МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра физики

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по дисциплине «Физика»
для студентов всех технических направлений
и специальностей очной формы обучения

Воронеж 2019

УДК 53(07)
ББК 22.317

Составители: канд. физ.-мат. наук Н. В. Агапитова,
д-р физ.-мат. наук А. В. Бугаков,
д-р физ.-мат. наук Е. В. Шведов

Молекулярная физика. Первое начало термодинамики: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Физика» для студентов всех технических направлений и специальностей очной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Н. В. Агапитова, А. В. Бугаков, Е. В. Шведов. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2019. 51 с.

В методических указаниях рассмотрены основные теоретические положения по молекулярной физике и первому началу термодинамики, приведены решения ряда задач с подробными пояснениями и задачи для самостоятельного решения. Методические указания помогут активизировать самостоятельную работу студентов по данной теме курса общей физики.

Предназначены для студентов всех технических направлений и специальностей очной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_Молекулярная_физика.pdf.

Ил. 8. Библиогр.: 5 назв.

УДК 53(07)
ББК 22.317

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. Е. К. Белоногов

Издается по решению учебно-методического совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания представляют собой теоретические и практические материалы по разделу курса общей физики «Молекулярная физика. Первое начало термодинамики». Молекулярная физика имеет большое значение для успешного усвоения последующих разделов курса; играет фундаментальную роль в глубоком понимании физических принципов сложных вопросов прикладного характера.

Решение задач является важным этапом в процессе обучения студентов. Часто встречается ситуация, когда студент, зная теорию, не умеет её применять на практике. Решение задач требует не только знания физических законов, но и серьёзного методического подхода.

Наличие предлагаемых методических материалов по данной тематике позволит студенту в процессе индивидуальной работы справиться с решением необходимого минимума задач, предусмотренного рабочей программой по физике. Методические указания содержат основные теоретические сведения, используемые в процессе решения задач, примеры решения типовых задач с подробными пояснениями и набор задач с ответами для самостоятельного решения, подобранных в соответствии с приведёнными примерами, для закрепления полученных навыков. Методические указания предназначены для студентов всех технических направлений и специальностей очной формы обучения.

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1.1. Молекулярное строение вещества. Законы идеальных газов

- Количество вещества тела (системы)

$$\nu = N / N_A,$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), составляющих тело (систему); N_A – постоянная Авогадро: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

- Молярная масса вещества

$$M = m / \nu,$$

где m – масса однородного тела (системы); ν – количество вещества этого тела.

- Относительная молекулярная масса вещества

$$M_r = \sum_i n_i A_{r,i},$$

где n_i – число атомов i-го химического элемента, входящего в состав молекулы данного вещества; $A_{r,i}$ – относительная атомная масса этого элемента. Относительные атомные массы приводятся в таблице Д. И. Менделеева.

- Связь молярной массы M с относительной молекулярной массой M_r вещества

$$M = M_r k,$$

где $k = 10^{-3}$ кг/моль.

- Молярная масса смеси газов

$$M_{\text{см}} = \sum_{i=1}^{k} m_i / \sum_{i=1}^{k} \nu_i ,$$

где m_i – масса i-го компонента смеси; ν_i – количество вещества i-го компонента смеси; k – число компонентов смеси.

- Массовая доля i-го компонента смеси газов

$$w_i = m_i / m,$$

где m_i – масса i-го компонента смеси; m – масса смеси.

- Уравнение состояния идеальных газов (уравнение Клапейрона - Менделеева)

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad \text{или} \quad pV = \nu RT,$$

где m – масса газа; M – его молярная масса; R – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура; ν – количество вещества.

- Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

где p – давление смеси газов; p_i – парциальное давление i-го компонента смеси; k – число компонентов смеси.

1.2. Молекулярно – кинетическая теория газов

- Концентрация частиц (молекул, атомов и т. п.) однородной системы

$$n = N/V,$$

где V – объем системы.

- Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = 2/3\, n \langle \varepsilon_{п} \rangle,$$

где p – давление газа; $\langle \varepsilon_{п} \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

- Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = 1/2\, kT;$$

приходящаяся на все степени свободы молекулы (полная энергия молекулы)

$$\langle \varepsilon \rangle = i/2\, kT;$$

поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon_{п} \rangle = 3/2\, kT;$$

вращательного движения молекулы

$$\varepsilon_{вр} = \frac{i-3}{2} kT;$$

колебательного движения молекулы

$$\varepsilon_{кол} = kT,$$

где k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; i – число степеней свободы молекулы;

- Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT.$$

- Скорость молекул:

средняя квадратичная

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{3kT/m_1}\,, \text{ или } \langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{3RT/M}\;;$$

средняя арифметическая

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{8kT/(\pi \cdot m_1)}\,, \text{ или } \langle \upsilon \rangle = \sqrt{8RT/(\pi \cdot M)}\;;$$

наиболее вероятная

$$\upsilon_{в} = \sqrt{2kT/m_1}\,, \text{ или } \upsilon_{в} = \sqrt{2RT/M}\,,$$

где m_1 – масса одной молекулы.

1.3. Элементы статистической физики

- Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле)

$$n = n_0 e^{-U/(kT)},$$

где n – концентрация частиц; U – их потенциальная энергия; n_0 – концентрация частиц в точках поля, где $U = 0$; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; e – основание натурального логарифма.

- Барометрическая формула (распределение давления в однородном поле силы тяжести)

$$p = p_0 e^{-mgz/(kT)}, \text{ или } p = p_0 e^{-Mgz/(RT)},$$

где p – давление газа; m – масса частицы; M – молярная масса; z – координата (высота) точки по отношению к уровню, принятому за нулевой; p_0 – давление на этом уровне; g – ускорение свободного падения; R – молярная газовая постоянная.

- Вероятность того, что физическая величина *x*, характеризующая молекулу, лежит в интервале значений от *x* до $x + dx$, определяется по формуле

$$dW(x) = f(x)dx,$$

где $f(x)$ – функция распределения молекул по значениям данной физической величины *x* (плотность вероятности).

- Количество молекул, для которых физическая величина *x*, характеризующая их, заключена в интервале значений от *x* до $x + dx$,

$$dN = NdW(x) = Nf(x)dx.$$

- Распределение Максвелла (распределение молекул по скоростям) выражается двумя соотношениями:

а) число молекул, скорости которых заключены в пределах от *v* до $v + dv$,

$$dN(\upsilon) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}N\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}v^2dv,$$

где $f(v)$ – функция распределения молекул по модулям скоростей, выражающая отношение вероятности того, что скорость молекулы лежит в интервале от *v* до $v + dv$, к величине этого интервала, а так же долю числа молекул, скорости которых лежат в указанном интервале; N – общее число молекул; m – масса молекулы;

б) число молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от *u* до $u+du$,

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}Ne^{-u^2}u^2du,$$

где $u = \upsilon / \upsilon_в$ – относительная скорость, равная отношению скорости v к наивероятнейшей скорости $\upsilon_в$, $f(u)$ – функция распределения по относительным скоростям.

- Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle \upsilon \rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

- Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

- Импульс (количество движения), переносимый молекулами из одного слоя газа в другой через элемент поверхности,

$$dp = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S dt,$$

где η – динамическая вязкость газа; $\frac{dv}{dz}$ – градиент (поперечный) скорости течения его слоев; ΔS – площадь элемента поверхности; dt – время переноса.

- Динамическая вязкость

$$\eta = 1/3 \rho \langle v \rangle \lambda,$$

где ρ – плотность газа (жидкости); $\langle v \rangle$ – средняя скорость хаотического движения его молекул; λ – их средняя длина свободного пробега.

- Закон Ньютона

$$F = \frac{dp}{dt} = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями газа.

- Закон Фурье

$$\Delta Q = -\chi \frac{dT}{dx} S\Delta t,$$

где ΔQ – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через сечение площадью S за время Δt; χ – коэффициент теплопроводности; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры.

- Теплопроводность (коэффициент теплопроводности) газа

$$\chi = 1/3 c_v \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \text{ или } \chi = 1/6 kn \langle v \rangle \lambda,$$

где λ – средняя длина свободного пробега молекул; c_v – удельная теплоёмкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекулы.

- Закон Фика

$$\Delta m = -D \frac{dn}{dx} m_1 S\Delta t,$$

где Δm – масса газа, перенесенная в результате диффузии через поверхность S за время Δt; D – коэффициент диффузии; $\frac{dn}{dx}$ – градиент концентрации молекул; m_1 – масса одной молекулы.

- Коэффициент диффузии

$$D = 1/3 \langle v \rangle \lambda.$$

1.4. Первое начало термодинамики

- Связь между молярной (C_m) и удельной (c) теплоёмкостями газа

$$C_m = cM,$$

где M – молярная масса газа.

- Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$C_V = iR/2; \qquad C_p = (i+2)R/2,$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

- Удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$c_v = \frac{i}{2}\frac{R}{M}, \qquad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

- Уравнение Майера

$$C_p - C_v = R.$$

- Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \text{ или } \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \text{ или } \gamma = \frac{i+2}{i}.$$

- Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N\langle\varepsilon\rangle, \text{ или } U = vC_vT,$$

где $\langle\varepsilon\rangle$ – средняя кинетическая энергия молекулы; N – число молекул газа; v – количество вещества.

- Работа, совершаемая газом при изменении его объема, в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV,$$

где V_1 – начальный объём газа; V_2 –его конечный объем.

