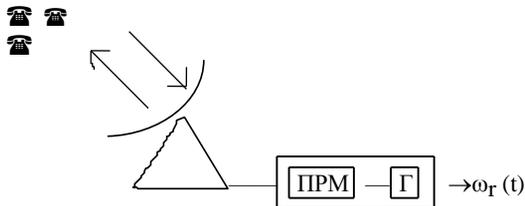


$PA = P + A$  ← делается само по себе без помощи человека  
 ↑  
 связано с излучениями

$$U_c(t) = U_c(t) \cos(\omega_c t + \psi_c)$$

$$\underbrace{U(t)}_{\omega_c(t) = \omega_{c0} + \omega_{c0}} \underbrace{\psi_c(t)}_{\text{Error!}}$$

$$\omega_r(t) = \omega_c(t)$$



параметры слежения:

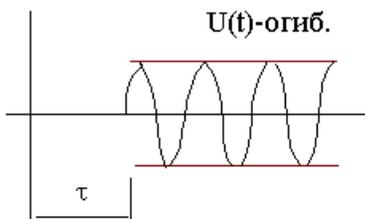
$\omega_c$  — ЧАП (частотная автоподстройка)

$\psi_c$  — ФАП

$\overline{U(t)}$  — АРУ

$\tau$  — СВПИ с-ма слежения врем. положения импульса

$\tau$  — АСД с-ма авт. Слежения за дальностью

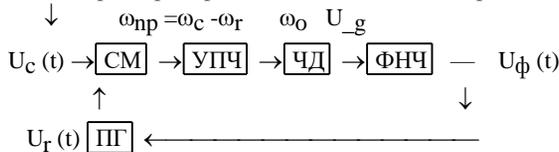


$\tau = \text{Error!}$

$U_c(t)$  — огибающая

Слежение как управление.

Рассмотрим пример слежения за частотой принимаемого сигнала.



ЧД — частотный дискриминатор (детектор)

$\omega_0$  — опорная частота

$\omega_{np} = 465 \text{ кГц}$

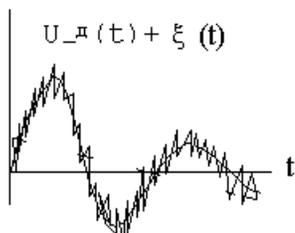
$U_r(t)$  — сигнал местного гетеродина

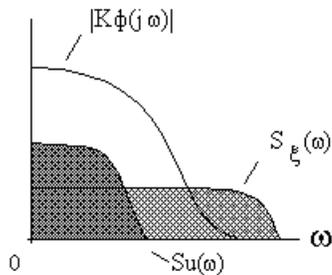
Смеситель — нелинейное устройство, которое переносит  $\omega_c$  в другую область.

Генератор малой мощности — гетеродин.

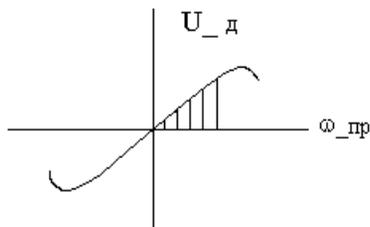
Если  $\omega_0$  и  $\omega_{np}$  отличаются, то на выходе ЧД будет  $U_g$  ( $U_{\text{пост. детектора}}$ , если  $\omega_{np}$  колеблется, то колеблется её отклонение от  $\omega_0$  и  $U_g$  меняется. Частота  $U_g$  мала, т.к. в данном случае она связана с движением самолета.

Чтобы подавить шумовые флуктуации, применим ФПЧ.





Дискриминационная характеристика ЧД .



Если  $\omega_c$  из-за эфф. Доплера  $\uparrow$  на  $\Delta\omega_c$ , то и  $\omega_r \uparrow$  на  $\Delta\omega_r$   $\Delta\omega_c - \Delta\omega_r = 0$  и  $\omega_{пр} = \omega_c - \omega_r = \text{const}$

С-му слежения можно построить как с-му управления.

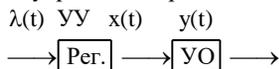
$U_\phi(t)$  управляет ПГ. В избират. х-р в ПГ включается эл-ки управляемая емкость—варикап, емкость и сл-но,  $\omega_r$

х-ра изменяется согласно  $U_\phi(t)$

УПЧ можно настроить на опред. ч-ту( $\omega_{пр}$ )

Следующая схема представляет собой частный случай с-мы автоматич. упр. (САУ). Их изучает Теория АУ

С-ма управления представляет собой соединение 2-х блоков: управляемый объект и упр. устр-во.



$\lambda(t)$ —задающее воздействие .

!  $\boxed{y(t)=\lambda(t)}$  —цель СУ

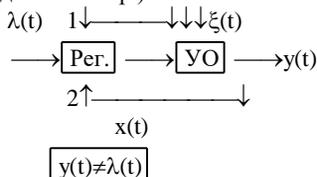
1 Если  $\lambda(t)$  известно ,то СУ н.з. САР (с-ма автом. регулирования)

2 Если  $\lambda = \text{const}$  ,то с-ма наз-ся с-мой стабилизации

3 Если  $\lambda(t)$  вообще неизвестно ,то мы получаем т.н. следающую с-му.

Принципы управления.

В реальных условиях на упр-мый объект действует возмущающее воздействие  $\xi(t)$  (напр-р ,самопроизв. уход ч-ты генер.)



З-ча с-мы —выдерживать рав-во.

Этого можно добиться 2-мя путями:

1  $x(t) = F(\lambda(t), \xi(t))$ —Понсея-Чиколаева

принцип упр. по возмущению

2  $x = F(\lambda(t) - y(t))$  —Ползунова-Уатта

принцип упр. по рассогласованию(ошибке)

Принцип управления по возмущению (метод компенсаций)—только при изв.  $\xi(t)$ . В других случаях исп-ся принцип управления по ошибке.

## №2

Принцип управления по ошибке организовать сложнее; он начинает действовать с запаздыванием относительно возмущающего фактора; нужна ОС. Но он независим то влияния возмущающих факторов. Принцип управлен. по возмущению —когда возмущение хорошо изучено, его можно измерить ,это возмущение одно или число их мало.

## 2. Математическое описание систем РА

Это с-мы с ОС ,работающие по принципу управления по ошибке .

Мат. описание —это получение ур-ний, описывающих процессы в с-мах.

Исходные данные : 1 эл.схемы с-м и устр-в в РА

- схемы: —структурные;
- функциональные;
- принципиальные эл-кие

2) техническое описание работы устр-в.

Надо составмть по этим исх.данным структ. математ. Схему устр-ва или с-мы РА. Будем считать ,что техническая схема —это структ.схема.К исх.данным надо добавить (это—к технич.описанию):

- описание возмущающих воздействий;
- описание назначения устр-ва.

При составлении мат.описания надо сделать:

1) выбрать задающее воздействие.

- это—значение параметра устр-ва,к-рый должен поддерживаться постоянным;
- это—пар-р сигнала,за к-рым нужно следить.

2) это задающее воздействие пронаблюдать,как бы проходя вместе с сигналом через узлы функц.схемы, все var этого пар-ра надо описать математически.

3) все мат.операции надо перенести на структ.мат.схему, получатся мат.звенья, расположенные послед-но др. за др.

### 2.1 Составление математического описания системы ЧАП.

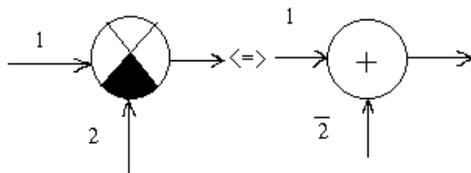
В кач-ве исходных данных примем функц. схему с-мы ЧАП и её техническое описание (см. предыдущую лекцию)

$U_c(t)$ —задающее воздействие.

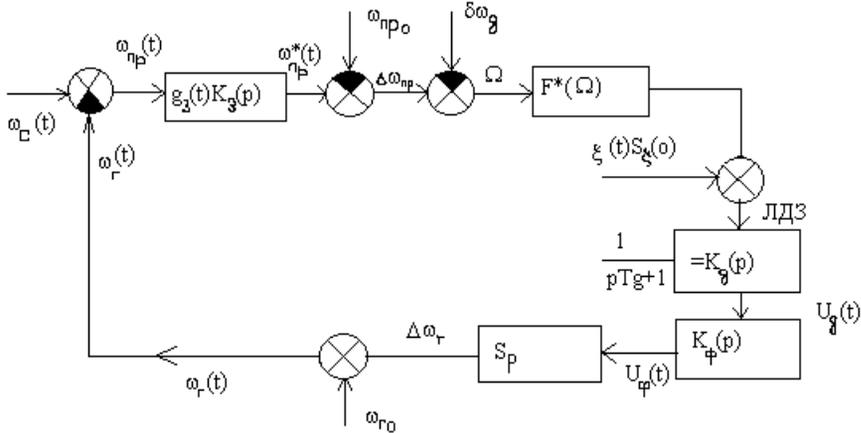
Резонансный усилитель,УРЧ никак  $U_c(t)$  не var, $\Rightarrow$  при описании мат. ожидания их можно пропустить.

1) . Рассмотрим смеситель .На его выходе :

$$U_c \cos \omega_c t * U_r \cos \omega_r t = \underbrace{U_r}_{\omega_{пр}} \cos[(\omega_c - \omega_r)t] + U_r \cos[(\omega_c + \omega_r)t]$$



Сигнал 2 умножается на -1 и складывается с сигналом 1  
Фильтр смесителя не пропускает второе слагаемое на вых.смесителя.



2) УПЧ не var  $\omega_{пр}(t)$ .

Надо учесть один фактор: задержка var  $\omega_{пр}(t)$  на вх. ,т.е. задержка сигнала  $\omega_{пр}(t)$

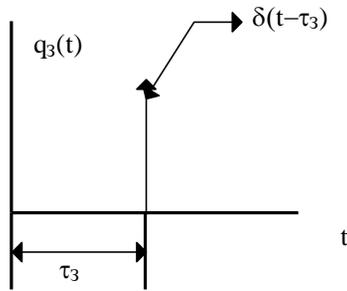
В структ. схему введем идеальное звено задержки с передаточной ф-цией  $K_3(p)$  или  $g_3(p)$

ПФ—передаточная ф-ция

ИХ—имп. хар-ка

$$\omega_{пр}(t) \rightarrow [K_3(p) q_3(p)] \rightarrow \omega_{пр}^*(t)$$

$$q_3(t) = \delta(t - \tau) \quad (3)$$



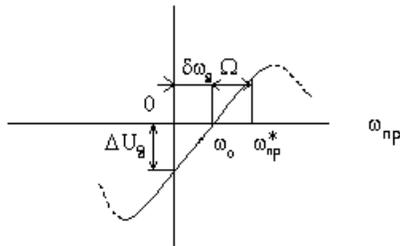
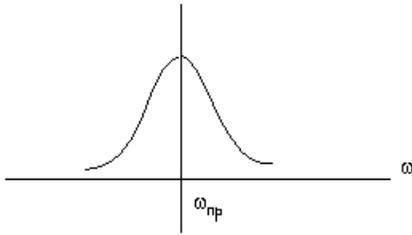
$$K_3(p) = L\{g_3(p)\} = \text{Error!} = \text{Error!} = e^{-\text{Error!}}$$

$$K_3(p) = e^{-p\tau_3} \quad \tau_3\text{-задержка сигнала в УПЧ}$$

При одинаково настроенных контурах  $\tau_3 = n \text{Error!}$

$\omega^*$  пр(т)-ч-та опр(т), задержанная на время  $\tau_3$   
Затем сигнал идет на ЧД.

3



$\delta\omega_d, \Delta U_d$  — частотный дрейф нуля

$\omega_0$  — переходная ч-та дискриминатора.

Опишем работу дискриминатора статич. дискрим. х-кой:

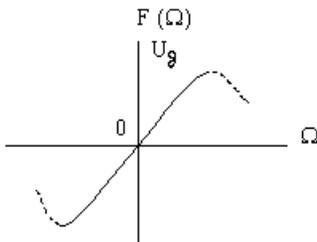
— завис-ть пост. напряж. на вых. дискриминатора от расстройки ч-ты воздействующего воздействия сигнала от перех. ч-ты дискриминатора.

$\Omega$  — расстройка.

Надо учесть инерц. св-ва дискриминатора : поставить инерц. звено с коэф. передачи :  $K_d(p)$

Это линейное динамическое звено (ЛДЗ).

Статистическая дискриминационная характеристика:



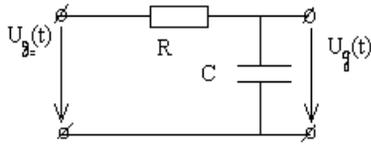
Линейная цепь — вх. и вых. вел-ны связаны лин. дифф. ур-ниями.

В ЛДЗ:

$$U_d(t) = K_d(p)\{U_d\}$$

где  $K_d(p)$  — дифф. оператор, соответствующий перед. Ф-ции этого звена.

В частном случае, если :



1)  $K(p) = \frac{1}{1 + pT_d}$

В (1) понимается  $p = \sigma + j\omega$ , позволяющее перейти к неявной записи дифф. ур-ния, связывающего вх. и вых. ЛДЗ:

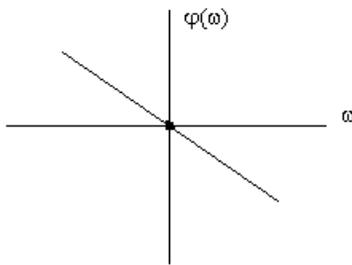
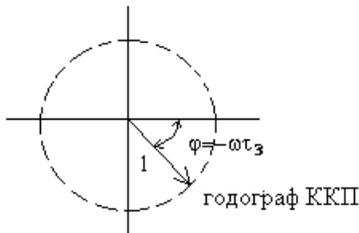
$$U_{г}(t) = U_{в}(t) - T_d \dot{U}_{г}(t)$$

**Error!**

N% 3

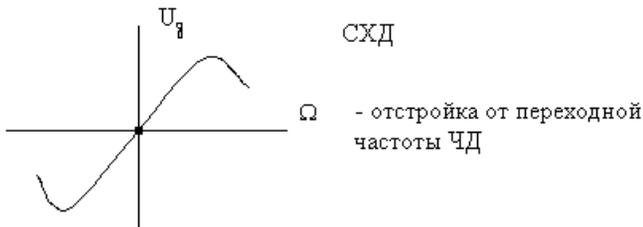
$$K_3(p) = e^{-pT_d}$$

В этом описании звена задержки  $p$  представляет собой произвольную компл. ч-ту  $p = \sigma + j\omega$  действующего сигнала, если этот сигнал произвольной формы. Если сигнал гармонич., то  $p = j\omega$  и тогда ПФ  $\rightarrow$  компл. коэфф. передачи  $K(j\omega) = e^{-j\omega T_d}$

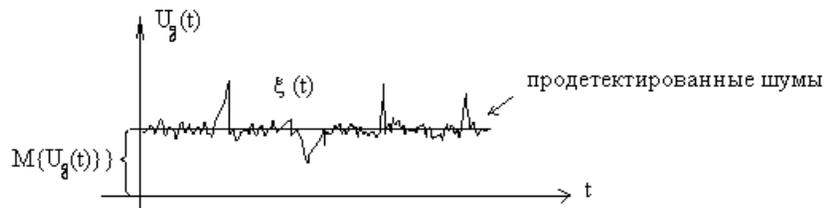


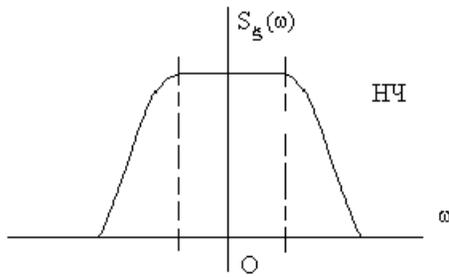
Предложим описание ЧД.

Описание ЧД при воздействии сигнала и помех.

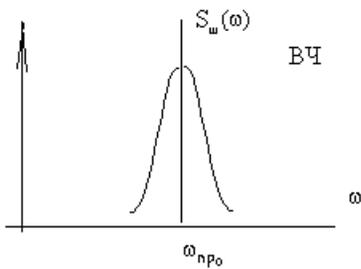
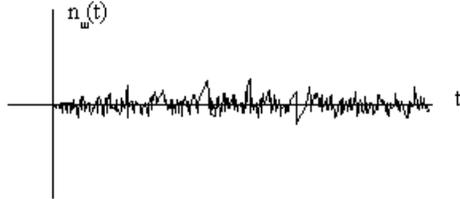


Особенность РА с-м — в них всегда завязан ПРМ, а в нём всегда шумы.



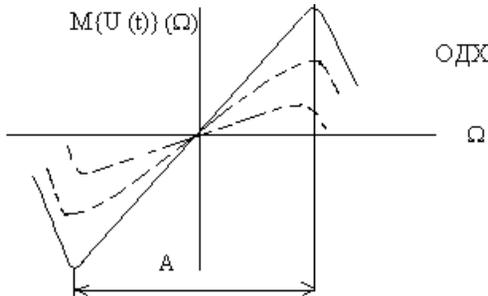


Флуктуации обусловлены собственными шумами ПРМ, которые имеют такой вид.



Чтобы описать ЧД при воздействии помех поступают след. образом :

1) Описание мат. ожидания заключается в том, что строится зависимость  $M\{U_d(t)\}$  от  $\Omega$  (обобщ. ДХ)



В зависимости от с/ш ОДХ имеет различный вид:

- 1) с/ш мало
- 2) с/ш больше

При наличии помех СДХ  $\rightarrow$  ОДХ, которая тем более плоская, чем меньше с/ш.

Крутизна ДХ  $\downarrow$  с  $\uparrow$  с/ш!

Если ввести апертуру А ДХ, то она также  $\downarrow$  при  $\uparrow$  уровня шумов.

2) В структурную схему необходимо ввести мат. описание центрированного процесса  $\xi(t)$ .  $\xi(t)$  характеризуется спектральной пл. мощности  $S_\xi(\omega)$ .

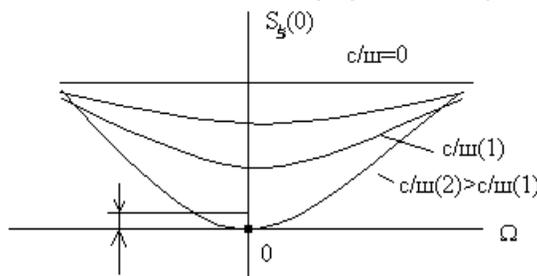
Нас интересуют НЧ-процессы, поэтому все устройства дост-но НЧ.

Вместо х-ки  $S_\xi(\omega)$  будем пользоваться  $S_\xi(0)$  – СПМ в нуле.

Как он себя ведёт в зависимости от  $\Omega$  ?

$\Omega$  – расстройка частоты полезного сигнала от переходной частоты дискриминатора.

Флуктуационная характеристика



При С/Ш = 0 ФХ = const.

Наши системы работают в основном при больших С/Ш.

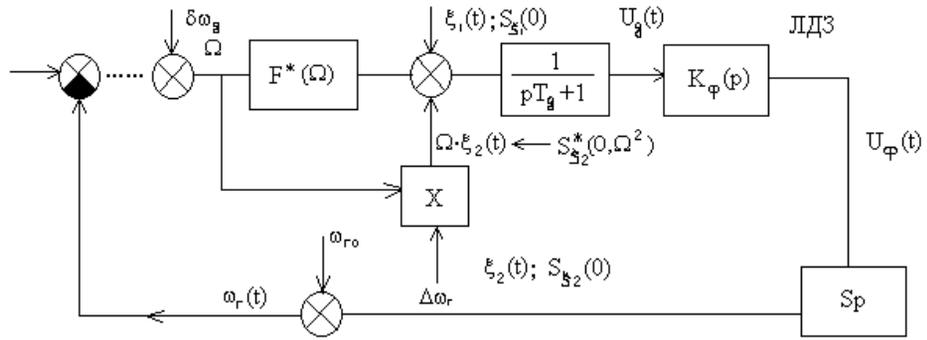
При большом уровне помех дискриминатор будет играть роль ключа ,разрывать цепь.

При большом С/Ш можно поступать двояко :

1)Если  $\Omega < A/2$  ,  $\xi(t)$  можно характеризовать  $S_{\xi}(0;\Omega=0)$ .

$\xi(t)$  в этом случае описывается условно белым шумом со сп. плотностью  $S_{\xi}(0;\Omega=0)$

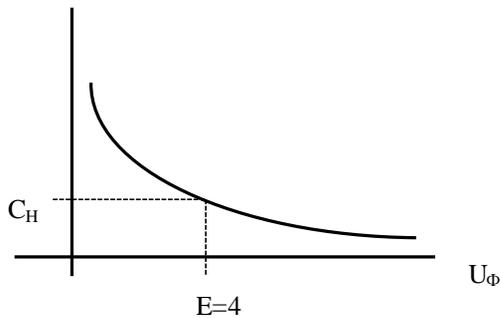
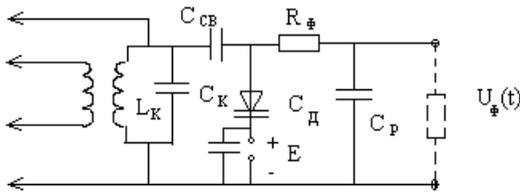
2)Если  $\Omega \approx A/2$  (большая расстройка) ,то надо аппроксимировать ФХ параболой.



4 Следующим блоком в функц. схеме является ФНЧ.

Описывается линейным звеном с  $K(p),g(t),K(j\omega)$ .

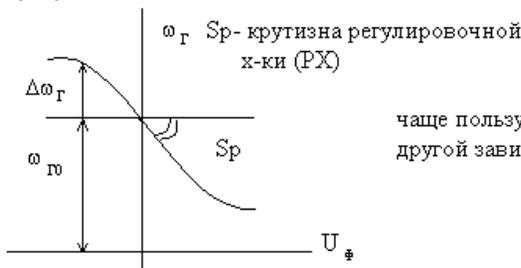
5 Напряжение  $U_{\phi}(t)$  с выхода ФНЧ передаётся в качестве управляющего сигнала на ПГ. В качестве ПГ обычно применяют LC-генератор.



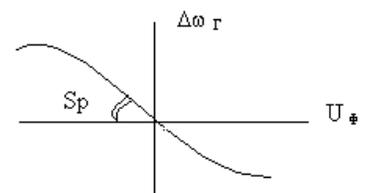
$c_d = \text{Error!}$  , где  $c_H$  – номинальная ёмкость.

$\omega_r(t) = \text{Error!}$

Регулировочная х-ка:



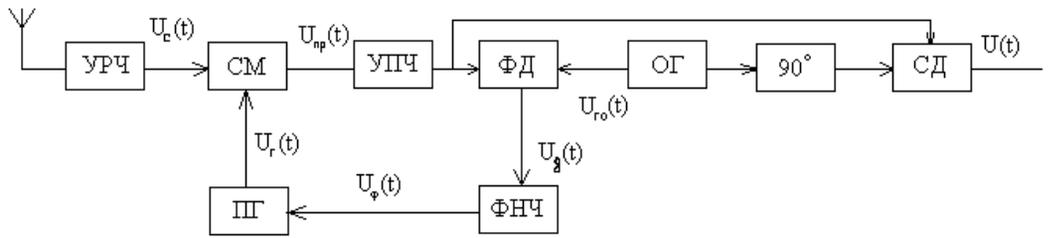
чаще пользуются другой зависимостью



Лекция № 4.

Математическое описание системы фазовой автоподстройки (ФАП).

Для получения мат. описания системы ФАП необходимо рассмотреть функциональную схему.



СД– синхронный детектор (амплитудный)

ОГ– опорный генератор

ФД– фазовый дискриминатор

Производная от фазы – частота ,меняется фаза меняется частота.

$$U_{or}(t) = U_{or} \cdot \cos(\omega_{or}t + \varphi_r)$$

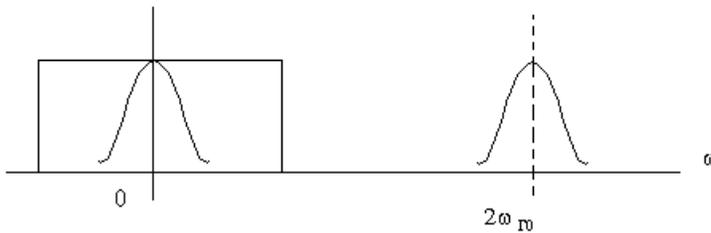
$$U_{cnp}(t) = U_c(t) \cos(\omega_{np}t + \varphi_c)$$

$$\omega_{np} = \omega_{or}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\Rightarrow U(t) = U_{or}(t) U_{cnp}(t) = U_{or} U_{cnp}(t) \cos(\varphi_c - \varphi_r)$$

~~ – удержание НЧ–части из произведения (технически ФНЧ).



При  $\varphi_c - \varphi_r = 0$   $\cos(\varphi_c - \varphi_r) = 1$  ;  $U(t) = U_{or} U_{cnp}(t)$ .

Дополнительный вазовый сдвиг  $90^\circ$  в схеме синхронного амплитудного детектора необходим для того , чтобы

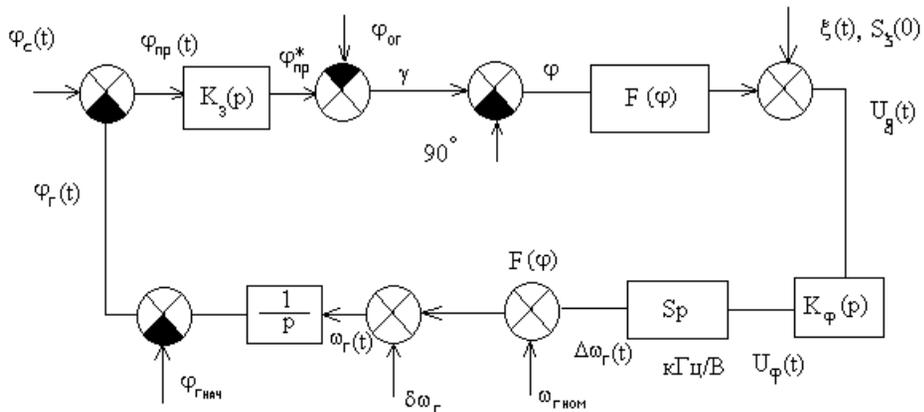
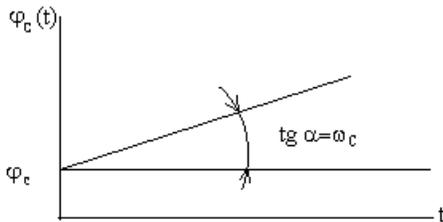
2) кольцо ФАП обеспечивает разность фаз  $U_c$  и  $U_r = 90^\circ$  ;

1) В блоке СД выдержать разность фаз  $= 0$ .

