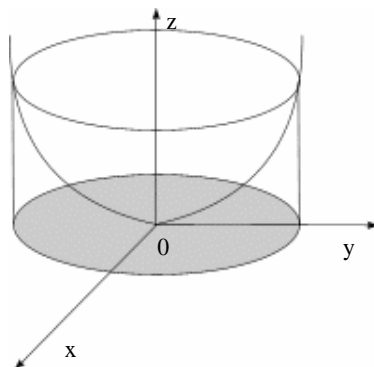


ГОУВПО «Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к решению прикладных задач
по курсу «Математический анализ»
для студентов специальностей
230104 «Системы автоматизированного
проектирования», 230101 «Вычислительные
машины, комплексы, системы и сети»
очной формы обучения
(Часть 2)



Воронеж 2010

Составители: канд. физ.-мат. наук Е.Г. Глушко,
канд. физ.-мат. наук А.П. Дубровская,
канд. физ.-мат. наук Е.Н. Провоторова

УДК 517.9

Методические указания к решению прикладных задач по курсу «Математический анализ» для студентов специальностей 230104 «Системы автоматизированного проектирования», 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» очной формы обучения (Часть 2) / ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Е.Г.Глушко, А.П.Дубровская, Е.Н. Провоторова. Воронеж, 2010. 48 с.

В методических указаниях содержится решение задач прикладного характера с помощью соответствующих методов математического анализа. Приведены задачи для самостоятельного решения, дополняющие задания типовых расчетов и соответствующие темам курсовых работ по дисциплине «Математический анализ». Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 230199 «Информатика и вычислительная техника», специальностям 230104 «Системы автоматизированного проектирования», 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» очной формы обучения.

Ил. 17. Библиогр. 10 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой ВМФММ

д-р физ.-мат. наук И.Л. Батаронов

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет», 2010

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки относительно земного шара под действием силы тяжести имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \frac{dx}{dt} - g \cos \varphi, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g \sin \varphi,$$

где φ - широта точки, ω - угловая скорость вращения земного шара. Определить зависимость положения точки от времени, если при $t = 0$ точка находилась в начале координат.

Решение. Дифференцируя обе части первого уравнения и подставляя вместо $\frac{d^2y}{dt^2}$ его значение из второго уравнения, получим относительно $x(t)$ линейное дифференциальное

уравнение третьего порядка: $\frac{d^3x}{dt^3} + 4\omega^2 \frac{dx}{dt} = 2\omega g \cos \varphi$.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего данному, есть $x_{o.o} = C_1 + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \sin 2\omega t$. Его частное

решение ищем в виде $x_{ч.н.} = at + b$. Легко находим, что $a = \frac{g \cos \varphi}{2\omega}$, $b = 0$. Таким образом,

$$x = C_1 + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \sin 2\omega t + \frac{g \cos \varphi}{2\omega} t.$$

Из первого уравнения системы имеем

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\omega} \frac{d^2x}{dt^2} = 2C_2\omega \cos 2\omega t + 2C_3\omega \sin 2\omega t.$$

Отсюда

$$y = C_2 \sin 2\omega t - C_3 \cos 2\omega t + C_4.$$

Наконец, дважды интегрируя третье уравнение данной системы, находим $z = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \varphi + C_5 t + C_6$.

Вводя вместо постоянных C_2 и C_3 новые постоянные A и θ по формулам $C_2 = A \cos 2\omega\theta$, $C_3 = -A \sin 2\omega\theta$, преобразуем указанные равенства к виду

$$x = C_1 + A \cos 2\omega(t + \theta) + \frac{g \cos \varphi}{2\omega} t, \quad y = C_2 + A \sin 2\omega(t + \theta).$$

Из начальных условий $x = y = z = 0$ при $t = 0$ находим $C_1 = -A \cos 2\omega\theta$; $C_4 = -A \sin \omega\theta$; $C_6 = 0$. Окончательно получим

$$x = -A \cos 2\omega\theta + A \cos 2\omega(t + \theta) + \frac{g \cos \varphi}{2\omega} t,$$

$$y = -A \sin 2\omega\theta + A \sin 2\omega(t + \theta), \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \varphi + Ct$$

(здесь вместо C_5 написано C).

2. (Задача о гашении колебаний.) На тело массы m_2 , подвешенное на пружине (рис. 1), в вертикальном направлении действует возмущающая сила $f = u \sin vt$. Чтобы уменьшить амплитуду колебаний этого тела, к нему также на пружине прикрепляется другое тело массы m_1 .

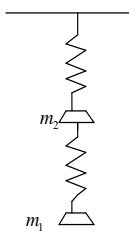


Рис.1.

Каковы должны быть масса m_1 второго тела и коэффициент упругости пружины, к которой оно прикреплено, чтобы тело массы m_2 не совершало колебаний с частотой ν вынуждающей силы f ?

Решение. За исходное положение примем положение равновесия этих двух тел. Обозначим через x и y вертикальные смещения центров тяжести этих тел во время колебаний. Обозначим силы упругости, действующие на два тела, соответственно через F_1 и F_2 . Согласно закону Гука, $F_1 = k_1(x - y)$, $F_2 = ky$, где k_1, k_2 - коэффициенты упругости пружин (растяжение нижней пружины равно разности $x - y$ смещения ее концов).

На тело массы m_1 действует сила $-F_1$, направленная вверх (при $x > y$); на тело массы m_2 кроме возмущающей силы f действует еще сила $-F_2$, направленная вверх (при $y > 0$), и сила F_1 , направленная вниз (при $x > y$). На основании второго закона Ньютона составляем уравнения движения:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -F_1; \quad m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = f(t) - F_2 + F_1,$$

или, учитывая выражения для F_1, F_2 и f , имеем

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_1y;$$

$$m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -k_2y + k_1(x - y) + u \sin vt.$$

Если обозначить $\frac{k_1}{m_1} = \alpha$; $-\frac{k_1}{m_1} = \beta$; $-\frac{k_1}{m_2} = \gamma$; $\frac{k_1 + k_2}{m_2} = \delta$;

$\frac{u}{m_2} = E$, то приходим к системе уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \beta y = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma x + \delta y = E \sin vt.$$

Дифференцируя дважды первое из этих уравнений и исключая y , для определения смещения $x(t)$ получаем линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + (\alpha + \delta) \frac{d^2 x}{dt^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma)x = -E\beta \sin vt.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению, есть $\lambda^4 + (\alpha + \delta)\lambda^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$. Отсюда

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-(\alpha + \delta) \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)}}{2}. \text{ Подкоренное выражение}$$

ние $(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma > 0$, поэтому выражения λ_1^2 и λ_2^2 - действительные. Так как $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -(\alpha + \delta) < 0$

и $\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \alpha\delta - \beta\gamma = \frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{k_2}{m_2} > 0$, то $\lambda_1^2 < 0, \lambda_2^2 < 0$. Обозначим

$\lambda_1^2 = -\omega_1^2$ и $\lambda_2^2 = -\omega_2^2$, найдем корни характеристического уравнения: $\lambda = \omega_1 i, \lambda = -\omega_1 i, \lambda = \omega_2 i, \lambda = -\omega_2 i$ и общее решение однородного уравнения запишем в виде

$$x(t) = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t + C_3 \sin \omega_2 t + C_4 \cos \omega_2 t$$

или $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$.

Величины ω_1 и ω_2 называются частотами собственных колебаний системы. Предполагая, что частота ν вынуждающей силы $f(t)$ отлична от ω_1 и ω_2 , частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $x_1 = a \sin vt$ (здесь нет смысла искать решение в виде $a \sin vt + b \cos vt$, так как неоднородное решение содержит только производные четного порядка, а в правой части нет члена с $\cos vt$).

Для определения постоянной a получим уравнение

$$(v^4 - (\alpha + \delta)v^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma))a = -\beta E.$$

Отсюда $a = -\frac{\beta E}{v^4 - (\alpha + \delta)v^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)}$. Следовательно, общее

решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x = \frac{\beta E}{v^4 - (\alpha + \delta)v^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)} \sin vt + A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2).$$

Так как из первого уравнения системы следует, что

$$y = -\frac{1}{\beta} \left(\alpha x + \frac{d^2 x}{dt^2} \right),$$

то подставляя в это выражение найденное

решение x , получим

$$y = \frac{(\alpha - v^2)E}{v^4 - (\alpha + \delta)v^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)} \sin vt + \frac{A_1(\omega_1^2 - \alpha)}{\beta} \sin(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{A_2(\omega_2^2 - \alpha)}{\beta} \sin(\omega_2 t + \theta_2).$$

Отсюда видно, что тело массы m_2 не будет совершать колебаний с частотой v вынуждающей силы, если $v^2 = \alpha$, то есть если $v = \sqrt{\alpha} = \sqrt{k_1 / m_1}$. Но $\sqrt{k_1 / m_1}$ - это собственная частота гасителя колебаний (тела массы m_1 , подвешенного на пружине с коэффициентом упругости k_1). Таким образом, чтобы мак-

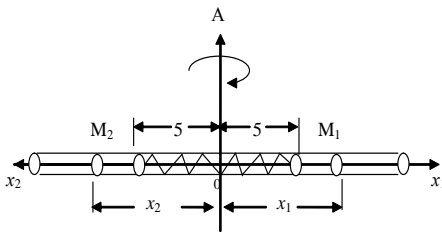


Рис.2.