Частные случаи:

а) при изобарном процессе ($p = const$)

$$A = p(V_2 - V_1);$$

б) при изотермическом процессе ($T = const$)

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1};$$

в) при адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M}C_v(T_1\text{-}T_2), \text{ или } A = \frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1 – начальная температура газа; T_2 – его конечная температура.

- Уравнение Пуассона (уравнение газового состояния при адиабатном процессе)

$$pV^{\gamma} = const.$$

- Связь между начальным и конечным значениями параметров состояний газа при адиабатном процессе:

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

- Первое начало термодинамики в общем случае записывается в виде

$$Q = \Delta U + A,$$

где A – работа, совершаемая газом против внешних сил, Q – количество теплоты, сообщённое газу; ΔU – изменение его внутренней энергии.

Первое начало термодинамики:

а) при изобарном процессе

$$Q = \Delta U + A = \frac{m}{M}C_v\Delta T + \frac{m}{M}R\Delta T = \frac{m}{M}C_p\Delta T;$$

б) при изохорном процессе ($A = 0$)

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M}C_v\Delta T;$$

в) при изотермическом процессе ($\Delta U = 0$)

$$Q = A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1},$$

г) при адиабатном процессе ($Q = 0$)

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_v \Delta T .$$

1.5. Реальные газы

- Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right)\left(V_m - b\right) = RT,$$

для произвольного количества вещества v газа

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2} \right)(V - vb) = vRT,$$

где a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса (рассчитанные на один моль газа); V – объем, занимаемый газом; V_m – молярный объем; p – давление газа на стенки сосуда.

Внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул:

$$p' = \frac{a}{V_m^2}, \text{ или } \quad p' = v^2 \frac{a}{V^2}.$$

- Связь критических параметров – объема, давления и температуры газа – с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса:

$$V_{m\,\text{кр}} = 3b; \quad p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}; \quad T_{\text{кр}} = \frac{3a}{27Rb}.$$

- Внутренняя энергия реального газа

$$U = v\left(C_V T - \frac{a}{V_m} \right),$$

где C_V – молярная теплоёмкость газа при постоянном объеме.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 2.1

Определить: 1) число N молекул воды, занимающей при температуре $t = 4^\circ \text{C}$ объем V = 1мм^3; 2) массу m_1 молекулы воды; 3) диаметр d молекулы воды, считая, что молекулы имеют форму шаров, соприкасающихся друг с другом.

Решение

1. Число N молекул, содержащихся в теле некоторой массы m, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν: $N = N_A\nu$. Так как $\nu = m/M$, где M – молярная масса, то $N = (m/M)N_A$. Выразив в этой формуле массу как произведении плотности ρ на объем V, получим

$$N = (\rho V/M)N_A .$$

Все величины, кроме молярной массы воды, известны: $\rho = =1\cdot10^3$ кг/м^3 , $V = 1$ мм$^3 = 1\cdot10^{-9}$ м^3, $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Зная химическую формулу воды, найдём молярную массу воды: $M = M_rk = (2\cdot1 + 1\cdot16)\cdot10^{-3}$ кг/моль $= 18\cdot10^{-3}$ кг/моль. Подставим значения величин и сделаем вычисления:

$$N = [1\cdot10^{-3}\cdot1\cdot10^{-9} / (18\cdot10^{-3})]\cdot6{,}02\cdot10^{23} \text{ молекул} = 3{,}34\cdot10^{19} \text{ молекул.}$$

2. Массу одной молекулы воды найдем делением ее молярной массы на постоянную Авогадро: $m_1 = M/N_A$. Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$m_1 = \frac{18\cdot10^{-3}}{6{,}02\cdot10^{23}} \text{ кг} = 2{,}99\cdot10^{-26} \text{ кг.}$$

3. Будем считать, что молекулы плотно прилегают друг к другу, тогда на каждую молекулу диаметром d приходится объем $V_1 = d^3$. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_1} .$$

Объем V_1 найдём, разделив молярный объем V_m вещества на число молекул в моле, т. е. на постоянную Авогадро: $V_1 = V_m / N_A$. Молярный объем равен отношению молярной массы к плотности вещества, т. е. $V_m = M/\rho$. Поэтому можем записать, что $V_1 = M/(\rho N_A)$. Подставив полученное выражение V_1 в формулу, получим

$$d = \sqrt[3]{M/(\rho N_A)}.$$

Подставим значения величин и произведем вычисления:

$$d = 3{,}11\cdot10^{-10} \text{ м} = 311 \text{ пм.}$$

Задача 2.2

Найти среднюю квадратичную скорость, среднюю кинетическую энергию поступательного движения и среднюю полную кинетическую энергию молекул гелия и азота при температуре t = 27 °С. Определить полную энергию всех молекул 100 г каждого из газов.

Анализ

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы любого газа однозначно определяется его термодинамической температурой:

$$\langle W_{On} \rangle = \frac{3}{2} kT ,$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Однако средняя квадратичная скорость молекул газа зависит от массы его молекул:

$$v_{кв} = \sqrt{3kT/m_0} ,$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Средняя полная энергия молекулы зависит не только от температуры, но и от структуры молекул – от числа i степеней свободы:

$$\langle W_0 \rangle = ikT/2 .$$

Полная кинетическая энергия всех молекул, равная для идеального газа его внутренней энергии, может быть найдена как произведение $\langle W_0 \rangle$ на число N всех молекул:

$$W = U = \langle W_0 \rangle N .$$

Очевидно,

$$N = N_A m/M ,$$

где m – масса всего газа, отношение m/M определяет число молей, а N_A – постоянная Авогадро. Это выражение с учетом уравнения Клапейрона – Менделеева позволит рассчитать полную энергию всех молекул газа.

Решение

Подставляя числовые данные, получаем $\langle W_{On} \rangle = 6{,}2 \cdot 10^{-21}$ Дж, причем средние энергии поступательного движения одной молекулы и гелия, и азота одинаковы.

Формулу средней квадратичной скорости удобно несколько преобразовать, умножив числитель и знаменатель на $N_А$.

Тогда

$$v_{кв} = \sqrt{3RT/M}\ ,$$

где $R = 8{,}31\ \ Дж/(моль \cdot К)$. Для гелия $v_{кв} = 13{,}7 \cdot 10^2$ м/с, для азота $v_{кв} = 5{,}17 \cdot 10^2$ м/с.

Для расчета средней полной энергии молекулы надо знать число степеней свободы молекулы.

Гелий – одноатомный газ, следовательно, $i = 3$, тогда

$$\langle W_{On} \rangle = \langle W_0 \rangle = 6{,}2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Азот – двухатомный газ, следовательно, $i = 5$ и

$$\langle W_0 \rangle = \frac{5}{2} kT = 10{,}4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Тогда полная энергия всех молекул равна

$$W = \frac{i}{2} kT \frac{m}{M} N_0 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT\ .$$

Для гелия $W = 93{,}5$ кДж; для азота $W = 22{,}3$ кДж.

Задача 2.3

Смесь кислорода и азота при температуре T = 290 К и давлении p = 5,8 кПа имеет плотность ρ = 0,4 кг/м^3. Определить концентрацию молекул кислорода в смеси.

Решение

Давление смеси газов, согласно закону Дальтона, равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2\,,$$

которые найдем из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$p_1 = \frac{\rho_1}{M_1} RT\ ;\ \ p_2 = \frac{\rho_2}{M_2} RT\,,$$

где ρ_1 и ρ_2 – парциальные плотности кислорода и азота, т.е. плотности, которые имели бы газы, если бы каждый из них в отдельности занимал весь этот объем. Очевидно, что

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 .$$

Используя уравнение $p = nkT$, можно получить:

$$n_1 = \frac{\rho_1}{M_1} \cdot N_A ; \; n_2 = \frac{\rho_2}{M_2} \cdot N_A ,$$

где n_1 и n_2 – концентрации молекул кислорода и азота.

Выразив ρ_1 и ρ_2:

$$\rho_1 = \frac{n_1 M_1}{N_A} ; \; \rho_2 = \frac{n_2 M_2}{N_A} ,$$

получаем

$$\rho = \frac{n_1 M_1}{N_A} + \frac{n_2 M_2}{N_A} .$$

Концентрация молекул смеси газов равна сумме концентраций компонентов:

$$n = n_1 + n_2 \text{ или } \frac{p}{kT} = n_1 + n_2 .$$

Решая совместно последние уравнения, найдем концентрацию молекул кислорода:

$$n_2 = \frac{p}{kT} - n_1 ; \; \rho = \frac{n_1 M_1}{N_A} + \left(\frac{p}{kT} - n_1 \right) \frac{M_2}{N_A} ;$$

$$\rho = \frac{n_1 M_1}{N_A} + \frac{p}{kT} \frac{M_2}{N_A} - \frac{n_1 M_2}{N_A} = n_1 \left(\frac{M_1}{N_A} - \frac{M_2}{N_A} \right) + \frac{p \cdot M_2}{kTN_A}$$

$$n_1 = \frac{\rho \cdot N_A - pM_2 / kT}{M_1 - M_2} .$$

Подставив числовые значения и вычислив, получим

$$n_1 = \frac{0{,}4 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} - 5{,}8 \cdot 10^3 \cdot 28 \cdot 10^{-3} / 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 290}{32 \cdot 10^{-3} - 28 \cdot 10^{-3}} \approx$$

$$\approx 5 \cdot 10^{25} (\frac{1}{м^3}).$$

Ответ: концентрация кислорода $n_1 = 5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 2.4

Сосуд объемом V = 2 л разделен пополам полупроницаемой закрепленной перегородкой. В левую половину сосуда впустили смесь азота массой m_1 = 10 г и водорода массой m_2 = 4г, а в правой половине остался вакуум. Какое давление p установиться в левой половине сосуда после окончания процесса диффузии, если через перегородку может диффундировать (проникать) только водород, а для молекул азота отверстия в перегородке слишком малы? Температура в обеих половинах одинакова t °C = 27 °C. Молярная масса азота M_1 = 0,002 кг/моль.

