несобственных интегралов и первого, и второго рода: если соответствующий предел (2.26) или (2.27) равен конечному числу, то интеграл **сходится**, в противном случае **расходится**.

Пример 21. Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ или доказать его расходимость.

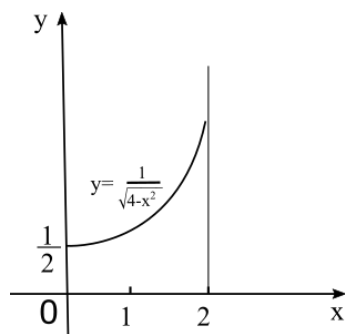


Рис. 26

Так как $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$, то данный интеграл – несобственный второго рода (случай б). По формуле

$$(2.27) \quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Признаки сравнения тоже формулируются (и геометрически поясняются) одинаково: пусть $0 \leq f(x) \leq f_2(x)$ при $x \in (a, b]$ (или $[a, b)$, или (a, b) в зависимости от случая а), б), или обоих вместе). Тогда

I. Если несобственный интеграл $\int_a^b f_2(x)dx$ от большей функции сходится,

то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от меньшей функции тоже сходится;

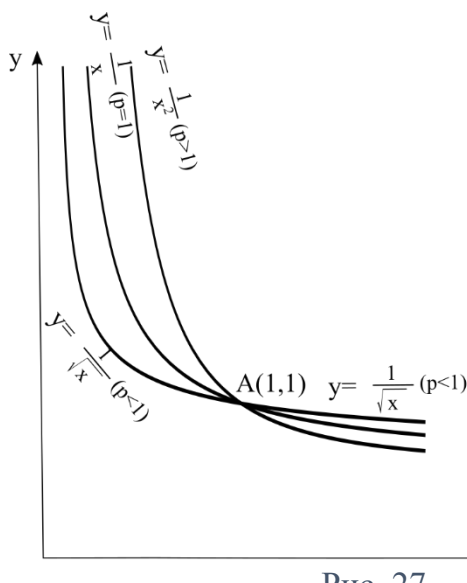


Рис. 27

II. Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от меньшей функции расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f_2(x)dx$ от большей функции и подавно расходится.

А вот табличные несобственные интегралы второго рода с точки зрения сходимости по сравнению с несобственными интегралами первого рода формулируются наоборот:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{сходится при } p < 1, \\ \text{расходится при } p \geq 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Для доказательства отметим (см. рис. 27), что если сделать симметрию относительно биссектрисы первого координатного угла $y = x$, то несобственный интеграл второго рода $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/p}}$ (так как при переходе к обратной функции при та-

кой симметрии степенная функция x^p переходит в $x^{\frac{1}{p}}$), и поэтому в правой части

(2.25) надо поменять в вопросе о сходимости $p > 1$ и $p < 1$ местами, а при $p = 1$ функция $y = \frac{1}{x}$ переходит сама в себя и расходимость остается (площадь под гиперболой бесконечна (см. пример 17)).

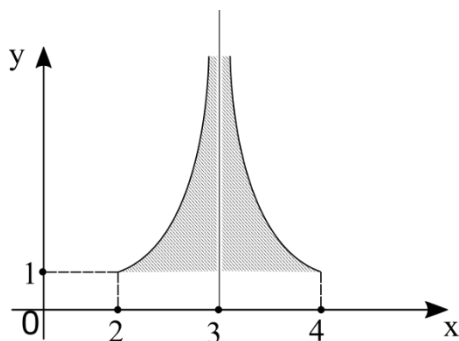


Рис. 28

Пример 22. Вычислить $\int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$ или доказать его расходимость.

Так как в точке разрыва $x = 3$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$, то разрежем отрезок интегрирования пополам при $x = 3$ (см. рис. 28)

$\int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \int_2^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$. Из соображений

симметрии графика относительно асимптоты $x = 3$ и симметрии точек $a = 2$, $b = 4$, тогда $\int_2^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = 2 \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$. Заменим

$x - 3 = z$, $dx = dz$, $z_1 = 3 - 3 = 0$, $z_2 = 4 - 3 = 1$, получим $2 \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = 2 \int_0^1 \frac{dz}{z^2} = +\infty$ для табличного интеграла (2.28) при $p = 2 > 1$.

§11. Приближенное вычисление определенных интегралов

Как отмечалось ранее, существуют «неберущиеся» интегралы, кроме того, громадное количество интегралов невозможно практически взять, например, рациональные дроби, степени многочленов которых велики, интегралы с иррациональностями, сложные выражения с тригонометрическими и другими основными элементарными функциями.

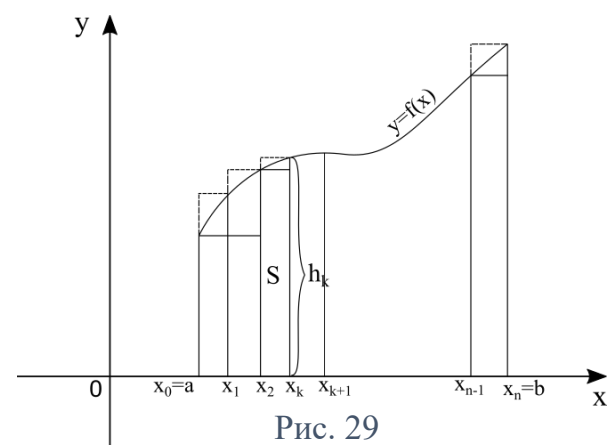


Рис. 29

Поэтому существуют различные методы и формулы для приближенного вычисления определенных интегралов с заданной точностью ε , отметим, что при стремительном увеличении быстродействия ЭВМ можно ограничиться простейшими методами. Итак, мы будем вычислять $\int_a^b f(x)dx$ с точностью ε .

Метод прямоугольников. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей, то есть выберем шаг

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (2.29)$$

и заменим каждую криволинейную трапецию на прямоугольники (см. рис. 29), это можно сделать двумя способами:

а) брать высоты h_k прямоугольников равными значению функции на левом конце разбиения: $h_k = f(x_k) = y_k$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = S \approx h \cdot y_0 + h \cdot y_1 + \dots + h \cdot y_k + \dots + h \cdot y_{n-1}; \quad (2.30)$$

б) брать высоты h_{kn} на правом конце разбиения

$$\int_a^b f(x)dx = S \approx h \cdot y_1 + h \cdot y_2 + \dots + h \cdot y_{kn} + \dots + h \cdot y_n. \quad (2.31)$$

Отметим, что если, например, функция $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$, то формула (2.30) дает ответ с недостатком, а формула (2.31) – с избытком. Очевидно, чем больше число n и, соответственно, чем меньше шаг h , тем точнее получится ответ, оценки для точности ε мы приведем в конце этого раздела для всех методов, в случае же строго монотонной функции, сделав зазор между ответами S_1 по формуле (2.30) и S_2 по формуле (2.31) меньше $2\varepsilon: |S_1 - S_2| < 2\varepsilon$, можно взять в качестве ответа с точностью ε их среднее арифметическое $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{S_1 + S_2}{2}$. Применив эту формулу для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, получим ниже следующий метод.

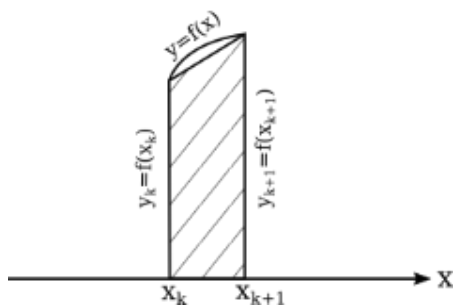


Рис. 30

II. Метод трапеций. Заменяв каждую криволинейную трапецию на обычную трапецию (см. рис. 30), по формуле $S_{trap} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} h$, просуммировав по всем k и заметив, что крайние значения y_0 и y_n встретятся по одному разу, а все остальные: $y_1, \dots, y_{n-1}$ дважды (как правая и левая граница соседних двух трапеций), получим формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right], \quad (2.32)$$

которая точнее формулы прямоугольников.