симально уменьшить колебания тела массы m_2 , нужно массу m_1 и коэффициент упругости k_1 подобрать так, чтобы частота свободных колебаний гасителя совпада-

ла с частотой ν возмущающей силы.

3. (Движение шариков в трубке) Горизонтальная трубка вращается с угловой скоростью 2 рад/с вокруг вертикальной оси. В трубке находятся два шарика с массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 200$ г, соединенных легкой упругой пружиной длиной $l=10$ см, причем пружина не растянута и шарики одинаково удалены от оси вращения (рис.2). Шарики удерживаются в указанном положении некоторым механизмом. В начальный момент действие механизма прекращается и шарики приходят в движение. Найти закон движения каждого шарика относительно трубки, если известно, что сила 24000 дин растягивает пружину на 1 см.

Решение. Обозначим через x_1 координату (относительно трубки) более тяжелого шарика и через x_2 - более легкого, причем отсчет будем вести от оси вращения, выбрав на ней положительное направление вправо (рис. 2).

Если согласно условию задачи, принять $F_1 = kx$, где F_1 - сила, действия пружины на каждый из шариков, а x - деформация пружины, то $k = 24000$.

Составим дифференциальное уравнение относительного движения каждого из шариков:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 \omega^2 x_1 - k(x_1 - x_2 - 10), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 \omega^2 x_2 + k(x_1 - x_2 - 10). \end{cases}$$

Путем сложения обеих частей первого уравнения с соответствующими частями второго получим

$$m_1 x_1'' + m_2 x_2'' = \omega^2 (m_1 x_1 + m_2 x_2).$$

Обозначив $m_1x_1 + m_2x_2 = u$, получим уравнение $u'' - \omega^2u = 0$. Его общее решение $u = C_1\text{ch}\omega t + C_2\text{sh}\omega t$ или $3x_1 + 2x_2 = \bar{C}_1\text{ch}2t + \bar{C}_2\text{sh}2t$, где принято, согласно условию $\omega = 2$ и положено $C_1/100 = \bar{C}_1$, $C_2/100 = \bar{C}_2$. Начальные условия $x_1 = 5, x_1' = 0, x_2 = -5, x_2' = 0$ при $t = 0$.

Вычислим $3x_1' + 2x_2' = 2(\bar{C}_1\text{sh}2t + \bar{C}_2\text{ch}2t)$ и подставим сюда, а также в выражение $3x_1 + 2x_2$ их значения при $t = 0$. Тогда $\bar{C}_1 = 5, \bar{C}_2 = 0$ и, следовательно, $3x_1 + 2x_2 = 5(e^{2t} + e^{-2t})/2$, или $3x_1 + 2x_2 = 5\text{ch}2t$.

Находим отсюда $x_2 = \frac{5}{2}\text{ch}2t - \frac{3}{2}x_1$ и подставляем его в первое уравнение системы, преобразованное к виду

$$\begin{cases} x_1'' = -76x_1 + 80x_2 + 800, \\ x_2'' = 120x_1 - 116x_2 - 1200. \end{cases}$$

Подстановка исключает переменное x_2 и приводит к уравнению, содержащему только x_1 и x_1'' :

$$x_1'' = -76x_1 + 80\left(\frac{5}{2}\text{ch}2t - \frac{3}{2}x_1\right) + 800,$$

или $x_1'' + 196x_1 = 200\text{ch}2t + 800$. Общее решение однородного уравнения $X_1 = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t$. Частное решение \bar{x}_1 неоднородного уравнения будем искать в виде $\bar{x}_1 = A\text{ch}2t + B$.

Так как при этом $\bar{x}_1'' = 4A\text{ch}2t$, то, подставив \bar{x}_1 и \bar{x}_1'' в дифференциальное уравнение, получим тождество

$$200A\text{ch}2t + 196B = 200\text{ch}2t + 800,$$

откуда находим $A = 1$, а $B = 200/49$. Следовательно,

$\bar{x}_1 = \text{ch}2t + 200/49$ и общее решение x_1 запишется в виде

$$x_1 = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t + \text{ch}2t + 200/49.$$

Остается определить C_1 и C_2 . Начальные условия дают: $5 = C_1 + 1 + 200/49$, откуда $C_1 = -4/49$, $14C_2 = 0$, откуда $C_2 = 0$. Окончательно имеем закон движения шарика с массой 300г:

$$x_1 = \text{ch}2t - (4/49)\cos 14t + 200/49.$$

Для нахождения закона движения шарика с массой 200г подставим найденное выражение x_1 в выражение x_2 и получим $x_2 = \text{ch}2t + (6/49)\cos 14t - 300/49$.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

1. Исследовать устойчивость положений равновесия математического маятника с трением:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \sin x = 0, \quad k > 0.$$

Решение. Уравнение движения маятника эквивалентно системе уравнений $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -\sin x - 2ky$.

Положения равновесия этой системы определяются из уравнений $y = 0$, $\sin x + 2ky = 0$. Отсюда $x = n\pi$, $y = 0$, $n \in Z$. В силу периодичности правых частей системы уравнений по x , достаточно исследовать устойчивость двух ее решений: $x = 0$, $y = 0$ (решение соответствует нижнему положению равновесия маятника) и $x = \pi$, $y = 0$ (решение соответствует верхнему положению равновесия маятника).

Линеаризуем систему уравнений в окрестности точки $(0;0)$. Для этого выделим из функции $\sin x$ ее линейную часть:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Система первого приближения, соответствующая исходным уравнениям, имеет вид $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x - 2ky$.

Собственные числа матрицы коэффициентов этой системы определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0.$$

Так как, по условию, $k > 0$, то действительные части корней этого уравнения отрицательны. Следовательно, решение $x = 0$, $y = 0$ системы уравнений асимптотически устойчиво.

Исследуем теперь устойчивость верхнего положения равновесия маятника, то есть устойчивость решения $x = \pi$, $y = 0$ системы уравнений. Поскольку в окрестности точки $x = \pi$ справедливо разложение

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \dots,$$

Систему первых приближений, соответствующую уравнениям системы, запишем так:

$$\frac{d(x - \pi)}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - \pi - 2ky.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов этой системы определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2k - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения действительны и имеют разные знаки, поэтому решение $x = \pi, y = 0$ (верхнее положение маятника) неустойчиво.

2. Исследовать на устойчивость положение равновесия уравнения маятника $\frac{d^2 x}{dt^2} + k \sin x = 0, k > 0$.

Решение. Данное уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k \sin x.$$

Эта система имеет положение равновесия $(n\pi; 0)$. В силу периодичности правых частей системы уравнений по x , достаточно исследовать на устойчивость два положения равновесия: $(0; 0)$, соответствующее нижнему положению равновесия маятника, и $(\pi; 0)$, соответствующее верхнему положению маятника.

Система первого приближения, соответствующая исходной в окрестности положения равновесия $(x_0; 0)$ имеет вид

$$\frac{d(x - x_0)}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k \cos x_0 (x - x_0).$$

Собственные числа матрицы этой системы определяются из уравнения $\lambda^2 + k \cos x_0 = 0$.

Если $x_0 = \pi$, то характеристическое уравнение имеет действительные корни разных знаков, следовательно, положение равновесия $(\pi; 0)$, то есть верхнее положение равновесия маятника, неустойчиво.

Если $x_0 = 0$, то корни характеристического уравнения мнимые и на основании критерия устойчивости по первому при-

ближению нельзя сделать вывод об устойчивости или неустойчивости положения равновесия $(0; 0)$ исходной системы уравнений.

Рассмотрим положительно-определенную в окрестности точки $(0; 0)$ функцию

$$v(x, y) = \frac{y^2}{2} + k(1 - \cos x).$$

Ее производная по t , составленная в силу исходной системы уравнений, имеет вид $\frac{dv}{dt} = k \sin xy - ky \sin x \equiv 0$. Следовательно, положение равновесия $x = 0; y = 0$ устойчиво.

ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

1. В фазовой плоскости (x, \dot{x}) исследовать фазовые кривые уравнения маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$.

Решение. Запишем уравнение маятника в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x.$$

Положение равновесия системы - точки оси Ox с абсциссами $x = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$. Потенциальная энергия $\Pi(x) = -\cos x$ (рис. 3). Поскольку правая часть системы периодична по x с периодом 2π , достаточно исследовать фазовые кривые в вертикальной полосе фазовой плоскости шириной 2π , например в полосе $-\pi \leq x \leq \pi, -\infty < y < +\infty$.

Фазовые кривые вблизи начала координат похожи на эллипсы. Этим фазовым кривым соответствуют малые качания маятника. Их период мало зависит от амплитуды, пока она мала. При больших значениях полной энергии получаются большие замкнутые кривые, пока энергия не достигает критического значения, равного потенциальной энергии перевернутого ма-

ятника. Период колебаний при этом растет (так как время движения по сепаратрисам, из которых состоит критическое множество уровня, бесконечно).

Большим значениям энергии соответствуют незамкнутые кривые, на которых y не меняет знака, то есть маятник не качается, а вращается. Его скорость достигает наибольшего значения в нижнем, а наименьшего – в верхнем положении.

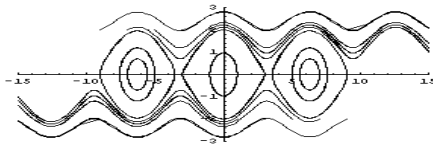


Рис. 3.

Заметим, что значения x , отличающиеся на $2k\pi$, соответствуют одинаковым положениям маятника. Поэтому фазовым пространством маятника

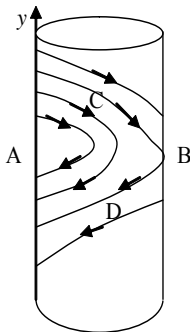


Рис.4.

естественно считать не плоскость, а цилиндр (рис. 4). Наворачивая на цилиндр нарисованную уже на плоскости картину, получим фазовые кривые маятника на поверхности цилиндра. Все они замкнутые гладкие кривые, исключая два положения равновесия: A, B (нижнее и верхнее) – и две сепаратрисы: C, D .

2. Построить линии уровня энергии и фазовые кривые следующих консервативных систем уравнений Ньютона:

$$2.1. \frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x - x^2. \quad 2.2. \frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = \sin 2x.$$

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Механические приложения. Пусть имеется плоская пластина, занимающая область (D) плоскости Oxy и имеющая поверхностную плотность $\gamma(x,y)$. Тогда масса M этой пластины вычисляется по формуле

$$M = \iint_{(D)} \gamma(x; y) dx dy,$$

а координаты ее центра тяжести – по формулам

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{(D)} x \cdot \gamma(x; y) dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_{(D)} y \cdot \gamma(x; y) dx dy.$$

Статические моменты M_x , M_y пластины относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \iint_{(D)} y \cdot \gamma(x; y) dx dy, \quad M_y = \iint_{(D)} x \cdot \gamma(x; y) dx dy,$$

а моменты инерции I_x , I_y пластины относительно осей Ox и Oy выражаются формулами

$$I_x = \iint_{(D)} y^2 \gamma(x; y) dx dy,$$

$$I_y = \iint_{(D)} x^2 \gamma(x; y) dx dy.$$

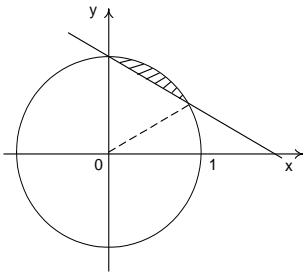


Рис. 5.

Момент инерции I_0 пластины относительно начала координат равен $I_0 = I_x + I_y$. Центробежный момент

I_{xy} пластины рассчитывается по

формуле $I_{xy} = \iint_{(D)} xy \gamma(x; y) dx dy$.

Если $\gamma \equiv 1$ (пластина однородная и ее плотность всюду равна 1), то моменты называются геометрическими моментами.

1. Найти центр тяжести (x_0, y_0) и геометрические моменты инерции однородной плоской фигуры ($\gamma \equiv 1$), заданной неравенствами $y \geq 1 - x/\sqrt{3}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Решение. Построим область (D) (рис. 5). Для вычисления требуемых величин удобно перейти к полярным координатам.

Уравнениями линий, ограничивающих (D), будут $\rho = 1$ и

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi}. \text{ Найдем пределы изменения переменного}$$

$$\varphi, \text{ для чего решим уравнение } 1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi} \text{ или}$$

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Отсюда находим } \varphi_1 = \pi/6 \text{ и } \varphi_2 = \pi/2. \text{ Таким}$$

образом, область (D) в полярных координатах определяется

$$\text{системой неравенств } \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi} \leq \rho \leq 1.$$

Поэтому

$$M = \iint_{(G)} \rho d\varphi d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi}}^1 \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(1 - \frac{3}{(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)^2}\right) d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2 - \varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iint_{(D)} x dx dy = \frac{1}{M} \iint_{(G)} \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho = \\ &= \frac{12}{2\pi - 3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi}}^1 \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{4}{2\pi - 3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\cos \varphi - \frac{3\sqrt{3} \cos \varphi}{(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)^3} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{4}{2\pi - 3\sqrt{3}} \left(\sin \varphi + \frac{3}{2(\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \varphi + 1)^2} \right) \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2 - \varepsilon} = \frac{1}{2(2\pi - 3\sqrt{3})}; \\
y_0 &= \frac{1}{M} \iint_{(D)} y dx dy = \frac{1}{M} \iint_{(G)} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho = \\
&= \frac{12}{2\pi - 3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi}}^1 \rho^2 d\rho = \\
&= \frac{4}{2\pi - 3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\sin \varphi - \frac{3\sqrt{3} \sin \varphi}{(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)^3} \right) d\varphi = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{4}{2\pi - 3\sqrt{3}} \left(-\cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} - \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1)^2} \right) \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2 - \varepsilon} = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2(2\pi - 3\sqrt{3})};
\end{aligned}$$

$$M_x = M \cdot y_0 = \frac{\sqrt{3}}{24}, \quad M_y = M \cdot x_0 = \frac{1}{24};$$

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(D)} y^2 dx dy = \iint_{(G)} \rho^3 \sin^2 \varphi d\varphi d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi}}^1 \rho^3 d\rho = \\
&= \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\sin^2 \varphi - \frac{9 \sin^2 \varphi}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{8} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi - \\
&- \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} \right) \frac{\sqrt{3} d\varphi}{\cos^2 \varphi} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1}^2 + \frac{\sqrt{3}}{3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1}^3 \right]_{\pi/6}^{\pi/2 - \varepsilon} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{24}.$$

Аналогично находим

$$I_y = \iint_{(D)} x^2 dx dy = \iint_{(G)} \rho^4 \cos^2 \varphi d\varphi d\rho = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{48},$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{4\pi - 5\sqrt{3}}{48},$$

$$I_{xy} = \iint_{(D)} xy dx dy = \iint_{(G)} \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\rho = \frac{1}{32}.$$

2. Найти момент инерции I_z тела, образованного общей частью шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ и конуса $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$, если плотность тела равна единице (рис.6).

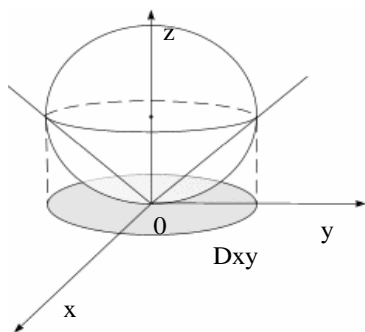


Рис.6.

Решение. Момент инерции I_z определяется формулой

$$I_z = \iiint_V x^2 + y^2 dV.$$

Первый способ. Вычислим интеграл в цилиндрической системе координат. Очевидно, D_{xy} является кругом $x^2 + y^2 \leq R^2$. Запишем уравнения сферы и конической по-

верхности в цилиндрической системе координат:

$$\rho^2 + z - R^2 = R^2 \text{ и } \rho = z.$$

Получим

$$I_z = \iint_{D_{xy}} \rho d\rho d\varphi \int_0^{R+\sqrt{R^2-\rho^2}} \rho^2 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 (R+\sqrt{R^2-\rho^2}-\rho) d\rho = \frac{11}{30} \pi R^5.$$

Второй способ. Вычислим интеграл в сферической системе координат. Запишем уравнения сферы и конической поверхности в сферической системе координат: $r = 2R \cos \theta$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Получим

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2R \cos \theta} r^4 \sin^3 \theta dr = \frac{11}{30} \pi R^5.$$

3. Найти центр тяжести пластины, представляющей собой часть эллипса $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ (рис. 7), если ее плотность равна единице.