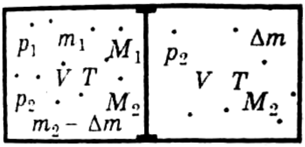
Дано:
$V = 2$ л
$m_1 = 10$ г
$m_2 = 4$ г
$t^o = 27^oC$
$M_1 = 0{,}028 \; \frac{кг}{моль}$
$M_2 = 0{,}002 \; \frac{кг}{моль}$
$R = 8{,}31 \; \frac{Дж}{моль \cdot К}$

$p = ?$

Решение

Тот факт, что перегородка является полупроницаемой, означает, что давления проникающего сквозь нее водорода по окончании процесса диффузии становятся одинаковыми с обеих сторон перегородки. Но в левой половине сосуда имеется еще и азот, который через перегородку не проникает, поэтому парциальные давления азота p_1 и оставшегося в этой половине сосуда водорода p_2 складываются и их суммарное давление

p превысит давление водорода, проникшего в правую половину сосуда.



Поэтому давления этих газов по разные стороны от перегородки будут различными. Из рисунка видно, что в левой половине сосуда объемом V по окончании диффузии водорода будет присутствовать азот массой m_1 и водород массой $m_1 - \Delta m$, где Δm – масса водорода, диффундировавшего в правую половину. Парциальное давление азота в левой половине будет равно p_1, а парциальное давление водорода в ней будет равно p_2 и таким же будет давление водорода в правой половине. Температура будет одинаковой в обеих половинах сосуда и не будет меняться в процессе диффузии.

Запишем уравнения состояния применительно к азоту в левой половине и применительно к водороду в левой и правой половинах сосуда:

$$p_1V = \frac{m_1}{M_1}RT, \tag{1}$$

$$p_2V = \frac{m_2 - \Delta m}{M_2}RT, \tag{2}$$

$$p_2V = \frac{\Delta m}{M_2}RT. \tag{3}$$

Если приравнять правые части равенств (2) и (3), то мы сумеем определить массу Δm. После этого надо будет выразить из (1) и (2) парциальные давления газов p_1 и p_2, а затем сложить их. Так мы сумеем определить общее давление p этих газов в левой половине сосуда. Приступим: $\frac{m_2 - \Delta m}{M_2}RT = \frac{\Delta m}{M_2}RT$, $m_2 - \Delta m = \Delta m$, $2\Delta m = m_2$ и

$\Delta m = 0{,}5m_2$, т.е. в правую часть сосуда перейдет половина массы водорода. Тогда $p_2V = \frac{m_2 - 0{,}5m_2}{M_2}RT$ или

$p_2V = \dfrac{m_2}{2M_2}RT$, откуда $p_2 = \dfrac{m_2RT}{2M_2V}$. Из (1) $p_1 = \dfrac{m_1RT}{M_1V}$. Искомое давление p согласно закону Дальтона равно сумме давлений p_1 и p_2:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{m_1RT}{M_1V} + \frac{m_2RT}{2M_2V} \text{ или } p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{2M_2}\right)$$

Переведем все единицы в СИ:

2 л = $2 \cdot 10^{-3}$ м^3, 10 г = 0,01 кг, 4 г = 0,004 кг, 27 $^{\circ}$C = (27 + 273) К = 300 К.

Произведем вычисления:

$$p = \frac{8{,}31 \cdot 300}{2 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{0{,}01}{0{,}028} + \frac{0{,}004}{2 \cdot 0{,}002}\right) \text{ Па} = 1{,}7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Ответ: $p = 1{,}7 \cdot 10^6$ Па.

Задача 2.5

Теплоизолированный сосуд объемом $V = 2$ м^3 разделен пористой перегородкой на две равные части. Атомы гелия могут свободно проникать через поры в перегородке, а атомы аргона – нет. В начальный момент в одной части сосуда находится $m = 1$ кг гелия, а в другой $m = 1$ кг аргона, а средняя квадратичная скорость атомов аргона равна скорости атомов гелия и составляет 500 м/с. Определить внутреннюю энергию гелий – аргоновой смеси после установления равновесия в системе.

Решение

После установления равновесия в системе гелий равномерно распределиться по всему сосуду. В результате, в той части сосуда, где первоначально находился аргон, окажется $\nu_1 = m/2M_{He}$ молей гелия и $\nu = m/M_{Ar}$ молей аргона, следовательно,

$$\nu_2 = \nu_1 + \nu = m/2M_{He} + m/M_{Ar} .$$

Внутренняя энергия гелий – аргоновой смеси пропорционально количеству вещества. Внутренняя энергия всей системы:

$$U = 2\frac{mv^2}{2}.$$

Следовательно ,

$$\frac{U'}{U} = \frac{v_2}{v_{He} + v_{Ar}},$$

где U' – внутренняя энергия гелий – аргоновой смеси.

$$U' = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M_{Ar} + 2M_{He}}{M_{Ar} + M_{He}}.$$

Подставляя числовые значения из условия задачи, получим

$$U' = \frac{1 \cdot 25 \cdot 10^4}{2} \cdot \frac{40 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3}} \approx 136 \text{ Дж}.$$

Ответ: $U' = 136$ Дж.

Задача 2.6

По оси ординат на рис. 2.1, а, б отложены соответственно функции $F(v) = \frac{dN}{dv}$ и $f(v) = \frac{1}{N_0}\frac{dN}{dv}$, где N – число молекул имеющих скорость v и N_0 – общее число молекул в данном объеме. Какой физический смысл имеет каждый из заштрихованных участков на каждом из рисунков?

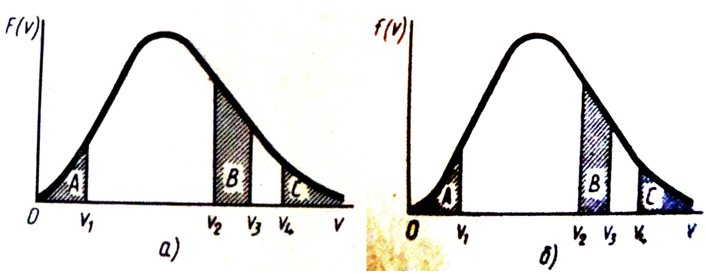


Рис. 2.1

Решение

Число молекул в интервале скоростей от v до $v + dv$ составляет:

$$dN = F(v)dv.$$

Соответственно на рис. 2.1, а заштрихованные участки определяют:

участок A – число молекул, скорость которых не превышает v_1:

$$N_A = \int_0^{v_1} F(v)dv\,;$$

участок B – число молекул, скорость которых не меньше, чем v_2 и не больше чем v_3:

$$N_B = \int_{v_2}^{v_3} F(v)dv\,;$$

участок C – число молекул, скорость которых не меньше чем v_4:

$$N_C = \int_{v_4}^{\infty} F(v)dv\,.$$

На рис. 2.1, б каждый заштрихованный участок представляет отношение соответствующего числа молекул к их общему числу, т.е. вероятность того, что молекулы имеют скорости, заключенные в данном интервале скоростей.

Задача 2.7

Все ординаты кривой 2 в два раза больше, чем соответствующие ординаты кривой 1 (рис.2.2). Чем отличаются функции распределения молекул по скоростям, изображаемые этими кривыми?

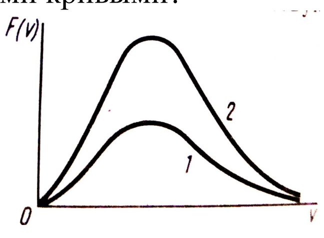


Рис. 2.2

Решение:

Так как для каждого интервала скоростей от v до v + dv число молекул составляет:

$$dN = F(v)dv\,,$$

то, поскольку $F_2(v) = 2F_1(v)$, общее число молекул распределения, изображаемое кривой 2, в два раза больше числа молекул распределения, изображаемого кривой 1.

Задача 2.8

На функции распределения молекул по скоростям выделен участок, ограниченный скоростями υ 2 и υ 3 (рис. 2.1. б). Как на основании этого графика определить энергию всех молекул, скорости которых заключены в данном интервале скоростей, и среднюю энергию этих молекул?

Решение

Число молекул в интервале от υ до υ + dυ составляет:

$$dN = F(v)dv\,.$$

Каждая из этих молекул обладает энергией $mv^2/2$. Все молекулы в интервале скоростей от v_1 до v_2 обладают энергией:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} \frac{mv^2}{2} F(v)dv\,.$$

Чтобы найти среднюю энергию w этих молекул, следует W разделить на их число:

$$w = \frac{m}{2} \frac{\int_{v_1}^{v_2} v^2 F(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} F(v)dv}\,.$$

Задача 2.9

Распределение молекул по скоростям может быть представлено как функция отношения данной скорости к наивероятнейшей. При этом по оси ординат целесообразно откладывать отношение значения функции при данной скорости к значению при наивероятнейшей. Будет ли построенная таким образом кривая распределения пригодна для различных газов, разного числа молекул и разных температур или ее необходимо соответствующим образом перестраивать?