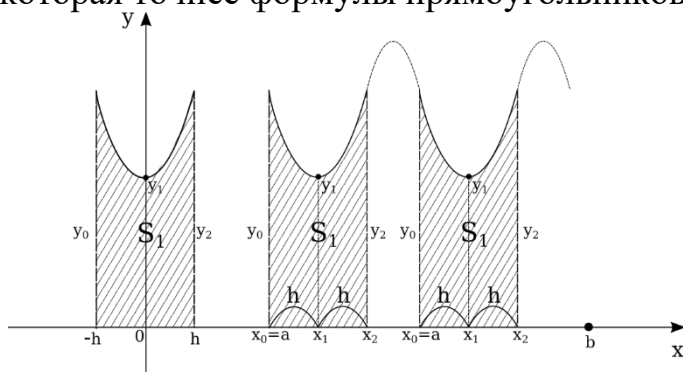


Рис. 31

III. Формула Симпсона. Будем заменять части кривой $y = f(x)$ на параболы $y = Ax^2 + Bx + C$ (см. рис. 31). Так как парабола однозначно определяется тремя точками (у квадратичной функции три неизвестных коэффициентов A, B, C и для их определения надо задать три линейных уравнения). Покажем,

что площадь параболической трапеции S_1 для первых трех точек разбиения x_0, x_1, x_2 с ординатами y_0, y_1, y_2

$$S_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (2.33)$$

Сдвинем параболическую трапецию так, чтобы точка $a = x_0$ перешла в точку $x = -h$, тогда точка x_1 перейдет в начало координат, а точка x_2 в точку $x = h$. $S_1 = \int_{-h}^h [Ax^2 + Bx + C] dx = 2 \int_0^h [Ax^2 + C] dx$, мы воспользовались формулами (2.5) и (2.6).

$$2 \int_0^h [Ax^2 + C] dx = 2 \left(A \frac{x^3}{3} \Big|_0^h + Cx \Big|_0^h \right) = 2 \frac{Ah^3 + 3Ch}{3} = \frac{h}{3} [2Ah^2 + 6C].$$

Чтобы выразить полученный ответ через y_0, y_1, y_2 найдем значения параболы $y = Ax^2 + Bx + C$ при $x = -h, x = 0, x = h$:

$$\begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C, \\ y_1 = C, \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C, \end{cases}$$

откуда легко видеть, что $2Ah^2 + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2$, и, следовательно формула (2.33) верна.

Так как ключевые точки на графике, где «склеиваются» параболические кусочки идут через одну $(y_0, y_2, y_4, \dots)$, то необходимо, чтобы общее число разбиений n должно быть четным. Для таких n выпишем все площади параболических трапеций $S_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), S_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \dots, S_{\frac{n}{2}} = \frac{h}{3} \cdot (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$, так как $S \approx S_1 + S_2 + \dots + S_{\frac{n}{2}}$, то после приведения подобных членов

(сравните ситуацию для ключевых точек с методом трапеций), получим

$$S = \frac{b-a}{3n} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})], \quad (2.34)$$

мы вывели **формулу Симсона**. Часто её пишут в другом виде, подставив $n = 2m$.

Пример 23. Вычислить приближенно $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ 1) по формуле прямоугольников, 2) по формуле трапеций, 3) по формуле Симпсона, разбив отрезок интегрирования на десять частей.

Составим таблицу

Табл. 1

x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_k	1	0,90909	0,83333	0,76923	0,71429	0,66667	0,625	0,58824	0,55556	0,52632	0,5

1) по формуле (2.30) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{2-1}{10} (y_0 + y_1 + \dots + y_9) = 0,1 \cdot 7,18773 = 0,71877;$

по формуле (2.31) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,1 \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877.$

Так как функция $y = \frac{1}{x}$ строго убывает на $[1, 2]$, то первый ответ будет с избытком, а второй – с недостатком.

2) По формуле трапеций (2.32) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,1 \cdot \left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + \dots + y_9 \right) = 0,69377.$

Проверьте, что этот ответ равен среднеарифметическому двух ответов в п 1).

3) По формуле Симпсона (2.34) $\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3} \cdot (y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)) = 0,69315.$ Для табличного интеграла убедитесь, что $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$, затем найдите значение $\ln 2$ на калькуляторе или по таблице с точно-

стью до седьмого знака. Убедитесь, что по сравнению с истинным ответом в соответствии с правилами округления формула прямоугольников дает только один знак после запятой, формула трапеций даёт ошибку в третьем знаке после запятой, а формула Симпсона гарантирует все пять знаков, с которыми она считалась.

В общем случае, максимальная погрешность формул прямоугольников, трапеций достигает соответственно $\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$ и $\frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$, где $M_2 = |f''(x)|$ – наибольшее значение второй производной заданной функции на $[a, b]$, а формулы Симпсона $\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$, где $M_4 = |f^{(IV)}(x)|$ – наибольшее значение четвертой производной заданной функции на $[a, b]$, то есть формула Симпсона существенно выгоднее.

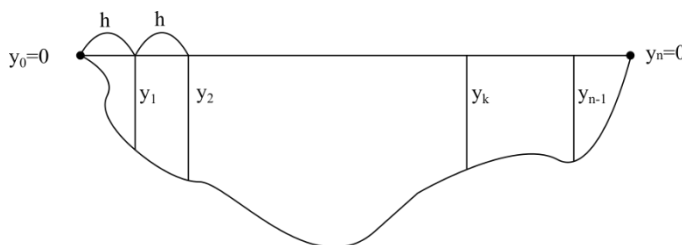


Рис. 32

Замечание. Это свойство формулы Симпсона сохраняется и в том случае, когда у нас нет аналитического задания функции $f(x)$. Например, чтобы построить плотину на реке (см. рис. 32), надо оценить площадь поперечного сечения

реки, выбрав шаг h , можно замерить глубину с этим шагом, например, при ширине реки в 1 км и $n = 1000$ замерять глубины по всей ширине реки через каждый метр, а затем подставить $y_0, y_1, \dots, y_{1000}$ в формулу Симпсона.

Расчетно-графические задания по теме «Неопределенный и определенный интегралы»

Предлагаемые варианты состоят из 7 заданий:

- I. Взять неопределенные интегралы.
- II. Вычислить определенные интегралы.
- III. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.
- IV. Найти площадь плоской фигуры. В декартовой системе координат сделать чертеж.
- V. Вычислить длину дуги кривой.
- VI. Найти объём тела, полученный вращением фигуры (лежащей в плоскости xOy и ограниченной заданными линиями) вокруг данной оси.
- VII. Решить физическую задачу.

Перечисленные выше задания предназначены для выработки навыков интегрирования и решению задач на приложения определенных интегралов. Он потребуются студентам первого курса всех специальностей как для самостоятельной работы, так и в качестве контрольных заданий вашего варианта (для тех специальностей, где контрольная работа предусмотрена учебным планом). Перед решением задач рекомендуем посмотреть теорию и приведенные примеры, из соответствующего данному примеру, параграфа первой и второй главы. Как показывает опыт, кроме решения примеров предложенного варианта и систематического выполнения домашних заданий, потребуется еще дополнительно решить n -ое количество задач из [] для полного овладения «техникой» интегрирования и применением дифференциального метода в прикладных задачах. Для его лучшего усвоения решите последнюю задачу из других вариантов.

Вариант 1

I.	1) $\int \sin(1-3x)dx$	2) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-2)^3}{\sqrt{x}}dx$	3) $\int \frac{2^{tgx}}{\cos^2 x}dx$
	4) $\int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^{12}}}dx$	5) $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$	6) $\int \frac{x-8}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$
	7) $\int \frac{x^3}{x^2+x+1}dx$	8) $\int \frac{2x+1}{x^3+x^2}dx$	9) $\int x^2 \cos 2x dx$
	10) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$	11) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)}dx$	12) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2}}dx$
	13) $\int \sin 3x \cos 4x dx$	14) $\int \cos^3 x \sin^5 x dx$	15) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$	17) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$	18) $\int e^{\sqrt{x}}dx$
II	1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x - 3\operatorname{arctg} x + 3x^2)dx$	2) $\int_2^3 y(\ln y - 1)dy$	3) $\int_0^7 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$
III	1) $\int_0^\infty \frac{xdx}{16x^4+1}$	2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$	
IV	1) $y = x^2, y = 3-2x$	2) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$	3) $\rho^2 = 9\cos^2 \varphi, (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
V	1) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, (\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8})$	2) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$	3) $\rho = \cos \varphi, (-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
VI	1) $y = 2x - x^2, y = x (Ox)$	2) $x = 3\sin t, y = 2\cos t, (Oy)$	
VII	1) Скорость прямолинейного движения материальной точки $v = 3t^2 - 2t + 5$ м/с. Найти путь, который прошла материальная точка, за первые три секунды. 2)* Вычислить силу давления воды на плотину в виде равнобедренного треугольника (вершина смотрит вниз) с основанием 8 м и глубиной 3 м.		