Перейдём к математическому описанию .

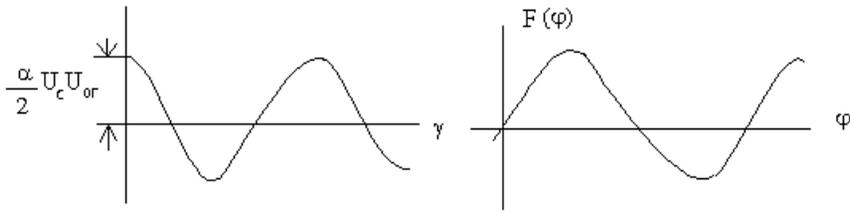
Выберем за задающее воздействие  $\varphi_c(t)$ –мгновенную полную фазу сигнала .

$$U_c(t) = U_c(t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_c) , \text{ причём } \omega_c t + \varphi_c = \varphi_c(t)$$



Работа ФД также обеспечивается операцией умножения с удержанием НЧ–части .

$$U_d = U_c U_{or} \cos(\varphi_{np}^* - \varphi_{or}) , \text{ где } \varphi_{np}^* - \varphi_{or} = \gamma$$



—статистическая дискриминационная характеристика ФД

$$F(\varphi) = U_c U_{ог} \sin(\varphi) \quad \gamma - 90^\circ = \varphi$$

$$\varphi_r(t) = \dots$$

**Error!** – звено идеального интегратора.

$$U_{вх}(t) \xrightarrow{\text{ЛДЗ}} U_{вых}(t)$$

$$U_{вых}(t) = U_{вх} \quad p = \dots$$

$$p U_{вых} = U_{вх}$$

$$\mathbf{Error!} = U_{вх}$$

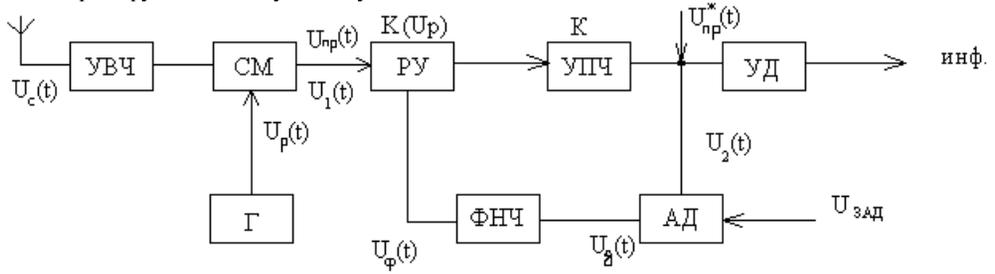
$$\int dU_{вых} = \int U_{вх} dt$$

$$U_{вых} = \int U_{вх}(t) dt$$

$$\mathbf{Error!} = \Delta\varphi_r(t)|_0^t = \Delta\varphi_r(t) - \Delta\varphi_r(0) \quad , \Delta\varphi_r(0) \rightarrow \varphi_{г \text{ нач.}}$$

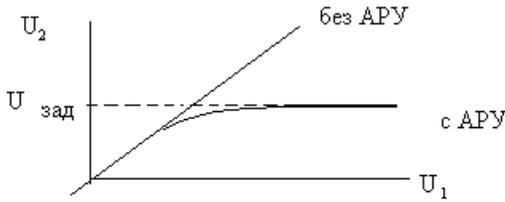
### Система АРУ.

Рассмотрим функциональную схему.



$U_1(t)$  – средневыврявленное значение сигнала (уровень на выходе РУ) ;

РУ – регулируемый усилитель.



$$K(U_p) = K_0 - S_p U_p$$

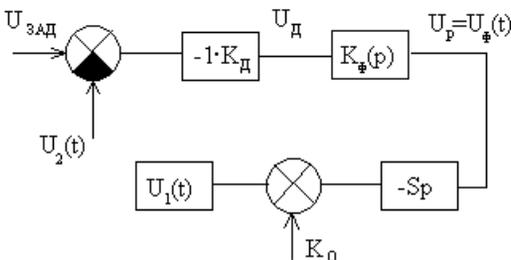
$$U_d = K_d (U_2 - U_{зад}) ; U_2 > U_{зад}$$

$$U_d(t) = K_d (U_c(t) - U_{зад}) ;$$

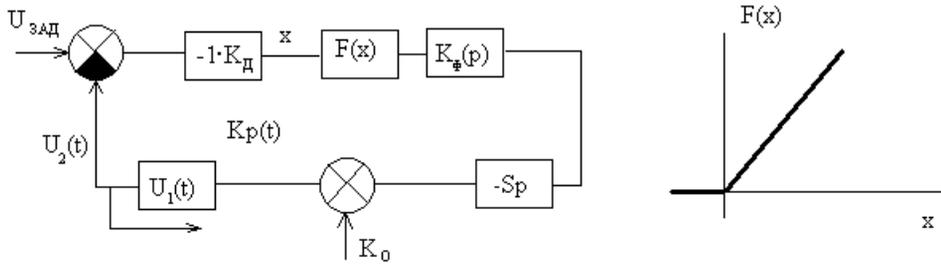
$$U_2 = K_p K_{упч} U_1$$

Перейдём к математическому описанию .

Выберем в качестве задающего воздействия  $U_{зад}$  – напряжение задержки детектора АРУ.



Если учесть, что детектор АРУ работает с задержкой по напряжению, то  $\Rightarrow$ , что  $U_d$  на выходе детектора появляется лишь тогда, когда  $U_2 > U_{зад}$ .



$U_2$  – выходная величина ;уровень сигнала на выходе УПЧ.  
 Схема получилась нелинейная(  $F(x)$  ), параметрическая(  $U_1(t)$  ).  
 Если сигналы на выходе и на входе большие ,то  $F(x)$  можно выбросить.

Фазовый дискриминатор.

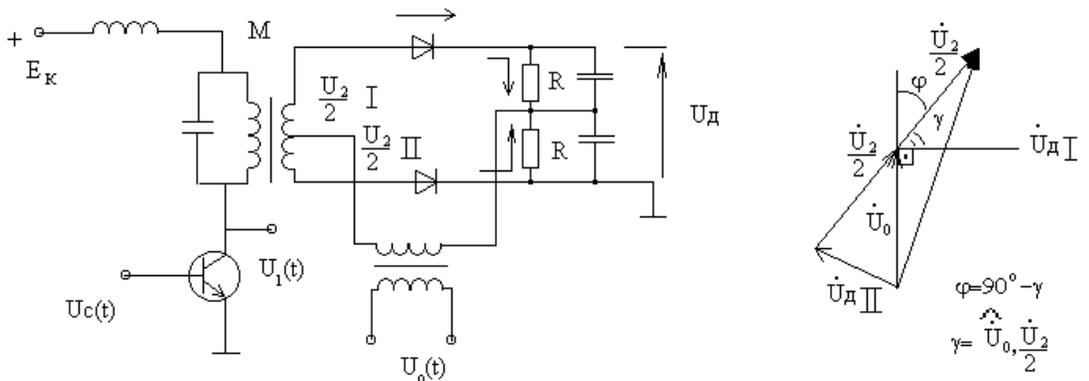
1) Есть параметрический.

ФД  $U_d = \text{Error! Error!}$  —наличие ФНЧ

$U_1(t) \rightarrow \boxed{X} \rightarrow U_d$

$U_2(t) \uparrow$

2) Рассмотрим векторный ФД :



$U_d = \text{Error! - Error!}$  ;

Принимаем:  $K_d = \cos(\theta) \approx 1$ .

Мы получили  $F(\varphi) = \text{или } = U_d(\varphi)$  – дискриминационную хар-ку.

Если считать , что  $U_2 < U_0$ , то эти корни с помощью рядов Тейлора можно записать в таком виде :

$$\boxed{U_d(\varphi) = \cos(\theta) * U_2 * \sin(\varphi)}$$
 – СДХ ФД.

Рассмотрим , как найти ОДХ , если вместе с сигналом  $U_c(t)$  поступает помеха  $n(t)$ .

$1 > \alpha$  – коэффициент пер-чи (учитывает потери).

$U_c(t)$  ФД

$n(t) \rightarrow \boxed{X} \rightarrow U_d(t)$

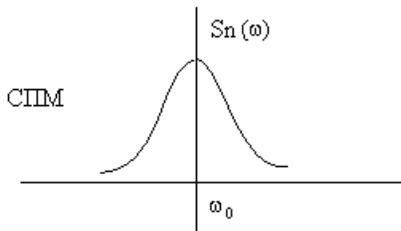
$\uparrow$

$U_d(t) = \text{Error! } \sin\varphi + \text{Error! } \cos\varphi n(t)$  удержаны НЧ-сост.

$\begin{cases} U_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) \\ U_c(t) = U_c \sin(\omega_c t + \varphi) \\ n(t) = U_n(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] \end{cases}$  – УП гауссов процесс ,  $U_n(t), \varphi_n(t)$  – случайные НЧ-процессы.

$\uparrow$

$\uparrow$



Запишем выражение ОДХ :

$$M\{U_d(t)\}(\varphi) = M\{\text{Error! } \sin\varphi + \text{Error! } \cos\varphi n(t)\} = \text{Error! } \sin\varphi .$$

Если ф-ции  $U_n(t)$  и  $\varphi_n(t)$  статистически независимы, то мат. ожидание от 2-ого слагаемого равно произведению мат. ожидания от 2-х слагаемых.

Если предполагать , что  $\varphi_n(t)$  флуктуирует равномерно от  $-\pi$  до  $+\pi$ , то  $M\{\cos\varphi_n(t)\} = 0$  .

Окончательно  $M\{U_d(t)\}(\varphi) = \text{Error!} \sin \varphi$  .  
 ОДХ ФД не зависит от помехи при данном её виде.

ФХ:  $S_\xi(0, \varphi)$

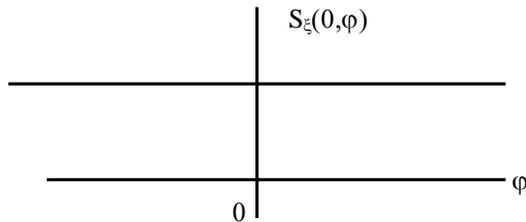
$$\xi(t) = \text{Error!} \cos \varphi_n(t) .$$

Если найти ф-цию  $R_\xi(\tau)$  , а затем использовать теорему Виннера-Хинченна , то получим выражение для СПМ  $S_\xi(\omega, \varphi)$ .

$$R_\xi(\tau) \xrightarrow{F} S_\xi(\omega, \varphi)$$

Но поскольку  $\xi(t)$  не зависит от  $\varphi$  , то и  $S_\xi(\omega)$  от  $\varphi$  зависеть не будет .

$$S_\xi(0, \varphi) = \text{Error!} S_n(\omega_0) ;$$



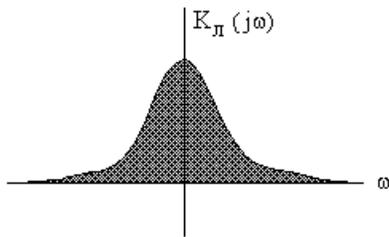
$S_n(\omega_0)$  – СПМ шума на центральном участке УПЧ.  
 Первоисточником СПМ помехи на выходе УПЧ является шум антенны. Этот шум:

$$S_{ша} = 4kTR_a , \text{ где } R_a \text{ – внутреннее сопротивление антенны.}$$

Если учесть, что шумит и Прм , то надо записать

$$S_{ш} = 4kTR_a N , \text{ где } N \text{ – коэффициент шума.}$$

$$S_n(\omega) = S_{ш} |K_n(j\omega)|^2 , \text{ где } K_n(j\omega) \text{ – коэффициент передачи части Прм.}$$

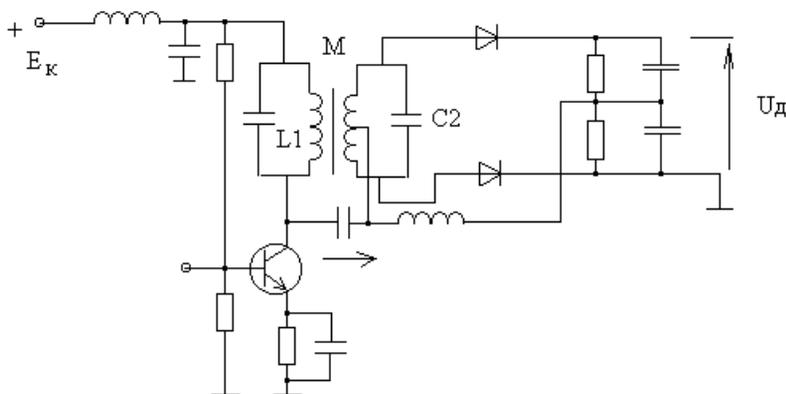


Вот так рассчитывается ФХ ФД

Лекция № 6.

### Частотный дискриминатор.

Наиболее распространены ЧД, в основе которых лежит ранее рассмотренный ФД.



$$L_1 = L_2 = L ; U_2 = \text{Error!} (-\text{Error!}) * \text{Error!} ; \beta = \text{Error!} ; \text{Error!} (-\text{Error!}) = I_2$$

$$E = -j\omega I_1 M ,$$

$$I_2 = j\omega L_2 + \text{Error!} + \Gamma_2 + \Gamma_{вх1} + jX_{вх}$$

при  $\beta \ll 1$  можно не учитывать  $\Gamma_{вх1}$  и  $jX_{вх}$  .

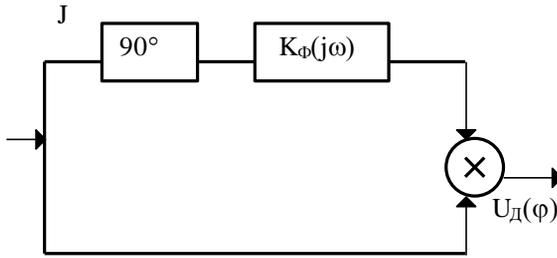
$$U_2 = \text{Error!} \text{ Error!} \text{ Error!} = \text{Error!} = \text{Error!} ,$$

$\tau_k = \text{Error!}$  – постоянная времени к-ра

$$K(j\omega) = \text{Error!} ; \xi = \text{Error!}$$

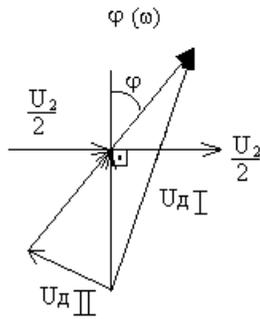
$$U_2 = \text{Error!} ; \Omega = \omega - \omega_{пр0} .$$

$K_{\phi}(j\omega) = \text{Error!}$  .  
 $\arg K_{\phi}(j\omega) = -\arctg \Omega \tau_K = \varphi(\Omega)$ .

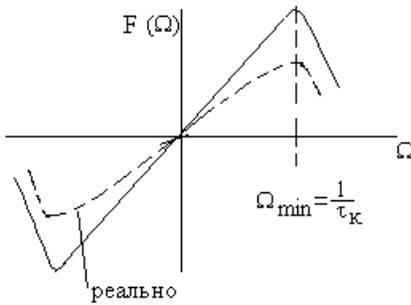


Получим дискриминационную хар-ку (СДХ) . Допустим , что

$U_c(t) = U_c \cos[(\omega_{np0} + \Omega)t + \varphi_c]$   
 $U_2(t) = U_c |K_{\phi}(j\omega)| \cos[(\omega_{np0} + \Omega)t + \varphi_c + \text{Error!} + \arg K_{\phi}(j\omega)]$

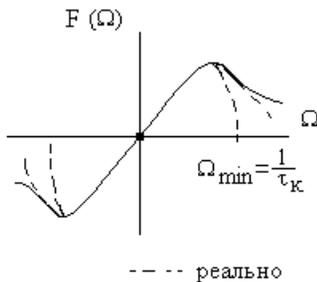


$U_d(t) = \alpha U_c(t) U_2(t) = \text{Error!} U_c^2 |K_{\phi}(j\omega)| \cos(\text{Error!} + \arg K_{\phi}(j\omega)) = \text{Error!} U_c^2 |K_{\phi}(j\omega)| \sin(\arg K_{\phi}(j\omega)) =$   
 $= -\text{Error!} U_c^2 \text{Im } K_{\phi}(j\omega)$  ;  
 $U_d = F(\Omega) = \text{Error!} U_c^2 \text{Error!}$  ;  $\text{Im } K_{\phi}(j\omega) = \text{Error!}$  ;



Запишем дискриминационную хар-ку для данного случая.

$K_{\phi}(j\Omega) = \text{Error!}$  ; (\*)  
 $U_d = F(\Omega) = \text{Error!} U_c^2 \text{Error!}$  ;  
 $\text{Im } K_{\phi}(j\Omega) = \text{Error!}$  .



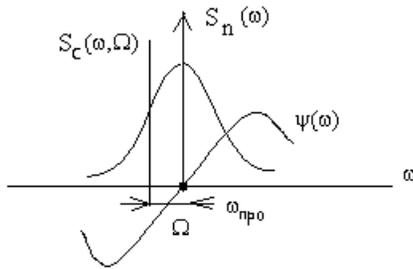
Приведённая ф-ла (\*) не учитывает уменьшение амплитуды сигнала в УПЧ при расстройке.

Если на входе ЧД вместе сигналом поступает и помеха , то ОДХ определяется таким выражением :

$F(\Omega) = \text{Error! Error!}$  (без вывода)

$S_n(\omega)$  – СПМ помехи ,  
 $S_c(\omega, \Omega)$  – СПМ сигнала.

$\Psi(\omega) = -\text{Im } K_{\phi}(j\omega)$



Если помехи нет , а сигнал является гармоническим , то  $\int$  запишется так :

$F(\Omega) = U_c^2 \Psi(\Omega)$

Если ф-ция  $\Psi(\omega)$  нечётная относительно  $\omega_{npo}$ , то будучи перемноженной с ф-цией  $S_n(\omega)$ , которая чётная , она даст нулевой  $\int$  и , сл-но, влияние помехи на ЧД проявляться не будет.

Линейные динамические звенья.

Такие звенья встречаются в стр. схеме по 2-м причинам :

1) что мы описываем функц. схему устройства ;

Пример : инерционное звено ,учитывающее инерционность при рассмотрении схем ЧАП,ФАП.

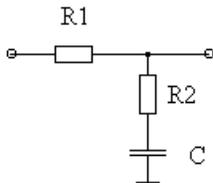
2) в структ. схему могут быть введены корректирующие звенья.

**Error!**

Используется пропорционально–интегрирующее звено :

**Error!**

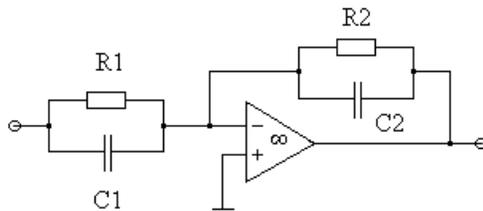
В начале корректирующего звена используют такую цепочку :



$K(p) = \frac{pT_2 + 1}{pT_1 + 1}$  , где  $T_1 = pC R_2$  ;  $T_2 = pC(R_1 + R_2)$  ;

$T_1$  всегда меньше  $T_2$  .

Корректирующее звено общего вида реализуется на ОУ.



$K(p) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{pT_2 + 1}{pT_1 + 1}$  ; минус опускаем

$K(p) = \frac{R_2}{R_1} \frac{pT_2 + 1}{pT_1 + 1}$  .

Как отсюда получить  $\int$  звено ?

Взять  $R_2 = \infty$  и  $C_1 = 0$  ,тогда  $K(p) = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{pT_1 + 1}$  ;  $K_v = \frac{R_2}{R_1 T_1}$  .

Характеристики ЛДЗ.

1) Диф. ур-ние ,но в явном виде почти никогда не используется.

2) Передаточная ф-ция (ПФ).

Чаще всего на практике встречаются элем. звенья, перед ф-ции которых нельзя разложить на множители.

$[K_v] = c^{-1}$

$\int$  звено :  $K(p) = \frac{K_v}{pT + 1}$  ;

**Error!** :  $K(p) = pT$  ;  $T$  – постоянная времени

инерционное звено :  $K(p) = \frac{K_v}{pT + 1}$  ;

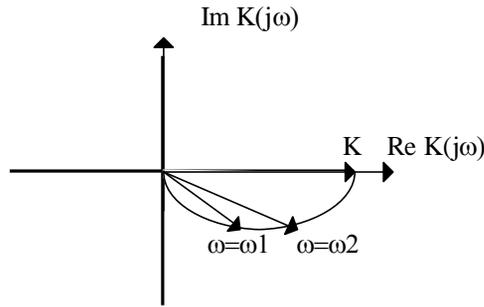
форсирующее звено :  $K(p) = K(pT + 1)$  ;

3) комплексный коэф. передачи (ККП)

ККП на плоскости изображается годографом :

$$K(j\omega) = K(p) |_{p=j\omega}$$

$$K(j\omega) = \text{Error!} .$$



Пример :

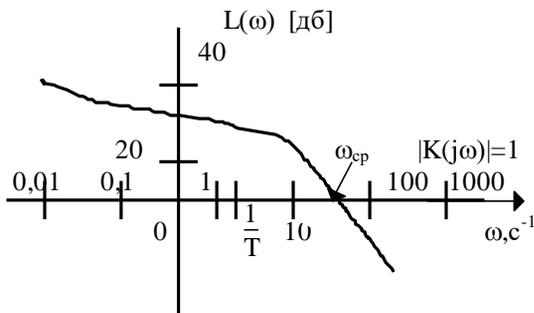
$$K(p) = K \text{Error!} ; K(j\omega) = K \text{Error!} ;$$

$$K(\omega) = |K| \text{Error!} = K \text{Error!} .$$

а) Часто используется log ЧХ (ЛЧХ)

$$L(\omega) = 20 \log |K(j\omega)|$$

Масштаб логарифмический .



Лекция № 7.

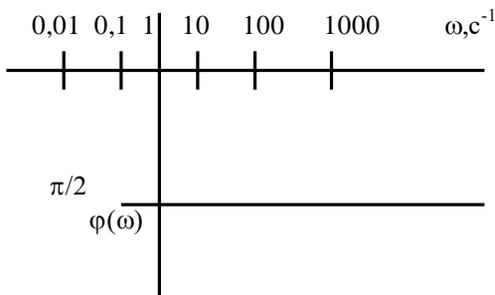
Такая хар-ка может получиться достаточно сложной. Вместо точных ЛЧХ в Радиоавтоматике используются асимптотические хар-ки – линейно-ломанные кривые, имеющие точки излома с абсциссами, равные частотам сопряжения  $\omega_c = \text{Error!}$

$T_i$  – постоянная времени звеньев, для которых строятся хар-ки.

б) Кроме амплитудной вводятся фазовые хар-ки системы Радиоавтоматики.

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$$

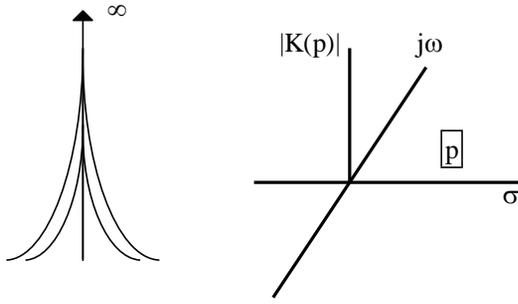
ФЧХ обычно рисуется под той же осью частот, что и АЧХ.



4) временные хар-ки звеньев :

Импульсная хар-ка (ИХ) :

$$g(t) = \text{Error! Error!} = L^{-1}\{K(p)\} .$$



Обратное преобразование Лапласа можно получить, либо используя т. вычетов, либо по таблицам.

Переходная хар-ка (ПХ):

$$h(t) = L^{-1}\{\text{Error!}\}; \text{ полюс в нуле.}$$

Примеры звеньев.