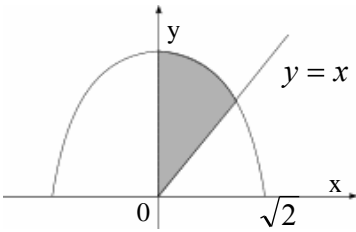


Рис. 7.

Решение. Координаты центра тяжести вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_D x dx dy,$$

$$y_c = \frac{1}{S} \iint_D y dx dy, \quad S = \iint_D dx dy.$$

Введем обобщенную полярную систему координат по формулам $x = \sqrt{2} \rho \cos \varphi$, $y = 2 \rho \sin \varphi$. Координатными линиями $\rho = \text{const}$ будут эллипсы

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = \rho^2$, а координатными линиями $\varphi = \text{const}$ – лучи $\frac{1}{\sqrt{2}}y = x \operatorname{tg} \varphi$. Поэтому уравнение эллипса в новой системе за-

писется как $\rho = 1$, уравнение прямой $y = x$ как $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а

уравнение прямой $x = 0$ как $\varphi = \pi/2$. Вычислим якобиан

$$I = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \cos \varphi & 2 \sin \varphi \\ -\sqrt{2} \rho \sin \varphi & 2 \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} \rho.$$

Перейдем в полярную систему координат и найдем

$$S = \iint_D dx dy = \int_{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2\sqrt{2} \rho d\rho = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 1,33,$$

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2\sqrt{2} \rho \cdot \sqrt{2} \rho \cos \varphi d\rho \approx 0,424.$$

Упражнение. Вычислить y_c .

4. Найти площадь, ограниченную эллипсами

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u} = a^2 \quad (u=1, u=2) \text{ и гиперболами } \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = a^2$$

($v = 1, v = 2$), если $x > 0, y > 0$.

Решение. Сделаем замену

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v. \quad (*)$$

Функция, заданная уравнениями (*), отображает область D (рис.8) на область D' (рис.9). При этом граница области D переходит в границу области D' . Нетрудно убедиться, что эл-

липсы переходят в прямые $u = 1, u = 2$, а гиперболы – в прямые $v = 1, v = 2$.

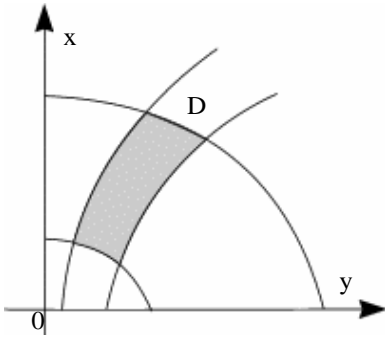


Рис. 8.

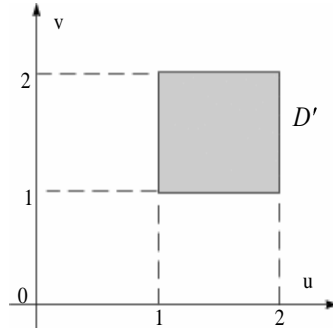


Рис. 9.

Так что область D отображается в квадрат.

Найдем якобиан
$$I = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ch} 2u - \cos 2v .$$

Переходя к новым координатам u, v , найдем

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} |I| du dv = \frac{1}{2} a^2 \int_1^2 du \int_1^2 \operatorname{ch} 2u - \cos 2v dv = \\ &= \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 4 - \operatorname{sh} 2 - \sin 4 + \sin 2 . \end{aligned}$$

5. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми:

5.1. $x + y = 4, y = 0,5x^2$;

5.2. $\frac{(x-3)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{4} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2}$;

5.3. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ ($x > 0, y > 0$).

Ответ: 5.1. $x_0 = -1, y_0 = 3,2$; 5.2. $x_0 = 4,5, y_0 = -1$;

5.3. $x_0 = y_0 = \pi a / 8$.

6. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, если ее плотность в точке $M(x, y)$ пропорциональна расстоянию от точки M до точки $A(a, 0)$.

Ответ: $x_0 = -a/5, y_0 = 0$.

7. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy однородной пластинки с плотностью $\rho = \rho_0$, ограниченной кривыми:

7.1. $x = 0, y = 0, x = a, y = b$ ($a > 0, b > 0$);

7.2. $y = 0, y = x, y = 2 - x$;

7.3. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2, x = 0, y = 0$ ($0 \leq x \leq a$);

7.4. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

Ответ: 7.1. $I_x = ab^3 \rho_0 / 3, I_y = a^3 b \rho_0 / 3$;

7.2. $I_x = \rho_0 / 6, I_y = 7 \rho_0 / 6$; 7.3. $I_x = I_y = a^4 (1 - \frac{5\pi}{16}) \rho_0$;

7.4. $I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}} \rho_0$.

8. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy однородной пластинки с плотностью $\rho = xy$, ограниченной кривыми:

8.1. $x = 0, y = 0, x = a, y = b$ ($a > 0, b > 0$);

8.2. $y = 0, y = x, y = 2 - x$.

Ответ: 8.1. $I_x = a^2 b^4 / 8, I_y = a^4 b^2 / 8$; 8.2. $I_x = 0, I_y = 13/30$.

9. Шар радиуса a погружен в жидкость постоянной плотности ρ , причем центр шара находится на расстоянии h от

уровня жидкости и $h \geq a$. Найти силы давления P_g и P_n на верхнюю и нижнюю полусферы этого шара.

Ответ: $P_n = \pi a^2 \rho (h - \frac{2}{3} a)$; $P_g = \pi a^2 \rho (h + \frac{2}{3} a)$.

10. Доказать, что если в плоскости, где расположена пластинка G массы m , взяты две параллельные оси x и x' на расстоянии a друг от друга, причем первая из них проходит через центр тяжести пластинки G , то моменты инерции пластинки G относительно этих осей связаны соотношением $I_{x'} = I_x + ma^2$.

Ответ: Взяв ось x в качестве оси абсцисс, получаем $I_{x'} = \iint_G (y-a)^2 \rho(x, y) dx dy = I_x - 2aM_x + a^2m$. Так как, по условию $M_x = 0$, то приходим к равенству $I_{x'} = I_x + ma^2$.

11. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$, если плотность тела изменяется по закону: 11.1. $\rho = \rho_0$; 11.2. $\rho = \rho_0|1+x|$; 11.3. $\rho = \rho_0 y^2|1+x|$ ($\rho_0 = const$).

Ответ: 11.1. $4\pi\rho_0$; 11.2. $128\rho_0/15$; 11.3. $1408\rho_0/105$.

12. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями:

12.1. $x^2 + z^2 = a^2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$ ($z \geq 0$);

12.2. $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$);

12.3. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, $z = 0$ ($p > 0$);

12.4. $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x + y = 1$, $x + y = -1$,

$$x - y = 1, x - y = -1.$$

Ответ: 12.1. $x_0 = 0, y_0 = 2, z_0 = 2a^2/5$;

12.2. $x_0 = y_0 = 16\sqrt{3}/(15\pi), z_0 = 2$;

12.3. $x_0 = 7p/18, y_0 = 0, z_0 = 7p/176$; 12.4. $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 7/20$.

13. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5, z = 2$, если плотность тела изменяется по закону: 13.1. $\rho = \rho_0$;

13.2. $\rho = \rho_0((x+2)^2 + (y-1)^2)$;

13.3. $\rho = \rho_0 z(x^2 + y^2)$ ($\rho_0 = const$).

Ответ: 13.1. $x_0 = -2, y_0 = 1, z_0 = 4/3$;

13.2. $x_0 = -2, y_0 = 1, z_0 = 2/3$;

13.3. $x_0 = 32/13, y_0 = 16/13, z_0 = 33/65$.

14. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела плотности ρ_0 , ограниченного поверхностями:

14.1. $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = 2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) - 1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$);

14.2. $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2$;

14.3. $z = 4 - x^2 - y^2, z = 1, x = 0, y = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

Ответ: 14.1. $I_{xy} = (4/15)\pi\rho_0 abc^3, I_{xz} = (4/15)\pi\rho_0 ab^3 c,$

$I_{yz} = (4/15)\pi\rho_0 a^3 bc,$ 14.2. $I_{xy} = \pi\rho_0/5, I_{xz} = I_{yz} = \pi\rho_0/20$;

14.3. $I_{xy} = 81\pi\rho_0/16, I_{xz} = I_{yz} = 9\pi\rho_0/16$.

15. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей тела:

15.1. плотности $\rho = \frac{\rho}{x^2 + y^2 + z^2}$ ($\rho_0 = const$), ограниченно-

го поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0);$$

15.2. плотности $\rho = \frac{35}{128} z^2$, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

Ответ: 15.1. $I_{xy} = (4/9)\pi\rho_0 abc^3$, $I_{xz} = (4/9)\pi\rho_0 ab^3 c$,

$$I_{yz} = (4/9)\pi\rho_0 a^3 bc, \quad 15.2. I_{xy} = 75\pi, \quad I_{xz} = 62\pi, \quad I_{yz} = 50\pi.$$

16. Найти моменты инерции относительно осей координат и начала координат однородного тела плотности ρ_0 , ограниченного поверхностями:

$$16.1. z = (x^2 + y^2 + z^2)^2; \quad 16.2. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ответ: 16.1. $I_x = I_y = 0,15\pi\rho_0$, $I_z = 0,1\pi\rho_0$, $I_0 = 0,2\pi\rho_0$;

$$16.2. I_x = I_y = \pi\rho_0 a^5 (16 - 7\sqrt{2})/60, \quad I_z = \pi\rho_0 a^5 (8 - 5\sqrt{2})/30,$$

$$I_0 = \pi\rho_0 a^5 (2 - \sqrt{2})/5.$$

17. Определить момент инерции относительно начала координат тела плотности $\rho = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2)$, где $\rho_0 = const$, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$.

Ответ: $5\pi^2 \rho_0 / 64$.

18. Пусть T - однородный цилиндр плотности ρ_0 с высотой h и радиусом основания R . Найти силу притяжения этим цилиндром материальной точки массы m_0 , находящейся в центре основания цилиндра.

$$\begin{aligned}
 \text{Ответ: } F_x &= \gamma \iiint_T \frac{\rho_0 m_0 x}{r^3} dx dy dz = \\
 &= \gamma \rho_0 m_0 \iint_{\substack{-R \leq y \leq R \\ 0 \leq z \leq h}} dy dz \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0; F_y = 0; \\
 F_z &= \gamma \rho_0 m_0 \iiint_T \frac{z}{r^3} dx dy dz = \gamma \rho_0 m_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} dx dy \int_0^h \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \\
 &= \gamma \rho_0 m_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) dx dy = \\
 &= 2\pi \gamma \rho_0 m_0 (R + h - \sqrt{R^2 + h^2}).
 \end{aligned}$$

ТЕОРИЯ ПОЛЯ. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ГРАДИЕНТ

1. Найти градиент центрального симметричного поля.

Решение. Это означает, что поле зависит только от $|\vec{r}|$ и не зависит от направления \vec{r} , т.е.

$$U = f(r), \text{ где } \vec{r} = x, y, z, \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{Находим } \frac{\partial U}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{|\vec{r}|}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{|\vec{r}|}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial z} = f'(r) \frac{z}{|\vec{r}|}.$$

$$\text{Тогда } \overline{\text{grad}U} = f'(r) \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{|\vec{r}|} = f'(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Следовательно, $\overline{\text{grad}U} = f'(r)\vec{r}^0$.

2. Найти градиент цилиндрического поля $U = f(\rho)$.

Решение. Формула для вычисления \overline{gradU} в цилиндрических координатах записывается в виде:

$$\overline{gradU}(\rho, \phi, z) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{\partial U}{\partial \phi} \bar{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{e}_z.$$

Так как цилиндрическое поле не зависит от ϕ и z , то для него:

$$\overline{gradU}(\rho) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \bar{e}_\rho = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \frac{\bar{\rho}}{|\rho|},$$

где $\bar{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j}$ - радиус вектор на плоскости xOy .

3. Найти градиент сферического поля $U(r)$.

Решение. Формула для вычисления градиента в сферических координатах записывается следующим образом:

$$\overline{gradU}(r, \theta, \phi) = \frac{\partial U}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \phi} \bar{e}_\phi.$$

Так как для сферического поля $U = U(r)$, то есть не зависит от

ϕ и θ , то $\overline{gradU}(r) = \frac{\partial U}{\partial r} \bar{e}_r = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$, где

$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ - радиус-вектор точки $P(x, y, z)$.

4. Определить поверхности уровня, градиент и производную по направлению $\bar{S} = e\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ скалярного поля, образованного точечным зарядом q , помещенным в начале координат.

Решение. Из электростатики известно, что потенциал в точке $M(x, y, z)$ равен:

$$U(x, y, z) = \frac{q}{|\bar{r}|} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ где}$$

$|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние от точки M до начала координат. Так как поверхности уровня скалярного поля $U(x, y, z)$ определяются уравнениями:

$$U(x, y, z) = C \quad (C \in R), \text{ то } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{C_1^2} = C^2.$$

Таким образом, поверхности уровня – семейство сфер с центрами в начале координат. Применяя правило дифференцирования сложной функции, и используя формулу $\overline{\text{grad}U}$, получим

$$\overline{\text{grad}U} = -\frac{q}{|\bar{r}|^2} \cdot \frac{x}{|\bar{r}|} \bar{i} - \frac{q}{|\bar{r}|^2} \cdot \frac{y}{|\bar{r}|} \bar{j} - \frac{q}{|\bar{r}|^2} \cdot \frac{z}{|\bar{r}|} \bar{k} = -\frac{q}{|\bar{r}|^2} \bar{r}^0,$$

где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ - радиус-вектор точки $M(x, y, z)$.

Вектор $\bar{E} = -\frac{q \cdot \bar{r}^0}{|\bar{r}|^2}$ называется вектором напряженности рассматриваемого поля в точке M . Точка, в которой сосредоточен заряд q - особая точка поля.

Итак, поле точечного заряда является полем градиента

$$\bar{E} = -\overline{\text{grad}\left(\frac{q}{|\bar{r}|}\right)}.$$

Для нахождения производной по направлению воспользуемся формулой:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \overline{\text{grad}U} \cdot \bar{S}^0, \text{ где } \bar{S}^0 = \frac{\bar{S}}{|\bar{S}|} = \left\{ \frac{e}{|\bar{S}|}, \frac{m}{|\bar{S}|}, \frac{n}{|\bar{S}|} \right\}.$$

В нашем случае получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = -q \cdot \frac{xe + ym + zn}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3 \cdot \sqrt{e^2 + m^2 + n^2}} = -\frac{\bar{E} \cdot \bar{S}}{|\bar{S}|}.$$

5. Найти силовые (векторные) линии магнитного поля, созданного постоянным электрическим током силы J , текущем по бесконечно длинному однородному проводу.

Решение. Пусть провод совпадает с осью Oz и ток течет в положительном направлении оси Oz . Тогда вектор магнитного поля будет выражаться формулой:

$$\bar{H} = 2I \cdot \frac{-y\bar{i} + x\bar{j}}{x^2 + y^2} = \frac{-2Iy}{x^2 + y^2} \bar{i} + \frac{2Ix}{x^2 + y^2} \bar{j}.$$

Следовательно, уравнения векторных линий будут иметь вид:

$$\frac{\partial x}{H_x} = \frac{\partial y}{H_y} = \frac{\partial z}{H_z}. \text{ Но } H_z = 0, \text{ следовательно, } \partial z = 0, z = C_1 \text{ и}$$

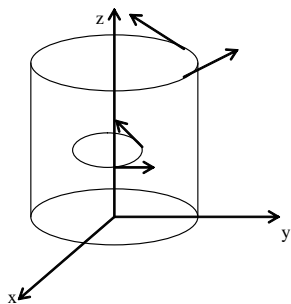


Рис.10.

$$\frac{dx}{-2Iy / (x^2 + y^2)} = \frac{dy}{2Ix / (x^2 + y^2)} = \frac{dz}{0}.$$

или $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, dz = 0$. Отсюда получа-

ем систему уравнений $x dx = -y dy$; $dz = 0$, решая которую найдем семейство уравнений векторных линий напряженности магнитного поля

$$x^2 + y^2 = R^2, z = C.$$

Постоянные C и R определяются из условия прохождения векторной линии через определенную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Через любую точку не лежащую на оси Oz , проходит единственная векторная линия, представляющая собой окружность, лежащую в плоскости, параллельной плоскости xOy . Векторное

поле – это совокупность всех касательных векторов к этим окружностям (рис. 10).

6. Жидкость течет со скоростью $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + 8\vec{k}$. Какое количество жидкости протекает в единицу времени через ту часть параболоиды $z = x^2 + y^2$, которая отсечена плоскостью $z = 4$ и лежит в правом октанте.

Ответ: $\Pi = 4\pi$.