Вариант 2

I.	1) $\int \frac{dx}{4x+1}$	2) $\int \frac{(2^x + 5)^2}{2^x} dx$	3) $\int \frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{x^{12} + 4} dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 7}}$	6) $\int \frac{2x-1}{x^2 - 4x + 3} dx$
	7) $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^2 - 3} dx$	8) $\int \frac{4x-7}{(x-1)^2(x-4)} dx$	9) $\int x^2 \sin 2x dx$
	10) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x(\sqrt[3]{x}+1)} dx$	12) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x-1}} dx$
	13) $\int \sin 6x \sin 7x dx$	14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$	15) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$	17) $\int \sqrt{9-x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$	18) $\int e^{\sqrt{x+1}} dx$
II	1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2 x - 5 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 5x^4 \right) dx$	2) $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx$	3) $\int_0^3 \frac{dx}{2 + \sqrt{x+1}}$
III	1) $\int_0^1 \frac{x dx}{16x^4 - 1}$	2) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$	
IV	1) $y = x^2, y = 4x - 3$	2) $\begin{cases} x = 3 \sin t, \\ y = 2 \cos t. \end{cases}$	3) $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)
V	1) $y = \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$	2) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - \cos t), \\ (0 \leq t \leq \pi) \end{cases}$	3) $\rho = \sin \varphi,$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$)
VI	1) $y = 2x - x^2, y = 0$ (Ox)	2) $x = 3 \cos t, y = 2 \cos t$ (Oy)	
VII	1) Найти работу при движении тела вдоль оси Ox под действием силы $F(x) = 3x^2 - 4x + 5$ н при $x \in [1, 3]$. Найти путь, который прошла материальная точка, за первые три секунды. 2)* Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R = 2$ м, а высота $H = 3$ м, из однородного строительного материала плотностью $\delta = 2,5$ т/м ³ .		

Вариант 3

I.	1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$	2) $\int \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$	3) $\int \frac{dx}{x \ln x}$
	4) $\int \frac{x^5}{x^{12}-4} dx$	5) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+1}$	6) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-6x+10}} dx$
	7) $\int \frac{x^3-x^2+3x-2}{x^2+2} dx$	8) $\int \frac{4x-21}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx$	9) $\int x^2 e^{2x} dx$
	10) $\int \arcsin 2x dx$	11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt[3]{x+1}+1)}$	12) $\int \frac{2^{3x}}{\sqrt{2^x+1}} dx$
	13) $\int \sin 10x \cos 12x dx$	14) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$	15) $\int (\operatorname{tg}^4 x - 1) dx$
	16) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 25 \sin^2 x}$	17) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx$	18) $\int \sin \sqrt{x+1} dx$
II	1) $\int_{-1}^1 (2 \arcsin^3 x - 3x^7 + 2x^2) dx$	2) $\int_1^e x^6 \ln x dx$	3) $\int_1^4 \sqrt{\frac{4+\sqrt{x}}{x}} dx$
III	1) $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$	$\frac{1}{3} e^3 + \frac{1}{x}$ 2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$	
IV	1) $y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{5}{2}x - 2$	2) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$	3) $\rho = 4 \sin 2\varphi, (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
V	1) $y = \ln \sin x, (\pi/3 \leq x \leq 2\pi/3)$	2) $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$	
VI	1) $y = 4x - 2x^2, y = 0, (Ox)$	2) $x = 2 \cos t, y = 10 \sin t, (Oy)$	3) $\rho = 1 - \cos \varphi, (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VII	1) Скорость материальной точки, совершающей прямолинейное движение, $v = 6t^2 - 2t + 7$ м/сек. Какой путь точка пройдет с 3 сек по 5 сек? 2)* Найти силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что его основание 8 м, высота 12 м, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине 5 м. Плотность воды $\delta = 1$ т/м ³ .		

Вариант 4

I.	1) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x+1)}$	2) $\int \frac{(e^x-1)^3}{e^x} dx$	3) $\int x^2 \sqrt{5-x^3} dx$
	4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^8}} dx$	5) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$	6) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx$
	7) $\int \frac{x^3+x^2-2x+4}{x^2+2} dx$	8) $\int \frac{5x-8}{(x-2)^2(x-4)} dx$	9) $\int x^2 2^x dx$
	10) $\int x \ln(x+1) dx$	11) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}-1)\sqrt[4]{x}}$	12) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2-2}} dx$
	13) $\int \cos x \cos 3x dx$	14) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$	15) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x}$	17) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+8x+17}} dx$	18) $\int \cos \sqrt{x+4} dx$
II	1) $\int_{-1}^1 (7x^6 - 2\sin^7 x + 3\operatorname{arctg} x) dx$	2) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$	3) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}}$
III	1) $\int_1^\infty \frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$	2) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$	
IV	1) $y = x^2, y = 6 - 5x$	2) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$	3) $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$
V	1) $y = \frac{4}{3}x^{3/2}, 0 \leq x \leq \sqrt{5}$	2) $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 5\sin^2 t, \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \pi/2$)	3) $\rho = 1 + \cos \varphi$
VI	1) $y = 5x - x^2, y = 0$ (Ox)	2) $x = 6\cos t,$ $y = 4\sin t, (Oy)$	
VII	1) Скорость движения материальной точки $v = 4t \cdot e^{-t^2}$ м/сек. Какой путь пройдет точка от начала движения до момента остановки? 2)* Вычислить работу, которую необходимо затратить на сооружение конического кургана, радиус которого $R = 1,5$ м, а высота $H = 2,5$ м, из однородного материала плотностью $\delta = 2$ т/м ³ .		

Вариант 5

I.	1) $\int 2^{3x-1} dx$	2) $\int \frac{(\sqrt[4]{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} dx$	3) $\int x^4 \cos x^5 dx$
	4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^8}} dx$	5) $\int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 1}$	6) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+8x+17}} dx$
	7) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 7}{x-1} dx$	8) $\int \frac{4x-1}{(x^2+1)(x+4)} dx$	9) $\int \sin(\ln x) dx$
	10) $\int x \operatorname{arctg} x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} dx$	12) $\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{3^x+1}} dx$
	13) $\int \cos 3x \cos 4x dx$	14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$	15) $\int (\operatorname{ctg}^4 x - 1) dx$
	16) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$	17) $\int \sqrt{144-x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+10x+26}} dx$	18) $\int 3^{\sqrt{x}} dx$
II	1) $\int_{-4}^4 (7\operatorname{tg}^9 x - 8x^5 + 9x^8) dx$	2) $\int_0^1 \ln(x+1) dx$	3) $\int_{\pi/6}^{\pi/8} \frac{dx}{\sin 4x}$
III	1) $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$	2) $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$	
IV	1) $y = x, y = \sqrt[4]{x}$	2) $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$	3) $\rho = 2(1 - \cos 3\varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi/3$)
V	1) $y = \sqrt{(x+1)^3}, x = \frac{1}{3}$	2) $\begin{cases} x = 9(t - \sin t), \\ y = 9(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$	3) $\rho = 2\sin \varphi,$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)
VI	1) $y = 5\cos t, y = 2\sin t$ (Ox)	2) $y = \arcsin(x/2),$ ($0 \leq x \leq \pi$) (Oy)	
VII	1) Найти работу при движении тела вдоль оси Ox под действием силы $F(x) = 9x^2 - 8x + 3$ при $x \in [4, 5]$. 2)* Вычислить силу давления воды на пластинку, имеющую форму параллелограмма с основанием $a = 2$ м и высотой $H = 3$ м, опущенную вертикально вниз на глубину 4 м, если основание параллельно поверхности воды. Плотность воды равна 1 т/м^3		