Решение:

Согласно закону Максвелла, число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до v + dv, составляет:

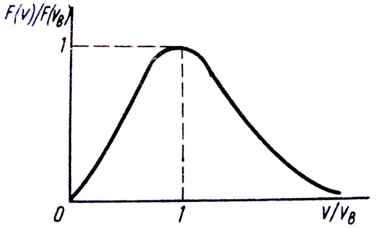


Рис. 2.3

$$dN = N_0 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right).$$

Используя наивероятнейшую скорость

$$v_B = \sqrt{2kT/m},$$

это можно представить в виде

$$dN = N_0 4\pi^{-1/2} \left(\frac{v}{v_B} \right)^2 \exp\left[-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2 \right] d\left(\frac{v}{v_B} \right).$$

При этом функция распределения $F(v/v_B)$ приобретает вид:

$$F\left(\frac{v}{v_B} \right) = N_0 4\pi^{-1/2} \left(\frac{v}{v_B} \right)^2 \exp\left[-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2 \right].$$

При $v/v_B = 1$ эта функция принимает значение:

$$F(1) = N_0 4\pi^{-1/2} e^{-1} \approx 0{,}83 N_0.$$

Отношение $F(v/v_B)$ к $F(1)$ (рис. 2.3)

$$F\left(\frac{v}{v_B} \right) \Big/ F(1) = \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \exp\left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right) \right]^2$$

одинаково для любого числа молекул любого газа при любой температуре и является, таким образом, универсальной функцией.

Задача 2.10

Максвелловское распределение может быть представлено не только как функция скоростей, но и как функция энергии молекул. Эта функция определяет число молекул, энергия которых лежит в интервале от w до w + dw:

$$dN = N_0 f(w) dw.$$

Требуется найти выражение этой функции и определить, относится ли она только к определенному газу или пригодна для любого газа.

Решение

Из формулы вопроса следует, что

$$f(w) = \frac{1}{N_0}\frac{dN}{dw}, \quad \text{или}$$

$$f(w) = \frac{1}{N_0}\frac{dN}{dv}\frac{dv}{dw}.$$

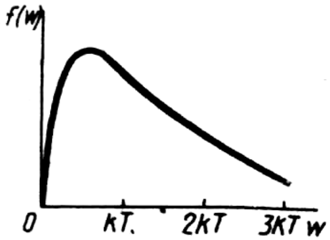


Рис. 2.4

Поскольку $v = (2\omega/m)^{1/2}$, после элементарных преобразований получим

$$dN = N_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{w}{kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{w}{kT}\right) d\left(\frac{w}{kT}\right).$$

Представление в таком виде удобно, так как в качестве аргумента использовано безразмерное отношение $w/(kT)$ и функция распределения оказывается пригодной не только для любого газа, но и для любой температуры. Функция $f(\omega)$ представлена на рис. 2.4.

Задача 2.11

Предположим, что вопреки реальному (максвелловскому) распределению молекул по скоростям все молекулы на некотором уровне (например, уровне моря) имеют одинаковые скорости, равные средней квадратичной скорости, равные средней квадратичной скорости при данной температуре. Предположим, кроме того, что в соответствии с моделью идеального газа между молекулами отсутствуют столкновения. Как при этих условиях изменялась бы с высотой кинетическая энергия молекул газа? До какой высоты простиралась бы атмосфера, если считать ее состоящей из азота и кислорода?

Решение

Полная энергия молекул газа складывается из их кинетической и потенциальной энергии. Считая последнюю равной нулю на начальном уровне, для любого другого уровня имеем:

$$w_п = mgh.$$

Так как полная энергия остается постоянной $(w_к + w_п = const)$, то

$$w_к = w_{к0} - mgh$$

Максимальная высота, до которой могут подняться молекулы, определяется условием $w_к = 0$. Следовательно,

$$h = w_{к0}/(mg).$$

Согласно условию задачи, $w_{к0} = \frac{3}{2}kT$. Подставляя вместо $k = R/N$ и вместо $m = M/N_A$, получим:

$$h = 3RT/(2Mg).$$

Подставляя значения молекулярных масс, найдем, что при $T = 300$ К предельная высота для азота равна 13,6 км, для кислорода – 11,9 км, для водорода – 191 км. Так как кинетическая энергия убывает с высотой, то соответственно убывает «температура» газа, причем по-разному для разных газов. На одной и той же высоте над уровнем моря разные газы обладают разной «температурой». На наивысшем уровне, которого могут достичь молекулы данного газа, его «температура» равна 0 К.

Заметим в заключение, что по своему смыслу барометрическая формула, выводимая в предложении постоянства температуры газа, равносильна утверждению о справедливости максвелловского распределения молекул по скоростям. Действительно, из барометрической формулы получается формула

Больцмана для распределения молекул по потенциальным энергиям. Та же формула может быть получена из формулы Максвелла.

Задача 2.12

Барометр в кабине летящего самолёта все время показывает одинаковое давление p = 79 кПа, благодаря чему летчик считает высоту h_1 неизменной. Однако температура воздуха за бортом изменилась с t = 5° С до t = 1° С. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил лётчик? Давление p_o у поверхности Земли считать нормальным.

Решение

Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)},$$

барометр может показывать неизменное давление p при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находится не на высоте h (которую летчик считает неизменной), а на некоторой другой высоте h_2.

Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев:

$$p = p_0 e^{-Mgh_1/(RT_1)}; \quad p = p_0 e^{-Mgh_2/(RT_2)}.$$

Найдём отношение p_0/p и обе части полученного равенства прологарифмируем:

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{Mgh_1}{RT_1}; \quad \ln\frac{p_0}{p} = \frac{Mgh_2}{RT_2}.$$

Из полученных соотношений выразим высоты h_1 и h_2 и найдем их разность:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R\ln(p_0/p)}{Mg}(T_2 - T_1).$$

Подставим значения величин (давление в отношении p_0/p можно выразить в килопаскалях, это не повлияет на окончательный результат).

$$\Delta h = \frac{8{,}31 \cdot \ln(101/79)}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}(1-5) \text{ м} = \text{-28,5 м}.$$

Знак «-» означает, что $h_2 < h_1$ и, следовательно, самолет снизился на 28,5 м по сравнению с предполагаемой высотой.

Задача 2.13

Одинаковые частицы массой $m = 10^{-12}$ г каждая, распределены в однородном гравитационном поле напряжённостью $G = 0{,}2$ мкН/кг. Определить отношение n_1/n_2 концентраций частиц, находящихся на эквипотенциальных уровнях, отстоящих друг от друга на $\Delta z = 10$ м. Температура T во всех слоях считается одинаковой и равной 290 К.

Решение

Запишем распределение Больцмана для двух случаев:

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{U_1}{kT}} \quad \text{и} \quad n_2 = n_0 e^{-\frac{U_2}{kT}}.$$

Найдем их отношение и прологарифмируем:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{e^{-\frac{U_1}{kT}}}{e^{-\frac{U_2}{kT}}} = e^{\frac{U_2 - U_1}{kT}}; \qquad \ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_2 - U_1}{kT}.$$

Подставляя в формулу выражение для потенциальных энергий частиц на двух высотах: $U_1 = mGH_1$, и $U_2 = mGH_2$, получим $\ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{mG(h_2 - h_1)}{kT}$. Подставляя числовые значения, получаем $\ln\frac{n_1}{n_2} = 0.5$ и $\frac{n_1}{n_2} = e^{0.5} = 1.65$.

Ответ: $\frac{n_1}{n_2} = 1{,}65$.

Задача 2.14

Перрен, наблюдая при помощи микроскопа изменение концентрации взвешенных частиц гуммигута с изменением высоты и применяя барометрическую формулу, экспериментально нашел значение числа Авогадро N_A. В одном из опытов

Перрен нашел, что при расстоянии между двумя слоями $\Delta h = 100$ мкм число взвешенных частиц гуммигута в одном слое вдвое больше, чем в другом. Температура гуммигута $t = 20$ °С. Частицы гуммигута диаметром $d = 0{,}3$ мкм были взвешены в жидкости, плотность которой на $\Delta\rho = 0{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3 меньше плотности частиц. Найти по этим данным значение постоянной Авогадро N_A.

Решение

Имеем барометрическую формулу

$$p = p_0 \exp(-\mu g h / RT).$$

Концентрация (число частиц в единице объема)

$$n = p / kT.$$

Подставляя, получим:

$$n_1 = n_0 \exp(-\mu g h_1 / RT), \quad n_2 = n_0 \exp(-\mu g h_2 / RT);$$

Отсюда

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(-\frac{\mu g (h_1 - h_2)}{RT}\right) = \exp\left(\frac{\mu g (h_2 - h_1)}{RT}\right), \text{ или}$$

$$\ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{\mu g (h_2 - h_1)}{RT}.$$

Так как масса частицы $m = \mu / N_A$, то формулу можно записать так:

$$\ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_A m g (h_2 - h_1)}{RT}.$$

Откуда, учитывая поправку на закон Архимеда, получим:

$$N_A = \frac{RT \ln(n_1/n_2)}{gV(\rho - \rho_0)(h_2 - h_1)} = 6{,}1 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1},$$

где ρ – плотность гуммигута и ρ_0 – плотность жидкости.