1) Интегрирующее звено.

$$K(p) = \text{Error!} = ; K_v = \text{Error!} - \text{ПФ}$$

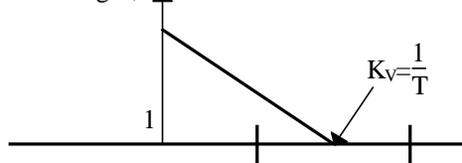
$$K(j\omega) = \text{Error!} - \text{ККП}$$

$$|K(j\omega)| = \text{Error!} = \text{Error!} - \text{АЧХ}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi/2 - \text{ФЧХ}$$

$$L(\omega) = 20 \lg K_v - 20 \lg \omega - \text{ЛЧХ}$$

$$20 \lg K_v$$



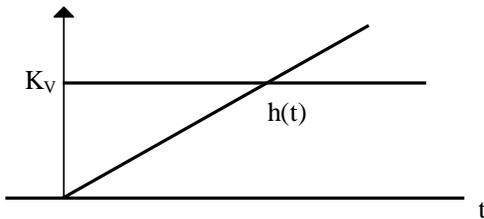
$$\text{ИХ: } g(t) = \text{Error! Error!} = \text{res}_{p \rightarrow 0} \{\text{Error!} e^{pt}\} =$$

Вычетом ф-ции относительно полюса кратности 1 называется:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \{\text{Error!} e^{pt} (p-p_1)\} = \lim_{p \rightarrow 0} \{\text{Error!} e^{pt} * p\} = \lim_{p \rightarrow 0} \{K_v\} = K_v * 1(t).$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \{\text{Error!} e^{pt} * p\} = \lim_{p \rightarrow 0} \{K_v\} = K_v * 1(t);$$

$g(t)$



$$\text{ПХ: } h(t) = \text{Error! Error!};$$

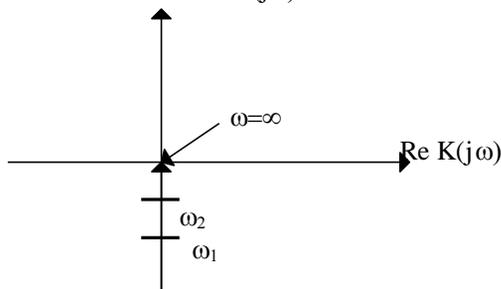
Здесь полюс 2-ого порядка в той-же точке, поэтому

$$\text{res} \{\text{Error!} e^{pt}\} = \lim_{p \rightarrow 0} \{\text{Error!} e^{pt} (p-p_1)^2\}'_p = K_v * t.$$

Изобразим годограф ККП:

$$K(j\omega) = \text{Error!} = 0 - j \text{Error!};$$

$\text{Im } K(j\omega)$



При построении годографа частота меняется от 0 до  $+\infty$ , поэтому мнимая часть годографа уменьшается до 0, начинаясь при малых  $\omega$  в точке  $-j\infty$ .

2) Аperiodическое звено 1-ого порядка.  
Инерционное звено:

$$K(p) = \text{Error!};$$

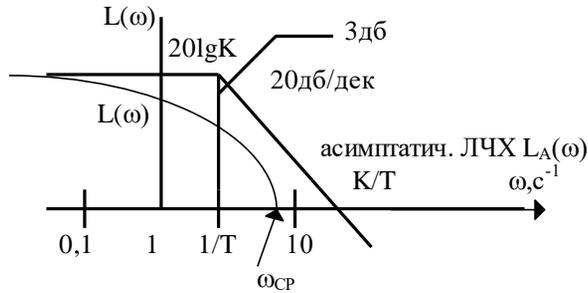
$$K(j\omega) = \text{Error!};$$

$$|K(j\omega)| = \text{Error!};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T;$$

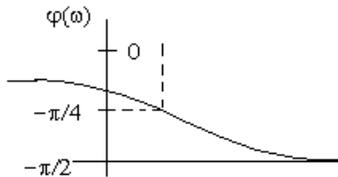
$$L(\omega) = 20 \lg K - 10 \lg (1 + \omega^2 T^2);$$

$$g(t) = \text{Error!} = \text{Error!} e^{-t/T}.$$

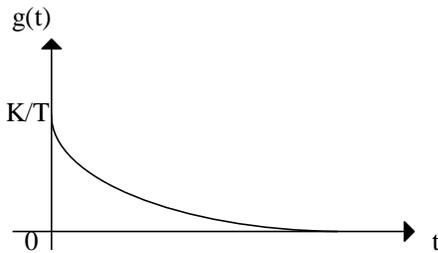


Определим частоту среза  $\omega_{cp}$ . Для этого  $\text{Error!} = 1 \Rightarrow \omega_{cp} = \text{Error!};$

В любом звене 1-ого порядка максимальный наклон асимптотических кривых равен 20 db/дек.



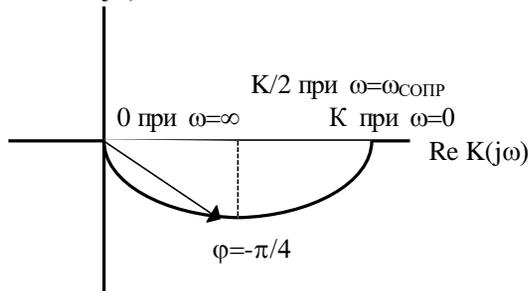
На частоте сопряжения  $\varphi(\omega) = -\pi/4$ ;



Изобразим годограф ККП.

$$K(j\omega) = \text{Error!} = \text{Error!} - j \text{Error!};$$

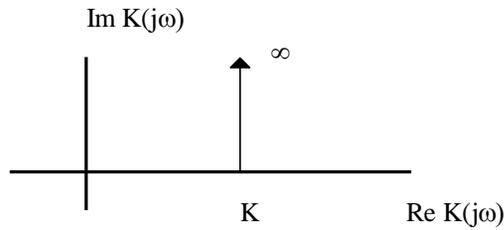
$$\text{Im } K(j\omega)$$



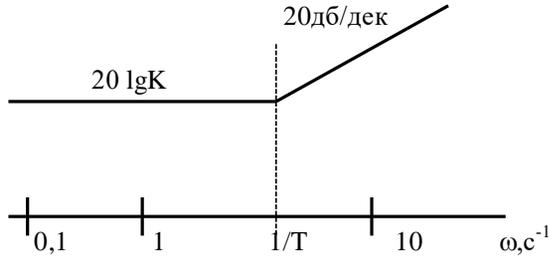
3) Форсирующее звено.

$$K(p) = K(pT + 1)$$

$$K(j\omega) = KTj\omega + K$$



Построим  $L_A(\omega)$  :



Если мы имеем последовательное соединение звеньев, то для построения ЛЧХ нужно построить х-ку 1-ого звена, затем 2-ого, а потом сложить.  
Это же относится к АЛЧХ.

### Лекция № 8.

#### Определение процессов на выходе звеньев по входному воздействию.

$X(t) \rightarrow Y(t)$  -?

1) Для детерминированного  $x(t)$ , если указанную задачу решать во временной области, то можно поступить двояко:

- записать диф. уравнение  $Y(t) = K(p)\{x(t)\}$ ;  $p = \text{Error!}$ .
- использовать свёртку  $Y(t) = \text{Error!} = \text{Error!}$ ; для нашей ф-ции

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \\ g(t) \end{array} \right\} = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

При  $t \rightarrow \infty$  верхний предел может быть заменён

$Y(t) = \text{Error!}$  - для установившегося процесса.

При использовании частотных хар-к звена  $K(p)$  вых. сигнал по входному можно найти с помощью преобразования Лапласа:

- найти изображение по Лапласу ф-ции  $x(t)$ :

$$X(p) = \text{Error!}$$

- полученное L-изображение умножить на  $K(p)$ :

$$Y(p) = X(p) * K(p); \quad p = \sigma + j\omega$$

- по изображению  $Y(p)$  найти оригинал  $y(t)$ , взяв обратное L-преобразование:

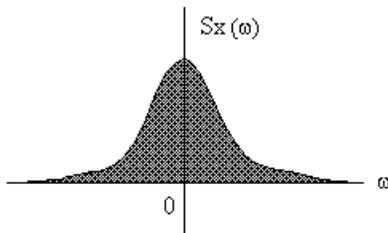
$$y(t) = \text{Error! Error!}$$

2) Если  $x(t)$  - случайный процесс.

Отдельные реализации случайного процесса уже не случайные ф-ции, они связаны с отдельными реализациями выходного процесса интегралом свёртки, а сами СП нельзя связать таким способом.

$\{x(t)\}$  - стационарный случайный процесс (ССП)

$S_x(\omega)$  - СПМ:



$R_x(\tau)$  - КФ;

$m_x(t)$  - математическое ожидание;

$$m_x(t) = M\{x(t)\}$$

Теорема Виннера-Хинчина:

$$R_x(\tau) = \text{Error! Error!}$$

$S_x(\omega) = \text{Error!}$  } Теорема Виннера - Хинчина.

$R_x(t_1, t_2) = M\{x(t_1), x(t_2)\}$  - в общем случае;

$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$  – для ССП.

СП  $x(t)$  можно представить как сумму мат. ожидания  $m_x(t)$  и центрированного процесса  $x_c(t)$ :

$$x(t) = m_x(t) + x_c(t),$$

$m_x(t)$  – не случайная ф-ция, её прохождение рассматривается как прохождение детерминированного процесса.

В дальнейшем все процессы будем считать центрированными.

$$D_x = M\{x_c^2(t)\} = M\{x_c^2(t)\};$$

$$D_x = \text{Error! Error!};$$

Перейдём к нахождению  $Y(t)$ .

$$- m_y(t) = \text{Error!}; \quad (1)$$

$$- S_y(\omega) = S_x(\omega) * |K(j\omega)|^2; \quad (2)$$

$$- D_y = \text{Error! Error!} = \text{Error! Error!}; \quad (3)$$

$$- R_y(t_1, t_2) = M\{Y(t_1)Y(t_2)\} = M\{\text{Error! * Error!}\}; \quad t_1 + \tau = t_2$$

Заранее мы не можем знать, какому процессу (стационарному или нестационарному) принадлежит КФ.

Будем искать КФ при больших  $t$ , т.е. когда процесс на выходе установившейся.

Тогда это будет ф-ция  $R_y(\tau)$ .

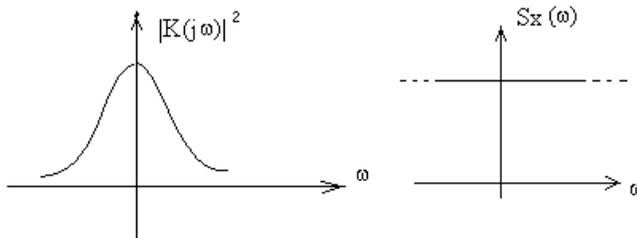
$$R_y(\tau) = M\{\text{Error! *}\} = \text{Error!} =$$

$= \{g(\theta)g(\eta) - \text{нечетные ф-ции можно выносить за знак мат. ожидания}\} =$

$$= \text{Error!}. \quad (4)$$

Расчёт дисперсии на выходе звена при белом шуме на входе.

БШ:  $S_x(\omega) = S_x(0)$ .



$$D_y = \text{Error! Error!};$$

Доказано, что:

$$\text{Error! Error!} = \text{Error! Error!} = I_1;$$

Интеграл справа для ф-ций  $K(p)$ , представляющих собой дробно-рациональную ф-цию, известен.

Так, например, если  $K(p) = \text{Error!}$  – дробно-рациональная ф-ция 1-ого порядка.

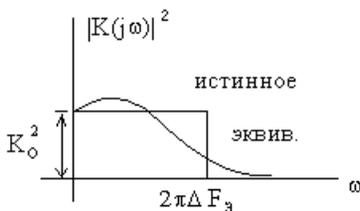
**Error!**;

Пример: Определить  $D_y$  на выходе инерционного звена.

$$K(p) = \text{Error!};$$

$$D_y = \text{Error! Error!} = \text{Error!};$$

ЛДЗ характеризуются эквивалентной шумовой полосой.



$$\Delta F_3 = \text{Error! Error!}; \quad [\Gamma_{ц}]$$

Лекция № 9.

Пример: Рассчитать эквивалентную шумовую полосу инерционного звена.

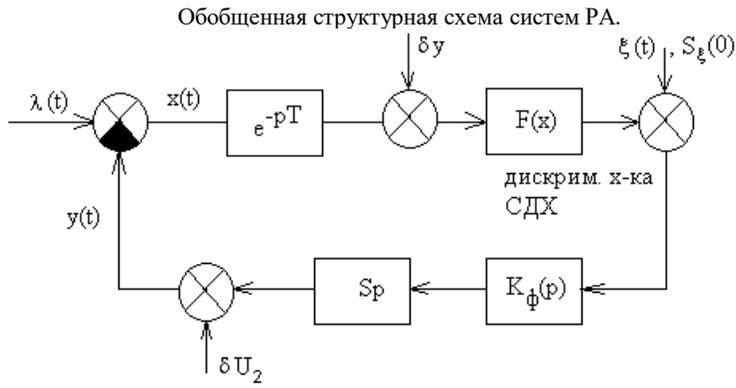
$$K(p) = \text{Error!}; \quad |K(0)|^2 = K^2$$

$$\Delta F_3 = \text{Error! Error!} = \text{Error! Error!} = \text{Error!}; \quad (*)$$

Зависит ли эквивалентная шумовая полоса от  $K$ ? Нет, как видно из (\*).

Обобщенная структурная схема систем РА и её линеаризация.

Все 3 рассмотренных выше схемы систем Радиоавтоматики можно представить одной обобщенной схемой .

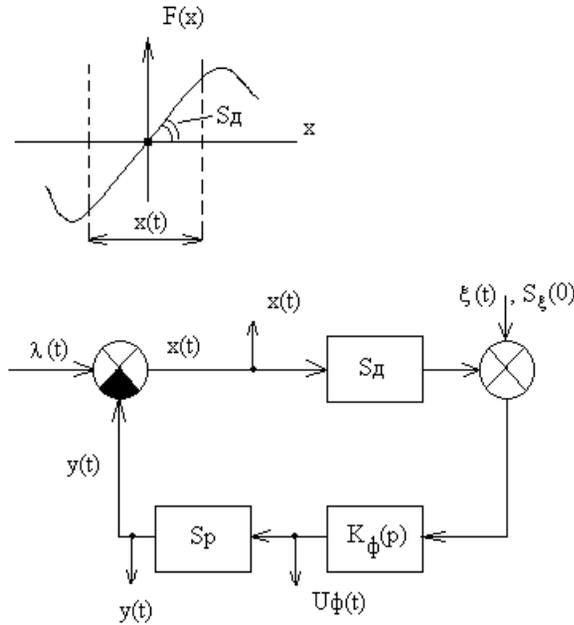


$S_p$  – крутизна регулировочной хар-ки .  
 $K_\phi(p)$  – ЛДЗ,отражающее инерционность.

$$x(t) = \lambda(t) - y(t) \quad \text{— ошибка ,расстройка,рассогласование}$$

уравнение замыкания .

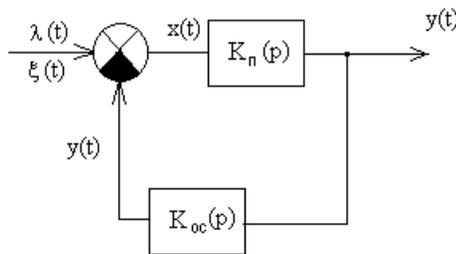
Упростим обобщенную схему ,исключив из неё звено задержки,возмущения  $\delta u_1$  и  $\delta u_2$  , и заменим ф-цию  $F(x)$  линейной зависимостью .



Рассматриваемая система является линейная , а сл-но ,она может быть охарактеризована ПФ  $K_{\xi x}(p)$  ,  $K_{\lambda x}(p)$ .

Определение ПФ в одноконтурной линейной системе.

Линейность системы позволяет нам исследовать воздействия на неё по отдельности.



$$K_{\xi y_1}(p) = ?$$

$K_{\xi y_1}(p) = \text{Error!}$

Запишем уравнение замыкания .

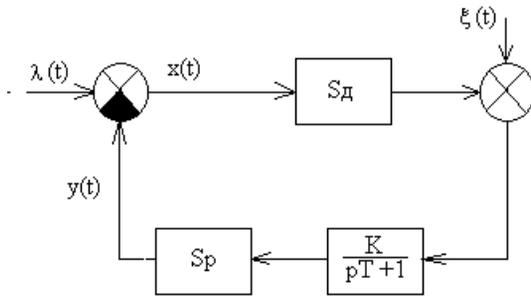
$$x(t) = \xi(t) - y(t)$$

$$= \xi(t) - y_1(t) K_{oc}(p) \quad ; \quad \text{Error!}$$

$$\text{Error!} = 1 - K_{\xi y_1}(p) * K_{oc}(p)$$

$$K_{\xi y}(p) = \text{Error!} .$$

Система ЧАП .



$$K_x(p) = \text{Error!} ; \quad K_p(p) = \text{Error!} ;$$

1) Коэф. передачи по ошибке :

$$K_{\lambda x}(p) = \text{Error!} = \text{Error!} = \text{Error!} ;$$

2) Коэф. передачи по входному воздействию :

$$K_{\lambda y}(p) = \text{Error!} = \text{Error!} ;$$

Во всех ПФ замкнутой системы в знаменателях будет стоять один и тот же многочлен , который называется характеристическим полиномом системы.

3) Коэф. передачи по возмущению :

$$K_{\xi x}(p) = \text{Error!} = \text{Error!} ;$$

Как видно из этих примеров , вход и выход линейной системы связаны между собой:

$$Y(t) = K_{\lambda y}(p) \{ \lambda(t) \} , \quad \text{где } p = \text{Error!}$$

$$K_{\lambda y}(p) = \text{Error!} = \text{Error!} ,$$

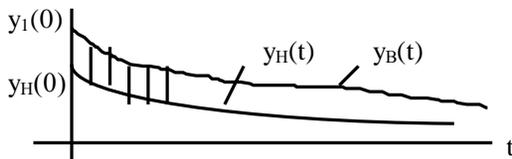
$A(p)$  – характеристический полином системы;

$A(p)=0$  – характеристическое ур-ние системы ; его корни – полюса ПФ всей системы.

#### Устойчивость систем РА.

В общем случае (для любых систем) понятие устойчивости систем РА связано с понятием устойчивости решения её диф. уравнения.

Выходной сигнал  $Y(t)$  можно определить как решение диф. ур-ния , описывающего систему.



Полученное теоретически решение диф. ур-ния можно принять в качестве невозмущённого движения в системе.

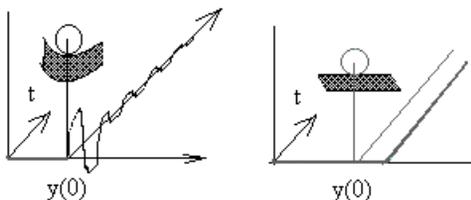
$Y_n(t)$  – возмущённое движение в системе.

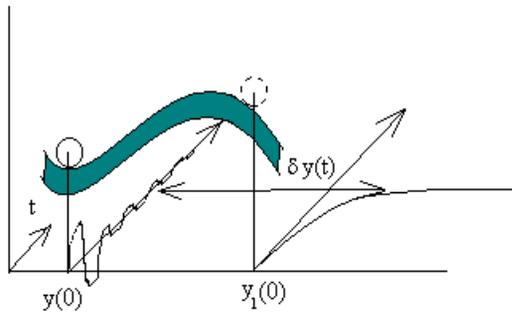
$$\delta y(t) = Y_n(t) - Y_n(t) \quad \text{– текущее возмущение ;}$$

Если  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta y(t) = 0$  , то решение называется асимптотически устойчивым .

В общем случае (система нелинейна) , устойчивость движения будет зависеть от начального возбуждения.

Если система асимптотически устойчива только при малых возмущениях , то система называется устойчивой в малом ; при любых возмущениях – устойчивой в большом.





Первая теорема Ляпунова :

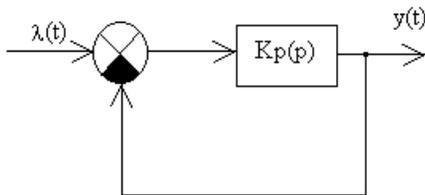
Если система линеаризована и в линейном состоянии строго устойчива ,то и нелинейная система также устойчива в малом.

Лекция № 10.

Под устойчивостью в малом понимается устойчивость при бесконечно малых возмущениях .

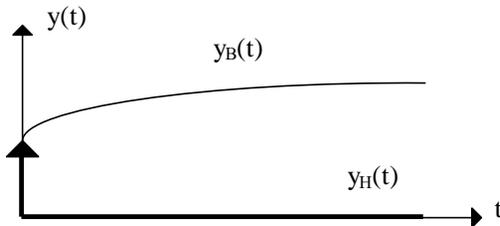
Устойчивость линейных систем.

$Y(t)=\text{Error!} \{ \lambda(t) \}$  , где **Error!** – ПФ линейной системы.



$K_{\lambda,y}(p)=\text{Error!}=\text{Error!}$  ;

Выберем в качестве невозмущ. движения состояние покоя системы, т.е. такое движение , для которого  $dy/dt = 0$  . Это равенство выполняется , когда хотя бы  $\lambda(t)=const$  . Для простоты примем  $\lambda(t)=0$ , тогда выходная величина  $Y_{\text{невозм}}(t)=0$ .



Возбудим систему , изменив начальные условия , и проследим за возм. движением.

Поскольку  $\lambda(t)=0 \Rightarrow A(p)\{Y(t)\}=0$  – ур-ние свободного движения .

В этом ур-нии  $A(p)$ –характеристический полином системы.

$$a_n \text{Error!} + a_{n-1} \text{Error!} + \dots + a_0 Y(t) = 0$$

Это однородное диф. ур-ние с постоянными коэффициентами.

Общеизвестно , что решением такого диф. ур-ния является сумма экспонент.

$$Y(t)=\text{Error!} ; \quad p_k = \sigma_k + j\omega_k \quad \text{– корни характер. ур-ния } A(p)=0, \\ \sigma_k \quad \text{– коэф. зависящие от начальных условий.}$$

Предполагается , что кратных корней нет.

Экспоненты в этом выражении могут иметь разный вид : убывающий , возрастающий , колебательный – в зависимости от наличия Re и Im частей в корне и их знаков .

Для того , чтобы система была устойчива, надо , чтобы Re части всех корней характер. ур-ния были отрицательны.

Если все корни чисто мнимы, то система называется нейтральной(строго говоря неустойчива).

Пример:

1)  $K(p)=\text{Error!}$  ;  $p_1=-\text{Error!}$

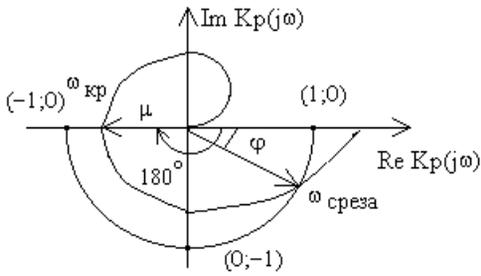
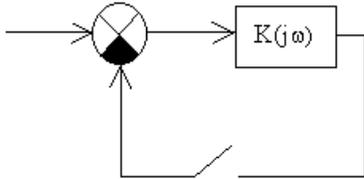
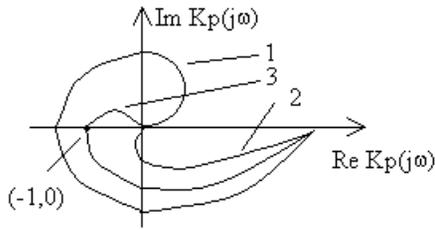
Апериодическое звено всегда устойчиво.



Критерий Найквиста .

Замкнутая система с устойчивыми или нейтральными звеньями при замыкании единичной ОС будет устойчивой , если годограф Найквиста (разомкнутой системы) не охватывает точки  $(-1;0j)$ .

- 1- неустойчива,
- 2- устойчива,
- 3- нейтральна.



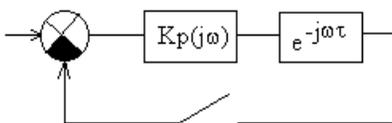
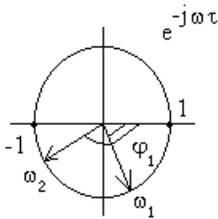
По годографу Найквиста легко определить степень устойчивости. Соотношение между  $\mu$  и 1 характеризует запас устойчивости в системе по коэф. усиления.

По годографу Найквиста можно определить запас устойчивости по фазе. Надо провести единичную полуокружность до пересечения с годографом .

$$\varphi_з = \pi - \varphi(\omega_{ср}) - \text{запас устойчивости по фазе.}$$

Обычно запас устойчивости по фазе должен быть не менее  $30^\circ$ .

С помощью критерия Найквиста легко учесть запаздывание в системе и его влияние на устойчивость.



Исходный годограф при подключении к системе звена идеального запаздывания будет поворачиваться по часовой стрелке. Каждый вектор будет прокручиваться по часовой стрелке на угол  $\varphi = -\omega t$ . Теперь есть опасность охватить точку  $(-1; 0)$ .

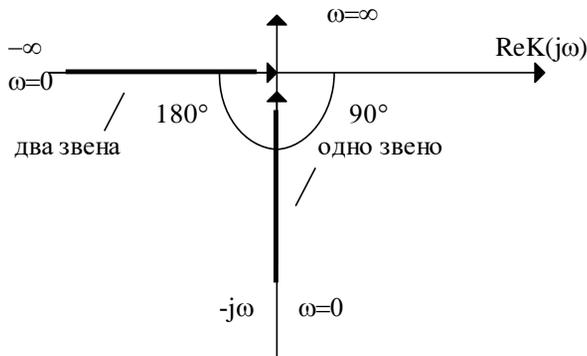
Появление звена задержки в системе всегда ухудшает её устойчивость.

Рассчитаем допустимое время запаздывания в системе. Для этого величину запаса устойчивости по фазе приравняем к тому  $\varphi$ , которое имеет место на данной частоте.

$$\pi - \varphi(\omega_{cp}) = \omega_{cp} * \tau_{доп}$$

$$\tau_{доп} = \text{Error!};$$

Чем выше инерционность в системе, тем опаснее она сточки зрения потери устойчивости.



одно  $K(j\omega) = \text{Error!}$

два  $K(j\omega) = \text{Error!}$

Такие системы, которые за счёт параметров системы нельзя сделать устойчивыми, называются структурно-неустойчивыми. (каскадное соединение 2-х интегральных звеньев структурно-неустойчиво).

Пример: При каких параметрах системы она будет устойчива.