Вариант 6

I.	1) $\int \frac{dx}{25x^2 + 9}$	2) $\int \frac{(4^x - 1)^2}{2^x} dx$	3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$
	4) $\int \frac{x^3}{x^8 - 1} dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 2x - x^2}}$	6) $\int \frac{16x + 1}{4x^2 + 4x + 1} dx$
	7) $\int \frac{x^5 - 4x + 12}{x^2 + 2} dx$	8) $\int \frac{5x - 9}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$	9) $\int e^{2x} \cos 2x dx$
	10) $\int x^3 \ln x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$	12) $\int \frac{x^8}{\sqrt{x^3 + 4}} dx$
	13) $\int \cos 7x \sin 4x dx$	14) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x} dx$	15) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$
	16) $\int \frac{dx}{4\sin x + \cos x + 3}$	17) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 12x + 37}} dx$	18) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} dx$
II	1) $\int_{-1}^1 \left(8 \operatorname{arctg}^3 x - 3x^3 + 7x^6 \right) dx$	2) $\int_{1/\sqrt{3}}^1 \operatorname{arctg} x dx$	3) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin 2x}$
III	1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}} dx$	2) $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$	
IV	1) $y = 2x^2 + \frac{x}{2},$	2) $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases}$	3) $\rho = 2\varphi,$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
V	1) $y = 1 - \ln \cos x,$ $(0 \leq x \leq \pi/6)$	2) $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \end{cases}$ $(2\pi \leq t \leq 4\pi)$	3) $\rho = 2 \cos \varphi,$ $(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$
VI	1) $y = 3x - x^2, y = 2$ (Ox)	2) $x = 4 \cos t,$ $y = 6 \sin t$ (Oy)	
VII	1) Материальная точка M движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0; 3]$ сек. 2)* Найти силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.		

Вариант 7

I	1) $\int \cos(1-3x)dx$	2) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+2)^3}{\sqrt{x}}dx$	3) $\int \frac{2^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$
	4) $\int \frac{x^5}{\sqrt{9-x^{12}}}dx$	5) $\int \frac{dx}{3-2x-x^2}$	6) $\int \frac{x-8}{\sqrt{x^2-4x+6}}dx$
	7) $\int \frac{x^3}{x^2-x+1}dx$	8) $\int \frac{2x-1}{x^3+x^2}dx$	9) $\int x^2 \cos 4x dx$
	10) $\int \operatorname{arctg} 3x dx$	11) $\int \frac{\sqrt{x}-2}{x(\sqrt{x}+1)}dx$	12) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+3}}dx$
	13) $\int \sin 3x \cos 2x dx$	14) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$	15) $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x - 1}$	17) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$	18) $\int \sin \sqrt{x} dx$
II	1) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\sin^3 x - 3 \arcsin \frac{x}{2} + 3x^2 \right) dx$	2) $\int_2^3 y^2 (\ln y - 1) dy$	3) $\int_{-1}^6 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{x+2}}$
III	1) $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$	2) $\int \frac{dx}{1/2(1-x) \ln^2(1-x)}$	
IV	1) $y = 3x^2 + x, y = 4x$	2) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$	3) $\rho = 4 \sin^2 \varphi, (0 \leq \varphi \leq \pi)$
V	1) $y = \sqrt{(x-1)^3},$ от т. $A(1,0)$ до т. $B(6;5\sqrt{5})$	2) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 1$)	3) $\rho = 3 \cos \frac{\varphi}{3},$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)
VI	1) $y = 2^{-x}, x \geq 0$ (Ox)	2) $x = 6 \cos t,$ $y = 6 \sin t, (Oy)$	
VII	1) Найти путь до полной остановки при движении материальной точки со скоростью $v = 3t^2 e^{-t^3}$ м/с. 2)* Определить работу A, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из прямого кругового цилиндра. Радиус основания цилиндра $R = 2$ м, высота $h = 4$ м.		

Вариант 8

I	1) $\int \frac{dx}{3x+1}$	2) $\int \frac{(2^x - 5)^2}{2^x} dx$	3) $\int \frac{\arccos^5 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{x^{12} + 25} dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 6}}$	6) $\int \frac{2x+1}{x^2 - 4x + 3} dx$
	7) $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^2 - 5} dx$	8) $\int \frac{4x+7}{(x-1)^2(x-4)} dx$	9) $\int x^2 \sin 4x dx$
	10) $\int \operatorname{arctg} 3x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x(\sqrt[3]{x} + 1)} dx$	12) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x - 2}} dx$
	13) $\int \sin 6x \sin 5x dx$	14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx$	15) $\int \operatorname{tg}^6 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x}$	17) $\int \sqrt{16 - x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}} dx$	18) $\int e^{\sqrt{x+2}} dx$
II	1) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\operatorname{tg}^3 x + 5 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 5x^4 \right) dx$	2) $\int_1^2 \ln(x^2 + 1) dx$	3) $\int \frac{dx}{3 + \sqrt{x+1}}$
III	1) $\int_4^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$	2) $\int_1^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)} dx}{2-3x}$	
IV	1) $y = \sqrt{x^5}, x = 4$	2) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$	3) $\rho = 2 + \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)
V	1) $y = \sqrt{x^3}, x = \frac{4}{3}$	2) $\begin{cases} x = t - t^3, \\ y = \sqrt{3}t, \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 1$)	3) $\rho = \sin \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq \pi$)
VI	1) $y = 2^x, x \leq 0 (Ox)$	2) $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t, (Oy)$	
VII	1) Скорость прямолинейного движения материальной точки $v(t) = 12t^2 - 4t + 7$ м/с. Найти путь, который прошла материальная точка, за первые две секунды. 2)* Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого 20 м, если плотность воды $\delta = 1$ т/м ³ .		

Вариант 9

I	1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$	2) $\int \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$	3) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{x^{12}-9} dx$	5) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$	6) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx$
	7) $\int \frac{x^3-x^2+3x+2}{x^2+3} dx$	8) $\int \frac{4x+21}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx$	9) $\int x^2 e^{4x} dx$
	10) $\int \arcsin 3x dx$	11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}(\sqrt[3]{x+2}+1)}$	12) $\int \frac{2^{3x}}{\sqrt{2^x+2}} dx$
	13) $\int \sin 10x \cos 9x dx$	14) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx$	15) $\int (\operatorname{tg}^8 x - 1) dx$
	16) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 16 \sin^2 x}$	17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+6x+11}}$	18) $\int \sin \sqrt{x+2} dx$
II	1) $\int_{-1/2}^{1/2} (2 \arcsin^3 x - 3x^7 + 2x^2) dx$	2) $\int_e^{e^2} x^5 \ln x dx$	3) $\int_1^4 \sqrt{\frac{3+\sqrt{x}}{x}} dx$
III	1) $\int_{-1}^{\infty} \frac{x^7 dx}{x^8+1}$	2) $\int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}$	
IV	1) $y = \sqrt[6]{x}, y = \frac{x}{32}$	2) $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$	3) $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$
V	1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3},$ $(1 \leq x \leq 2)$	2) $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$	3) $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3},$ $(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$
VI	1) $y = 3^{x+1}, (x \leq -1) (Ox)$	2) $x = 12 \cos t,$ $y = 12 \sin t, (Oy)$	
VII	1) Вычислить путь, пройденный телом за промежуток $[0;3]$ секунды, если тело движется со скоростью $v = 2t^2 - t + 3$ м/сек. 2)* Найти силу давления на плотину, имеющую форму полукруга радиуса 2 м, диаметр которой находится на поверхности воды.		

Вариант 10

I	1) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+1)}$	2) $\int \frac{(e^x - 2)^3}{e^x} dx$	3) $\int x^2 \sqrt{5+x^3} dx$
	4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{3+x^8}} dx$	5) $\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 1}$	6) $\int \frac{4x-5}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx$
	7) $\int \frac{x^3 + x^2 - 2x - 4}{x^2 + 2} dx$	8) $\int \frac{5x+8}{(x-2)^2(x-4)} dx$	9) $\int x^2 3^x dx$
	10) $\int x \ln(x+2) dx$	11) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}-4)\sqrt[4]{x}}$	12) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2-3}} dx$
	13) $\int \cos 2x \cos 3x dx$	14) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$	15) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 25\sin^2 x}$	17) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+8x+18}} dx$	18) $\int \cos \sqrt{x+3} dx$
II	1) $\int_{-1/2}^{1/2} (7x^6 - 2\sin^7 x + 3\operatorname{arctg} x) dx$	2) $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$	3) $\int_5^{13} \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}}$
III	1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$	2) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$	
IV	1) $y = 5x - x^2, y = 2x$	2) $x = \sin^3 t, y = \cos^3 t,$ $0 \leq t \leq \pi/2$	3) $\rho = 2 \cos \varphi,$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
V	1) $y = \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3},$ $(4 \leq x \leq 9)$	2) $\begin{cases} x = \sqrt{3}t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2)$	3) $\rho = \cos^3 \frac{\varphi}{3},$ $(-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2)$
VI	1) $x = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} (Ox)$	2) $y = \frac{x}{2},$ $0 \leq x \leq 2 (Oy)$	
VII	1) Материальная точка движется со скоростью $v = 3t^2 - 2t + 2$ м/сек. Какой путь она пройдет за 3 секунды? 2)* Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из корыта длиной 2 м, боковая поверхность которого образована параболическим цилиндром, при ширине корыта 1 м и глубиной 0,5 м.		