7. Электрическое поле образовано заряженным шаром с центром в начале координат и радиусом R . Найти поток вектора напряженности \vec{E} , если объемная плотность зарядов $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность σ будет:

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 4\pi \cdot q, \text{ где } q - \text{ полный заряд}$$

$$q = \iiint_V \rho dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta \cdot \int_0^R \rho \cdot \rho^2 \cdot d\rho =$$

$$= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = \pi R^4$$

$$\Pi = 4\pi \cdot \pi R^4 = 4\pi^2 R^4.$$

8. Векторное поле представляет собой поле точечного заряда. Найти поток вектора индукции электрического поля заряда через замкнутую поверхность в двух случаях:

а) если поверхность ограничивает объем, который не содержит заряда;

б) поверхность содержит внутри себя заряд.

Решение. Из физических соображений, очевидно, что поток в случае а) равен нулю, поскольку в объеме нет источ-

ника, а в случае б) будет равен величине заряда источника. Докажем это.

а) Во всем объеме $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, тогда по формуле Остроградского

$$I = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 0$$

б) Совместим с зарядом начало координат. Область, ограниченная поверхностью σ , содержит начало координат. Возьмем сферу Σ с центром в начале координат. Тогда величина потока через эту сферу будет равна величине потока через σ , так как между ними нет зарядов, и, следовательно, $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Действительно, поток через замкнутую поверхность $\sigma + \Sigma^-$ равен нулю (по формуле Остроградского), а потому

$$I_{\sigma + \Sigma^-} = 0; \quad I_{\sigma} = -I_{\Sigma^-} = I_{\Sigma}.$$

Таким образом, достаточно найти поток через сферу Σ произвольного радиуса R .

Поле точечного заряда имеет вид $\vec{F} = -\frac{c}{|\vec{r}|^2} \vec{r}^0$. Орт \vec{n}^0 внешней нормали к сфере Σ равен \vec{r}^0 , поэтому

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \vec{F} \vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{c}{|\vec{r}|^2} (\vec{r}^0, \vec{n}^0) \Big|_{r=R} d\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{c}{R^2} d\sigma = \frac{c}{R^2} 4\pi R^2 = \\ &= 4\pi c = q, \text{ где } q - \text{ заряд. Векторное поле } \vec{F} = \frac{q}{4\pi |\vec{r}|^2} \vec{r}^0. \end{aligned}$$

Вывод. Поток вектора индукции точечного заряда равняется величине заряда, если поток вычисляется по замкнутой поверхности, содержащей внутри себя заряд.

9. Вычислить объемную плотность заряда в точке $P(1,2,4)$, если вектор индукции электрического поля

$$\vec{E} = (x^2\sqrt{z} + y)\vec{i} + xy^2\vec{j} - 2x^2z\vec{k}.$$

Решение. Расходимость вектора индукции электрического поля вычисляется по формуле $\operatorname{div}\vec{E} = (4\pi / \varepsilon)\rho$, где

ε - диэлектрическая постоянная, ρ - объемная плотность. От-

сюда, $\rho = \frac{\varepsilon}{4\pi} \operatorname{div}\vec{E}$. Но $\operatorname{div}\vec{E} = 2x\sqrt{z} + 2xy - 2x^2$. Тогда

$$\rho = 3\varepsilon / 2\pi.$$

10. Жидкость течет со скоростью $\vec{v} = 2x^3\vec{i} + 2y^3\vec{j} - 3z^2\vec{k}$.

Найти поверхность, отделяющую источники от стоков.

Указания. В каждой точке поверхности, отделяющей источник от стоков, $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

Ответ: $z = x^2 + y^2$ - круговой параболоид.

11. Абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω . Изучить векторное поле скоростей $\vec{F} = \vec{v}$.

Указание. Требуется найти ротор вектора \vec{v} , где $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{\omega} = 0, 0, \omega$.

Ответ. $\operatorname{rot}\vec{v} = 2\omega\vec{k}$.

12. В начале координат расположена масса m , притягивающая по закону Ньютона материальную точку (x, y, z) с массой, равной единице. Доказать, что вектор силы потенциальный (всюду, кроме начала координат) и найти потенциал.

Указание. Использовать закон всемирного тяготения Ньютона: $\vec{F} = \gamma m \left\{ -\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right\}$. Ответ. $\vec{v} = \frac{\gamma m}{r} + c$.

13. Доказать, что магнитное поле является лапласовым полем и найти его потенциал и циркуляцию.

Указание $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$.

Решение. Легко проверить, что $\operatorname{div}\vec{H} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{H} = 0$.

Найдем потенциал

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_{M_0M} \vec{H}d\vec{r} = \frac{I}{2\pi} \int_{M_0M} -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{I}{2\pi} \int_{M_0}^M \frac{dy/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{I}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при переходе через плоскость $x=0$ потенциал претерпевает скачок от $-I/4$ до $I/4$. Вычислим циркуляцию вдоль контура L , который охватывает ось Oz . Она не зависит от выбора контура L , поэтому в качестве L возьмем окружность радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ или $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = 0$. Тогда

$$\mathcal{C} = \oint_L \vec{H}d\vec{r} = I. \text{ Если замкнутый контур не охватывает ось}$$

Oz , то $\mathcal{C}=0$. (Почему?)

14. Показать, что если $\vec{\omega}$ - постоянный вектор, то векторное поле $\vec{F}(M) = |\vec{r}|(\vec{\omega} \times \vec{r})$ соленоидально. Найти один из векторных потенциалов этого поля.

Решение. Проверим, что $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F} &= \vec{\nabla}r(\vec{\omega} \times \vec{r}) - (\vec{\nabla}r)(\vec{\omega} \times \vec{r}) + r\vec{\nabla}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= \vec{\nabla}r(\vec{\omega} \times \vec{r}) - r\vec{\omega}\vec{\nabla}r + r\vec{r}(\vec{\nabla}\vec{\omega}) = 0. \end{aligned}$$

Векторное поле $\vec{W}(M)$ называется векторным потенциалом поля $\vec{F}(M)$, если $\vec{F}(M) = \operatorname{rot}\vec{W}(M)$. Если ось Oz направить по направлению вектора $\vec{\omega}$, то

$$\vec{F}(M) = r \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = r\omega(-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

Для определения координат W_x, W_y, W_z вектора \vec{W} получим систему уравнений:

$$\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} = r\omega_y, \quad \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} = r\omega_x, \quad \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} = 0.$$

Так как векторный потенциал определяется с точностью до $\text{grad } f(M)$, где $f(M)$ - скалярное поле, то полагаем $W_y = 0$,

тогда $W_x = \psi(x, z)$, $W_z = -\frac{\omega}{3}r^2 + f(x, z)$. Из второго уравнения

следует, что $\frac{\partial W_z}{\partial x} = -\omega_x z + \frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial W_x}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z}$. Отсюда

$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}$. Если $\psi(x, y) = f(x, y) = 0$, то находим один из век-

торных потенциалов $\vec{W} = -\frac{\omega}{3}r^3\vec{k} = -1/3r^3\vec{\omega}$.

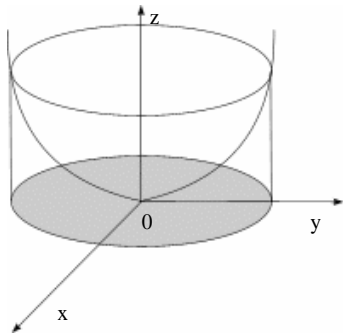


Рис. 11.

15. Определить суммарный электрический заряд Q , равномерно распределенный на части поверхности параболоида $2az = x^2 + y^2$, вырезанной из него цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Очевидно,

$$Q = \iint_{\sigma} \gamma d\sigma, \quad \text{где } \gamma \text{ — плотность}$$

распределения заряда. Сведем по-

верхностный интеграл к двойному по области D_{xy} , где D_{xy} – круг $x^2 + y^2 \leq a^2$.

$$Q = \gamma \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \gamma \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} x^2 + y^2} dx dy = \\ = (2/3) \pi \gamma a^2 2\sqrt{2} - 1 .$$

16. Найти количество жидкости, протекающей за единицу времени через часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенную в первом октанте, если скорость течения жидкости

$$\vec{v} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \rho = 1.$$

Решение. $m = \iint_{\sigma} \vec{v} d\vec{\sigma}$. Пусть \vec{n}^0 – единичный вектор данной

плоскости, т.е. $\vec{n}^0 = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$, тогда

$$d\sigma = dx dy / \cos \gamma = (\sqrt{14} / 3) dx dy,$$

а $\vec{v} d\vec{\sigma} = d\sigma \cdot (\vec{v}, \vec{n}^0) = \frac{1}{3} (2x + 2y + 3z) dx dy$. Таким образом, по-

лучим $m = \iint_{\sigma} \vec{v} d\vec{\sigma} = \frac{1}{3} \iint_{\sigma} (2x + 2y + 3z) dx dy$. Выражая z из

уравнения плоскости через x и y и подставляя его в последний интеграл, сведем его к двойному.

$$m = \frac{1}{3} \iint_{D_{xy}} (x + 6) dx dy = \frac{1}{3} \int_0^6 (x + 6) dx \int_0^{3-\frac{1}{2}x} dy = 24.$$

Упражнение. Найти количество жидкости, протекающее через части координатных плоскостей, отсекаемые плоскостью $x + 2y + 3z = 6$.