ПФ разомкнутой системы:

$$K_p(p) = \text{Error!};$$

$$A(p) = p(pT_1 + 1)(pT_2 + 1) + K_v = 0$$

$$p^3 T_1 T_2 + p^2 T_1 + p^2 T_2 + p + K_v = 0$$

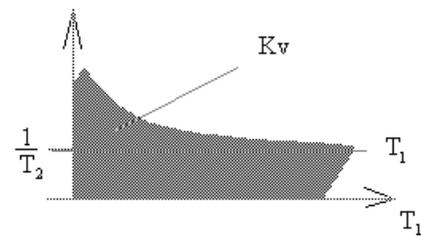
$$p^3 T_1 T_2 + p^2 (T_1 + T_2) + p + K_v = 0$$

$$\boxed{T_1 + T_2}; \boxed{K_v}; \boxed{0}; \boxed{T_1 T_2}; \boxed{1}; \boxed{0}; \boxed{0}; \boxed{T_1 + T_2}; \boxed{K_v}$$

$$T_1 + T_2 > 0 \text{ всегда}$$

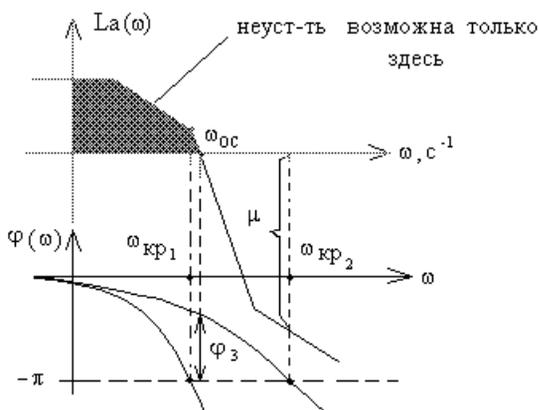
$$T_1 + T_2 - K_v T_1 T_2 > 0$$

$$K_v < \text{Error!} = \text{Error!} + \text{Error!} \text{ (для устойчивости)}$$



### Лекция № 11.

#### Определение устойчивости по амплитудно-фазовым хар-кам (ЛЧХ).

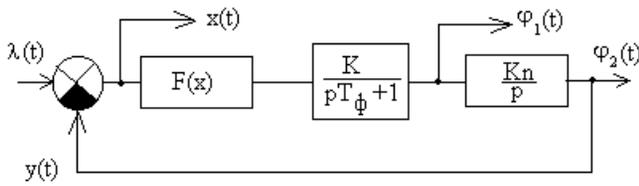


Если  $\omega_{кр} < \omega_{ос}$ , то система неустойчива.

По этим хар-кам можно определить запас устойчивости.

Рассмотрим систему 2-ого порядка.

Методика составления ДУС на примере системы 2-ого порядка.



система ФАП

Составим диф. ур-ние системы. Для этого запишем ур-ние замыкания.

$$\lambda(t) - y(t) = x(t) \quad , \quad \text{где } x(t) - \text{искомая ф-ция.}$$

Выразим у через x :

$$y(t) = F(x(t))$$

$$x(t) + F(x(t)) = \lambda(t)$$

$$(1) \quad T_\phi \ddot{x} + \dot{x} + K_v F[x(t)] = \lambda(t) + T_\phi \ddot{\lambda}(t) ;$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix}$$

Приведённое ур-ние может быть использовано для моделирования системы на машине , однако оно неудобно, т.к.

1) в правой части стоят d/dt от внешнего воздействия , а они зачастую являются СП.

2) с увеличением порядка системы ур-ние становится громоздким.

Поэтому, сведём заданное ур-ние высокого (2-ого) порядка к системе 2-х диф. уравнений 1-ого порядка. Такое сведение всегда возможно.

Для этого введём 2 неизвестных ф-ции  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  относительно которых и будут записаны 2 новых ур-ния.  $\varphi_1, \varphi_2$  будем называть ф-циями состояния системы (переменными).

Перейдём к  $\varphi_1, \varphi_2$  методом последовательного интегрирования ур-ния (1).

Перенесём все члены в левую часть :

$$T_\phi \ddot{x} + \dot{x} + K_v F[x(t)] - \lambda(t) - T_\phi \ddot{\lambda}(t) = 0$$

После интегрирования :

$$(2) \quad T_\phi \dot{x} + x(t) - \lambda(t) - T_\phi \dot{\lambda}(t) + \int K_v F[x(t)] dt = 0$$

Обозначим  $\int dt = \varphi_1(t)$

$$(3) \quad \dot{x} = K_v F[x(t)] ; \quad \varphi_1(0)$$

Для (3) из (2) для момента времени  $t=0$ , используя начальные условия, можем получить начальные условия для  $\varphi_1(0)$ .

Проинтегрируем (2) ещё раз :

$$(4) \quad T_\phi x(t) - T_\phi \lambda(t) + \int [x(t) - \lambda(t) + \varphi_1(t)] dt = 0$$

Обозначим  $\int [x(t) - \lambda(t) + \varphi_1(t)] dt = \varphi_2(t) ;$

$$(5) \quad \dot{\varphi}_2 = \varphi_1(t) + x(t) - \lambda(t) ; \quad \varphi_2(0)$$

Из (4) для (5) получаем начальные условия  $\varphi_2(0)$ .

Из (4) имеем уравнение :

$$(6) \quad x(t) = \lambda(t) - \varphi_2(t) \quad - \text{уравнение наблюдения.}$$

Вместо (1) высокого порядка мы имеем (3) и (5) низкого порядка , но в них есть  $x(t)$ , которая нам неизвестна. Поэтому подставим (6) в (3) и (5) :

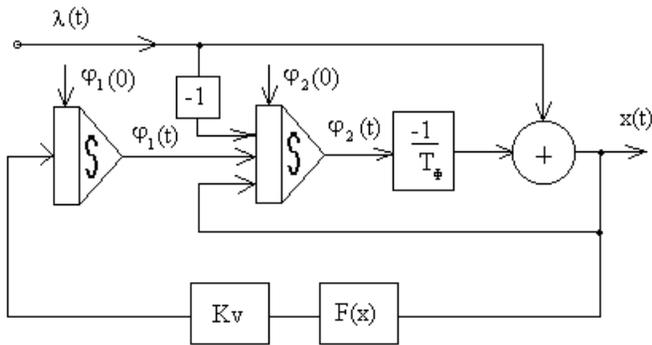
$$\begin{aligned} (7) \quad \dot{\varphi}_1 &= K_v F[\lambda(t) - \varphi_2(t)] \\ (8) \quad \dot{\varphi}_2 &= \varphi_1(t) + \lambda(t) - \varphi_2(t) - \lambda(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} - \text{ДУС}$$

Здесь только 2 неизвестных ф-ции : ф-ции состояния  $\varphi_1, \varphi_2$  .

С помощью (6) ДУС полностью описывают систему.

Эти уравнения кладутся в основу модели системы на ЭВМ .

Зарисуем схему этой модели в соответствии с (6),(4) :



Как видим,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в данном случае – ф-ции на выходе интеграторов и в настоящей схеме их, конечно, нет, а в модели они будут.

Произведём линеаризацию системы, т.е. заменим  $F(x) = S_d * x$  ( $S_d$  – крутизна дискриминационной системы).

$$\begin{aligned} (7) \quad \dot{\varphi}_1 &= K_v S_d [\lambda(t) - \varphi_2(t)] \\ (8) \quad \dot{\varphi}_2 &= \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (7) \\ (8) \end{aligned}} \right\}$$

Запишем в матричной форме :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \lambda(t) ;$$

$$\dot{\varphi} = \mathbf{A} \varphi + \mathbf{B} \lambda(t) \quad \text{— для линейного случая .}$$

– Матрица  $\mathbf{A}$  – главная матрица системы .

–  $\det[\mathbf{A} - p\mathbf{E}]$  – главный определитель системы.

$$p = \sigma + j\omega ;$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{— единичная матрица}$$

–  $\det[\mathbf{A} - p\mathbf{E}] = 0$  – вековое уравнение системы.

Запишем его для нашего случая :

$$\det \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \mathbf{A} = 0$$

$$p^2 + \mathbf{A}_{11} p + \mathbf{A}_{22} = 0 \quad \text{является характеристическим уравнением нашей линеаризованной системы}$$

$$K_p(p) = \mathbf{A}_{11} .$$

## Лекция № 12.

Описание систем с помощью уравнений состояния в настоящее время является основным описанием систем.  $\varphi_1, \varphi_2$  – абстрактные функции на выходе неких абстрактных интеграторов.

### Выбор функций состояния, соответствующих физическим процессам в системе.

В качестве функций состояния можно выбирать физические процессы в системе, но эти функции должны быть разделены инерционными звеньями (в № 11), чтобы получились диф. уравнения.

$$\text{ДУС} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_2(t) = \mathbf{A}_{21} \varphi_1(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) = \mathbf{A}_{11} \varphi_1(t) + \mathbf{A}_{12} F(x(t)) ; \end{cases}$$

Уравнение наблюдения :  $x(t) = \lambda(t) - \varphi_2(t) ;$

$$\text{ДУС} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \mathbf{S}_p * \varphi_1(t) \\ \dot{\varphi}_2 = -\mathbf{A}_{21} \varphi_1(t) + \mathbf{A}_{22} F[\lambda(t) - \varphi_2(t)] ; \end{cases}$$

Произведём линеаризацию, т.е. заменим  $F(x) = S_d * x$  ;  $S_d = \mathbf{A}_{22} \quad |_{x=0} .$

$$\dot{\varphi}_1 = -\mathbf{A}_{21} \varphi_1(t) + \mathbf{A}_{11} [\lambda(t) - \varphi_2(t)] ;$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \mathbf{S}_p * \varphi_1(t) \\ \dot{\varphi}_2 = -\mathbf{A}_{21} \varphi_1(t) + \mathbf{A}_{22} \varphi_2(t) + \mathbf{A}_{22} \lambda(t) . \end{cases}$$

Запишем в матричной форме :

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda(t)$$

Запишем главный det, а приравняв его к 0, запишем вековое ур-ние системы :

$$\det[A - pE] = \det \begin{bmatrix} -\alpha - p & 1 \\ 0 & -\beta - p \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\alpha - p & 0 \\ 0 & -\beta - p \end{bmatrix} = p^2 + \alpha p + \beta = 0$$

$$T_\Phi p^2 + p + K S_p S_d = 0 \text{ - вековое уравнение .}$$

Ф-ции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  могут быть разными, но вековое уравнение ( оно же характеристическое ), должно быть всегда одинаково, т.к. система одна и та же.

Поскольку матрица A была матрицей общего вида, то такая форма ур-ния состояния называется нормальной.

Для линейных систем ур-ние состояния можно записать также в так называемой канонической форме, при которой матрица системы A будет диагональной, но эта матрица будет диагональной только в том случае, если корни характ. ур-ния будут действительные и некрратные.

$$x(t) = \{ \lambda(t) \} \quad \left. \vphantom{x(t)} \right\} \text{ для линейной системы .}$$

$$x(t) = K_{\lambda x}(p) \{ \lambda(t) \}$$

Запишем диф. ур-ние для нашего случая :

$$K_{\lambda x}(p) = \begin{bmatrix} d_0 + p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

Если характ. полином  $A(p) = p^2 T_\Phi + p + S_d K_V$  имеет действительные корни, то эту ПФ можно разложить на элементарные слагаемые.

$$(*) \quad A(p) = d_0 + p + \dots$$

$$d_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} A(p) ;$$

$$d_i = \lim_{p \rightarrow -p_i} A(p) (p - p_i) ; \quad p_i \text{ - корни характеристического уравнения .}$$

В нашем случае  $d_0 = 1$ .

$$A(p) \text{ всегда разлагается : } A(p) = a(p - p_1)(p - p_2) \dots$$

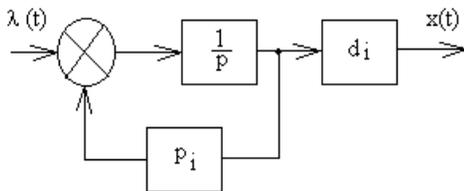
Такое представление  $K_{\lambda x}(p)$  (\*) приведёт к тому, что

$$(1) \quad x(t) = (d_0 + \frac{d_1}{p - p_1} + \frac{d_2}{p - p_2} + \dots) \lambda(t)$$

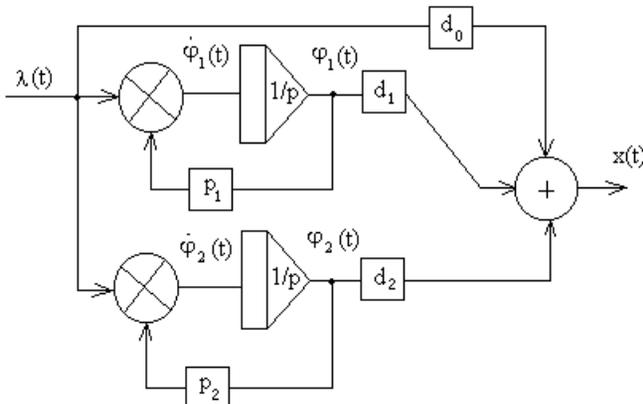
Посмотрим, как воздействует на  $\lambda(t)$  одно слагаемое.

$$x(t) = \frac{d_i}{p - p_i} \lambda(t) = \frac{d_i}{p - p_i} \lambda(t) ;$$

$$K_{\lambda x} = \frac{d_i}{p - p_i} = \frac{d_i}{p - p_i} ;$$



Сл-но, для выражения (1) можно нарисовать структурную схему.



$$\text{ДУС } \begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = \varphi_1(t)p_1 + \lambda(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) = \varphi_2(t)p_2 + \lambda(t) \end{cases}$$

Запишем в матричной форме :

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda(t) ;$$

A

Запишем  $\det [A-pE]=\det [p_1-p; 0; 0; p_2-p]= (p_1-p)(p_2-p)=0$  – вековое уравнение .  
 Запишем уравнение наблюдения :

$$x(t)=|d_1 \ d_2| * \varphi_1; \varphi_2 + d_0 \lambda(t) ;$$

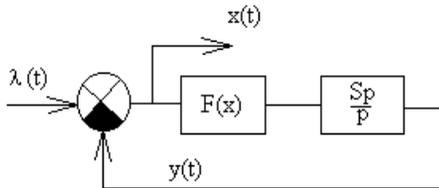
По прежнему наблюдаемая величина – ф-ция входного воздействия.

Использование ур-ний состояния для составления алгоритмов при моделировании на ЭВМ.

При моделировании необходимо перейти от ДУС к рекурсивным разностным уравнениям , т.е. от непрерывных ф-ций к последовательности чисел.

Такой переход осуществляется различными способами и наиболее просто – методом Эйлера.

Рассмотрим этот метод на примере моделирования системы 1-ого порядка.



УН :

$$x(t)=\varphi(t)$$

$$x(t)=\lambda(t)-y(t)$$

$$x(t)=\lambda(t)-\mathbf{Error!} F[x(t)]$$

Имеем

$$\mathbf{Error!} = -S_p F[\varphi(t)] + \mathbf{Error!}$$

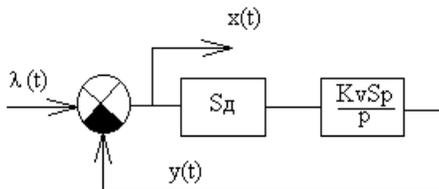
$$\mathbf{Error!} = f(\varphi(t), t)$$

$\varphi(t)=\varphi(t_i) + \mathbf{Error!}(t-t_i) + \dots$  – ряд Тейлора .

$$\varphi(t)=\varphi(t_i) + (t-t_i)f(\varphi(t_i), t_i) ; \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t$$

$$\varphi(t_{i+1})=\varphi(t_i) + (t_{i+1}-t_i)f(\varphi(t_i), t_i)$$

Пример :



$$\lambda(t)=at^2 ;$$

$$\mathbf{Error!} = -S_p F[\varphi(t)] + 2at$$

$$\mathbf{Error!} = -S_p F[\varphi(t_i)] + 2at_i$$

$$\varphi(t_{i+1})=\varphi(t_i) - \Delta t S_p F[\varphi(t_i)] + 2at_i \Delta t .$$

В методе Эйлера , поскольку мы удерживаем только 2 слагаемых в ряде Тейлора , значение ф-ции в точке  $t_{i+1}$  мы вычисляем приближённо и т.д.

В методе Эйлера ошибка нарастает во времени независимо от  $\Delta t$ .

Как выбрать  $\Delta t$  ?

В наших системах  $\Delta t$  надо выбирать , исходя из того , чтобы оно было много меньше времени перех. процесса моделируемой системы.

$$\Delta t \ll 0.1 * T_{уст} ;$$

Для оценки  $T_{уст}$  будем пользоваться одним и тем же правилом :

$$T_{уст} = t_{уст} \cong \mathbf{Error!} ; \quad p_6 - \text{корень , ближайший к вертикальной оси.}$$

$$A(p)=0$$

Пример :

$$T_{уст} \cong \mathbf{Error!} ;$$

Чем больше коэф. усиления , тем меньше время установления.

Анализ детерминированных процессов в линейных ,  
стационарных системах РА.

Для линейных, стационарных систем детерминированную и случайную составляющую можно проанализировать отдельно.

- 1)  $y(t)=\text{Error!}$  ;
- 2)  $Y(p)=\lambda(p)K_{\lambda,y}(p)$  ;  
 $y(t)=L^{-1}\{Y(p)\}$

3) решение диф. ур-ния во временной области.

При появлении задающего воздействия  $\lambda(t)$  в системе возникает переходной процесс , во время которого происходит затухание собственных колебаний системы ( если система устойчива).

Для оценки свойств систем РА необходимо рассматривать их поведение в переходном и установившемся режимах.

Типовые воздействия :

	$\lambda(t)$	$\lambda(p)$
Ступенчатое	$\alpha_0 * 1(t)$	$\alpha_0/p$
Линейное	$\alpha_1 * 1(t) * t$	$\alpha_1/p^2$
Квадратичное	$\alpha_2 * t^2 * 1(t)$	$\alpha_2 * 2/p^3$

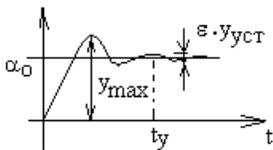
Полиномиальное воздействие :

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n \quad , \quad \text{где } t^n = \text{Error!} .$$

Ступенчатое воздействие позволяет определять важные св-ва и хар-ки систем слежения :

- длительность перех. процесса ;
- величину перерегулирования ;
- запас устойчивости .

Полиномиальное возд. может служить аппроксимацией широкого круга входных воздействий , рассматриваемых на ограниченном временном интервале.



Время установления  $t_y$  – временной интервал , по истечению которого  $\leq \epsilon = 0.05$

$t_y$  – важный параметр систем РА , позволяет оценить её быстродействие.

$y(t) = y_{уст}(t) + y_c(t)$  – решение диф. ур-ния для линейных стац. систем

$y_c(t) = \text{Error!} = \text{Error!}$  ;  $\text{Re}(p_k)$  определяет  $t_y$

$p_k$  – корни характеристического полинома .

$t_y$  в РА принято определять по звену с наибольшим  $t_y$  ( с наиб. инерционностью).

Пример : Звено 1-ого порядка  $K(p) = \text{Error!}$  ;

Определим  $t_y$  .

1)  $\epsilon = \text{Error!} = e^{-t_y/T}$  ;

$\ln \epsilon = -\text{Error!}$  ;  $\epsilon = 0.05$  ;  $\ln 0.05 \approx -3$

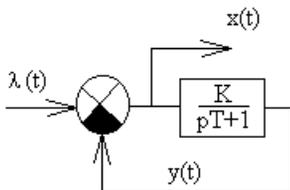
$t_y = 3T$  ;  $p_1 = -\text{Error!}$

$t_y = -\text{Error!}$  ;  $\text{Re}(p_1)$  – корень , ближайший к вертикальной оси.

2) Мы выбрали

$|\text{Re}(p_k)| = \min_{k=1,n} |\text{Re } p_k|$

$C_{\epsilon} e^{(\text{Re } p_k) t_y} = \epsilon C_{\epsilon}$



$K_{\lambda,x}(p) = \text{Error!} = \text{Error!} = \text{Error!}$  .

Постоянная времени замкнутой системы меньше , сл-но ,  $t_y$  замкнутой системы меньше.

Величина перерегулирования  $\Delta = \text{Error!}$  .

Принято  $\Delta \leq 0.1 - 0.2$  (достаточный запас устойчивости)

В зависимости от характера собств. колебаний перех. процесс бывает колебательный или аperiodический.

Если корни действительны – процесс аperiodический ;

комплексно-сопряжённые – собственные гармонические затухающие колебания.

При малом запасе устойчивости будет значит перерегулирование , и, сл-но ,  $\Delta$  может служить мерой запаса устойчивости.

Для того чтобы определить ошибку в установившемся режиме , необходимо определить коэф. передачи системы по ошибке :  $K_{\lambda, x}(p)$  , после чего можно определить значение ошибки , например, решая диф. ур-ние.

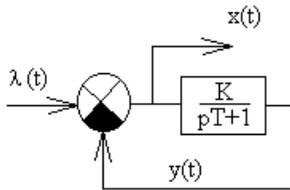
Первый метод : Использование теоремы о конечном значении.

Теорема : Если существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  , то он равен  $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$  .

Для РА :  $x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p * K_{\lambda, x}(p) * \lambda(p)$

Пример :

А



1) Ступенчатое воздействие .

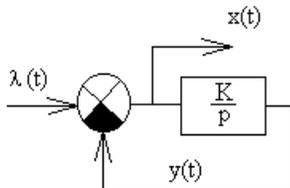
Т.е. в установившемся режиме система даёт ошибку, отличную от нуля.

Если в уст. режиме значение ошибки на выходе системы равно  $\text{const} \neq 0$  , то систему называют статической и ошибку называют статической.

2) Линейное воздействие .

Т.е. в уст. режиме система даёт бесконечную ошибку.

В



1) Ступенчатое воздействие .

У этой системы статическая ошибка равна 0 и система называется астатической.

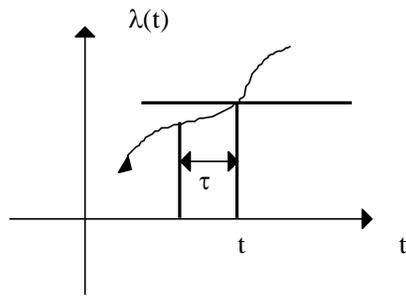
2) Линейное воздействие.

Если в уст. режиме при линейном воздействии на выходе системы ошибка равная  $\text{const} \neq 0$  , такая система обладает астатизмом 1-ого порядка.

3) Квадратичное воздействие.

Динамику изменения ошибки оценить не можем.

В этих случаях используется метод коэффициентов ошибок.



Считая, что входное воздействие является, в общем случае, полиномиальным, разложим его в ряд Тейлора в окрестности  $\tau=0$  :

Теперь можно записать :

Для моментов времени  $t \geq t_y$   $h(\tau) \approx 0$  и увеличение верхнего предела  $\int$  от  $t$  до  $\infty$  практически не изменяет значения  $\int$  .

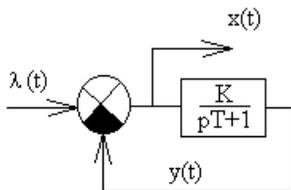
Поэтому ,

$c_0, c_1, c_2, \dots$  – это коэф. ошибок ( а не пост. коэф. при решении диф. ур-ний)

Как правило,  $\lambda(t)$  представляется полиномом, а, сл-но, производные высоких порядков от него равны 0 и бесконечный ряд имеет ограниченное число членов .

Порядок астатизма системы равен номеру 1-ого отличного от нуля коэф  $C_i$ .

Пример :



Ступенчатое возбуждение :

$$x_{уст} = \alpha_1 1(t) * \text{Error!} ;$$

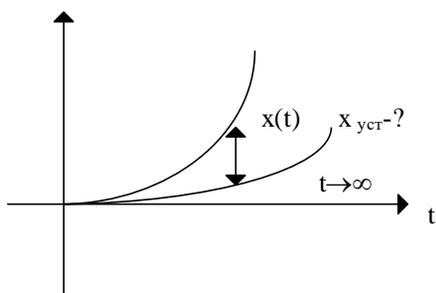
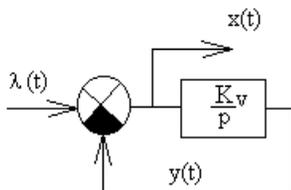
Линейное воздействие :

$$x_{уст} = \alpha_1 t * \text{Error!} + \text{Error!} ; \text{ система не отслеживает ошибку .}$$

При подаче на систему с астатизмом  $v$ -ого порядка возд., выраженного полиномом степени  $v$ , ошибка в уст. режиме  $\text{const} \neq 0$ .

#### Лекция № 14.

Пример : Определить установившиеся ошибки в системе.



Коэффициенты ошибок показывают, какую долю в установившуюся ошибку вносят производные от входного воздействия.

$C_3$  и т.д. можно не искать, т.к. входное воздействие имеет вторую степень и производные выше 2-ой степени равны 0.

$$x_{уст} = \lambda(t)C_0 + \lambda'(t)C_1 + \lambda''(t)C_2 = -2at + \text{Error!} + \text{Error!} + \text{Error!};$$

Эта система – астатическая, т.е. динамическая, способная отслеживать ошибку.

Если для сигнала  $x(t)$  в цепи ОС по ошибке стоит хотя бы один интегратор, то система уже астатическая (1-ого порядка), 2 интегратора – 2-ого порядка и т.д.

Система с астатизмом 1-ого порядка имеет нулевую  $x_{уст}$  при воздействии скачка напряжения на входе.

При линейно-нарастающем воздействии эта система будет иметь ошибку, но со временем эта ошибка расти не будет, поэтому, выбрав  $K_v$  большим, можно эту ошибку сделать малой, и выходной сигнал будет отслеживать входное воздействие.

При квадратичном воздействии  $x_{уст}$  растёт линейно.

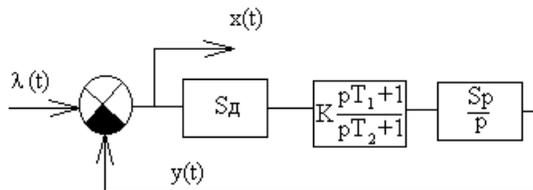
Поскольку на самом деле система нелинейна, то при увеличении  $x_{уст}(t)$  из-за ограничения амплитуды ДХ отслеживаемый сигнал будет потерян, следящая система разомкнётся.

Это явление называется срывом слежения.

### АНАЛИЗ СИСТЕМЫ 2-ого ПОРЯДКА ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ.

Система 2-ого порядка появляется при учёте каких-либо инерционностей в с-ме ФАП.