Вариант 11

I	1) $\int 5^{3x-1} dx$	2) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+5)^2}{\sqrt{x}} dx$	3) $\int x^4 \sin x^5 dx$
	4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}} dx$	5) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+2}$	6) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x^2-8x+17}} dx$
	7) $\int \frac{x^3+2x^2+x+7}{x-1} dx$	8) $\int \frac{4x+1}{(x^2+1)(x+4)} dx$	9) $\int \cos(\ln x) dx$
	10) $\int x \operatorname{arctg} 3x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}-1} dx$	12) $\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{3^x+2}} dx$
	13) $\int \cos 3x \cos x dx$	14) $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx$	15) $\int (\operatorname{ctg}^8 x - 1) dx$
	16) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 25\cos^2 x}$	17) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+10x+27}} dx$	18) $\int 6^{\sqrt{x}} dx$
II	1) $\int_{-3}^3 (7 \operatorname{tg}^9 x - 8x^5 + 9x^8) dx$	2) $\int_{-1}^0 \ln(x+2) dx$	3) $\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{dx}{\sin 4x}$
III	1) $\int_0^{\infty} x e^{-3x} dx$	2) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$	
IV	1) $y = x^2, y = 2 - x$	2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$	3) $\rho = 2(1 - \cos 3\varphi) (0 \leq \varphi \leq 2\pi/3)$
V	1) $y = \sqrt{(x+1)^3}, x = \frac{1}{3}$	2) $\begin{cases} x = 9(t - \sin t), \\ y = 9(1 - \cos t), \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$	3) $\rho = 2 \cos \varphi, (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
VI	1) $y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} (Ox)$	2) $y = x^2, 0 \leq x \leq 1 (Oy)$	
VII	1) Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$ с начальной скоростью 1 м/с. Найти путь за первые три секунды. 2)* Определить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если известно, что сила, растягивающая пружину на x м, равна: $F(x) = kx$, где k - коэффициент пропорциональности, зависящий от упругости пружины, и что для растяжения пружины на 0,01 м необходима сила 1 кг.		

Вариант 12

I	1) $\int \frac{dx}{25x^2 - 9}$	2) $\int \frac{(4^x - 3)^2}{2^x} dx$	3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$
	4) $\int \frac{x^3}{x^8 - 4} dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$	6) $\int \frac{16x+1}{4x^2-4x+1} dx$
	7) $\int \frac{x^5 + 4x + 12}{x^2 + 2} dx$	8) $\int \frac{5x+9}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$	9) $\int e^{4x} \sin 2x dx$
	10) $\int x^4 \ln x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$	12) $\int \frac{x^8}{\sqrt{x^3+3}} dx$
	13) $\int \cos 7x \sin 2x dx$	14) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^{10} x} dx$	15) $\int \operatorname{tg}^2 2x dx$
	16) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 1}$	17) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+12x+40}} dx$	18) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x+4} dx$
II	1) $\int_{-2}^2 (8\operatorname{arctg}^3 x - 3x^3 + 7x^6) dx$	2) $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$	3) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$
III	1) $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\pi(6x^2 - 5x + 1)} dx$	2) $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt{3-4x}}$	
IV	1) $y = \sqrt{x}, y = x^3$	2) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, (0 \leq t \leq 2\pi)$	3) $\rho = 4\sin 2\varphi, (\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi)$
V	1) $y = \ln x, (\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8})$	2) $x = \sqrt{2}t^3, y = \sqrt{2}t^{-3}, (0 \leq t \leq 1)$	3) $\rho = 3(1 - \cos \varphi), (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VI	1) $y = x + 2, y = 1, x = 2$ (Ox)	2) $x = 7\cos t, y = 2\sin t$ (Oy)	
VII	1) Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 10 - 4t$ м/с. Найти путь за первые 2 секунды. 2)* Определить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушария радиуса $R = 4$ м. Плотность воды равна 1 т/м^3 .		

Вариант 13

I	1) $\int \sin(2 - 5x) dx$	2) $\int \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)^3}{\sqrt{x}} dx$	3) $\int \frac{3^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{\sqrt{16 - x^{12}}} dx$	5) $\int \frac{dx}{15 - 2x - x^2}$	6) $\int \frac{x - 7}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx$
	7) $\int \frac{x^3}{x^2 + 4x + 5} dx$	8) $\int \frac{2x + 1}{x^3 - x^2} dx$	9) $\int x^2 \cos 6x dx$
	10) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$	11) $\int \frac{\sqrt{x} - 3}{x(\sqrt{x} + 1)} dx$	12) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$
	13) $\int \sin 2x \cos 4x dx$	14) $\int \cos^4 x \sin^5 x dx$	15) $\int \operatorname{ctg}^8 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x - 2}$	17) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx$	18) $\int \cos \sqrt{x} dx$
II	1) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\sin^3 x - 3 \arcsin \frac{x}{2} + 3x^2 \right) dx$	2) $\int_2^3 y^3 (\ln y - 1) dy$	3) $\int_{-2}^5 \frac{(x + 2) dx}{\sqrt[3]{x + 3}}$
III	1) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{\pi(1 + 4x^2)}$	2) $\int_0^6 \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1 - \sin 3x)^5}}$	
IV	1) $y = \sqrt[4]{x}, y = \frac{x}{8}$	2) $x = 2 \cos^3 t,$ $y = 3 \sin t$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$	3) $\rho = 2(1 + \sin \varphi),$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
V	1) $y = \ln \cos x,$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$	2) $\begin{cases} x = 8 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$	3) $\rho = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{3},$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$
VI	1) $y = \frac{x}{2} + 3, y = 1, x = 4$ (Ox)	2) $x = 5 \cos t,$ $y = 4 \sin t, (Oy)$	
VII	1) Определить путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения, если скорость определяется формулой $v = 2 - 2t + t^2$ м/с. 2)* Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из корыта, имеющего форму полуцилиндра с радиусом основания 2 м и длиной 6 м.		

Вариант 14

I	1) $\int \frac{dx}{4x+5}$	2) $\int \frac{(2^x+3)^2}{2^x} dx$	3) $\int \frac{\arcsin^6 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{x^{12}+16} dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+6}}$	6) $\int \frac{2x-1}{x^2+4x+3} dx$
	7) $\int \frac{x^4+2x^2+4}{x^2-5} dx$	8) $\int \frac{4x+7}{(x-1)^2(x+4)} dx$	9) $\int x^2 \sin 6x dx$
	10) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-3}{x(\sqrt[3]{x}+1)} dx$	12) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x-3}} dx$
	13) $\int \sin 6x \sin 3x dx$	14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$	15) $\int \operatorname{tg}^8 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 16 \cos^2 x}$	17) $\int \sqrt{25-x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4x+7}} dx$	18) $\int e^{\sqrt{x+3}} dx$
II	1) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\operatorname{tg}^3 x + 5 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 5x^4 \right) dx$	2) $\int_2^3 \ln(x^2+1) dx$	3) $\int_8^{15} \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$
III	1) $\int_0^\infty \frac{x dx}{4x^2+4x+5}$	2) $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$	
IV	1) $y^2 = 9x, y = 3x$	2) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$	3) $\rho = \varphi, (0 \leq \varphi \leq \pi)$
V	1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x, (0 \leq x \leq e)$	2) $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t, \end{cases} (\pi \leq t \leq 2\pi)$	3) $\rho = 3 \sin \varphi, (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VI	1) $y = \sqrt{x}, y = -x, x = 1 (Ox)$	2) $x = \cos t, y = 4 \sin t (Oy)$	
VII	1) Скорость тела, совершающего прямолинейное движение, $v = t \cdot e^{-0,5t}$ м/сек. Какой путь тело пройдет за 2 сек от начала движения? 2)* Найти силу давления воды на пластину в форме прямоугольника с основанием 5 м и шириной 4 м, расположенного вертикально, с основанием параллельным поверхности воды на глубине 2 м.		