Ответ. $m_x = m_y = m_z = 0$.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Функция Дирака $\delta(t)$ определяется так

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \delta(t) = \eta'(t)$$

Чему равно изображение $\delta(t - \tau)$, $\delta^{(n)}(t)$?

2. Найти изображение периодического сигнала

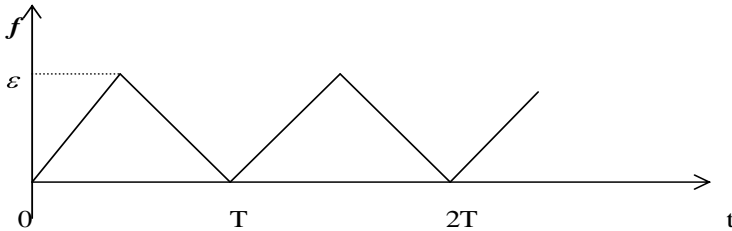


Рис. 12.

3. К электрическому контуру, в котором последовательно включены самоиндукция L , омическое сопротивление R и емкость C , приложена постоянная ЭДС: $l(t) = a$, $a - \text{const}$. Найти ток i в цепи как функцию времени t и заряд конденсатора, если в начальный момент ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

4. Найти свертку сигналов $f(t)$ и $g(t)$. Построить её график.

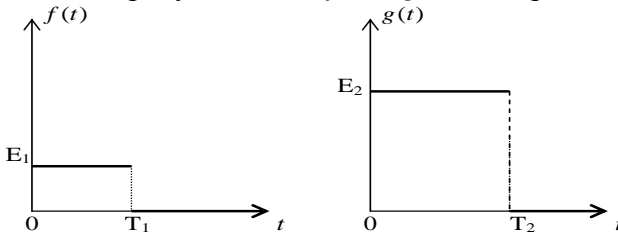


Рис. 13.

5. В момент времени $t_1 = a$ к последовательности RC цепи подключается ЭДС в виде экспоненциального импульса $l(t) = Ee^{-\beta t}$. Найти закон изменения тока в цепи.

6. Получить передаточную функцию по цепи возбуждения генератора постоянного тока, работающего на холостом ходу, а также временные и частотные характеристики как звена системы автоматического регулирования.

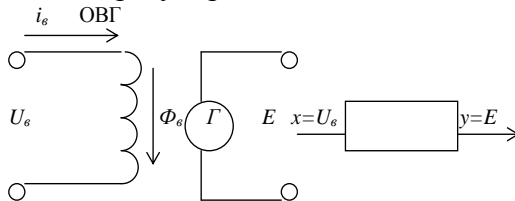


Рис. 14.

7. Требуется построить характеристику переходного процесса импульсной системе регулирования с одним импульсным элементом.

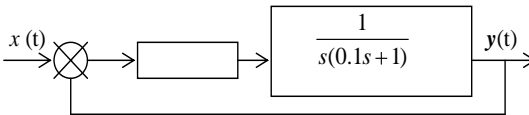


Рис. 15.

Пусть $h_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ - произвольная последовательность чисел. Ступенчатой функцией, порожденной последовательностью h_n , назовем функцию $f(t)$ на $0, +\infty$, определяемую равенствами $f(t) = h_n$ на $n, n+1$ $n = 0, 1, 2, \dots$.

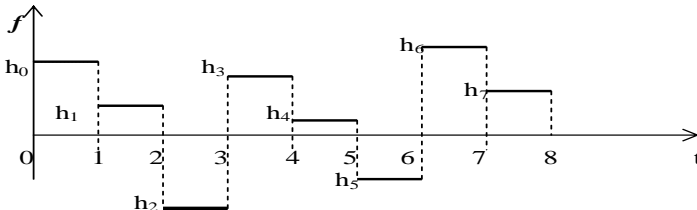


Рис. 16.

Если последовательность h_n такова, что степенной ряд с

коэффициентами h_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ имеет радиус сходимости отличный от нуля, то ступенчатая функция является оригиналом (необходимое и достаточное условие). Иначе говоря, числа $\sqrt[n]{|h_n|}$, ($n = 1, 2, \dots$) должны быть ограничены в совокупности. Ступенчатый оригинал называется единичным импульсом $\delta(t)$,

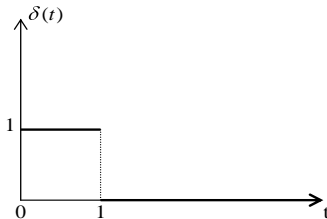


Рис. 17.

Если $h_0 = 1$, $h_n = 0$, ($n = 1, 2, \dots$).

Очевидно, что $\delta(t) = \eta(t) - \eta(t-1)$ (покажите это графически). Зная свойства оригиналов, легко получить изображение единичного импульса $\Delta_1(p)$:

$$\Delta_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1 - e^{-p}}{p}.$$

Пусть теперь $f(t)$ - ступенчатый оригинал, порожденный последовательностью h_n . Тогда, если ступенчатый ряд

$H(z) = \sum_0^{\infty} h_n z^n$ сходится при $|z| < R$, то $F(p)$ определяется в

полуплоскости $\operatorname{Re} p > \ln \frac{1}{R}$ и

$$F(p) = \Delta_1(p)H(e^{-p}), \quad (1)$$

то есть изображение ступенчатой функции имеет вид

$$F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p} \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-np}.$$

Обратное утверждение: функция вида (1), где $H(z)$ аналитична в окрестности нуля, является изображением ступенчатого оригинала, порождаемого коэффициентами разложения $H(z)$ по степеням z .

Пример. Пусть $h_n = n$. Тогда $H(z) = \sum_0^{\infty} nz^n = \frac{z}{1-z^2}$.

Здесь мы воспользовались следующим

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} nz^n &= z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n + \dots = \\ &= z(1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} + \dots) \end{aligned}$$

Обозначим через $S(z)$ сумму ряда

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} + \dots \quad (2)$$

Интегрируя почленно ряд (2), получим ряд

$$z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots \quad (3)$$

Сумма ряда (3) равна $\frac{z}{1-z}$, как сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $|z| < 1$, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} \quad (4)$$

Дифференцируя обе части равенства (4), получим

$$S(z) = \left(\frac{z}{1-z} \right)' = \frac{1}{1-z^2}, \text{ а следовательно } \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{1-z^2}.$$

$$\text{Тогда } F(p) = \frac{1-e^{-p}}{p} \cdot \frac{e^{-p}}{1-e^{-p_0}^2} = \frac{1}{p(e^p-1)}.$$

Замечание. Если вместо ступенчатого оригинала рассматривать на $[0; +\infty)$ оригинал $f(t)$ более общего вида, определяемый равенствами

$$f(t) = h_n \cdot \varphi(t-n) \text{ на } n, n+1 \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varphi(t)$ – оригинал, заданный на промежутке $0, 1$ произвольным образом и равный нулю вне этого промежутка, то

$$F(p) = H(e^{-p}) \cdot \int_0^1 \varphi(t) e^{-pt} dt \quad (5)$$

Отсюда видно, что (5) получается из (1) при замене $\Delta_1(p)$ - изображения единичного импульса $\delta(t)$ на $\int_0^1 \varphi(t) e^{-pt} dt$ - изображение функции $\varphi(t)$.

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Операционный метод применим не только при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, но и некоторых уравнений с частными производными, например, линейных уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда известная функция зависит от двух переменных. С помощью преобразования Лапласа такое уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром. Решая это уравнение и применяя к его решению обратное преобразование Лапласа по параметру, получаем решение исходной задачи.