Тогда получается такая структурная схема:



Анализ - устойчивость;  
- хар-р процесса;  
- уст. ошибка.

Система ФАП, по своей физической природе, всегда астатическая. Это хорошо, ничего добавлять не нужно.

Запишем  $K_{\lambda x}(p)$ .

$$K_{\lambda x}(p) = \text{Error!} = \{ S_d K S_p = K_v \} = \text{Error! Error!}$$

$$C_1 = \text{Error!} = \text{Error! Error!}; \quad C_0 = 0.$$

Ошибка по положению равна 0. Ступенчатое воздействие будет полностью отработано.

Оценим устойчивость системы:

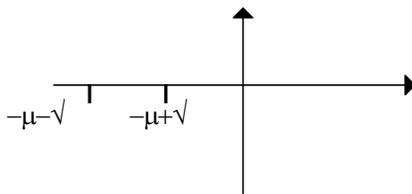
$$K_{\lambda x} = \text{Error!} = \text{Error! Error!}$$

$\text{Error!} = 2\eta$  – коэффициент затухания ( $c^{-1}$ ) (скорость затухания)

$\text{Error!} = \omega_0^2$  – собственная частота системы ( $c^{-2}$ )

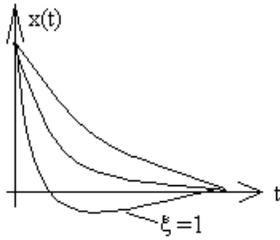
$$p^2 + 2\eta p + \omega_0^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \text{Error!}$$



1) Если  $\eta > \omega_0$ , то переходные процессы в системе носят аperiodический характер.

$$t_{уст} = \text{Error!};$$



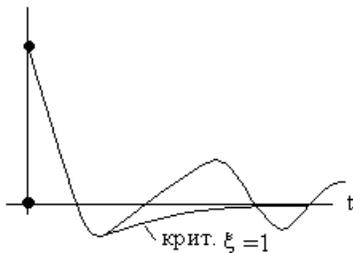
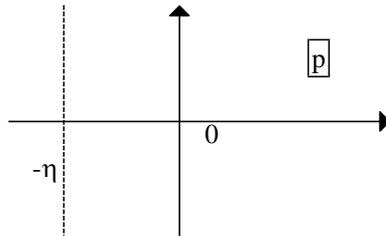
2) Если  $\eta = \omega_0$ , то такое затухание называется критическим .

$\xi = \text{Error!}$  – коэф. детерминирования.

$\xi = 1$  – для критического случая.

Переходный процесс начинает терять аperiodичность и стремится к колебательному .

3)  $\eta < \omega_0$



### АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА СХЕМУ .

1) Характеристики СП  $R_\lambda(\tau)$ ,  $S_\lambda(\omega)$  и  $m_\lambda(t)$  .

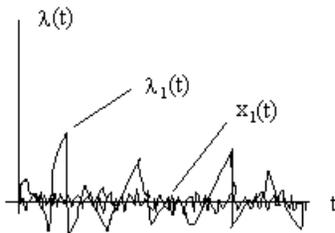
Необходимость в этом из-за  $(1 - \lambda(t))$  заказчику неизвестно,  $\lambda(t)$  само может быть СП .

$M\{\lambda(t)\} = \lambda_0(t) + m_\lambda(t)$  .

$\lambda(t)$  задаётся  $S_\lambda(\omega)$  – СПМ

$R_\lambda(\omega)$  – КФ

Корр. ф-ция СП :  $R_\lambda(\tau) = M\{\lambda(t) * \lambda(t+\tau)\}$



2) Наличие помех .

Дисперсия СП :

$$R_\lambda(0) = M\{\lambda(t) * \lambda(t)\} = D_\lambda(t)$$

$S(\omega) = \text{Error!}$

2. Для линейных систем справедливы все те состояния, которые мы получили для ЛДЗ .

$\lambda(t), \text{СП} \rightarrow \boxed{K_{\lambda x}(p)} \rightarrow x(t), \text{СП}$

$$S_x(\omega) = |K_{\lambda x}(j\omega)|^2 * S_\lambda(\omega)$$

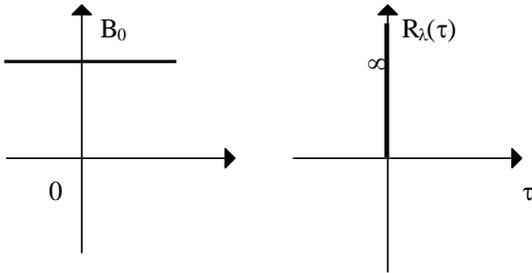
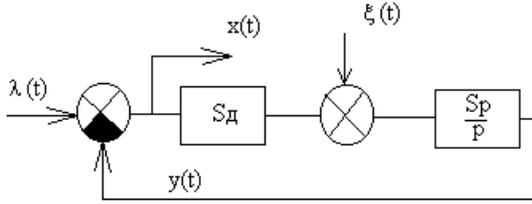
$D_x = B_0 \text{Error!}$

Важнейшей моделью возмущающих воздействий является белый шум . Это справедливо всегда, когда спектр  $\xi(t) >$  чем полоса пропускания системы .

Для расчёта дисперсии на выходе в этом случае можем воспользоваться выражением для КФ .

$$D_x = R_x(0) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\lambda}(\theta - \eta) g_{\lambda x}(\theta) g_{\lambda x}(\eta) d\theta d\eta \quad | \tau=0$$

$$R_{\lambda}(\tau) = B_0 * \delta(\tau)$$



$$D_x = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_0 \delta(\theta - \eta) * g_{\lambda x}(\theta) g_{\lambda x}(\eta) d\eta d\theta = B_0 \int_0^{\infty} g_{\lambda x}^2(\theta) d\theta$$

В соответствии с т. Парсеваля,  $\int$  во временной области может быть заменён  $\int$  по комплексной переменной  $p$ .

$$D_x = B_0 \frac{1}{2\pi j} \oint K_{\lambda x}(p) * K_{\lambda x}(-p) dp ;$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * |K(j\omega)|^2 d\omega$$

$\int$  должен охватывать все полюса ПФ.

Если  $K_{\lambda x}(p)$  – дробно-рациональная ф-ция, то  $\int$  – табличный.

(“ Дискретные системы радиоавтоматики”)

$$I_1 = \text{Error!};$$

$$I_2 = \text{Error!};$$

$$D_x = I_n * B_0$$

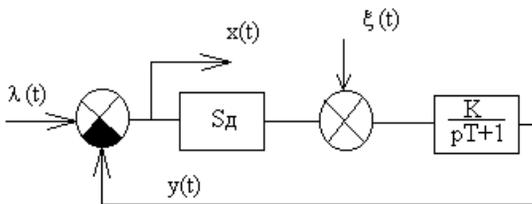
Пример : Определить дисперсию в системе (\*) ФАП 1-ого порядка .

$$S_p = K_n ;$$

$$K_{\lambda x}(p) = \text{Error!} = \text{Error!} = \text{Error!}.$$

$$D_x = B_0 * I_1 = B_0 * \text{Error!} = B_0 * \text{Error!};$$

Флуктуационная ошибка  $x(t)$  тем меньше, чем больше крутизна дискриминационной характеристики  $S_d$   
Крутизна дискриминационной хар-ки – важнейший параметр.



$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0 |K_x(j\omega)|^2 d\omega = B_0 \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} K_x(p) K_x(-p) dp ;$$

$$p = \sigma + j\omega$$

$$dp = j d\omega$$

$$D_x = B_0 / 2\pi \cdot \text{Error!}$$

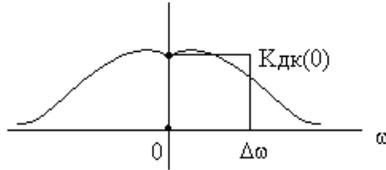
$$D_{\xi x} = B_0 \cdot I_n ; \quad I_n = \frac{1}{2\pi j} \oint K_{\xi x}(p) * K_{\xi x}(-p) dp ;$$

$B_0$  – СПМ белого шума .

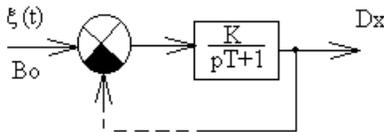
$$I_1 = \text{Error!} .$$

Эквивалентная шумовая полоса :

$$\Delta F = \text{Error!} * I_n ;$$



Пример расчёта дисперсии и шумовой полосы :



$$D_x = B_0 \cdot \text{Error!} ; \quad \Delta F = \text{Error!} * \text{Error!} = \text{Error!} ;$$

Чем больше  $T$ , тем меньше  $\Delta F$ ; от  $k$  не зависит, т.к. есть нормировка по  $k$ .

$$|K(0)|^2 \Delta\omega = 1/2\pi \cdot \text{Error!}$$

Замкнём ОС :

$$K_{\xi x}(p) = \text{Error!} ; \quad D_x = B_0 \cdot \text{Error!} ;$$

Дисперсия уменьшилась примерно в  $K$  раз.

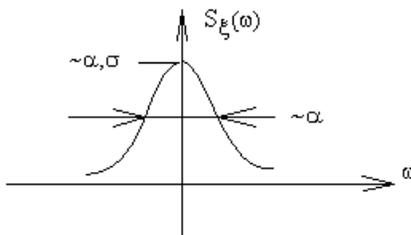
Шумовая полоса замкнутой системы :

$$\Delta F = \text{Error!} * \text{Error!} = \text{Error!} .$$

Увеличилась в  $K$  раз.

При замыкании системы дисперсия шума на выходе уменьшается, несмотря на то, что эквивалентная шумовая полоса увеличивается. Это происходит потому, что резко падает  $K_{\xi x}(0)$ .

#### РАСЧЁТ ДИСПЕРСИИ ФЛУКТУАЦИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕБЕЛОГО ШУМА .



$$S_{\xi}(\omega), D\phi \rightarrow \boxed{K_{\xi x}(p)} \rightarrow D_x$$

При расчёте применяется метод формирующего фильтра :

1) Возьмём БШ со СПМ  $B_0=1$ ;

2) Пропустим через фильтр  $K_{\phi}(p)$  на выходе которого  $S_{\xi}(\omega)$ .

$$B_0=1 \rightarrow \boxed{K_{\phi}(p)} \quad S_{\xi}(\omega), D\phi \rightarrow \boxed{K_{\xi x}(p)} \rightarrow D_x$$

Неизвестный ПФ формирующего фильтра определяется из выражения:

$$\delta_{\xi}(\omega) = B_0 |K_{\phi}(j\omega)|^2 = B_0 * K_{\phi}(j\omega) * K(-j\omega).$$

Такое разложение ф-ции на произведение называется факторизацией .

Найдя ККП и заменив  $j\omega \rightarrow p$ , получим  $K_{\phi}(p)$  формирующего фильтра .

Таким образом :

$$D_x = \frac{1}{2\pi j} \oint K(p) * K(-p) * K_{\xi x}(p) * K_{\xi x}(-p) dp$$

Пример : определить параметры формирующего фильтра, на выходе которого формируется СПМ следующего вида :

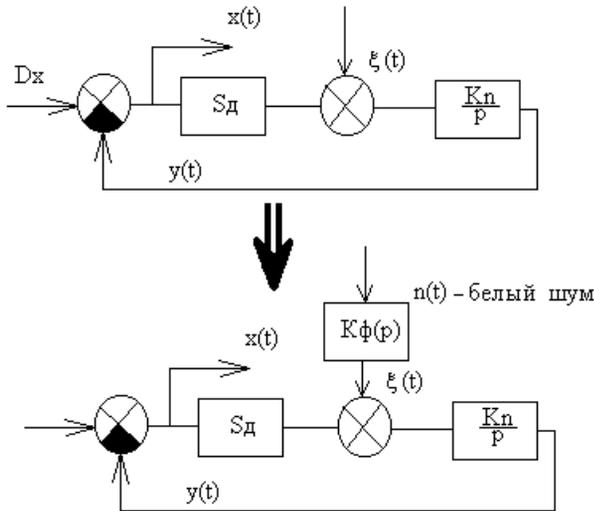
$$S_{\xi}(\omega) = \text{Error!} = \text{Error!} * \text{Error!} .$$

Отсюда,  $K_{\phi}(p) = \text{Error!} = \text{Error!} = \text{Error!} = \text{Error!}$  ;  $K_{\phi} = \sigma \text{Error!}$  ;  $T_{\phi} = \text{Error!}$  .

Т.е. такую СПМ можно сформировать с помощью инерционного звена , параметры которого подобраны соответствующим образом .

$$D_{\phi} = B_0 * I_1 = 1 * \text{Error!} = \text{Error!} = \sigma^2 .$$

Пример : Определить дисперсию флуктуаций в замкнутой системе с одним интегратором при воздействии небелого шума .



Как прежде , чем больше  $T, S_d$  , тем меньше  $D_x$  , тем лучше .

### ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩЕГО ЗВЕНА СИСТЕМЫ ФАП ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА ДИСПЕРСИИ ФЛУКТУАЦИОННОЙ ОШИБКИ.

Остальные элементы – функционально необходимы.

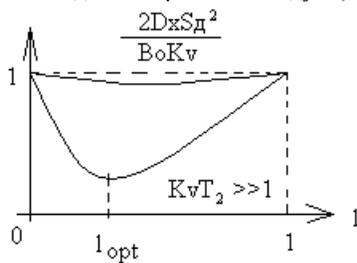
$$I = T_1/T_2 - ?$$

$$K_{\xi x}(p) = \text{Error!} ;$$

$$D_x = B_0 * I_2 = B_0 * \text{Error!} = \{K_v = K_n * S_d\} = \text{Error!} * \text{Error!} * \text{Error!} .$$

**Error!** – СПМ шума , приведённая по входу дискриминатора.

Из последнего выражения следует , что возможна задача об оптимальном выборе  $T_1, T_2$ .



Интересен этот анализ , когда  $K_v * T_2 \gg 1$ .

1. Если  $T_1, T_2 = 0$  , то получим  $D_x = \text{Error!} * \text{Error!}$

2. Если  $T_1 = 0, T_2 \neq 0$  , то  $D_x$  флуктуаций в системе не изменится.

Так что в данной ситуации изменением  $T_2$  нельзя добиться изменения дисперсии.

Независимость  $D_x$  от  $T_2$  при  $T_1 = 0$  объясняется следующим образом :

при изменении  $T_2$  меняется полоса системы и меняется спектр флуктуаций в точке  $x$  , но поскольку  $D_x$  является интегралом от этих ф-ций , то площади остаются неизменными и дисперсия не меняется.

3. Если  $T_1 \neq 0$  и  $T_2 \neq 0$  .

Надо взять производную от этой ф-ции и приравнять к нулю.

$$2L + L^2 T_2 K_v - 1 = 0$$

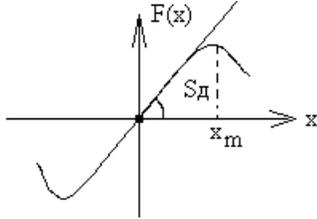
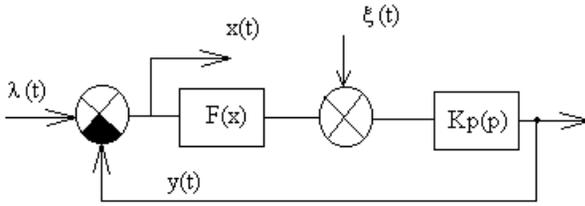
$$L_{\text{opt}} = \text{Error!} \approx \text{Error!} , \text{ т.к. } K_v T_2 \gg 1$$

Минус в  $\pm$  нам не нужен.

Много ли мы достигли своей оптимизацией?

$$D_{x \text{opt}} = \text{Error!} * \text{Error!} * \text{Error!} .$$

Нелинейная модель, кроме линейных звеньев содержит и нелинейные звенья. Мы рассмотрим нелинейные безинерционные звенья, описываемые такими функциональными выражениями:



ДХ ЧД аппроксимируется кривой Релея:

$$S_d = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0}$$

$x_m$  – абсцисса  $\max F(x)$ .

В качестве неизвестных ф-ций всегда берется  $x(t)$

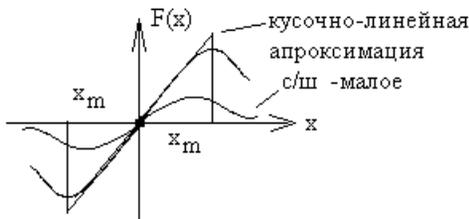
$$x(t) = \lambda(t) - y(t)$$

$$1) x(t) = \lambda(t) - [K_p(p)\xi(t) + K_p(p)\{F[x(t)]\}]$$

Линейная часть, описываемая  $K_p(p)$ , представляет собой отношение полиномов:

$$K_p(p) = \frac{\text{Error!}}{\text{Error!}}; p \rightarrow \text{Error!}$$

Переходим к явной записи диф. ур-ний - оно будет нелинейным. Общей теории решения таких ур-ний не существует.

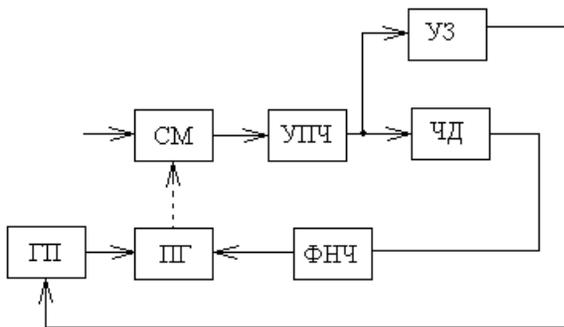


При больших  $x(t)$  наша система либо станет неустойчива ( $S_d \rightarrow -\infty$ ), либо разомкнется (вых. сигнал = 0). Это срыв слежения: размыкание системы при больших расстройках.

При больших отношениях  $[C/\text{Ш}]^{-1}$  ОДХ  $F_{\text{об}}(x)$  сливается с осью  $Ox$ , что эквивалентно также размыканию системы.

После размыкания системы расстройка между параметрами сигнала и частотой гетеродина очень большая, намного больше апертуры ДХ =  $2X$ .

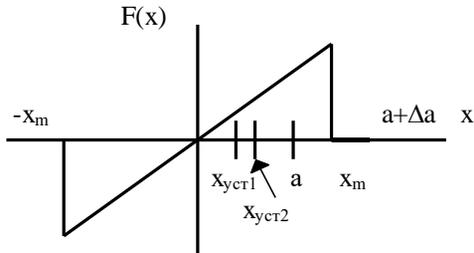
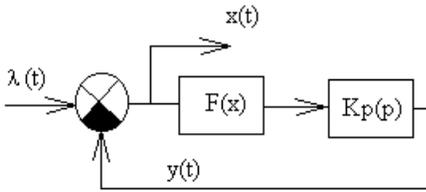
Это вынуждает дополнить систему радиоавтоматики ус-вом поиска и захвата сигнала.



ГП – генератор поиска.

УЗ – устройство захвата (пороговое); регистрирует, когда мы захватили сигнал и отключает ГП; включает ГП при потере сигнала.

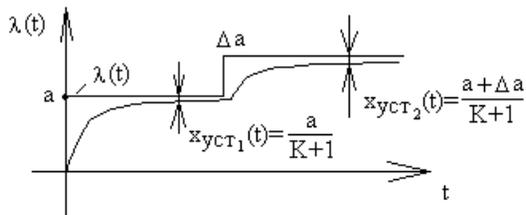
Проанализируем явление размыкания системы из-за динамических ошибок в простейших системах 1-ого порядка.



$K_p(p) = \text{Error!}$  .

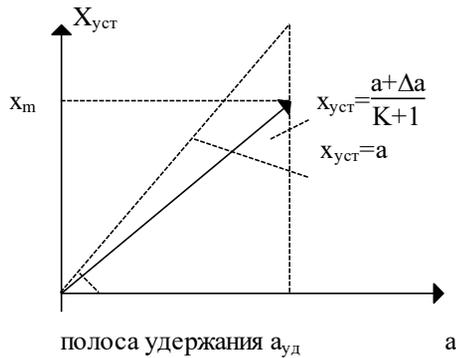
Эта система статическая ,т.к. нет интеграторов.

Пусть на входе ступенька  $a < x_m$ .



Дадим приращение :  $(a + \Delta a)$

При  $\text{var } a \Rightarrow \text{var } x_{уст}$

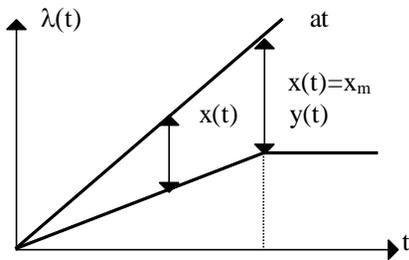


В момент ,когда  $x_{уст} = x_m$  ещё дадим приращение  $\Delta a$  ,тогда система разомкнётся:

$S_d = 0$  ;переходного процесса не будет и величина  $x_{уст}$  станет полностью равна величине  $a$ .

Проведём динамический эксперимент .

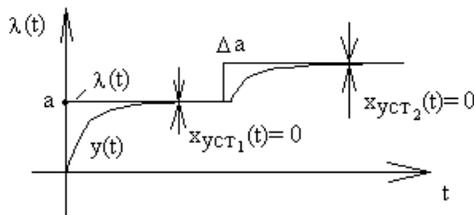
Предположим  $\lambda(t) = at$ ;



Ошибка получается пропорциональной времени. В этом случае увеличивающееся значение  $x(t)$  превзойдёт зн.  $x_m$  и система разомкнётся. Разница между выходным и входным сигналом будет нарастать. Сигнал будет потерян.

2)  $K_p(p) = \text{Error!}$  .-система астатическая

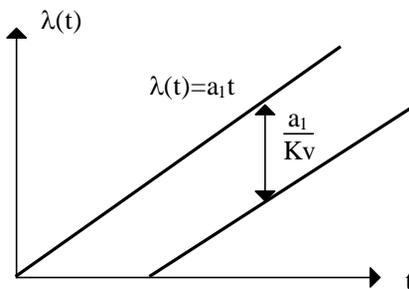
На вход подали величину  $a$ . За время переходного процесса система полностью отработает этот скачок  $x_{уст1} = 0$ .



Срыв слежения из-за дискриминатора невозможен.

Увеличение ошибки при увеличении  $a$  произойдёт тогда, когда перестанет работать перестраиваемый генератор (диапазон ПГ ограничен).

$$\lambda(t) = a_1 t$$



Если убрать вх. сигнал, то вых. сигнал по прежнему будет существовать.

Т.е. если  $a_1 / K_v < x_m$ , то после пропадания сигнала он не будет потерян.

Это явление называется памятью по положению. Система с 2-мя интеграторами будет обладать памятью по скорости.

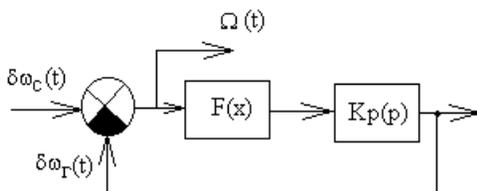
Это ещё одно преимущество астатических систем с интеграторами: они обладают памятью по вх. воздействию (если возд. простое).

Методы анализа процессов слежения в нелинейных моделях.

1) Метод испытания линеаризации в точках покоя (состояниях равновесия).

Рассмотрим испытание этого метода на примере такой схемы:

$K_p(p) = \text{Error!}$ ; система ЧАП 1-ого порядка.



Запишем диф. ур-ние:

$$\Omega(t) = \delta\omega_c(t) - \text{Error!} \{F(\Omega(t))\}$$

$$T_i \text{Error!} + \Omega(t) + K * F(\Omega(t)) = \delta\omega_c(t) + T_i \text{Error!} .$$

Будем считать, что  $\delta\omega_c(t) = \delta\omega_c * 1(t)$ .

Найдём значение  $\Omega$ , предполагая, что система находится в покое.

**Error!** = 0 в состоянии покоя .

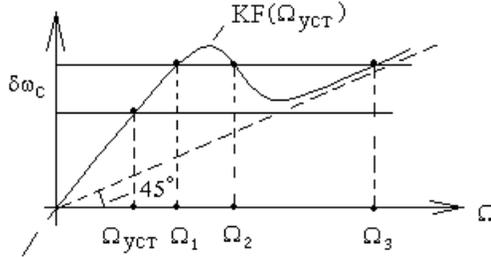
Если в диф. ур-нии нет ф-ции, явно зависящей от времени, то считается, что система автономна. Именно для автономного режима мы можем найти состояние покоя.

Внесём условие покоя в диф. ур-ние.

Получим:

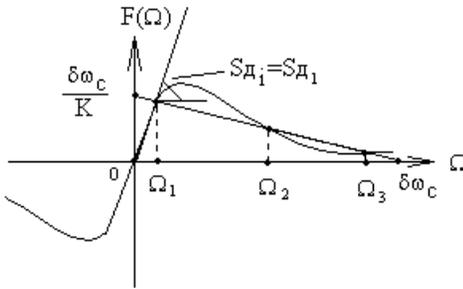
$$\Omega_{уст} + K F(\Omega_{уст}) = \delta\omega_c$$

Это трансцендентное ур-ние. Его можно решить графически.



симметрично

$$F(\Omega_{уст}) = \text{Error!} ;$$



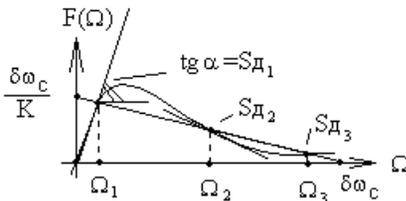
В точках покоя заменяем :

$$F(x) = S_i * x ; \quad x = \Omega - \Omega_i .$$

Лекция № 17.

$$(*) T_f \text{Error!} + \Omega_i + x + K F[\Omega(t)] = \delta\omega_c .$$

$$\text{Error!} = 0 ;$$



В точках  $\Omega_i$ , где  $i=1,2,3$  можно линеаризовать нашу систему, заменив  $F[\Omega(t)]$  на прямую линию .