Вариант 15

I	1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$	2) $\int \frac{(\sqrt{x}-4)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$	3) $\int \frac{e^x-1}{e^x-x} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{x^{12}-16} dx$	5) $\int \frac{dx}{4x^2-4x+1}$	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx$
	7) $\int \frac{x^3-x^2+3x-2}{x^2+3} dx$	$\int \frac{4x-21}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx$	9) $\int x^2 e^{6x} dx$
	10) $\int \arcsin 4x dx$	11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}(\sqrt[3]{x+3}+1)}$	12) $\int \frac{2^{3x}}{\sqrt{2^x+3}} dx$
	13) $\int \sin 10x \cos 13x dx$	14) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$	15) $\int (\operatorname{tg}^6 x + 1) dx$
	16) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 9 \sin^2 x}$	17) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-9}}$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+6x+12}} dx$	18) $\int \sin \sqrt{x+3} dx$
II	$\int_{-1/3}^{1/3} (2 \arcsin^3 x - 3x^7 + 2x^2) dx$	2) $\int_1^e x^5 \ln x dx$	3) $\int_1^4 \sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{x}} dx$
III	1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2) \sqrt{\pi \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}}$	2) $\int_{-\frac{1}{4}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$	
IV	1) $y = x^2, y = 2 - x^2$	2) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$	3) $\rho = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ $(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$
V	1) $y^2 = \frac{x^3}{8}$, от т. A(2,-1) до т. B(2,1)	2) $x = 10 \cos t$, $y = 10 \sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$	3) $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VI	1) $x = 2 \sin t, y = 3 \cos t$ (Ox)	2) $x = 2y - y^2, x = 0$ (Oy)	
VII	1) Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 4t^3 - 2t + 7$ м/сек. Найти путь за первые три секунды. 2)* Шар лежит на дне бассейна глубиной 8 м. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды, если его радиус 2 м и удельный вес шара и воды равен 1.		

Вариант 16

I	1) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+1)}$	2) $\int \frac{(e^x + 1)^3}{e^x} dx$	3) $\int x^2 \sqrt{3+x^3} dx$
	4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^8}} dx$	5) $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$	$\int \frac{4x-5}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$
	7) $\int \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^2 + 3} dx$	8) $\int \frac{5x-8}{(x-2)^2(x+4)} dx$	9) $\int x^2 4^x dx$
	10) $\int x \ln(x+3) dx$	11) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x-1}-1)\sqrt[4]{x-1}}$	12) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2-1}} dx$
	13) $\int \cos 5x \cos 3x dx$	14) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$	15) $\int \operatorname{tg} x dx$
	16) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 49\sin^2 x}$	17) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9+x^2}}$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+8x+19}} dx$	18) $\int \cos \sqrt{x+2} dx$
II	$\int_{-1/3}^{1/3} (7x^6 - 2\sin^7 x + 3\operatorname{arctg} x) dx$	2) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$	3) $\int_1^{13} \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}}$
III	1) $\int_1^{\infty} \frac{x^5 dx}{x^{12} + 1}$	2) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$	
IV	1) $y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{3}{2} - x$	2) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$	3) $\rho = \varphi^2,$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
V	1) $y = \ln \cos x,$ $(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4})$	2) $x = 5\sin t,$ $y = 5\cos t,$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$	$\rho = 5(1 + \cos \varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VI	1) $y = 2 - x^2/2, x + y = 2$ (Ox)	2) $x = 3\cos t, y = 4\sin t, (Oy)$	
VII	1) Скорость прямолинейного движения материальной точки $v = t \cdot 2^{-0,03t}$ м/сек. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки? 2)* Найти силу давления воды на пластину в форме прямоугольника с основанием 3 м и шириной 3 м, расположенного вертикально с основанием, параллельным поверхности воды на глубине 5 м.		

Вариант 17

I	1) $\int 2^{4x-1} dx$	2) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-1)^2}{\sqrt{x}} dx$	3) $\int x^3 \cos x^4 dx$
	4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^8}} dx$	5) $\int \frac{dx}{9x^2-6x+1}$	$\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2-8x+17}} dx$
	7) $\int \frac{x^3+2x^2+x-7}{x+1} dx$	8) $\int \frac{4x-1}{(x^2+1)(x+3)} dx$	9) $\int \sin(2 \ln x) dx$
	10) $\int x \arctg 2x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}-4} dx$	12) $\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{3^x+3}} dx$
	13) $\int \cos 3x \cos 6x dx$	14) $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}} dx$	15) $\int (\operatorname{ctg}^6 x + 1) dx$
	16) $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 49 \cos^2 x}$	17) $\int \sqrt{256-x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+10x+28}} dx$	18) $\int 5^{\sqrt{x}} dx$
II	1) $\int_{-2}^2 (7 \operatorname{tg}^9 x - 8x^5 + 9x^8) dx$	2) $\int_{-2}^{-1} \ln(x+3) dx$	3) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x}$
III	1) $\int_0^{\infty} x e^{-3x} dx$	2) $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$	
IV	1) $y = x^2, y = 5x - 4$	2) $\begin{cases} x = 8 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$	3) $\rho = 5 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
V	1) $y = \ln \sin x, (\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3})$	2) $\begin{cases} x = 8 \sin^2 t, \\ y = 8 \cos^2 t, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$	3) $\rho = 3 \cos \varphi,$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
VI	1) $y = x - x^2, y = 0$ (Ox)	2) $y = \arcsin \frac{x}{2}, (0 \leq x \leq \pi) (Oy)$	
VII	1) Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 15t^2 - 4$ м/с. Найти пройденный им путь с первой по третью секунды. 2)* Определить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R = 3$ м, а высота $H = 4$ м, из однородного строительного материала плотностью $\delta = 3,5$ т/м ³ .		

Вариант 18

I	1) $\int \frac{dx}{25x^2 + 4}$	2) $\int \frac{(4^x + 1)^2}{2^x} dx$	3) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1 + x^8}} dx$
	4) $\int \frac{x^3}{x^8 - 9} dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$	$\int \frac{16x - 1}{4x^2 + 4x + 1} dx$
	7) $\int \frac{x^5 + 4x + 12}{x^2 + 3} dx$	$\int \frac{5x - 9}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)} dx$	9) $\int e^{4x} \cos 4x dx$
	10) $\int x^5 \ln x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x + 2}}{\sqrt{x + 2} + \sqrt[3]{x + 2}} dx$	12) $\int \frac{x^8}{\sqrt{x^3 + 2}} dx$
	13) $\int \cos 7x \sin 3x dx$	14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx$	15) $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx$
	16) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 1}$	17) $\int \sqrt{100 - x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 12x + 39}} dx$	18) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x + 3} dx$
II	$\int_{-3}^3 (8 \operatorname{arctg}^3 x - 3x^3 + 7x^6) dx$	2) $\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$	3) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$
III	1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{6x^2 - 5x + 1} dx$	2) $\int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16 - x^2)^3}}$	
IV	1) $y = \sqrt{x}, y = \frac{x}{4}$	2) $\begin{cases} x = 3 \sin^3 t, \\ y = 2 \cos t, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$	3) $\rho = 3\varphi,$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
V	1) $y = 1 - \ln \cos x,$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$	2) $\begin{cases} x = t^2 + 4, \\ y = 4 - t^2, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 1)$	3) $\rho = 6 \sin \varphi,$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VI	1) $2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0$ (Ox)	2) $x = 6 \cos t, y = 3 \sin t$ (Oy)	
VII	1) Найти работу силы $F(x) = 3x^2 + 4x + 1$ при прямолинейном движении под её действием от т. А при $x = 2$ до т. В при $x = 4$. 2)* Вычислить силу давления жидкости на прямоугольник, вертикально погруженный в жидкость, если известно, что его основание равно 9 м, высота 13 м, верхнее основание параллельно поверхности и находится на глубине 4 м. Плотность жидкости $\delta = 1,5$ т/м ³ .		