Задача 2.15

Одним из компонентов топлива в двигателе ракеты является жидкий водород, плотность которого, в момент закипания ρ = 7 кг/м^3. определить среднюю длину свободного пробега молекул водорода $\langle\lambda\rangle$ при этом, если эффективный диаметр молекулы водорода $d_{эф} = 0{,}23$ нм (нанометра). Молярная масса водорода $M = 0{,}002$ кг/моль. Газ считать идеальным.

Дано:

$\rho = 7\ \frac{кг}{м^3}$

$d_{ýô} = 0{,}23$ нм

$M = 0{,}002\ \frac{кг}{моль}$

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{моль}$

$\langle\lambda\rangle - ?$

Решение.

Средняя длина свободного пробега молекул определяется формулой

$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{эф}^2 n}$, где n – концентрация молекул водорода.

Концентрация молекул, т.е. их число в единице объема, можно «связать» с плотностью ρ, разделив плотность ρ (т.е. массу всех молекул в единицу объема) на массу одной молекулы водорода $m_м$.

Очевидно, что при этом мы найдем число молекул в единице объема, т.е. их концентрацию n:

$$n = \frac{\rho}{m_{ì}}, \text{ где } m_{ì} = \frac{M}{N_A}.$$

$$\text{Тогда } n = \frac{\rho N_A}{M} \text{ и } \langle\lambda\rangle = \frac{M}{\sqrt{2}\pi d_{эф}^2 \rho N_A}$$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ. При этом учтем, что

1 нм = 10^{-9} м, поэтому 0,23 нм = $0{,}23 \cdot 10^{-9}$ м = $2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{0{,}002}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 7 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Ответ: $\langle\lambda\rangle = 2 \cdot 10^{-9}$ м.

Задача 2.16

В сосуде находится кислород при нормальных условиях. Найти среднее число столкновений молекул $\langle Z \rangle$ в этом объеме за время t = 2 с. Эффективный диаметр молекулы кислорода $d_{эф} = 0{,}27$ нм. Молярная масса кислорода M = 0,032 кг/моль

Дано:

$p = 10^5$ Па

$T = 273$ К

$t = 2$ с

$d_{эф} = 0{,}27$ нм

$M = 0{,}032\ \frac{кг}{моль}$

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{моль}$

$\langle Z \rangle - ?$

Решение.

Среднее число столкновений молекул $\langle Z \rangle$ за время t можно определить, умножив среднее число столкновений молекул в единицу времени $\langle z \rangle$ на время t:

$$\langle Z \rangle = \langle z \rangle t\ .$$

Среднее число столкновений молекул в единицу времени определяется формулой

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d_{эф}^2 n \langle v_{ap} \rangle\ .$$

Здесь n – концентрация молекул кислорода, а $\langle v_{ap} \rangle$ - их средняя арифметическая скорость. Концентрация молекул n связана с давлением кислорода p соотношением: $p = knT$, откуда $n = \frac{p}{kT}$. Средняя арифметическая скорость молекул кислорода: $\langle v_{ap} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$. Объединяя формулы, получим:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d_{эф}^2 \frac{p}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 4\frac{p\sigma^2}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{MT}}\ .$$

Тогда среднее число столкновений за время t:

$$\langle Z \rangle = \frac{p d_{эф}^2 t}{k}\sqrt{\frac{\pi R}{MT}}$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\left\langle Z\right\rangle = 4\frac{10^5\cdot(2{,}7\cdot10^{-10})\cdot 2}{1{,}38\cdot10^{-23}}\sqrt{\frac{3{,}14\cdot 8{,}31}{0{,}032\cdot 273}} = 7\cdot10^9 .$$

Ответ: $\left\langle Z\right\rangle = 7\cdot10^9$.

Задача 2.17

Давление атомарного водорода в космическом пространстве примерно $p = 1{,}7\cdot10^{-15}$ Па при температуре T = 125 К, эффективный диаметр его молекул $d_{эф} = 0{,}22$ нм. Найти, какое время t в среднем движется молекула водорода между последовательными столкновениями. Молярная масса водорода $M = 0{,}002$ кг/моль.

Дано:

$p = 1{,}7\cdot10^{-15}$ Па

$T = 125$ К

$d = 0{,}22$ нм

$k = 1{,}38\cdot10^{-23}\ \frac{Дж}{К}$

$R = 8{,}31\ \frac{Дж}{моль\cdot К}$

t - ?

Решение

Время между последовательными столкновениями можно найти, разделив среднюю длину свободного пробега молекулы $\left\langle\lambda\right\rangle$ на ее среднюю арифметическую скорость $\left\langle v_{ар}\right\rangle$:

$$t = \frac{\left\langle\lambda\right\rangle}{\left\langle v_{ар}\right\rangle}.$$

Теперь запишем формулы средней длины свободного пробега и средней арифметической скорости:

$$\left\langle\lambda\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{эф}^2 n}\qquad \left\langle v_{ар}\right\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Здесь n – концентрация молекул водорода в космосе, R – молярная газовая постоянная.

Тогда:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{эф}^2 n}\sqrt{\frac{RT}{8\pi M}}.$$

Опять воспользуемся формулой $p = knT$, откуда выразим концентрацию n, ведь давление p нам дано: $n = \dfrac{p}{kT}$, где k – постоянная Больцмана.

Тогда

$$t = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{эф}^2 p}\sqrt{\frac{\pi M}{8RT}}$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$t = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 125}{\sqrt{2}\cdot 3{,}14\cdot(2{,}2\cdot 10^{-10})^2\cdot 1{,}7\cdot 10^{-15}}\sqrt{\frac{3{,}14\cdot 0{,}002}{8\cdot 8{,}31\cdot 125}} = 4\cdot 10^9 \text{ с} =$$

=129 лет.

Ответ: t = 129 лет.

Задача 2.18

Эффективное сечение молекулы азота $S_{\text{ýô}} = 4{,}3\cdot 10^{-19}$ м^2, давление азота в сосуде $p = 1{,}5$ атм, средняя длина свободного пробега его молекул $\langle\lambda\rangle = 2\cdot 10^{-7}$ м. найти температуру T азота в сосуде.

Дано:

$S_{эф} = 4{,}3\cdot 10^{-19}$ м^2

$p = 1{,}5$ атм

$\langle\lambda\rangle = 2\cdot 10^{-7}$ м

$k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \dfrac{Дж}{К}$

T – ?

Решение

Воспользуемся формулой средней длины свободного пробега молекулы $\langle\lambda\rangle$: $\langle\lambda\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d_{\text{ýô}}^2 n}$.

Здесь $\pi d_{эф}^2 = S_{эф}$ эффективное сечение молекулы. Концентрацию молекул азота n «свяжем» с его давлением p и температурой T:

$$p = knT,$$

где k - постоянная Больцмана

Нам осталось выразить концентрацию n и подставить полученное выражение. Выполним эти действия:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{ýô}^2 \langle\lambda\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}S_{ýô}\langle\lambda\rangle}.$$

$$p = \frac{kT}{\sqrt{2}S_{ýô}\langle\lambda\rangle}, \text{ откуда } T = \sqrt{2}\frac{\langle\lambda\rangle S_{эф} p}{k}$$

Переведем все единицы в СИ и произведем вычисления:

$$T = \sqrt{2}\frac{2\cdot 10^{-7}\cdot 4{,}3\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}52\cdot 10^{5}}{1{,}38\cdot 10^{-23}} = 1{,}3\cdot 10^{3} \text{ К}.$$

Ответ: $T = 1{,}3\cdot 10^{3}$ К

Задача 2.19

На высоте h = 20 см над горизонтальной трансмиссионной лентой, движущейся со скоростью υ_1 = 70 м/с, параллельно ей подвешена пластинка площадью S = 4 см^2 . Какую силу надо приложить к пластинке, чтобы она оставалась неподвижной? Вязкость воздуха при нормальных условиях η_0 = $1{,}7\cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). В условиях опыта температура t = 27° С, давление атмосферное (рис 2.5).

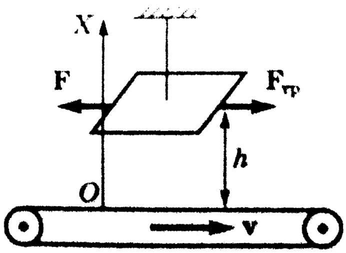


Рис 2.5

Анализ. Благодаря явлению внутреннего трения на слой воздуха, примыкающей к пластине (адсорбированный пластинкой), со стороны движущихся слоев действует сила трения. Пластинка будет неподвижна, если приложенная сила F и сила трения $F_{тр}$ скомпенсированы:

$$\mathrm{F} = -\mathrm{F}_{тр}, \qquad F = F_{тр}.$$

Сила трения может быть найдена по уравнению Ньютона:

$$F_{тр} = \eta |dv/dx| S,$$

где $d\upsilon/dx$ – производная скорости v направленного движения слоя по координате x, причем ось OX перпендикулярна плоскостям трансмиссии и пластинки и направлена от трансмиссии к пластинке.

По условию задачи, давление атмосферное, это значит, что длина свободного пробега молекул много меньше расстояния h, поэтому вязкость может быть рассчитана по формуле

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda\rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^{2n}}\frac{Mn}{N_A}.$$

Здесь ‹ υ › - средняя скорость теплового движения молекул. λ – средняя длина свободного пробега; ρ – плотность газа. Как видно, вязкость зависит только от природы газа (эффективного диаметра d молекул, молярной массы M) и температуры. Поэтому во всём пространстве между трансмиссией и пластинкой $\eta = const$ и значение η при заданных условиях связано со значением η_0 при нормальных условиях соотношением

$$\eta / \eta_0 = \sqrt{T / T_0},$$

где T = 300 К; T_0 = 273 К.