Тогда :  $\Omega = \Omega_i + x \rightarrow \text{Error!} = \text{Error!} ;$

$$T_f \text{Error!} + \Omega_i + x + K [F_i + x S_{дi}] = \delta\omega_c \quad \text{или} \quad T_f \text{Error!} + x(1 + K S_{дi}) = \delta\omega_c - \Omega_i - K F_i ;$$

Теперь в области каждой из 3-х точек  $\Omega_i$  можно провести линейный анализ на устойчивость при малых значениях  $x$ .

Анализ на устойчивость, когда правая часть равна 0.

$$T_f p + 1 + K S_{дi} = 0$$

Для такой системы:

$$p_i = -\text{Error!} < 0 \quad K S_{дi} > -1 \quad \text{-- условие устойчивости .}$$

В точке  $\Omega_1$  это условие всегда выполняется.

В точке  $\Omega_3 - S_{д3} < 1/K$  и система устойчива .

В точке  $\Omega_2 - S_{д2} > 1/K$  и система в окрестности этой точки неустойчива в малом.

Анализ нелинейных систем методом фазовой плоскости.

Фазовой траекторией называется функц. зависимость скорости изменения некоторой фазовой координаты в системе от самой этой координаты.

$$\text{Error!} = f(\varphi_i)$$

В качестве фазовой коорд. может быть выбрана любая переменная состояния системы. Можно в частности выбрать рассогласование в системе.

Анализ фазовых траекторий позволяет поведение нелинейной системы при различных воздействиях в автономном режиме.

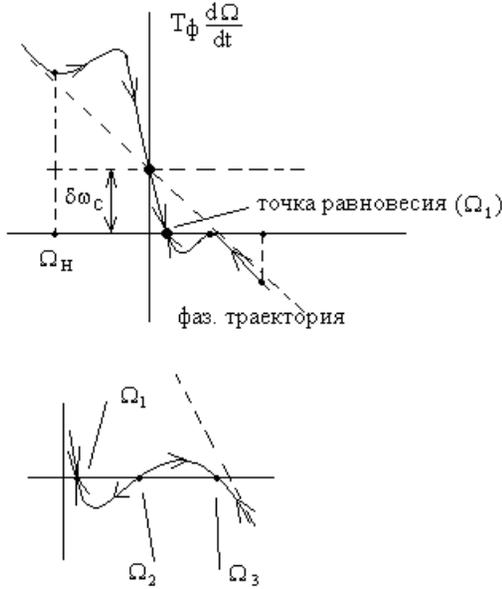
Произведём анализ фазовых траекторий в только что рассматриваемых системах ЧАП 1-ого порядка. Возьмём в качестве фаз. коорд. расстройку  $\Omega(t)$ .

$$\text{Error!} = f(\Omega)$$

Сопоставляя с (\*), мы видим, что ур-ние (\*) можно переписать:

$$T_\Phi \text{Error!} = \delta\omega_c - \Omega(t) - KF[\Omega(t)]$$

Фазовая плоскость

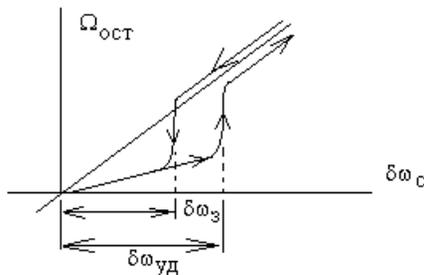
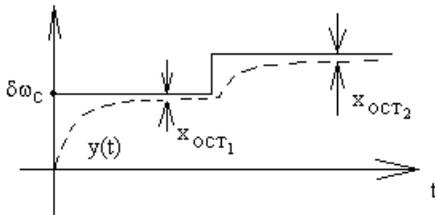


Для системы 1-ого порядка фаз. траектория всегда единственна.

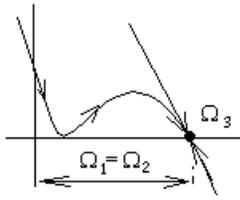
Фаз. траектория в верхней полуплоскости всегда имеют стрелки слева-направо.

По фазовой траектории можно установить, есть ли в системе точки равновесия, а по стрелкам – устойчиво ли это равновесие.

В соответствии с фаз. траекторией для системы ЧАП могут быть построены графики зависимости остаточной расстройки от скачка частоты на входе.



На фазовой траектории  $\Omega_1$  и есть остаточная расстройка. Если немного увеличить  $\delta\omega_c$ ,  $\Omega$  также немного увеличится. Если ещё увеличить  $\delta\omega_c$ , то получим такую картину. Расстройка скачком увеличиться.  $\delta\omega_{уд}$  – полоса удержания системы ЧАП.



$\delta\omega_3$  – полоса захвата.  
 $\delta\omega_3 < \delta\omega_{уд}$

Коэффициент част. автоподстройки :

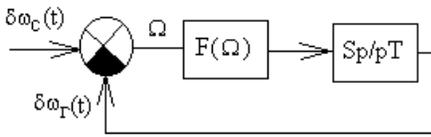
$$K_{чп} = \text{Error!} ,$$

где  $K$  – коэффициент усиления разомкнутой системы на нулевой частоте.

В полосе удержания:

$$\Omega_{ост} = \text{Error!} = \delta\omega_c * K_{чп} .$$

Система ЧАП с одним интегратором .



$$\Omega(t) = \delta\omega_c(t) - F[\Omega(t)] * \text{Error!}$$

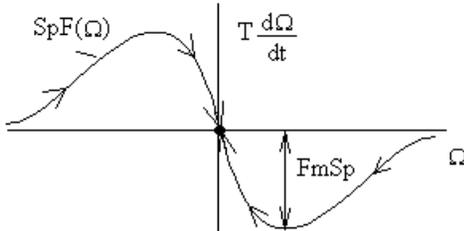
$$T \text{Error!} + S_p F[\Omega(t)] = \text{Error!}$$

Автономный режим можно получить 2-мя путями:

1)  $\delta\omega_c(t) = \delta\omega_c$

Тогда ,  $T \text{Error!} + S_p F[\Omega(t)] = 0$

$$T \text{Error!} = - S_p F[\Omega(t)]$$

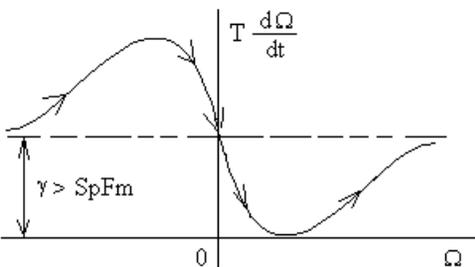
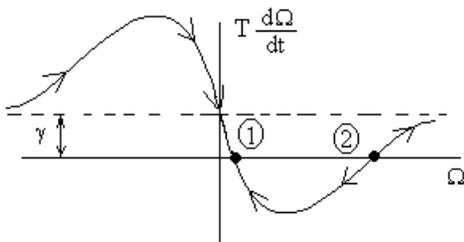


$\Omega_{ост} = 0$  – всегда (для данной системы не учитывается нелинейность РХ).  
 Чем круче ДХ , тем быстрее система будет обрабатывать вх. воздействие.

2)  $\delta\omega_c(t) = \gamma t$  – линейное воздействие.

Тогда ,  $T \text{Error!} + S_p F[\Omega(t)] = \gamma$

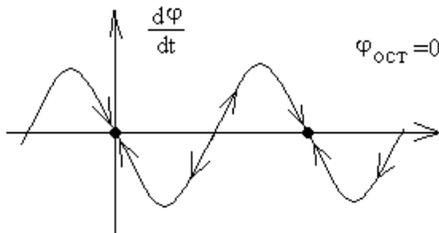
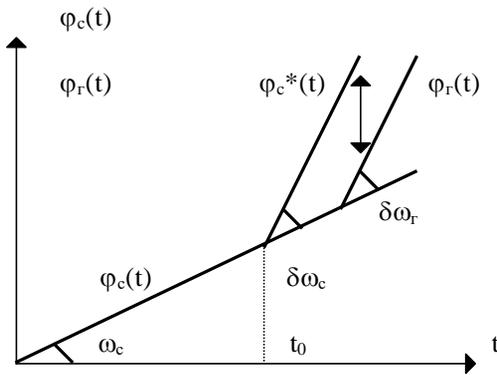
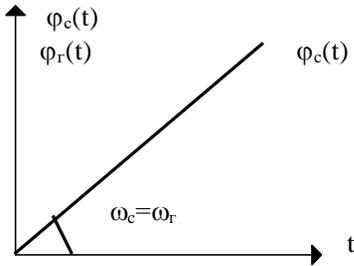
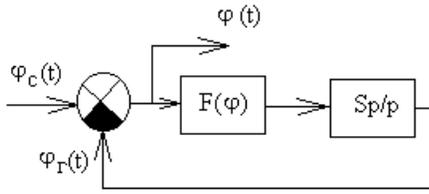
$$T \text{Error!} = - S_p F[\Omega(t)] + \gamma$$



Если вх. воздействие изменяется быстро ( $\gamma$  – величина), то система перестает вести слежение.

Лекция № 18.

Анализ безфильтровой системы ФАП методом фазовой плоскости.



Запишем диф. ур-ние системы:

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_c(t) - \dot{\varphi}_r(t)$$

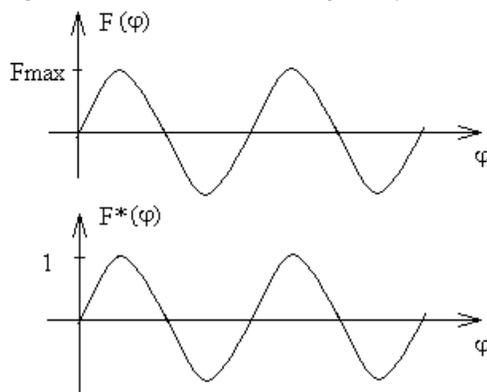
$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_c(t) - F[\varphi(t)] \cdot \text{Error!}$$

$$\text{Error!} + S_p F[\varphi(t)] = \text{Error!}$$

Тогда при скачке фазы **Error!** =  $-S_p F[\varphi]$

Реакция на скачок частоты  $\delta\omega_c$ .

Примем за начало отсчёта точку  $\Rightarrow d\varphi/dt = \delta\omega_c$ .



Замена  $F(\varphi) \rightarrow F^*(\varphi)$ .

Тогда получим :

**Error!**  $+S_p F_{\max} F^*(\varphi(t)) = \delta\omega_c$

$\Omega_{\max} = S_p F_{\max}$  – максимальная расстройка гетеродина за счёт рассогласования фаз в системе.

**Error! \*Error!**  $+ F^*(\varphi(t)) = \text{Error!}$

$d\varphi/dt$  – мгновенная частота биений  $\omega_c$  и  $\omega_r$ .

1) Предположим, что никакого скачка вх. сигнала нет, и  $\omega_c = \omega_r$ , т.е.  $\delta\omega_c = 0$ .

Предположим, что нас интересует режим равновесия (стационарный режим), т.е.

$d\varphi/dt = 0$ .

Тогда  $F^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi_{ст} = 0$ .

$\varphi_{ст}$  – фаза в стационарном режиме.

Ошибки никакой не будет.

2)  $\delta\omega_c \neq 0 = \text{const}$

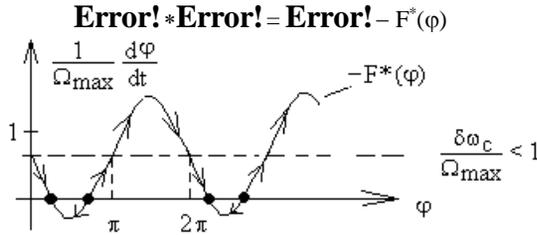
$F^*(\varphi_{ст}) = \delta\omega_c / \Omega_{\max}$

$\varphi_{ст} = \arcsin(\text{Error! Error!})$

Это решение имеет место, когда  $\delta\omega_c / \Omega_{\max} \leq 1$ , т.е. скачок частоты на входе не превышает мах возможной расстройки гетеродина.

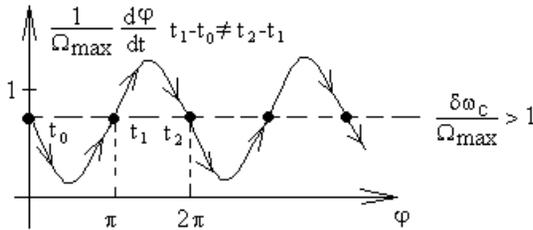
а) Это режим синхронизма.

Фаз. портрет в режиме синхронизма :



Это для синхронного режима.

Если  $\delta\omega_c / \Omega_{\max} \geq 1$ , то это будет асинхронный режим.



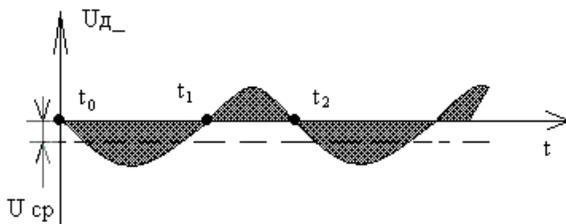
Это значит, что никакой const разности фаз между  $\omega_c$  и  $\omega_r$  не будет; есть биения

$\Omega_b = \omega_c - \omega_r$

Есть фаза скорости которой пропорциональна  $\Omega_b(t)$ .

Т.е. на вх. дискриминатора  $\varphi(t)$  var периодически с периодом  $1/\Omega_b$ ,

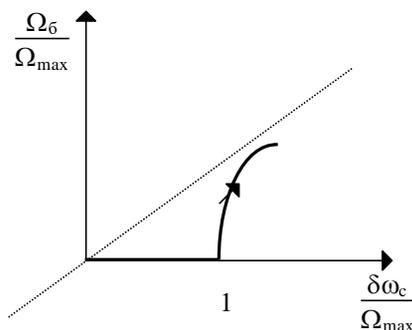
и напряжение на выходе дискриминатора тоже периодически с тем же периодом.



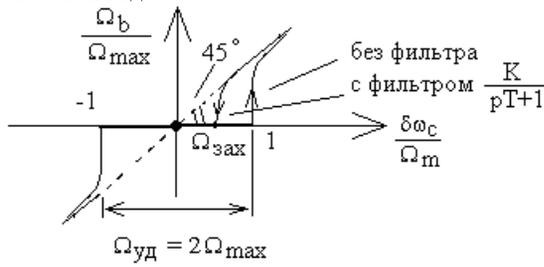
Фаза от 0 до  $\pi$  var дальше, чем от  $\pi$  до  $2\pi$ .

$U_{cp}$  – усредненное за период биений напряжение.

Под воздействием  $U_{cp}$  генератор начинает перестраиваться, и его частота приближается к частоте сигнала.



$\Omega_{\max}$  представляет собой коэффициент усиления разомкнутой системы ФАП (она же мах расстройка системы ФАП за счёт максимально возможного напряжения на выходе дискриминатора).  
 Частоты (полосы) удержания и захвата системы ФАП без фильтров равны друг другу. Это и хорошо и плохо потому, что флуктуации надо отфильтровывать.  
 Если в систему добавить инерционное звено, чтобы ограничить мощность шумов, то зависимость будет иметь такой вид:

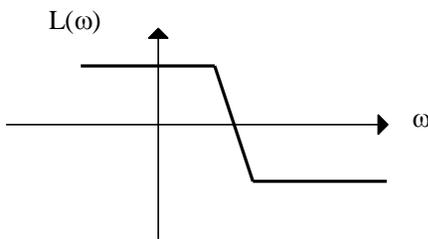


Фильтр будет добавлять шума и биения, пока частота биений не выйдет в НЧ-область.

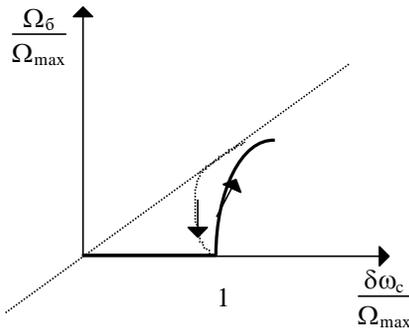
$$\Omega_{\text{зах}} < \Omega_{\text{уд}}$$

Как этого избежать?

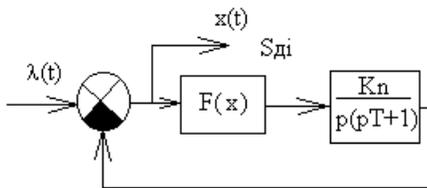
Чтобы фильтровать шумы и не уменьшать  $\Omega_{\text{зах}}$ , ставят пропорционально – интегрирующее звено **Error!**



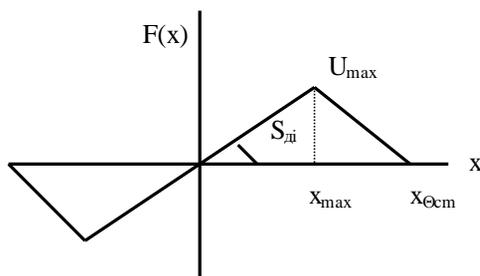
Анализ нелинейных систем 2-ого порядка методом фазовых плоскостей.



Классическое применение этого метода заключается в анализе систем именно 2-ого порядка.  
 Рассмотрим типовую систему 2-ого порядка.



Примем  $F(x)$  такого вида :



$$F(x) = \begin{cases} S_{\text{ди}} x & 0 \leq x \leq x_{\text{max}} \\ U_{\text{max}} - S_{\text{ди}}(x - x_{\text{max}}) & x_{\text{max}} < x \leq x_{\text{см}} \\ 0 & x > x_{\text{см}} \end{cases}$$

В точках равновесия систему можно линеаризовать.

$$\dot{x}(t) = \lambda(t) - \text{Error!} \{S_{дл} x(t)\}$$

$$T \text{Error!} + \text{Error!} + K_{и} S_{дл} x(t) = T \text{Error!} + \text{Error!}$$

$$T \text{Error!} + \text{Error!} + K_{и} S_{дл} x(t) = a \quad (1)$$

$\lambda(t) = at$  по полином выше 1-й степени брать нельзя, т.к. тогда правая часть равна  $g(t)$ , что нельзя для автономного режима,

Перейдём к ур-ниям состояния:

$$\dot{x}(t) = \varphi_1(t);$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \text{Error!};$$

$$T \text{Error!} + \varphi_2 + K_{и} S_{дл} \varphi_1(t) = a$$

$$T + \varphi_2 + K_{и} S_{дл} \varphi_1(t) = a$$

$$\text{Error!} = \varphi_2(t) \leftarrow *$$

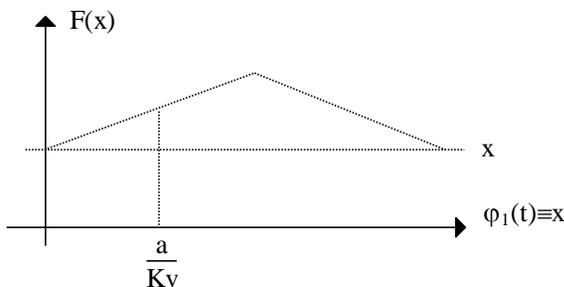
$$\text{Error!} = -\text{Error!} \varphi_1(t) - \text{Error!} + \text{Error!} \leftarrow ** \quad K_{vi} = \text{Error!}.$$

Как видим, эти ур-ния сост. могут быть решены, если заданы нач. условия  $\varphi_{1н}, \varphi_{2н}$ . Фаз. траектория будет уже не одна.

Разделим второе ур-ние на первое:

$$\text{Error!} = -\text{Error!} * \text{Error!} - \text{Error!} + \text{Error!}$$

Это дифф. ур-ние фаз. траекторий – зависимость скорости изменения расстройки  $\varphi_2(t)$  от самой расстройки. Каждой нач. расстройке  $\varphi_1(0)$  составляется ур-ние.



Определим на фазовом портрете координаты стационарных точек.

Из ур-ний состояния имеем:

$$\varphi_{1ст} = \text{Error!}; \leftarrow (**)$$

$$\varphi_{2ст} = 0; \leftarrow (*) \quad \text{при } \text{Error!} = \text{Error!} = 0$$

Исследуем  $d\varphi_2/d\varphi_1$  в стац. точках, где  $d\varphi_2/dt = 0$  и  $d\varphi_1/dt = 0$ .

$$\varphi_2 = \text{Error!} = 0 \quad \text{и} \quad \text{Error!} = 0$$

#### Лекция № 19.

Для этого запишем ур-ние фаз. траектории.

$$\text{Error!} = -\text{Error!} - (\text{Error!} \varphi_1 - \text{Error!}) \text{Error!} =$$

$$\varphi_2 = \Psi(\varphi_1)$$

Совокупность фазовых траекторий называется фазовым портретом системы.

В точке равновесия скорости изменения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равна 0.

Из 2-ого ур-ния состояния, подставив в него  $\varphi_{1ст}$  и  $\varphi_{2ст}$ , легко обнаружить, что

$$\text{Error!} = -\text{Error!} - \text{Error!};$$

Производной  $d\varphi_2/d\varphi_1$  в точке равновесия не существует.

Точки на фазовой плоскости, где не существует  $d\varphi_2/d\varphi_1$  называются особыми.

Характер траектории вблизи этой точки определяется устойчивостью системы в малом в окрестности этой точки.

Этот анализ можно провести по (1).

Перепишем ур-ние в стандартных обозначениях:

$$\text{Error!} + 2\eta \text{Error!} + \omega_0^2 x = 0; \quad \omega_0^2 = \text{Error!}, \quad \eta = \text{Error!}$$

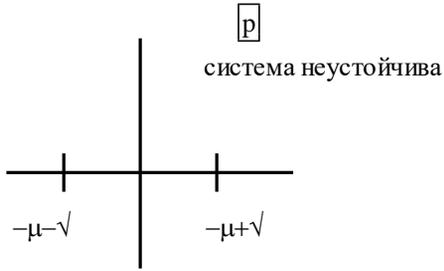
$\omega_0^2$  может быть как положительное, так и отрицательное.

$$r^2 + 2\eta r + \omega_0^2 = 0;$$

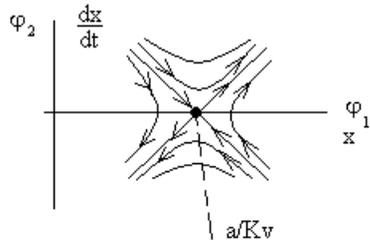
$$r_{1,2} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2};$$

Пусть  $\omega_0^2 < 0$

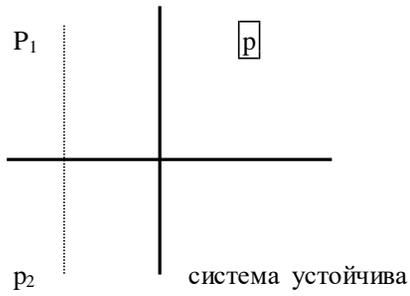
$$\eta > 0$$



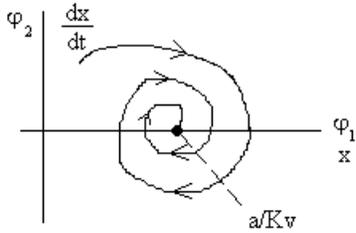
неустойчивое седло



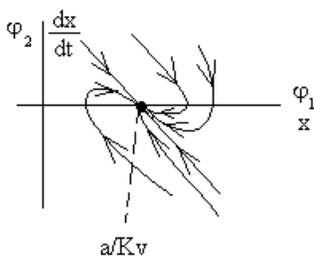
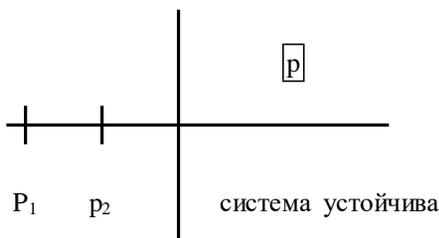
Пусть  $\omega_0^2 > 0$ ,  $\omega_0^2 > \eta$



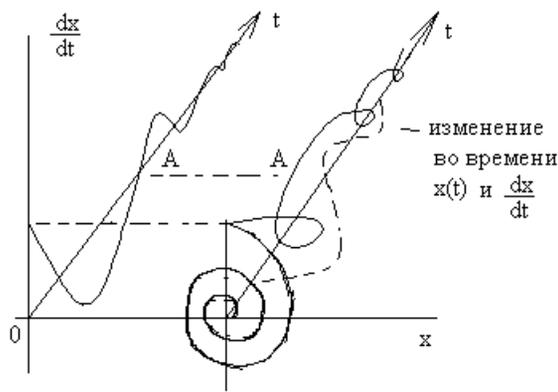
устойчивый фокус



Пусть  $\omega_0^2 > 0$ ,  $\omega_0^2 < \eta$



устойчивый узел

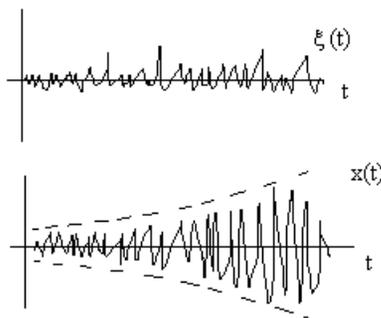


Фазовая траектория в области устойчивого фокуса.

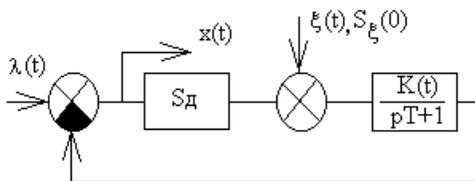
Получить фаз. траектории в целом сложно, есть метод изоклин. Для этого на фазовой плоскости сначала наносятся точки с одинаковым углом наклона касательных к кривой  $\Psi(\varphi_1)$  (фаз. траектории).

Анализ линейной системы в нестационарном режиме при случайных воздействиях.

Нестационарный режим возможен и когда система стационарна. Если коэф. усиления в системе меняется во времени, то система называется нестационарной, хотя она по-прежнему описывается линейными диф. ур-ниями, но с переменными коэффициентами. Процессы в такой системе также будут нестационарными. Но нестационарными также будут процессы в стац. системе в переходном режиме.  $\{\xi(t)\}$  – случайный процесс. Отклик системы  $\{x(t)\}$  также будет СП, но нестационарным в переходном режиме.