Вариант 19

I	1) $\int \cos(2 - 5x)dx$	2) $\int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^3}{\sqrt{x}} dx$	3) $\int \frac{3^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{\sqrt{25 - x^{12}}} dx$	5) $\int \frac{dx}{24 - 2x - x^2}$	6) $\int \frac{x - 7}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}} dx$
	7) $\int \frac{x^3}{x^2 - 4x + 5} dx$	8) $\int \frac{2x - 1}{x^3 - x^2} dx$	9) $\int x^2 \cos 8x dx$
	10) $\int \operatorname{arctg} 5x dx$	11) $\int \frac{\sqrt{x} - 4}{x(\sqrt{x} + 1)} dx$	12) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$
	13) $\int \sin 5x \cos 4x dx$	14) $\int \cos^3 x \sin^6 x dx$	15) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 1}$	17) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^4} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx$	18) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$
II	1) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\sin^3 x - 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + 3x^2 \right) dx$	2) $\int_2^3 y^4 (\ln y - 1) dy$	3) $\int_{-3}^4 \frac{(x + 3) dx}{\sqrt[3]{x + 4}}$
III	1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^2 x (\ln x - 1)^2}$	2) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$	
IV	1) $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}, y = 2x$	2) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$	3) $\rho = \frac{4}{\pi^3} \varphi, (\pi/2 < \varphi < \pi)$
V	1) $y = \sqrt{x^3}, (1 \leq x \leq 3)$	2) $\begin{cases} x = e^t + e^{-t}, \\ y = 2t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$	$\rho = 4(1 - \cos \varphi) (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VI	1) $y = 2 - x^2, y = x^2 (Ox)$	2) $x = 8 \cos t, y = \sin t, (Oy)$	
VII	1) Определить путь, пройденный телом за 6 секунд с начала движения, если скорость определяется формулой $v = \frac{t^3}{3} + 2t - 1$ м/с. 2)* Вычислить работу для выкачивания воды из ямы, имеющей форму конуса с вершиной на дне, высота которого 2 м, а радиус основания – 0,3 м.		

Вариант 20

I	1) $\int \frac{dx}{7x+1}$	2) $\int \frac{(2^x - 3)^2}{2^x} dx$	3) $\int \frac{\arccos^6 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{x^{12}+9} dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+6}}$	6) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+3} dx$
	7) $\int \frac{x^4+2x^2+4}{x^2-3} dx$	8) $\int \frac{4x-7}{(x-1)^2(x+4)} dx$	9) $\int x^2 \sin 8x dx$
	10) $\int \arctg 5x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-4}{x(\sqrt[3]{x}+1)} dx$	12) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x-4}} dx$
	13) $\int \sin 8x \sin 3x dx$	14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$	15) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 25 \cos^2 x}$	17) $\int \sqrt{36-x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$	18) $\int e^{\sqrt{x+4}} dx$
II	1) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\operatorname{tg}^3 x + 5 \arctg \frac{x}{2} - 5x^4 \right) dx$	2) $\int_3^4 \ln(x^2+1) dx$	3) $\int \frac{24}{15} \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$
III	1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$	2) $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-1}}$	
IV	1) $y = x^2 - \frac{2}{3}x, y = \frac{4}{3}x$	2) $\begin{cases} x = 3 \sin t, \\ y = 2 \cos t, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$	3) $\rho = -\sin \varphi,$ $(\pi \leq \varphi \leq 2\pi)$
V	1) $y = \frac{3}{4} \sqrt{(3-x)^3}, (0 \leq x \leq 2)$	2) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = e^t + e^{-t}, \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 1)$	3) $\rho = 4 \sin \varphi,$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VI	1) $xy = 4, 2x + y - 6 = 0, (Ox)$	2) $x = 9 \cos t, y = 2 \sin t, (Oy)$	
VII	1) Найти путь, прямолинейно движущегося тела со скоростью $v = 12 + 8t - 3t^2$ м/сек, за первые 2 сек? 2)* Определить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость из котла, имеющего форму полусферы радиуса $R = 3,5$ м. Плотность жидкости $\delta = 1,3$ т/м ³ .		

Вариант 21

I	1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$	2) $\int \frac{(\sqrt{x}+4)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$	3) $\int \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} dx$
	4) $\int \frac{x^5}{x^{12}-25} dx$	5) $\int \frac{dx}{4x^2-4x+5}$	6) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+10}} dx$
	7) $\int \frac{x^3+x^2-2x-4}{x^2+3} dx$	8) $\int \frac{5x+8}{(x-2)^2(x+4)} dx$	9) $\int x^2 5^x dx$
	10) $\int \arcsin 5x dx$	11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}(\sqrt[3]{x+4}+1)}$	12) $\int \frac{2^{3x}}{\sqrt{2^x+4}} dx$
	13) $\int \sin 10x \cos 14x dx$	14) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$	16) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$
	15) $\int (\operatorname{tg}^4 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 2) dx$	17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$ 17)* $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$	18) $\int \sin \sqrt{x+4} dx$
II	1) $\int_{-1/4}^{1/4} (2\arcsin^3 x - 3x^7 + 2x^2) dx$	2) $\int_1^{e^2} x^6 \ln x dx$	3) $\int_1^4 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}} dx$
III	1) $\int_2^\infty \frac{x^3 dx}{x^4-1}$	2) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$	
IV	1) $y = \sqrt{x}, y = -x$	2) $x = 4\sin^3 t,$ $y = 2\cos^3 t,$ $0 \leq t \leq \pi/2$	3) $\rho = 4\sqrt{\cos 2\varphi},$ $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$
V	1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}, (2 \leq x \leq 3)$	2) $\begin{cases} x = 12\cos t, \\ y = 12\sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$	3) $\rho = \cos^3 \frac{\varphi}{3},$ $(-\pi/2 \leq \varphi \leq 0)$
VI	1) $x = \sin t, y = 2\cos t$ (Ox)	2) $y = x^2/4, -2 \leq x \leq 0$ (Oy)	
VII	1) Скорость прямолинейного движения материальной точки $v = t \cdot e^{-0,41}$ м/сек. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки. 2)* Определить силу давления воды на плотину, представляющей собой прямоугольник с основанием $a = 9$ м, лежащем на поверхности воды и глубиной 4 м.		

Вариант 22

I	1) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+1)}$	2) $\int \frac{(e^x + 2)^3}{e^x} dx$	3) $\int x^2 \sqrt{3-x^3} dx$
	4) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{6+x^8}}$	5) $\int \frac{dx}{4x^2 + 5x + 1}$	6) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$
	7) $\int \frac{x^3 - x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2} dx$	8) $\int \frac{4x+21}{(x+1)(x+2)(x-3)} dx$	9) $\int x^2 e^{8x} dx$
	10) $\int \arcsin 5x dx$	$\int \frac{dx}{(\sqrt{x-1}-1)\sqrt{x-1}}$	13) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2-4}}$
	13) $\int \cos 6x \cos 3x dx$	14) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$	15) $\int \operatorname{tg}^7 x dx$
	16) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 81\sin^2 x}$	17) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16+x^2}}$ 17)* $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+8x+20}}$	18) $\int \cos \sqrt{x+1} dx$
II	1) $\int_{-1/2}^{1/2} (7x^6 - 2\sin^7 x + 3\operatorname{arctg} x) dx$	2) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$	3) $\int_{13}^{50} \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}}$
III	1) $\int_{-\infty}^0 \frac{x^2 dx}{x^3-1}$	2) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$	
IV	1) $y = 2x^2, y = 8x - 6$	2) $\begin{cases} x = -2\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ $(\pi/2 \leq \varphi \leq \pi)$	$\rho = 3 + 2\cos \varphi,$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
V	1) $y^2 = x^3$, от т. $A(0,0)$ до т. $B(2; -\sqrt{8})$	2) $\begin{cases} x = -2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $(\pi/2 \leq t \leq \pi)$	$\rho = 8(1 - \cos \varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
VI	1) $y = 8x - 2x^2, y = 6x$ (Ox)	2) $x = 7\cos t, y = \sin t, (Oy)$	
VII	1) Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R = 2$ м, а высота $H = 3$ м, из однородного строительного материала плотностью $\delta = 2,5$ т/м³. 2)* Прямой круглый конус с вертикальной осью погружен в воду с вершиной на поверхности воды. Найти работу, необходимую для извлечения конуса из воды, если его высота 10 дм, а диаметр основания – 20 дм, удельный вес равен 3 т/м³.		