Выражение для силы трения может быть применено к любому промежуточному слою площадью S , расположенному между трансмиссией и пластинкой. Из закона сохранения импульса следует, что сила трения, действующая на любой из этих промежуточных слоев, должна быть одинаковой, следовательно, $d\upsilon/dx = const$ и значение этой производной может быть определено из граничных условий.

Решение

Определим вязкость

$$\eta = \eta_0\sqrt{T / T_0}$$

и заменим производную отношением изменения скорости Δv к приращению координаты Δx. По условию $-\upsilon = -\upsilon_1$, $\Delta x = h$. Тогда

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v_1}{h}.$$

Как и следовало ожидать, производная $d\upsilon/dx < 0$. Подставляя полученные выражения, получим:

$$F = F_{\text{тр}} = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{v_1}{h} S = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

Ответ: $F = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Н.

Задача 2.20

Определить коэффициент теплопроводности χ азота, находящегося в некотором объеме при температуре 280 К. Эффективный диаметр молекул азота принять равным 0,38 нм.

Дано:
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T = 280$ К
d = 0,38 нм = $3{,}8 \cdot 10^{-10}$ м

χ - ?

Решение

Коэффициент теплопроводности χ определяется по формуле

$$\chi = \frac{1}{3} C_V \rho \lambda \langle v \rangle$$

где $C_v = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$ – удельная теплоемкость азота. Азот двухатомный газ, поэтому число степеней свободы $i = 5$.

Плотность газа $\rho = \frac{m}{V}$. Выразим ρ из уравнения Клапейрона - Менделеева: $PV = \frac{m}{M} RT$, откуда следует, что $\rho = \frac{PV}{RT}$.

Средняя длина свободного пробега молекул определяется выражением $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$.

Концентрацию молекул n найдём из уравнения состояния $p = nkT$, откуда $n = \frac{P}{kT}$.

Среднюю арифметическую скорость молекул азота найдём по формуле

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Подставляя в первую формулу, получим

$$\chi = \frac{1}{3}\frac{i}{2}\frac{R}{M}\frac{\rho M}{RT}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{i}{3}\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}} =$$

$$= \frac{5}{3}\frac{1{,}38\cdot 10^{-23}}{3{,}14\cdot\left(3{,}8\cdot 10^{-10}\right)^2}\sqrt{\frac{8{,}31\cdot 280}{3{,}14\cdot 28\cdot 10^{-3}}} = 8{,}25\frac{m\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$$

Ответ: $\chi = 8{,}25\ \dfrac{m\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Задача 2.21

Пространство между двумя параллельными пластинами, площадью 150 см^2 каждая, находящимися на расстоянии 5 мм друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре 17 ^{o}С, другая – при температуре 27 ^{o}С. Определить количество теплоты, прошедшее за 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным 0,36 нм.

Дано:
$M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$S = 150$ см$^2 = 5\cdot 10^{-3}$ м
$t_1 = 17^{o}$ С т
$t_2 = 27^{o}$ С
$t = 5$ мин
$T = 273$ К
$d = 0{,}36$нм $= 3{,}6\cdot 10^{-10}$м

Q - ?

Решение

Количество теплоты, прошедшее за время t от одной пластины к другой определяется по формуле

$$Q = \left|\chi\frac{\Delta T}{\Delta x}\right| ST$$

где $\Delta T = t_2^{\circ} - t_1^{\circ}$, $\chi = \dfrac{i}{3}\dfrac{k}{\pi d^2}\sqrt{\dfrac{RT}{\pi M}}$

(см. задачу 2.20).

Подставляя ΔT и χ, получим

$$Q = \frac{i}{3}\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}\frac{(t_2 - t_1)}{\Delta x} ST =$$

$$= \frac{5 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}{3 \cdot 3{,}14\left(3{,}6 \cdot 10^{-10}\right)^2} \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 273}{3{,}14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} \frac{\left(27^\circ - 17^\circ\right)}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 300 =$$

$$= 76{,}4 \text{ Дж}.$$

Ответ: Q = 76,4 Дж.

Задача 2.22

Определить массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 50 см^2 за 20 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке равен 1 кг/м^4. Температура азота 290 К, а средняя длина свободного пробега его молекул равна 1 мкм.

Дано:

S = 50 см^2 = 5·10^{-3} м^3

t = 20 с

M = 28·10^{-3} кг/моль

$\frac{d\rho}{dx} = 1$ кг/м^4

T= 290 К

λ = 1 мкм = 10^{-6} м

m - ?

Решение

Масса вещества, прошедшего вследствие диффузии через площадку S за время t, определяется выражением

$$m = \left| D \frac{d\rho}{dx} St \right|$$

где D – коэффициент диффузии;

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda, \quad \text{где } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Подставляя, получим

$$m = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \lambda \cdot \frac{d\rho}{dx} St = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 290}{3{,}14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 =$$

=1,56 · 10^{-5} кг = 15,6 мг.

Ответ: m = 15,6 мг.

Задача 2.23

Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянных объеме (c_V) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p их смеси. Массовые доли газов соответственно равны w_1 = 0,8 и w_2 = 0,2.

Решение

Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются формулами

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \qquad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

Для неона (одноатомный газ) $i_1 = 3$, $M_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставив в формулы значения i_1, M_1 и R и произведя вычисления, найдем

$$c_{V_1} = 624 \text{ Дж/(кг·К)}; \quad c_{p_1} = 1{,}04 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Для водорода $i_2 = 5$, $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Вычисления дают следующие значения удельных теплоемкостей водорода:

$$c_{V_2} = 10{,}4 \ кДж/(кг \cdot К); \ c_{p_2} = 14{,}6 \ кДж/(кг \cdot К).$$

Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме найдем из следующих рассуждений. Теплоту, необходимую для нагревания смеси на ΔT, выразим двумя соотношениями:

$$Q = c_V(m_1+m_2)\Delta T,$$

где c_V – удельная теплоемкость смеси, m_1 – масса неона, m_2 – масса водорода, и

$$Q = (c_{V_1} m_1 + c_{V_2} m_2)\Delta T,$$

где c_{V_1} и c_{V_2} - удельные теплоёмкости неона и водорода соответственно.

Отсюда найдем

$$c_v(m_1 + m_2) = c_{V_1} m_1 + c_{V_2} m_2,$$

и $$c_V = c_{V_1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{V_2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Отношения $w_1 = m_1/(m_1+m_2)$ и $w_2 = m_2+(m_1+m_2)$ выражают массовые доли соответственно неона и водорода. С учетом этих обозначений последняя формула примет вид

$$c_V = c_{V_1} w_1 + c_{V_2} w_2.$$

Подставив в эту формулу числовые значения величин, найдем

$$c_V = 2{,}58 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Рассуждая таким же образом, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении:

$$c_p = c_{p_1} w_1 + c_{p_2} w_2 .$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$c_p = 3{,}73 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Задача 2.24

Определить количество теплоты, поглощаемой водородом массой m = 0,2 кг при нагревании его от температуры $t_1 = 0^\circ$ С до температуры $t_2 = 100^\circ$ С при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Решение

Количество теплоты Q, поглощаемое газом, при изобарном нагревании, определяется по формуле

$$Q = mc_p\Delta T,$$

где m – масса нагреваемого газа; c_p – его удельная теплоемкость при постоянном давлении; ΔT – изменение температуры газа.

Как известно, $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}$. Подставив это выражение c_p в формулу, получим $Q = m\frac{i+2}{2}\frac{R}{M}\Delta T$.

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$Q = 291 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия выражается формулой $U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT$, следовательно, изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T .$$

После подстановки в эту формулу числовых значений величин и вычислений получим

$$\Delta U = 208 \text{ кДж}.$$

Работу расширения газа определим по формуле, выражающей первое начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$, откуда

$$A = Q - \Delta U.$$

Подставив значения Q и ΔU, найдём $A = 83$ кДж.

Задача 2.25

ν молей идеального газа нагреваются так, что его температура изменяется от T_1 до T_2 прямо пропорционально квадрату давления газа p. Определить совершённую при этом работу?

Решение:

Введём коэффициент пропорциональности k. Тогда:

$$T_1 = kp_1^2 \quad \text{и} \quad T_2 = kp_2^2.$$

Воспользуемся уравнением Клапейрона:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}; \; \frac{P_1V_1}{kp_1^2} = \frac{P_2V_2}{kp_2^2} \;=>\; \frac{V_1}{P_1} = \frac{V_2}{P_2}.$$

Следовательно, объём, занимаемый газом прямо пропорционален давлению. Изобразим процесс перехода газа из состояния 1 в 2 в координатах P-V (рис. 2.6).