Рассмотрим такую систему:



$\lambda(t) \equiv 0$ ;  $K=f(t)$  как в АРУ.

$K_{\xi x}(p) = \text{Error!};$

$x(t) = \text{Error! } \xi(t);$

$T \text{Error!} + (1 + S_d K(t))x(t) = -K(t)\xi(t);$

**Error!** = -**Error!**  $x(t)$  - **Error!**  $\xi(t)$ ;

(2) **Error!** =  $a(t)x(t) + b(t)\xi(t);$

В общем случае  $\xi(t)$  – СП и уравнение является стохастическим диф. ур-нием.

С помощью этого ур-ния можно определить не саму ф-цию, а её статистические хар-ки.

Однако каждая отдельная реализация  $\xi_1(t)$  – детерминированная ф-ция, поэтому для неё мы вправе записать обычное решение диф. ур-ния.

Запишем решение (2), предполагая  $\xi(t)$  детерминированным:

$$x(t) = x^{\sim}(t) + x_n(t);$$

роу рну

Найдём общее решение однородного ур-ния  $x^{\sim}(t)$ :

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t),$$

$$x(t) = x(t_0) \Phi(t, t_0),$$

$$\ln|x(t)| + c = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau,$$

$$e^{\ln \frac{x(t)}{x(t_0)}} = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

$$x(t) = x(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} = \Phi(t, t_0)$$

$\Phi(t, t_0)$  – переходная функция линейной неавтономной системы.

$$x(t) = x(t_0) \Phi(t, t_0) \quad (*)$$

Переходная функция позволяет, зная процесс в точке  $t_0$ , прямо записать процесс в следующий момент времени  $t$ .

Свойства  $\Phi(t, t_0)$ .

$$1) \Phi(t, t_0) = 1$$

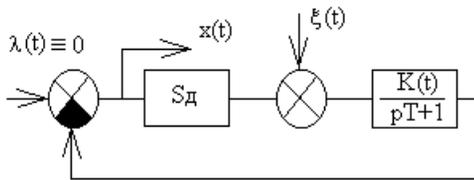
$$2) \dot{\Phi}(t, t_0) = a(t) \Phi(t, t_0)$$

$$3) x(t) = a(t) x(t)$$

Перейдём к определению частного решения неоднородного уравнения.

### Лекция № 20.

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + v(t)\xi(t) \quad (1)$$



$$a(t) = -\frac{v(t)}{T};$$

$$v(t) = \xi(t);$$

$$x(t) = x^*(t) + x_n(t);$$

$$x^*(t) = x^*(t_0) \Phi(t, t_0);$$

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} = e^{-\frac{v(t)}{T} t}; \quad (2)$$

$x_n(t) = \eta(t) * x^*(t)$  – будем искать решение неоднородного уравнения в такой форме.

Подставим в (1)

$$\dot{\eta}(t) * x^*(t) + \eta(t) * \dot{x}^*(t) = a(t) \eta(t) * x^*(t) + v(t) * \xi(t)$$

Сделаем замену по 3-му свойству и получим:

$$\dot{\eta}(t) * x^*(t) = v(t) * \xi(t)$$

$$\dot{\eta}(t) = \xi(t) \xi(t) dt; \quad \{ \text{Домножим на } x^*(t) \}$$

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t \xi(\tau) d\tau;$$

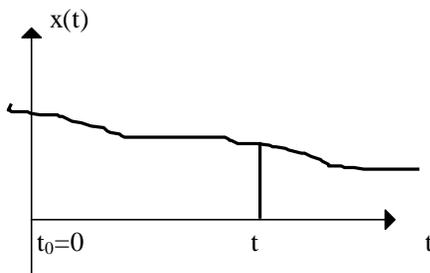
$$x_n(t) = \eta(t) * x^*(t) = x^*(t) \int_{t_0}^t \xi(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \xi(\tau) \Phi(t, \tau) d\tau$$

{ Воспользуемся (\*), где  $\Phi(t, t_0) = e^{-\frac{v(t)}{T} t}$  }

$$= \int_{t_0}^t \xi(\tau) e^{-\frac{v(t)}{T} (t-\tau)} d\tau;$$

Окончательно получим:

$$x(t) = x^*(t) \Phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \xi(\tau) \Phi(t, \tau) d\tau.$$



Зная процесс в  $t_0$ , можно определить процесс в  $t$ .

$$m_x(t) = ?$$

$$D_x(t) = ?$$

Если  $\{\xi(t)\}$  положить случайным процессом со спектр. плотностью  $S_\xi(0)$ , мы можем определить  $m_x(t)$  и  $D_x(t)$ .

Если  $a(t)$  и  $v(t)$  не зависят от времени, то функция

$$\Phi(t, t_0) = e^{a(t-t_0)}, \quad \Phi(t, \tau) = \exp(a(t-\tau)).$$

Тогда  $x(t)$  запишется в виде :

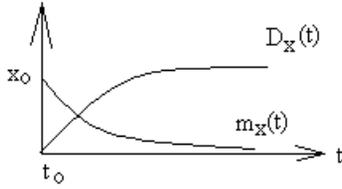
$$x(t) = x^-(t) e^{a(t-t_0)} + \text{Error!};$$

Рассматриваем частный случай  $v(\tau) = v$ .

$$m_x(t) = M\{x(t)\} = x^-(t) e^{a(t-t_0)} + \text{Error!};$$

Если  $\xi(t)$  имеет мат. ожидание равно 0, то 2-ое слагаемое равно 0, и :

$$m_x(t) = x^-(t) e^{a(t-t_0)} = x^-(t_0) e^{a(t-t_0)};$$



$$D_x(t) = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\} = M\left\{\left[\int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b \xi(\tau) d\tau\right]^2\right\} = b^2 e^{2at} M\{\text{Error!} * \text{Error!}\} =$$

$$= b^2 e^{2at} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t e^{-a(t-\tau_1)} e^{-a(t-\tau_2)} M\{\xi(\tau_1) \xi(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 =$$

Если  $\xi(t)$  – белый шум, то

$$M\{\xi(t_1) \xi(t_2)\} = \kappa \Phi = S_{\xi}(0) \delta(t_2 - t_1);$$

$$= b^2 e^{2at} S_{\xi}(0) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t e^{-a(t-\tau_1)} e^{-a(t-\tau_2)} \delta(t_2 - t_1) d\tau_1 d\tau_2 = b^2 e^{2at} S_{\xi}(0) \text{Error!} = b^2 e^{2at} S_{\xi}(0) \text{Error!} = \text{Error!} * (e^{-2at} - 1);$$

$$D_x(t) = \text{Error!} (1 - e^{-2at});$$

$$D_x(t) = \text{Error!} * \text{Error!} (1 - \exp(-\text{Error!}));$$

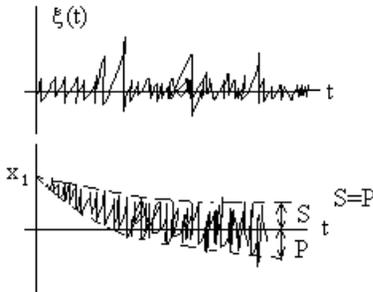
Это дисперсия тоже изменяется по экспоненте.

Установившееся значение дисперсии:

$$D_x = \text{Error!};$$

Дисперсия устанавливается в 2 раза быстрее, чем мат. ожидание.

Процесс установления можно изобразить след. образом:



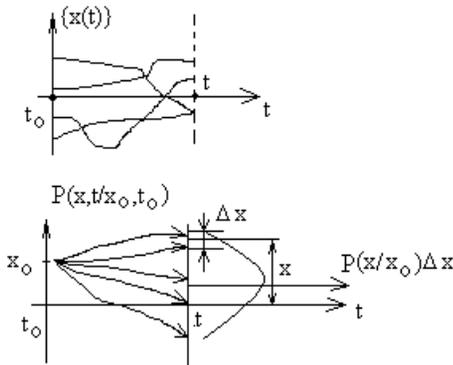
Описание процессов в схемах методами теории марковских процессов.

$$x(t) = x(t_0) \Phi(t, t_0) + \text{Error!} \quad (1)$$

$\{\xi(t)\}$  – одна реализация.

Возможность расчёта процесса в точке  $t$  по его значению в  $t_0$  для СП выливается в следующее св-во:

Введём в качестве статистической характеристики СП переходную плотность вероятностей :  $p(x, t | x_0, t_0)$ .



Выражение (1), которое соответствует стохастическому диф. ур-нию, показывает, что ф-ция является ф-цией только 2-х переменных  $x$  и  $x_0$  при фиксированных моментах  $t$ .



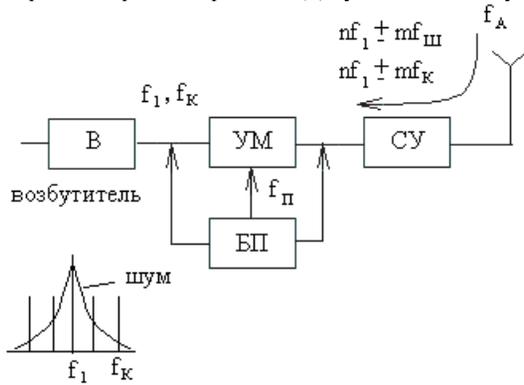
Остальные виды излучений нормируются в зависимости от расстройки основной рабочей частоты

$$0 \quad \{ \quad 0.9f_p \div 0.975 f_p$$

$$T; 1 \quad \{ \quad f_p \div 1.025 f_p$$

Для остальных  $(1 \pm 0.1)f_p$             -90 dB

Переход к транзисторным РПДУ усложнил задачу обеспечения требуемого уровня шумов.



$f_A$  – сигнал в цепи А из-за наличия других станций.

$nf_1 \pm mf_A$  – эти колебания уже научились устранять.

Ре РПД имеет целый спектр частот помимо  $f_1$ .

Для нелинейных устройств  $U_n/U_c \sim U_n/E_n + 6$  dB;

Для линейных режимов  $U_n/U_c \sim U_n/E_n + (10 \div 30)$  dB;

Наиболее интенсивный – уровень гармоник. Для этого используется 2-х тактные схемы, позволяет понизить уровень гармоник.

1-ой – 15÷25 dB

2-ой – 20÷25 dB

Но эти цифры малы.

Ещё для понижения уровня гармоник используются ф-ры гармоник.

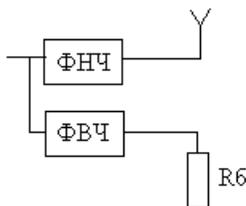


Если ф-р 30 dB по 2-ой гармонике, на УМ 20 dB, то на выходе не

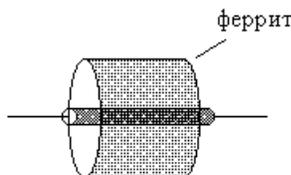
будет 50 dB.

На выходе ориентируются по фильтру.

Также используются другие фильтры.



Также применяют ферритовые фильтры.



ВЧ-колебания поглощаются ферритом.

Обеспечивает равномерное затухание полей, проходящих через фильтр.

УМ, фильтр, устройство автоматики.

40 - 45 - 15

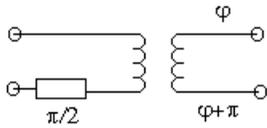
В более мощных устройстве автоматики увеличивается.

ИМК ведут себя примерно также, как 3-я гармоника.

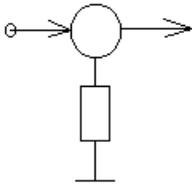
$2f_p - f_n$  } ИМК поч-те близко к  $f_p$ , поэтому возникают трудности по его

$2f_n - f_p$  } снижению.

Для уменьшения ИМК используют квадратурные сумматоры,



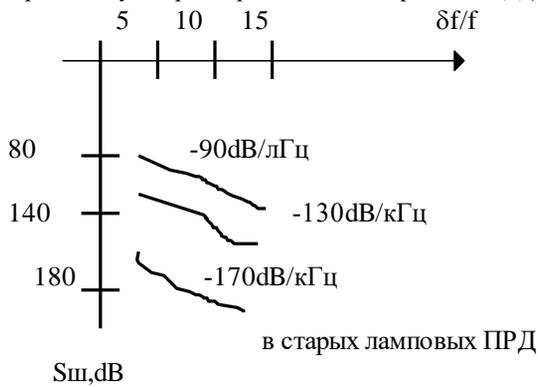
циркуляторы(вх. сигнал в нагр. ,а отраж. – в ....)



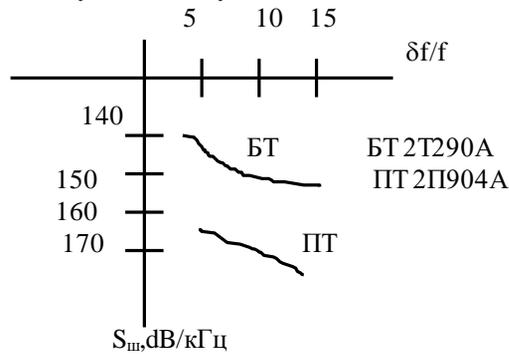
Спектр на выходе : сигнал – дискретный;  
шум – непрерывный.

Шум имеет непрерывный спектр.

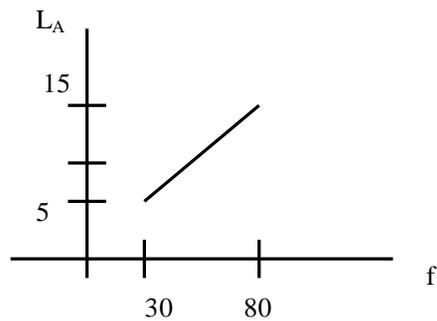
Уровень шума при широкополосных трактах ПРД (транзисторных).

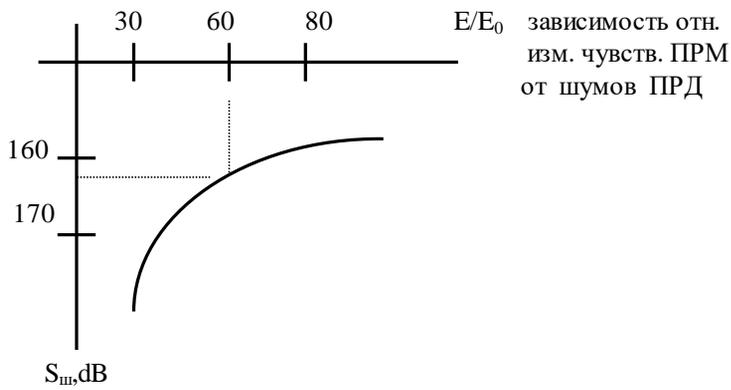


Наилучшим в смысле шумов является ПТ. Сувелечением мощности ,на которой работает прибор ,не происходит увелечения шумов.

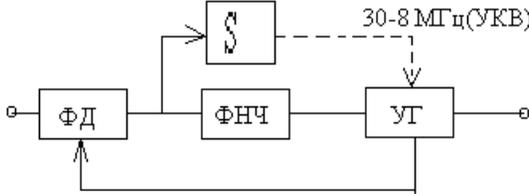


Наиболее жесткие требования при близком расположении ПРМ и ПРД.  
Зависимость отн. изменения чувствительности ПРМ от шумов ПРД.





Высокими фильтр. св-вами обладают системы ФАП.

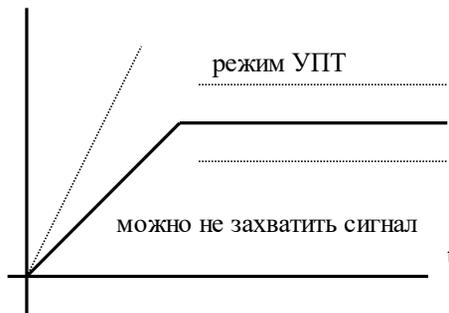


Эта система используется как следящий фильтр, она узкополосна.

∫ – медленно действующая цепь.

Вых. напр. АГ меняется по линейному закону.

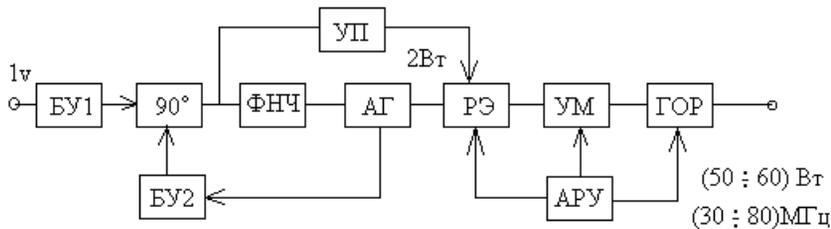
Uд



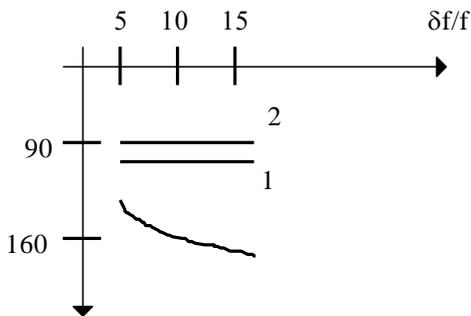
Быстродейств. система обеспечивает устранение быстродейств. возд.(тряска и т.п)

Добились 77 dB при расстройке 5% при уровне мощности 2.5 Вт отн. уровень шумов – 170 dB (кГц – 5%).

На основе такой системы был построен усилитель мощности.

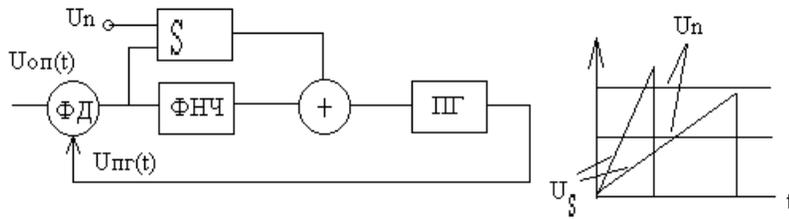


Применение 2-х контактной автоподстройки. Эта система широкополосна, быстродействена.



Лекция № 23.

Структурная схема системы ФАП РПДУ.



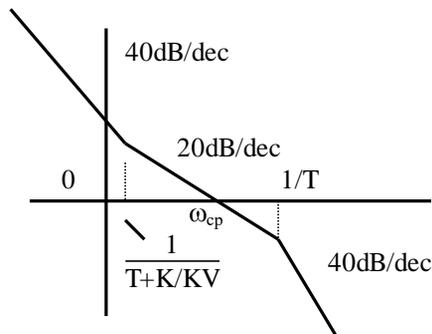
$$K_{ij}(p) = \text{Error!} + \text{Error!} = \text{Error!} ;$$

$$K_p(p) = \text{Error!}$$

Она была бы структ.-неустойчива ,если бы не форсир.звено в числителе.

В этой системе пост. времени форсир. звена больше ,чем инерционного:

$$T + K/K_v > T$$



Вернёмся к марковским процессам.

Описание процесса флуктуаций расстройки в РАС с помощью процессов Маркова.

Т.к. для каждой реализации процесса  $x(t)$  существует формула, позволяющая определять значение процесса в момент времени  $t$ , по его значению в момент  $t_0$  на основе переходной ф-ции процесса  $\Phi(t, t_0)$ , то это позволяет установить связь и между ПРВ  $\omega_0$  и  $\omega_1$ .

Сама перех. ф-ция выражается через коэф. нелин. диф. ур-ния системы, точно также и ПРВ  $\omega_0$  и  $\omega_1$  ,будут связаны ур-нием ,в которое войдут коэф. исх. диф. ур-ния системы.

Запишем диф. ур-ние системы.

$$\dot{x}(t) = \lambda(t) - y(t) ; \lambda(t) = 0$$

$$\dot{x}(t) = -\text{Error!} \{F(x(t)) + \xi(t)\}$$

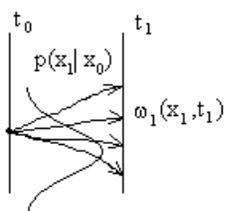
$$\text{Error!} = -\text{Error!} - \text{Error!} F[x(t)] - \text{Error!} \text{Error!} * \xi(t) ;$$

$$\text{Error!} = a(x, t) + b(x, t) \xi(t) \quad (1)$$

Т.к. (1) – стохастическое ур-ние ,а  $\xi(t)$  – белый шум ,то  $x(t)$  является простым МСП. Это значит ,что для  $x$  существует ПРВ перехода  $p(x_1, t_1 | x_0, t_0)$ .

Тогда,

$$\omega_1(x_1, t_1) = \text{Error!} \quad (2)$$



Марк. процесс в рассматриваемой системе является непрерывным МСП: в каждое последующее зн.  $x$  можно попасть, только пройдя через соотв. точки (перескочить нельзя). Непрерывность МСП позволяет вместо интегрального выражения (2) записать диф. ур-ние Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК):

$$\text{Error!} = -\text{Error!} [A(x, t) \omega(x, t)] + \text{Error!} [B(x, t) \omega(x, t)] \quad (3)$$

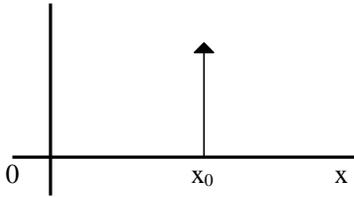
Коэф.  $A$  и  $B$  находятся по ур-нию (1):

$$A(x, t) = a(x, t) + \text{Error!} \text{Error!} * b(x, t) ;$$

$$B(x,t) = v^2(x,t).$$

Для решения ур-ния ФПК мы должны иметь нач. и краевые условия: какой была  $\omega(x,t)$  при  $t_0=0$ , как она ведёт себя при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Очень часто:  $\omega(x_0, t_0) = \delta(x-x_0)$



Рассмотрим решение данного ур-ния для частного случая, когда процесс  $x(t)$  является стационарным установившемся процессом. Это значит, что искомая ПРВ

$\omega(x,t) = \omega_{ст}(x,t)$  одна и та же при различных  $t$  и  $x$ .

Т.к.  $\omega_{ст}$  от времени не зависит, то левая часть ур-ния ФПК = 0. после этого ур-ние ФПК можно проинтегрировать.

$$\text{const} = -A(x)\omega(x) + \text{Error!}; \quad B(x)\omega(x) = y(x)$$

Вспользуемся граничными условиями:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \omega(x) = 0$$

Из них следует, что  $\text{const} = 0$ . получим обычное диф. ур-ние.

$$\text{Error!} \omega(x) = \text{Error!} [B(x)\omega(x)];$$

$$\text{Error!} = \text{Error!} = \ln \text{Error!};$$

$$\text{Error!} = e^{\int_0^x \frac{A(x)}{B(x)} dx}; \quad B(x)\omega(x) = Y(0) e^{\int_0^x \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

$$\omega(x) = \text{Error!} e^{\int_0^x \frac{A(x)}{B(x)} dx} \quad - \text{ ПРВ флуктуаций ошибки в системе.}$$

$Y(0)$  определяется из условия нормировки  $\omega(x)$ :

$$\text{Error!} = 1.$$

В нашем случае,

$$A(x) = \text{Error!} - \text{Error!} F[x(t)] - \text{Error!} * \text{Error!} * \text{Error!} * \text{Error!};$$

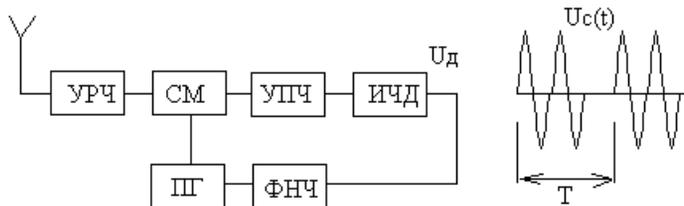
$$B(x) = \text{Error!} S_{\xi}(0, x).$$

### Дискретные системы радиоавтоматики.

Примеры дискретных систем.

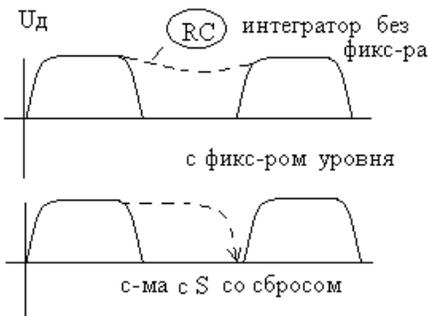
1) Импульсная ЧАП.

Рассмотрим эл. структ. схему системы ЧАП, предполагая, что входной сигнал не непрерывный, а импульсный.



От обычной системы ЧАП эта система отличается только дискр-ром.

ИЧД отличается от обычного ЧД только большей пост. времени.

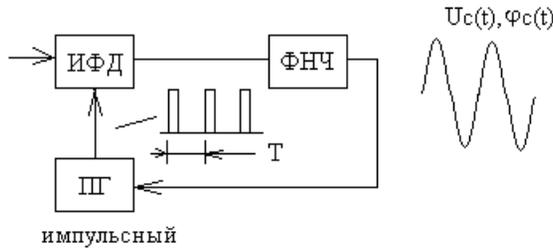


Для системы с фиксатором крутизна ДХ будет больше, но система сложна.

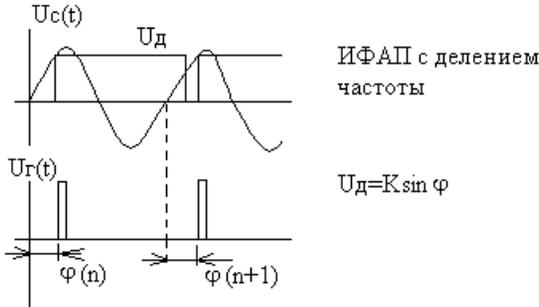
Если длительность импульса  $\tau$  увеличивается, то увеличивается время инф-ции 0 ч-те вх. сигнала (при  $\tau = T$  система перейдёт в непрерывную).

Это система с конечным съёмом координат (конечным временем съёма).

2) ИФАП.