Вариант 23

I	1) $\int 5^{4x-1} dx$	2) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-5)^2}{\sqrt{x}} dx$	3) $\int x^3 \sin x^4 dx$
	4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{25-x^8}} dx$	5) $\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$	6) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+8x+17}} dx$
	7) $\int \frac{x^3+2x^2+x+7}{x+1} dx$	8) $\int \frac{4x+1}{(x^2+1)(x+3)} dx$	9) $\int \cos(2 \ln x) dx$
	10) $\int x \operatorname{arctg} 4x dx$	11) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}-9} dx$	12) $\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{3^x+4}} dx$
	13) $\int \cos 3x \cos 7x dx$	14) $\int (\operatorname{ctg}^4 x-3 \operatorname{ctg}^2 x) dx$	15) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx$
	16) $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x+81 \cos^2 x}$	17) $\int \frac{\sqrt{64-x^2}}{x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+10x+29}} dx$	18) $\int 4^{\sqrt{x}} dx$
II	1) $\int_{-1}^1\left(7 \operatorname{tg}^9 x-8 x^5+9 x^8\right) d x$	2) $\int_{-3}^{-2} \ln (x+4) d x$	3) $\int_{\pi / 12}^{\pi / 4} \frac{d x}{\sin 3 x}$
III	1) $\int_0^{\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4 x+1\right)^4}} d x$	2) $\int_0^{\pi / 2} \frac{e^{\operatorname{tg} x} d x}{\cos ^2 x}$	
IV	1) $y=3 x^2, y=18-15 x$	2) $\left\{\begin{array}{l} x=3 \sin t, \\ y=-4 \cos t, \\ \left(\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right) \end{array}\right.$	3) $\rho=5 \cos ^2 \varphi, (0 \leq \varphi \leq \pi)$
V	1) $y=\ln \frac{1}{\cos x}, 0 \leq x \leq \pi / 3$	2) $\left\{\begin{array}{l} x=3 \sin t, \\ y=-3 \cos t, \\ \pi / 2 \leq t \leq \pi \end{array}\right.$	3) $\rho=\sin ^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi / 2$
VI	1) $y=6 x-x^2, y=0(O x)$	2) $x=9 \cos t, y=2 \sin t(O y)$	
VII	1) Скорость движения тела $v=5 t e^{-t^2}$ м/с. Какой путь пройдет тело от начала движения до полной остановки? 2)* Найти силу давления воды на прямоугольную пластину с основанием $a=20$ м, лежащем на поверхности воды, и глубиной 3 м.		

Вариант 24

I	1) $\int \frac{dx}{25x^2 - 4}$	2) $\int \frac{(4^x + 3)^2}{2^x} dx$	3) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^8}} dx$
	4) $\int \frac{x^3}{x^8 - 16} dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$	6) $\int \frac{6x+1}{4x^2+4x+1} dx$
	7) $\int \frac{x^5 - 4x + 12}{x^2 + 3} dx$	$\int \frac{5x+9}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$	9) $\int e^{4x} \sin 4x dx$
	10) $\int x^6 \ln x dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}} dx$	12) $\int \frac{x^8}{\sqrt{x^3+1}} dx$
	13) $\int \cos 7x \sin x dx$	14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^{10} x} dx$	$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x - \cos^4 x} dx$
	16) $\int \frac{dx}{-5\sin x - \cos x + 1}$	17) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$ 17)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+12x+38}} dx$	18) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x+2} dx$
II	1) $\int_{-3}^3 (8\operatorname{arctg}^3 x - 3x^3 + 7x^6) dx$	2) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$	3) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$
III	1) $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$	2) $\int \frac{dx}{4(x-5)^{10}}$	
IV	1) $y = 4x^2 + 4, y = 5x$	2) $\begin{cases} x = 10 \sin t, \\ y = \cos t, \end{cases} (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$	3) $\rho = 5\varphi, (0 \leq t \leq 2\pi)$
V	1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, (0 \leq x \leq e)$	2) $\begin{cases} x = 10 \sin t, \\ y = 10 \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$	$\rho = 9(1 + \cos \varphi), \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right)$
VI	1) $y = 10 - x^2, y = x^2 (Ox)$	2) $x = 3 \cos t, y = \sin t (Oy)$	
VII	1) Найти путь прямолинейно движущегося тела со скоростью $v = e^{2t}$ м/с за первые две секунды. 2)* Вычислить массу земной атмосферы, полагая, что её плотность ρ меняется с увеличением высоты по закону $\rho = \rho_0 e^{-ah}$ где h – расстояние от поверхности Земли до рассматриваемой точки. (Земля считается шаром радиуса R).		

Заключение

Вы освоили операцию интегрирования и классический определенный интеграл Римана и убедились в лице последнего, насколько мощный инструмент получила наука для решения широкого класса геометрических, физических и других разнообразных задач! Но существует достаточно много элементарных функций, интегрирование которых или теоретически (так называемые неберущиеся интегралы) или практически невозможно. Но математически в конце концов придумали, как покорить непреодолимую вершину. Поясним качественно новые идеи на примере экспоненты e^x – одной из основных элементарных функций. В силу следствия их второго замечательного предела $e^x - 1 \approx x$ при малых значениях x ; чтобы найти дифференциал второго порядка, вычислим с помощью правила Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(x^2)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

и, следовательно, $e^x - x - 1 \approx \frac{x^2}{2}$ или $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$. Если продолжить этот процесс, то получим $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Оказалось, что экспоненту можно

разложить в сумму бесконечного степенного ряда (из степенных функций x^n)

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, причем эта формула (табличный ряд Маклорена

для e^x) верно не только при малых, но и при всех $x \in \mathbb{R}$. Выводятся табличные ряды Маклорена и для других основных элементарных функций, с помощью которых или другими способами научились раскладывать в такие степенные ряды те элементарные функции, которые вместе со всеми своими производными существовали при $x = 0$. Идея разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена и затем почленного интегрирования позволяет находить первообразные тоже в виде степенного ряда даже в случае, когда последние не являются элементарными! Студенты тех специальностей, где в курсе математики включен раздел «Ряды», легко научатся это делать.

Другим наиважнейшим применением неопределенных интегралов (наряду с рассмотренной в начале второй главы формулой Ньютона-Лейбница, которая позволяет вычислять определенный интеграл Римана) являются дифференциальные уравнения, то есть уравнений с производными, в которых процесс решений основан на интегрировании.

Что же касается обобщений интеграла Римана, заявленных в предисловии, то они изложены во второй части данного пособия. Но так как их вычисление также основано на операции интегрирования (а в многомерных случаях неоднократно), от вас требуется уверенное овладение его!

Библиографический список

1. Н.С. Пискунов Дифференциальное и интегральное исчисления, т. I (гл. VIII, X-XII) – М. «Наука», 1978. – 456 с. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 416 с.
2. Н.С. Пискунов Дифференциальное и интегральное исчисления, т. II (гл. XIV, XV) – М. «Наука», 1978. – 456 с. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 416 с.
3. Г.Н. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. II (гл. 8-10). – М. «Наука», 1969. – 800 с.
4. Г.Н. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. III (гл. 15-18). – М. «Наука», 1969. – 800 с.
5. Г.Ф. Берман, И.Г. Араманович Краткий курс математического анализа
6. МУ №662 В.С. Муштенко, Л.В. Стенюхин, Л.В. Акчурина, Е.В. Богачева Неопределенный и определенный интеграл. Методические указания и задания по математике. ВГАСУ – Воронеж, 2003. – 46 с.
7. МУ №669 З.Г. Викулина, С.Н. Ощепкова, А.А. Седаев Методические указания и контрольные задания к типовому расчету №4 по курсу высшей математики (Функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. ВГАСУ. – Воронеж, 2003. – 43 с.
8. Г.Н. Берман Сборник задач по курсу математического анализа.
9. Б.П. Демидович Задачи и упражнения по курсу математического анализа.
10. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие, ч.2 – 7-е изд., испр., – М. ООО «Изд-во Очник», ООО «Изд-во Мир и образование», 2009 – 357 с.