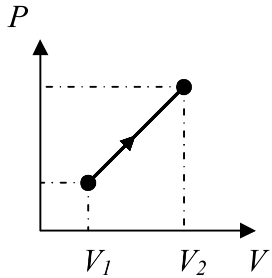


Рис. 2.6

Работа на рис. 2.6 численно равна площади трапеции

$$A = \frac{P_1 + P_2}{2}(V_2 + V_1).$$

Воспользуемся уравнением Клапейрона - Менделеева для состояний 1 и 2

$$P_1V_1 = \nu RT_1 \quad \text{и} \quad P_2V_2 = \nu RT_2.$$

Учитываем $P_1V_2 = P_2V_1$, тогда

$$A = \frac{P_1V_2 + P_2V_2 - P_1V_1 - P_2V_1}{2} = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{2} = \frac{\nu RT_2 - \nu RT_1}{2} =$$

$$= 0{,}5\nu R(T_2 - T_1).$$

Ответ: $0{,}5\nu R(T_2 - T_1)$.

Задача 2.26

Кислород нагревают от t_1 = 50 °C до t_2 = 60 °C. Масса кислорода m = 160 г. Найти количество поглощенной теплоты и изменение внутренней энергии при изохорном и изобарном процессах. Начальное давление близко к атмосферному.

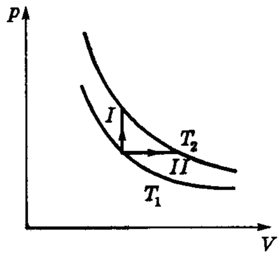


Рис. 2.7

Анализ

При давлении, близком к атмосферному, газ можно считать идеальным. Графики изохорного *I* и изобарного *II* процессов (рис. 2.7) расположены между одними и теми же изотермами, следовательно, изменение внутренней энергии газа должно быть одинаковым:

$$\Delta U_V = \Delta U_P = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1) \ ,$$

где i = 5 – число степеней свободы (молекула кислорода двухатомная). Поскольку оба процесса характеризуются постоянными теплоемкостями, искомое количество теплоты может быть найдено по формуле $Q = \frac{m}{M}C(T_2 - T_1)$, где C – молярная теплоемкость, зависящая от характера процесса.

При изохорном процессе газ не совершает работы, поэтому количество поглощенной теплоты будет меньше:

$$Q_V < Q_P \, .$$

Исходя из молекулярно-кинетической теории, это можно объяснить тем, что при изобарном нагревании газ расширяется и молекулы его, ударяясь о движущийся поршень, отскакивают от него с меньшей, чем до удара, скоростью, отдавая часть своей кинетической энергии поршню. На восстановление энергии молекул и требуется дополнительное количество теплоты.

Решение

Подставим числовые значения и получим $\Delta U_V = \Delta U_P = 1040$ Дж. При изохорном процессе

$$Q_V = \Delta U_V = 1040 \text{ Дж.}$$

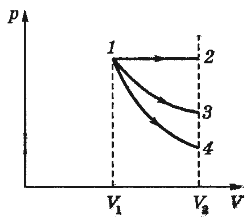
При изобарном процессе, учитывая, что молярная теплоемкость $C_P = (i+2)R/2$, получаем

$$Q_r = \frac{m}{M}\frac{i+2}{2}R(T_2 - T_1) = 1450 \text{ Дж}$$

Очевидно, что разность $Q_P - \Delta U_P$ равна работе, совершенной газом при изобарном нагревании.

Задача 2.27

Азот, занимающий при давлении $p = 10^5$ Па объем $V_1 = 10$ л, расширяется вдвое. Найти конечное давление и работу, совершенную газом при следующих процессах: а) изобарном, б) изотермическом, в) адиабатном (рис 2.8)



Анализ

Заданное начальное давление позволяет считать газ идеальным. Рассмотрим графики всех процессов в координатах *p, V*.

Рис. 2.8

Очевидно, что работа будет тем больше, чем выше пойдет кривая, т.е. чем больше давление в течение процесса. Исходя из молекулярно-кинетической теории, давление определяется силой ударов молекул о стенки и частотой ударов. Согласно основному уравнению кинетической теории,

$$p = \frac{3}{2} n \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}.$$

Это уравнение есть следствие того, что сила, действующая на стенку сосуда, определяется (по абсолютному значению) числом ударов, испытываемых стенкой за некоторое время, и силой этих ударов.

При изобарном 1 – 2 процессе расширение происходит при непрерывном увеличении температуры, что соответствует увеличению силы отдельных ударов, испытываемых стенками сосуда. Частота ударов уменьшается вследствие увеличения объема так, что давление остается постоянным.

При изотермическом 1 – 3 процессе кинетическая энергия молекул не изменяется и давление уменьшается только в результате уменьшения числа ударов, испытываемых стенкой.

При адиабатном 1 – 4 процессе кинетическая энергия молекул, отдаваемая движущемуся поршню, не пополняется извне. Поэтому адиабатное расширение происходит при более резком, чем при постоянной температуре, падении давления (уменьшается и частота ударов, и сила ударов).

Решение

Работа газа при изобарном процессе:

$$A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = 1000 \text{ Дж}.$$

При изотермическом процессе конечное давление:

$$p_3 = p_1 V_1 / V_2 = 0{,}5 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Работа газа:

$$A_{13} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 690 \text{ Дж}.$$

При адиабатном процессе конечное давление:

$$p_4 = p_1 (V_1/V_2)^\gamma.$$

Азот – двухатомный газ, поэтому $\gamma = (i+2)/i = 1{,}4$. Тогда $p_4 = 0{,}38 \cdot 10^5$ Па.

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении, равна убыли внутренней энергии:

$$A_{14} = -\Delta U_{14} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_1 - T_4).$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева, написанного для начального и конечного состояний, получаем:

$$\frac{m}{M}RT_1 = p_1V_1, \ \frac{m}{M}RT_4 = p_4V_2.$$

Подставляя эти выражения в формулу для работы, находим: $A_{14} = \frac{i}{2}(p_1V_1 - p_4V_2) = 600$ Дж.

Задача 2.28

В баллоне вместимостью 8 л находится кислород массой m = 0,3 кг, при температуре T = 300 К. Найти, какую часть вместимости сосуда составляет собственный объем молекул газа. Определить отношение внутреннего давления p' к давлению p газа на стенки сосуда.

Решение

Для получения ответа на первый вопрос задачи необходимо найти отношение $k = V'/V$ где V' – собственный объем молекул.

Собственный объем молекул найдем, воспользовавшись постоянной b Ван-дер-Ваальса, равной учетверенному объему молекул, содержащихся в одном моле реального газа. В уравнении Ван-дер-Ваальса $(p + v^2a/V^2)(V - vb) = vRT$.

Поправка vb означает учетверенный объем молекул всего газа, т. е. $vb = 4V'$. Отсюда $V' = vb/4$, или $V' = mb/(4M)$,

где $V = m/M$ – количество вещества; M – молярная масса.

Подставив полученное значение V', найдем $k = mb/(4MV)$.

После вычисления по этой формуле получим

$$k = 0{,}91\ \%$$

Следовательно, собственный объем молекул составляет 0,91 % от объема сосуда.

Для ответа на второй вопрос задачи надо найти отношение $k_1 = p'/p$. Здесь $p' = v^2a/V^2$, или $p' = (m/M)^2a/V^2$, где a – постоянная Ван-дер-Ваальса для одного моля газа.

После вычисления найдем

$$p' = 187 \text{ кПа}.$$

Давление p, производимое газом на стенки сосуда, найдем из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{a}{V^2}.$$

После вычисления по этой формуле получим

$$p = \left[\frac{\frac{0{,}3}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 300}{8 \cdot 10^{-3} - \frac{0{,}3}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 3{,}17 \cdot 10^{-5}} - \left(\frac{0{,}3}{32 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \frac{136 \cdot 10^{-3}}{(8 \cdot 10^{-3})^2} \right] =$$

$$= 2{,}84 \text{ МПа}.$$

Подставив в выражение (3) значения p и p' и произведя вычисления, найдем $k_1 = 6{,}6$ %.

Следовательно, давление газа, обусловленное силами притяжения молекул, составляет 6,6 % давления газа на стенки сосуда.

Задача 2.29

В цилиндре под поршнем находится хлор, массой $m = 20$ г. Определить изменение ΔU внутренней энергии хлора при изотермическом расширении его от $V_1 = 200$ см^3 до $V_2 = 50$ см^3.

Решение

Внутренняя энергия реального (ва-дер-ваальсового) газа определяется выражением

$$U = \nu(C_V T - a/V_m).$$

Выразив молярный объем V_m через объем V и количество вещества ν($V_m = V/\nu$) и учтя, что $\nu = m/M$, получим

$$U = \frac{m}{M}(C_V T - \frac{ma}{MV}).$$

Изменение внутренней энергии в результате изотермического расширения найдем как разность двух значений внутренней энергии при объемах V_1 и V_2:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m^2 a(V_2 - V_1)}{M^2 V_1 V_2}.$$

Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{(20\cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}650(5-2)\cdot 10^{-4}}{(71\cdot 10^{-3})\cdot 2\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{-4}} \text{ Дж} = 154 \text{ Дж}.$$

Отметим, что для идеального газа такое изменение внутренней энергии соответствовало нагреванию на 26,3 К.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.1. Определить относительную молекулярную массу M_r: 1) воды; 2) углекислого газа CO_2; 3) поваренной соли NaCl.

Ответ. 1) 18; 2) 44; 3) 58,4.

Задача 3.2. Найти молярную массу M серной кислоты H_2SO_4.

Ответ. $M = M_r k = 98$ кг/моль (M_r - относительная молекулярная масса; $k = 10^{-3}$ кг/моль).

Задача 3.3. Определить массу m_1 молекулы: 1) углекислого газа; 2) поваренной соли.