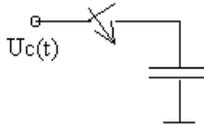


Рассмотрим имп. ФД(ИФД) :



$$U_d = k \cdot \sin(\varphi)$$

ИФД содержит ус-во выборки хранения (УВХ)юУВХ представляет собой по сущ-ту:



При приходе импульса ключ замыкается и конд. мгновенно заряжается . Он держит этот сигнал до прихода след. импульса.Здесь можно синхронизировать колебания разных частот .Период имп. последов. может не совпадать с периодом  $U_c(t)$ .

В отличие от ИЧАП в ИФАП длительность врем. поступления информации о рассогласовании фаз не зависит от длительности импульса.

Все сведения о разности фаз поступают в систему мгновенно и могут быть зафиксированны по переднему фронту импульса.

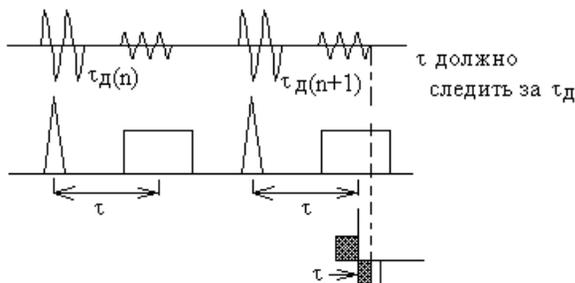
Это система с мгновенным съёмом координат или дискретная система.

Мгновенный съём коорд. происходит также всегда в цифровых системах,где вх. сигнал преобразуется в АЦП.

Если в системе с конечным съёмом коорд.  $\tau \ll T$ , то за это время мы получим мало информации о частоте.Поэтому при  $\tau \ll T$  их приближённо можно рассматривать как системы с мгновенным съёмом.

3) Система СВПИ.

Примером является радиолокационный дальномер.

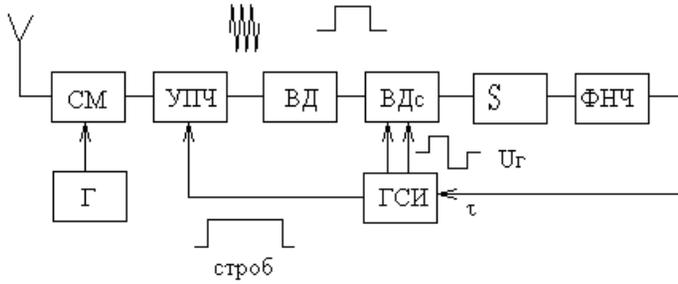


$\tau$  должно следить за  $\tau_d$ .

Запаздывание  $\tau_d$  пропорционально дальности до цели.

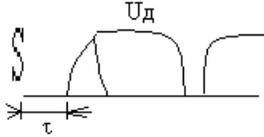
$D = \text{Error!}$  – дальность до цели .

Но на самом деле за  $\tau_d$  не следят.



ВД– видеодетектор;  
 Вдс –временной дискриминатор;  
 ГСИ – генератор следящих импульсов.

Во Вдс  $U_c$  и  $U_r$  перемножаются, а на выходе результат интегрируется.



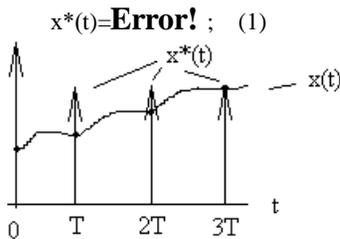
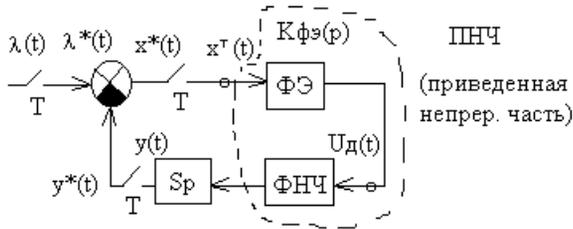
Эта система дискр.,с мгновенным съёмом координат.

### Математическое описание дискретных систем.

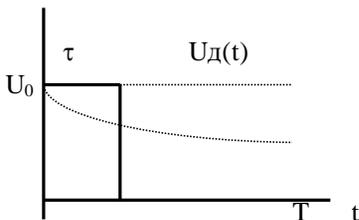
В основе мат. описания лежит структ. схема.

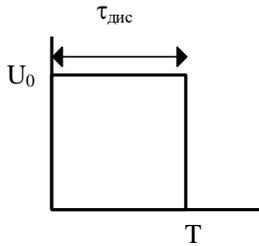
Её особенности :

– в этой схеме мы должны в мат. форме записать то обстоятельство,что сведения об отслеживаемом параметре приходят в мгновенные моменты времени и только в эти моменты снимаются;  
 Для этого введём в схему идеальный ключ(ИК) :



То обстоятельство, что информация поступает дискретно мы учли введением ИК,а все ф-ции остались ф-циями времени.





ФЭ – формирующий элемент, превращающий каждый  $\delta$ -импульс в Re сигнал.

Найдём  $K_{фэ}(p)$  для наших сигналов. Наши рис. есть имп. хар-ка ФЭ.

$$g_{фэ}(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \tau);$$

$$\Rightarrow K_{фэ}(p) = L\{g_{фэ}(t)\} = \text{Error! - Error! } e^{-p\tau};$$

ФЭ есть искусственно введённое в схему устройство.

Если  $\tau \ll T$ , то  $K_{фэ}(p) = \tau$  – без фиксатора.

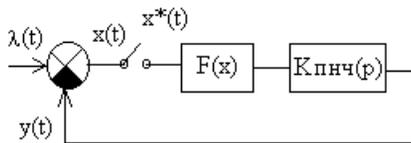
Если  $\tau \sim T$ , то  $K_{фэ}(p) = \text{Error! } e^{-pT}$  – система с фиксацией уровня.

$\tau_{дис}$  – это на выходе импульсного дискриминатора.

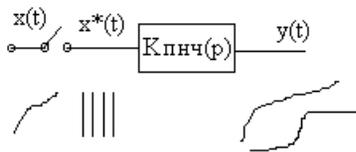
Дальнейшее описание аналогично АФ.

$$K_{пнч}(p) = K_{фэ}(p) * K_{ф}(p)$$

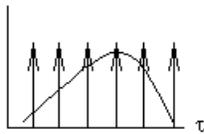
В итоге структ. схема имеет вид:



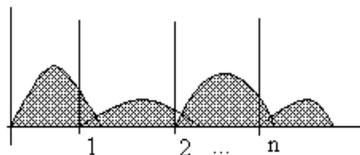
Расчёт процессов в линейных дискретных системах.



Т.к.  $x^*(t)$  по - пржнему  $f(t)$ , то  $Y(t)$  можно определить с помощью свёртки.



$$Y(t) = \text{Error!} = \text{Error!} = \text{Error!};$$



Все эти площади надо просуммировать

2) способ основан на преобразовании Лапласа.

$$Y(p) = K_{пнч}(p) * x^*(p); \quad x^*(p) = L\{x^*(t)\}$$

называется дискретным преобразованием Лапласа.

Лекция № 25(24)

$x^*(t)$  – сумма  $\delta$ -ф-ций, зависящая от времени.



$Y(t) = \text{Error!}$  {В соответствии с фильтрующим св-вом  $\delta$ -функции можно осуществить интегрирование} = **Error!**

Когда система замкнута ( $x(t) = \lambda(t) - y(t)$ ) пользоваться выражением (1) не удобно.  
 $x(nT) = \lambda(nT) - y(nT)$ , где  $y(nT)$  нам неизвестно.

Второй известный способ расчёта  $y(t)$  является использованием  $L$ -преобразования.

$$Y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}; \quad Y(p) = x^*(p) * K_{пнч}(p).$$

Для использования этой ф-лы необходимо ввести изображение по Лапласу:

$$x^*(p) = L\{x^*(t)\} = \text{Error!} = \text{Error!};$$

Приведённая ф-ла называется дискретным  $L$ -преобразованием сигнала  $x(t)$ .

$$x^*(p) = \text{Error!}; \quad (2)$$

Правильнее это было бы назвать обычным  $L$ -преобразованием дискретизированного сигнала  $x^*(t)$ .

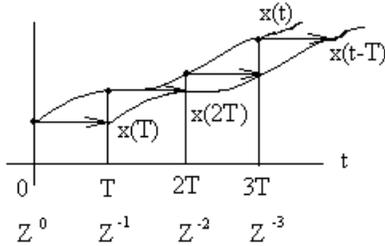
В множителе  $e^{pnT}$  есть переменные, независимые от  $n$ .

Поэтому заменим  $e^{pnT} = z$ ;  $e^{pnT} = z^n$ .

$$x(z) = ; \quad (3)$$

Существо  $Z$ -преобразования ф-ции  $x(t)$   $Z\{x(t)\}$  заключается в следующем:

- переменная  $T$  заменяется на последовательность чисел  $nT$ ;
- преобразованию подвергается последовательность чисел  $x(nT)$ .



Из представленного механизма получения  $Z$ - изображения следует след. св-во  $Z$ - преобразования.

Найдём изображение ф-ции  $x(t-T)$ , предполагая, что мы знаем изображение ф-ции  $x(t)$ .

$$Z(x(t-T)) = ? \quad t = nT$$

$$Z(x(t-T)) = z^0 * 0 + z^{-1} * x(0) + z^{-2} * x(T) + \dots = z^{-1}(z^0 * x(0) + z^{-1} * x(T) + z^{-2} * x(2T) + \dots);$$

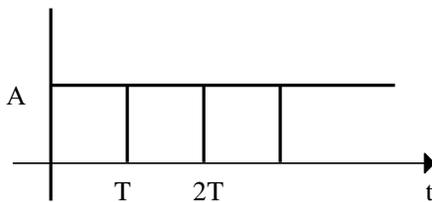
Окончательно,  $Z\{x(t-T)\} = z^{-1}x(z)$

Поэтому  $z^{-1}$  называется элементом задержки на 1 такт.

**Пример:** Найти  $Z$ -изображение  $x(t) = 1(t)$ .

$$x^*(t) = a \text{Error!}$$

$$x(nT) = a * 1(nT)$$



Вспользуемся ф-лой (3):

$$x(z) = \text{Error!} = \text{Error!} = \text{Error!}$$

Будем предполагать, что  $z > 1$ . Полученная ф-ла справедлива над всей пл.  $z$ .

Вернёмся к старой задаче.

$$Y(p) = x^*(p) * K_{пнч}(p) \quad (4)$$

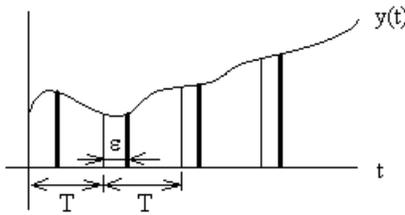
$$Y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}.$$

Если система замкнута, то вместо  $x^*(p)$  придётся подставлять  $\Lambda^*(p) - Y(p)$ .

Это затруднение делает этот способ неудобным.

Задача отыскания  $Y(t)$  в дискр. системах сложнее.

Прибегают к такому приёму:



Будем искать последовательность  $Y(nT)$ , а не саму ф-цию.

$$Y^*(t) = \text{Error!};$$

Сдвинув моменты дискретизации на  $\epsilon$ , найдём новую последовательность  $Y(nT)$ .

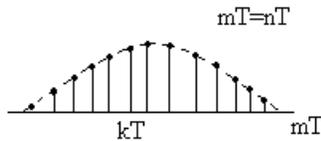
Ограничимся задачей отыскания последовательности  $Y(nT)$ .

Т.к. мы не упоминаем уровни квантования, этот материал един и для дискр. и для цифровых систем.

Воспользуемся ф-лой (1), заменив  $t$  на  $nT$ .

$$Y(nT) = \text{Error!}$$

$$Y(z) = \text{Error!} = \text{Error!} = \{n-m=k\} = \text{Error!} = X(z) * H(z).$$



$q(kT)$  – отсчёты имп. хар-ки, которая левее  $0=0$ , поэтому  $k=0$ .

$H(z)$  – Z-преобразование имп. хар-ки ПНЧ.

ИХ:  $g(t) = L^{-1}\{K_{\text{пнч}}(p)\}$ , где  $K_{\text{пнч}}(p)$  – ПФ

$$Y(z) = X(z)H(z) \text{ – ИПФ (импульсная передаточная функция)}$$

В литературе встречается

$$H(z) = Z\{K_{\text{пнч}}(p)\} = Z\{L^{-1}\{K_{\text{пнч}}(p)\}\} = Z\{g(t)\} = Z\{g(nT)\}$$

Пример:

Найти ИПФ  $H(z)$  разомкнутой дискр. системы без фиксатора с непрерывной частью  $K(p) = K_v/p$  ( $K_{\text{фз}} = \tau$ ).

$$1) K_{\text{пнч}}(p) = K_{\text{фз}}(p)K(p) = \tau * \text{Error!};$$

$$2) \text{ИХ: } g(t) = L^{-1}\{\text{Error!}\} = K_v * \tau * 1(t);$$

$$3) g(nT) = K_v * \tau * 1(nT);$$

$$4) H(z) = \text{Error!};$$

Пример 2: Найти  $H(z)$ , если ФЭ является фиксатором уровня нулевого порядка.

$$K_{\text{фз}}(p) = \text{Error!};$$

$$1) K_{\text{пнч}}(p) = \text{Error!} * \text{Error!};$$

$$H(z) = (1-z^{-1})Z\{\text{Error!}\} = \text{Error!};$$

Лекция № 25.

Если в системе имеется формирующее устройство (интегратор со сбросом, фиксатор уровня).

$$K_{\text{фз}} =$$

$$H(z) = (1-z^{-1})Z\{\text{Error!}\}$$

По найденной  $H(z)$  определим  $Y(z)$ .

$$x(t) = a * 1(t)$$

$$X(z) = \text{Error!}; \quad Y(z) = \text{Error!}.$$

$Y(nT) = ?$

Обратный переход от  $Y(z)$  к  $Y(nT)$  осуществляется:

1) Обратным преобразованием

$$Y(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) Z^{n-1} dz;$$

2) Метод представления изображения в виде ряда.

Рассмотрим этот метод на последнем примере.

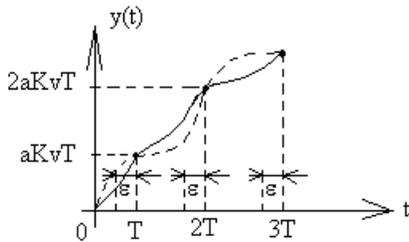
$$Y(z) = \text{Error!} = \text{Error!}$$

$$\text{Та } K_v z^{-1} = (1-z^{-1})^2 (Y(0)z^0 + Y(T)z^{-1} + Y(2T)z^{-2} + \dots) = (1-2z^{-1}+z^{-2})(Y(0)z^0 + Y(T)z^{-1} + Y(2T)z^{-2} + \dots)$$

$$z^0: 0 = Y(0);$$

$$z^{-1}: aK_v T = -2Y(0) + Y(T); \quad Y(T) = aK_v T$$

$$z^{-2}: 0 = Y(0) - 2Y(T) + Y(2T); \quad Y(2T) = 2aK_v T.$$



Т.к. мы нашли  $Y(T)$  лишь в отдельных точках и не знаем характер ф-ции между точками, то будет полезно знать общий характер ф-ции на интервале.

Важно: имеет ли ф-ция скачки? Это важно для распространения метода на замкнутые системы.

Чтобы знать, есть ли скачки в моменты времени  $T, 2T, 3T$  нужно знать теорему о начальном значении ф-ции, заданной своим изображением Лапласа (при возд. на эту ф-цию в моменты  $T, 2T, 3T$  скачка ( $\delta$ -импульса)).

Теорема.

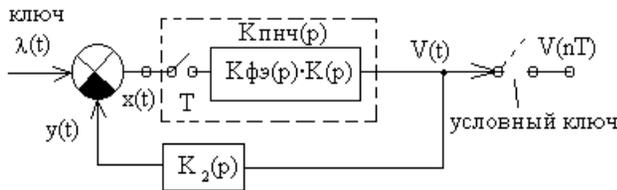
Если  $\lim_{p \rightarrow \infty} pK_{\text{пнч}}(p) = 0$ , то никаких скачков на выходе ПНЧ не будет.

Если  $\lim_{p \rightarrow \infty} pK_{\text{пнч}}(p) \neq 0$ , то на выходе имеются скачки. Используем эту теорему для нашего случая.

В нашем примере

Из последнего выражения видно, что если имеем в системе фиксатор уровня и фильтр с ПФ  $K(p)$ , для которой степень  $p$  в числителе меньше чем в знаменателе, то скачков не будет.

Определение  $H(z)$  замкнутой дискретной системы.



Надо найти  $H_{\text{замкн.}}(z) = \text{Error!}$  ;

Запишем ур-ние замыкания в Z-изображениях:

$$X(z) = \Lambda(z) - Y(z); \quad x(t) = \lambda(t) - y(t) |_{t=nT};$$

$$\text{Заменим } X(z) = V(z)/H_{\text{пнч}}(z) \leftarrow V(z) = H_{\text{пнч}}(z) * X(z);$$

$$\text{Error!} = \Lambda(z) - Y(z);$$

$$\text{В свою очередь } Y(z) = X(z) * Z\{K_{\text{пнч}}(p)K_2(p)\} = X(z) * H_{\Sigma}(z);$$

$$\text{Error!} = \Lambda(z) - X(z) * H_{\Sigma}(z);$$

$$\text{Error!} = H_{\text{пнч}}(z) - \text{Error!} * H_{\Sigma}(z) * H_{\text{пнч}}(z);$$

$$H_{\Sigma}(z) = H_{\text{пнч}}(z) - H_{\Sigma}(z) * H_{\Sigma}(z);$$

$$H_{\Sigma}(z) = \text{Error!}; \quad (1) \text{ ИПФ замкнутой системы.}$$

$H_{\Sigma}(z)$  – z-преобразование ПФ или ИХ последов. соед. звеньев  $K_{\text{пнч}}$  и  $K_2(p)$ .

$Z\{K_{\text{пнч}}(p) * K_2(p)\} \neq Z\{K_{\text{пнч}}(p)\} * Z\{K_2(p)\}$ , т.к. неправомерно вообще записывать Z-преобразование для ПФ  $K_2(p)$ , потому что на вх.  $K_2(p)$  нет ключа, т.е. нет никаких  $\delta$ -ф-ций.

$H_{\Sigma}(z)$  поэтому надо рассматривать как ИПФ суммарной (неделимой) системы.

$$K_{\Sigma}(p) = \text{Error!} - \text{аналогия с непрерывной системой}.$$

Для дискр. систем (структ. схема с ключом) ф-ла Мезона для определения ИПФ из одной точки в другую неправомерна.

Определим ИПФ по ошибке:

$$H_{\lambda x}(z) = \text{Error!};$$

$$X(z) = H_{\lambda x}(z) \Lambda(z);$$

$$X(z) = \text{Error!} = H_{\lambda x}(p) \Lambda(z);$$

$$\text{Error!} = H_{\lambda x}(z); \Rightarrow H_{\lambda x}(z) = \text{Error!}. \quad (2)$$

Пример : Определить  $H_{\lambda x}(z)$  для системы с фиксатором

$$K_{\text{фэ}}(p) = \text{Error!}, \quad K(p) = \text{Error!}; \quad K_2(p) = 1.$$

$$H_{\lambda x}(z) = ?$$

$$H_{\lambda y}(z) = ?$$

$$H_{\text{пнч}}(z) = \text{Error!};$$

$$H_{\lambda y}(z) = \text{Error!} = \text{Error!} = \text{Error!};$$

$$H_{\lambda x}(z) = \text{Error!} = \text{Error!}.$$

Вывод базировался на ур-нии замыкания  $X(nT) = \lambda(nT) - Y(nT)$ , а это ур-ние имеет такой вид, если  $Y(nT)$  не имеет скачков, т.к. если  $Y(nT)$  имеет скачки, то записать это ур-ние замыкания невозможно. Поэтому, необходимо проверять систему на отсутствие скачков.

Переход от ИПФ системы к рекуррентным разностным ур-ниям , описывающим процессы в дискретных системах.

Предположим , что  $H_{\lambda y}(z)=Y(z)/\Lambda(z)$  известно.  
Необходимо связать рекуррентным ур-нием точку  $Y(nT)$  с  $Y((n-1)T)$  ,  $Y((n-2)T)$  и т.д.

ИПФ :  $H_{\lambda y}(z)=$ **Error!** .

### Лекция № 27.

Из рассмотренного материала видно, что ИПФ представляет собой отношение полиномов по Z:

$$H_{\lambda y}(z)=$$
**Error!****Error!**

Для получения рекуррентного ур-ния надо освободиться то дробности:

$$(1+)$$
**Error!** $Y(z)=($ **Error!** $)\{\Lambda(z)\} \quad (1)$

Вспомним:

$$z^{-1}Y(z) \rightarrow Y(nT-T) ;$$

$$Y(z) \rightarrow Y(nT) ;$$

$$z^{-2}Y(z) \rightarrow Y(nT-2T) .$$

$z^{-1}$  можно трактовать как оператор сдвига на 1 такт во временной области .

Перейдём от (1) для последовательности изображений к временной последовательности .

$$(1+)Y(nT)=($$
**Error!** $)\{\Lambda(nT)\} \quad (2)$

$p=$ **Error!** ;

В Первачёве  $z^{-1}=c$  .

$$Y(nT)=$$
**Error!****Error!** ;

Очень важная формула .Это рекурсивное разностное ур-ние вых.процесса.

Пример:

$$H_{\lambda y}(z)=$$
**Error!****Error!** - записываем формально

Знаменатель равен  $1-(1-K_vT)z^{-1}$  .

$$Y(nT)=(1-K_vT)Y(nT-T)+K_vT\lambda(nT-T)$$

максимальный сдвиг определяет порядок ур-ния .

В данном случае :  $M=N=1$ .

Возможна обратная задача : по заданному разностному рекур. ур-нию можно восстановить  $H_{\lambda y}(z)$ .

Необходимость такая возникает при анализе моделей дискр.(цифровых) систем на ЭВМ.При моделировании разн. ур-ние появляется после замены диф.ур-ния , в частности методом Эйлера.

В 4-ой лабораторной работе :

$$Y_{i+1}=(1-)$$
**Error!** $Y_i+$ **Error!** $S_d S_p(\lambda_i-y_i) ; \quad i \equiv n , \Delta t \equiv T$

$$Y(nT)=\alpha Y(nT-T)+\beta \lambda(nT-T)$$

$$Y(z)=\alpha z^{-1}Y(z)+\beta z^{-1}\Lambda(z) ;$$

$$H_{\lambda y}(z)=\alpha z^{-1}H_{\lambda y}(z)+\beta z^{-1} ;$$

$$H_{\lambda y}(z)=$$
**Error!** .

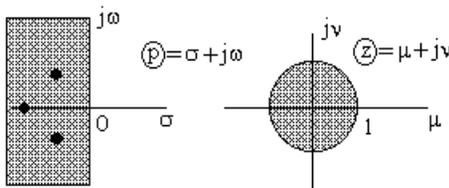
Анализ устойчивости системы.

Для непрер. системы этот вопрос однозначно решается положением корней характер. ур-ния.

По ф-ции  $H(z)$  устойчивость можно установить аналогично.

знаменатель  $A(z) = 0$

Если  $|z_i| < 1$  , то система устойчива.



Пример: Решим вопрос об устойчивости нашей цифровой системы.

$$H_{\lambda y}=$$
**Error!****Error!** , где  $\alpha=1-$ **Error!****Error!** $*K_v S_d S_p$  .

Для устойчивости  $|z_i| < 1 ; A(z_i)=0$  .

⇓

$$|\alpha| < 1$$

Т.е.  $|1-$ **Error!****Error!** $*K_v S_d S_p| < 1$  .

Отсюда следует , что  $T=\Delta t$  нельзя брать слишком большим.По это ф-ле можно выбрать шаг дискретизации.

Дискр. характер управления в целом ухудшает устойчивость системы;чем больше шаг дискретизации ,тем неустойчивей дискр. система при прочих равных параметрах.

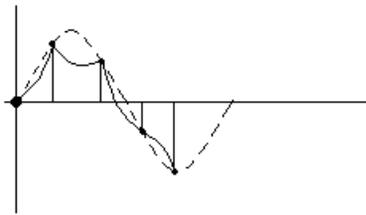
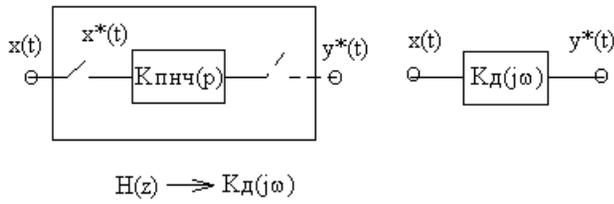
Есть и алгебраические критерии (типа Гурвица) и частотные (типа Найквиста).

ККП дискретной системы.

Для дискр. систем для анализа возд. гарм. сигналов можно ввести передаточную ф-цию  $K_d(i\omega)$

Переход:  $H(z) |_{z=e^{pT}} = H(e^{pT}) = H(e^{j\omega T}) = K_d(j\omega)$

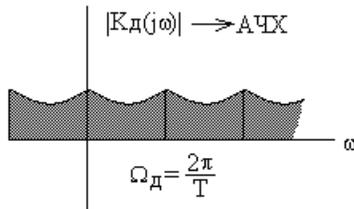
Что связывает  $K_d(i\omega)$ .



Имея компл. амплитуду вх. сигнала, можно найти отдельные значения нереальной синусоиды на выходе.

$K_d(j\omega) = \text{Error!}$

$K_d(i\omega)$  можно использовать в тех же ф-лах, что мы имеем для непрерывных систем.



Пример :

$D_y = \text{Error! Error!}$  – для непрерывной системы .

$S_\xi(\omega)$  – СПМ входного СП  $\xi(t)$

$D_y |_{t=nT} = \text{Error! Error!}$  .

К О Н Е Ц .