Ответ. $m_1 = M_r k / N_A$; 1) $7{,}31\cdot 10^{-26}$ кг; 2) $9{,}7\cdot 10^{-26}$ кг.

Задача 3.4. Колба вместимостью $V = 0{,}5$ л содержит газ при нормальных условиях. Определить число N молекул газа, находящихся в колбе.

Ответ. $N = N_A V / V_m = 1{,}34\cdot 10^{22}$ молекул (V_m - молярный объем идеального газа при нормальных условиях; $V_m = 22{,}4\cdot 10^3$ м^3/моль).

Задача 3.5. В сосуде вместимостью $V = 5$ л находится однородный газ количеством вещества $\nu = 0{,}2$ моль. Определить, какой это газ, если его плотность $\rho = 1{,}12$ кг/м^3.

Ответ. Для определения вида газа найдем его относительную молекулярную массу: $M_r = \rho V / (k\nu) = 28$. Следовательно, данный газ – азот.

Задача 3.6. Оболочка воздушного шара вместимостью $V = 800$ м^3 целиком заполнена водородом при температуре

$T_1 = 273$ К. На сколько изменится подъемная сила шара при повышении температуры до $T_2 = 293$ К? Считать вместимость V оболочки неизменной и внешнее давление нормальным. В нижней части оболочки имеется отверстие, через которое водород может выходить в окружающее пространство.

Ответ. $\Delta F = (\rho_{02} - \rho_{01}) gV \dfrac{T_2 - T_1}{T_2} = 642$ Н.

Задача 3.7. Газовая смесь, состоящая из кислорода и азота, находится в баллоне под давлением $p = 1$ МПа. Определить парциальные давления p_1 кислорода и p_2 азота, если массовая доля ω_1 кислорода в смеси равна 0,2.

Ответ. $p_1 = \dfrac{\omega_1 M_2 p}{(1-\omega_1)M_1 + \omega_1 M_2} = 0{,}18$ МПа;

$$p_2 = \frac{(1-\omega_1)M_1 p}{(1-\omega_1)M_1 - \omega_1 M_2} = 0{,}82 \text{ МПа.}$$

Задача 3.8. Баллон вместимостью $V = 5$ л содержит смесь гелия и водорода при давлении $p = 600$ кПа. Масса m смеси равна 4 г, массовая доля ω_1 гелия равна 0,6. Определить температуру T смеси.

Ответ. $T = \dfrac{pV}{((\omega_1/M_1) + ((1-\omega_1)/M_2))mR} = 259$ К.

Задача 3.9. Газ массой $m = 58{,}5$ г находится в сосуде вместимостью $V = 5$ л. Концентрация n молекул равна $2{,}2 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$. Какой это газ?

Ответ. $M_r = mN_A/(knV) = 32$ ($k = 10^{-3}$ кг/моль). Следовательно, газ – кислород.

Задача 3.10. Давление p газа равно 1 мПа, концентрация n его молекул равна 10^{10} см$^{-3}$. Определить: 1) температуру T газа; 2) среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle$ поступательного движения молекул газа.

Ответ. 1) $T = 7{,}25$ кК; 2) $\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle = 1{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Задача 3.11. Для получения высокого вакуума в стеклянном сосуде необходимо прогревать его при откачке с целью удалить адсорбированные газы. Определить, на сколько повысится давление в сферическом сосуде радиусом $R = 10$ см, если все адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд. Слой молекул на стенках считать мономолекулярным, сечение δ одной молекулы равно 10^{-15} см^2. Температура T, при которой производится откачка, равна 600 К.

Ответ. $\Delta p = 3kT/(\delta R) = 2{,}48$ Па.

Задача 3.12. При какой температуре T средняя квадратичная скорость атомов гелия станет равной второй космической скорости $v_2 = 11{,}2$ км/с?

Ответ. 20,1 кК.

Задача 3.13. Определить среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул газа, если их средняя квадратичная скорость $\langle v_{\hat{E}\hat{A}} \rangle$ = 1 км/с.

Ответ. 0,92 км/с.

Задача 3.14. Определить наиболее вероятную скорость $v_{\hat{A}}$ молекул водорода при температуре $T = 400$ К.

Ответ. 1,82 км/с.

Задача 3.15. Определить силу F, действующую на частицу, находящуюся во внешнем однородном поле силы тяжести, если отношение n_1/n_2 концентраций частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на $\Delta z = 1$ м, равно е. Температуру T считать везде одинаковой и равной 300 К.

Ответ. $4{,}14 \cdot 10^{-21}$ Н.

Задача 3.16. Найти изменение высоты Δh, соответствующее изменению давления на $\Delta p = 100$ Па, в двух случаях: 1) вблизи поверхности Земли, где температура $T_1 = 290$ К, давление $p_1 = 100$ кПа; 2) на некоторой высоте, где $T_2 = 220$ К, давление $p_2 = 25$ кПа.

Ответ. 1) 8,75 м; 2) 25,8 м.

Задача 3.17. Ротор центрифуги вращается с угловой скоростью ω. Использую функцию распределения Больцмана, установить распределение концентрации n частиц массой m, находящихся в роторе центрифуги, как функцию расстояния r от оси вращения.

Ответ. $n = n_0 e^{m\omega^2 r^2/(2kT)}$ (n_0 – концентрация частиц на оси ротора).

Задача 3.18. Ротор центрифуги, заполненный радоном, вращается с частотой $n = 50$ с$^{-1}$. Радиус a ротора равен 0,5 м. Определить давление p газа на стенки ротора, если в его центре давление p_0 равно нормальному атмосферному. Температуру T по всему объему считать одинаковой и равной 300 К.

Ответ. 304 кПа.

Задача 3.19. Зная функцию распределения молекул по скоростям, вывести формулу наиболее вероятной скорости $v_{\hat{A}}$.

Ответ. $v_{\hat{A}} = \sqrt{2kT/m}$.

Задача 3.20. Зная функцию распределения молекул по скоростям, определить среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул.

Ответ. $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m)}$.

Задача 3.21. По функции распределения молекул по скоростям определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\hat{E}\hat{A}} \rangle$.

Ответ. $v_{KB} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m}$.

Задача 3.22. Определить, во сколько раз средняя кинетическая энергия $\langle \varepsilon \rangle$ поступательного движения молекул идеального газа отличается от наиболее вероятного значения $\varepsilon_{\hat{A}}$ кинетической энергии поступательного движения при этой же температуре.

Ответ. В 3 раза.

Задача 3.23. Средняя длина свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить коэффициент диффузии D гелия.

Ответ. $7{,}23 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Задача 3.24. Найти динамическую вязкость η гелия при нормальных условиях, если диффузия D при тех же условиях равна $1{,}06 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.

Ответ. 19 мкПа·с.

Задача 3.25. Пространство между большими параллельными пластинами, расстояние d между которыми равно 5 мм, заполнено гелием. Температура T_1 одной пластины поддерживается равной 290 К, другой -$T_2 = 310$ К. Вычислить плотность теплового потока $|q|$. Расчеты выполнить для двух случаев, когда давление p гелия равно: 1) 0,1 МПа; 2) 1 мПа.

Ответ. 196 Вт/м^2; 2) 35 Вт/м^2.

Задача 3.26. Смесь газов состоит из хлора и криптона, взятых при одинаковых условиях и в равных объемах. Определить удельную теплоемкость c_p смеси.

Ответ. 417 Дж/(кг·К).

Задача 3.27. Какая работа A совершается при изометрическом расширении водорода массой $m = 5$ г, взятого при температуре $T = 290$ К, если объем газа увеличить в три раза?

Ответ. 6,62 кДж.

Задача 3.28. Азот массой $m = 2$ г, изменивший температуру $T_1 = 300$ К, был адиабатно сжат так, что его объем уменьшился в $n = 10$ раз. Определить конечную температуру T_2 газа и работу A сжатия.

Ответ. $T_2 = T_1 n^{\nu - 1} = 754$ К; $A = \dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}R(T_2 - T_1) = 674$ Дж.

Задача 3.29. Кислород при неизменном давлении $p = 80$ кПа нагревается. Его объем увеличивается от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии кислорода; 2) работу A, совершенную им при расширении; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

Ответ. 1) 0,4 МДж; 2) 160 кДж; 3) 560 к Дж.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Чертов А. Г. Задачник по физике [Текст] / А. Г. Чертов, А. А. Воробьёв. – М.: Физматлит, 2009. – 640 с.
2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики [Текст] / В. С. Волькенштейн. – СПб.: Спец. Лит., 2002. – 327 с.
3. Новодворская Е. М. Сборник задач по физике для втузов [Текст] / Е. М. Новодворская, Э. М. Димитриева. – М.: ОНИКС 21 век «Мир и образование», 2003. – 368 с.
4. Трофимова Г. И. Сборник задач по курсу физики с решениями [Текст] / Г. И. Трофимова, З. Г. Павлова. – М.: Высш. шк., 2004. – 591 с.
5. Касаткина И. Л. Репетитор по физике. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика [Текст] / И. Л. Касаткина. – Ростов н/Д: Феникс, 2003. - 832 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине «Физика»
для студентов всех технических направлений
и специальностей очной формы обучения

Составители:
Агапитова Наталья Валерьевна
Бугаков Александр Викторович
Шведов Евгений Васильевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 12.12.2019.
Уч.-изд. л. 3,0.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14