Задача 1. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + u = x, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \quad (6)$$

$$u(0, y) = y, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Решение. Предположим, что функция $u(x, y)$ и ее частные производные являются оригиналами по переменной x . Приме-

ним к (6) преобразование Лапласа по x при каждом значении y . Учитывая, что $u(x, y) = U(p, y)$,

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = p^2 U(p, y) - py, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad x = \frac{1}{p^2}, \quad \text{получим для}$$

функции $U(p, y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром p :

$$\frac{dU(p, y)}{dy} - (p^2 + 1) \cdot U(p, y) = -py - \frac{1}{p^2}, \quad 0 < y < \infty. \quad (9)$$

Все условия задачи уже использованы. Но из всех решений уравнения (9) нам понадобится только такое, которое как функция параметра p является изображением по Лапласу. Найдем сначала общее решение уравнения (9). Для этого в данном случае можно снова применить преобразование Лапласа по y (то, что любое решение (9) является оригиналом, очевидно). Получим алгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} [q - (p^2 + 1)] \cdot V(p, q) &= -\frac{p}{q^2} - \frac{1}{p^2 q} + U(p, 0) \\ V(p, q) &= \frac{-p - q/p^2}{q^2 [q - (p^2 + 1)]} + \frac{U(p, 0)}{q - (p^2 + 1)} = \\ &= \left[\frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 (p^2 + 1)} \right] \cdot \frac{1}{q} + \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{q^2} + \\ &+ \left[-\frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 (p^2 + 1)} + U(p, 0) \right] \cdot \frac{1}{q - (p^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

До сих пор функция $U(p, 0)$ была произвольной. Выберем теперь ее таким образом, чтобы выражение в последних квадратных скобках равнялось нулю. В противном случае функция $U(p, y)$ будет содержать слагаемое $e^{(p^2+1)y}$, которое при $y > 0$

не является изображением по Лапласу. Учитывая сказанное, получаем из (10)

$$U(p, y) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1} \cdot y =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)' + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1} \cdot y \quad ,$$

Следовательно $u(x, y) = \frac{1}{2} x \sin x + x - \sin x + y \cos x$.

Легко проверить, что полученная функция и в самом деле является решением задачи (6), (7), (8). Вопрос о единственности решения этой задачи остается открытым.

Задача 2. Концы струны $x = 0$ и $x = \pi$ закреплены жестко. Начальное отклонение задано уравнением $u(x, 0) = \sin x$. Начальная скорость равна нулю. Найти отклонения струны при $t > 0$.

Решение. Отклонения струны $u(x, t)$ определяются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

граничными условиями

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Пусть $u(x, t) = U(x, p)$, тогда с учетом начальных условий получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} p^2 U = -\frac{p}{a^2} \sin x.$$

Последнее уравнение - обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее следующим граничным условиям

$$U(0, p) = U(\pi, p) = 0.$$

Решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям имеет вид:

$$U(x, p) = \frac{P}{p^2 + a^2} \sin x.$$

Тогда, очевидно, $u(x, t) = \cos at \cdot \sin x$ – решение данной задачи.

Задача 3 (о распространении электрического тока и напряжения в длинной линии).

По заданному начальному режиму определить силу тока и напряжение в бесконечной линии без искажений ($LG = RC$). Предполагается, что имеющийся провод однороден по всей своей длине и одинаково изолирован, а также, что электромагнитные возмущения, имеющиеся около провода, незначительны и не оказывают влияния на изменение тока и напряжения в самом проводе.

Решение. Сила тока и напряжение в длинной линии удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь R и L обозначают соответственно сопротивление и самоиндукцию единицы длины провода, G – утечка, приходящаяся на единицу длины провода, C – ёмкость единицы длины провода.

С помощью исключения переменной $i(x, t)$ и замены

$$u(x, t) = v(x, t)e^{\alpha t}, \quad \alpha = -\frac{RC + GL}{2LC} = -\frac{R}{L}$$

система (11) сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}.$$

Пользуясь методом Даламбера, решение этого уравнения запишем в виде

$$v(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \quad a = 1 / \sqrt{LC},$$

где θ_1 и θ_2 - произвольные функции своих аргументов, поэтому

$$u(x,t) = e^{-(R/L)t} [\theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)].$$

Мы воспользовались методом бегущей волны для решения дифференциального уравнения. Для определения θ_1 и θ_2 должны быть заданы начальные условия. Пусть

$$u(x,0) = f(x), \quad i(x,0) = F(x), \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Из первого условия получаем соотношение

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = f(x).$$

Для использования второго условия надо определить $i(x,t)$.

Исходя из системы (11), имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} = Ge^{-(R/L)t} (\theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)) + \\ &+ C(-R/L)e^{-(R/L)t} (\theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)) + Cae^{-(R/L)t} (-\theta_1'(x - at) + \\ &+ \theta_2'(x + at)) = \sqrt{C/L} e^{-(R/L)t} (-\theta_1'(x - at) + \theta_2'(x + at)). \end{aligned}$$

Интегрируем полученное равенство по x :

$$i(x,t) = -\sqrt{C/L} e^{-(R/L)t} (\theta_2(x + at) - \theta_1(x - at)) + \psi(t),$$

здесь $\psi(t)$ - некоторая, пока не определённая функция от t . Подставляя полученные для $u(x,t)$ и $i(x,t)$ выражения во второе уравнение системы (11), находим соотношение

$$\begin{aligned}
 & -e^{-(R/L)t} (\theta_1'(x-at) + \theta_2'(x+at)) = -R\sqrt{C/L}e^{-(R/L)t} (-\theta_1'(x-at) + \\
 & \theta_2'(x+at)) + R\Psi(t) + L\sqrt{C/L}(R/L)e^{-(R/L)t} (-\theta_1'(x-at) + \\
 & +\theta_2'(x+at)) - L\sqrt{C/L}e^{-(R/L)t} a(\theta_1'(x-at) + \theta_2'(x+at)) + L\Psi'(t).
 \end{aligned}$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение $R\Psi(t) + L\Psi'(t) = 0$, решение которого $\Psi(t) = C_0 e^{-(R/L)t}$, где C_0 – некоторая константа. Тогда,

$$i(x,t) = -\sqrt{C/L}e^{-(R/L)t} (\theta_2(x+at) - \theta_1(x-at)) - C_0 \sqrt{L/C}.$$

Положив $\theta_1(x-at) = \varphi_1(x-at) + (C_0/2)\sqrt{L/C}$,

$$\theta_2(x+at) = \varphi_2(x+at) - (C_0/2)\sqrt{L/C},$$

где $\varphi_1(x-at)$ и $\varphi_2(x+at)$, так же как и θ_1 и θ_2 - пока ещё произвольные функции своих аргументов, получим выражения для тока и напряжения:

$$u(x,t) = e^{-(R/L)t} [\varphi_1(x-at) + \varphi_2(x+at)],$$

$$i(x,t) = -\sqrt{C/L}e^{-(R/L)t} [\varphi_2(x+at) - \varphi_1(x-at)].$$

Из начальных условий получаем соотношения

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \equiv f(x), \quad -\sqrt{C/L}[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \equiv F(x),$$

поэтому

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= (f(x) + \sqrt{L/C}F(x))/2, \quad \varphi_2(x) = (f(x) - \sqrt{L/C}F(x))/2 \\
 &(-\infty < x < +\infty).
 \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= e^{-(R/L)t} ((f(x+at) + f(x-at))/2 + \\
 & + \sqrt{L/C}(-F(x+at) + F(x-at))/2), \\
 i(x,t) &= -\sqrt{C/L}e^{-(R/L)t} \left[\frac{f(x+at) - f(x-at)}{2} - \right. \\
 & \left. - \sqrt{L/C} \frac{F(x+at) - F(x-at)}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Задача определения тока и напряжения в бесконечной линии по заданному начальному режиму теперь полностью решена. Полученное решение стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Это совершенно естественно, так как в силу наличия сопротивления и утечки в линии имеются потери энергии. Вследствие этого запасы энергии, созданные начальным возбуждением, с течением времени убывают, ток и напряжение в линии по экспоненциальному закону стремятся к нулю.

Этим же методом можно рассмотреть распространение тока и напряжения в полубесконечной линии и в линии конечной длины. При этом, естественно, придётся учитывать явление отражения от границ линии и строить продолжение заданных начальных режимов на всю числовую ось.

Далее рассмотрим задачи, для решения которых необходимо уметь вывести дифференциальное уравнение, или систему описывающие процесс электрических колебаний в цепях. Нужны знания метода Даламбера и метода Фурье решения уравнений в частных производных.

Задача 4. Напряжение в проводе длины l в начальный момент одинаково во всех точках провода и равно E , сила тока в начальный момент равна нулю, омическое сопротивление R , самоиндукция L , утечка за единицу времени G и емкость C в данном проводе связаны соотношением $RC = LG$ (говорят, что в этом случае имеем линию без искажений).

Найти напряжение $U(x, t)$ в любой точке провода в любой момент времени $t \geq 0$, если левый конец провода ($x = 0$) заземлен, а правый ($x = l$) изолирован.

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$U''_{xx} = LC U''_{tt} + (RC + LG) U'_t + RG U \quad (12)$$

при начальных

$$U(x, 0) = E \quad (13)$$

$$U'_t(x, 0) = -\beta E_0 \quad (\beta = G/C) \quad (14)$$

и граничных условиях

$$U(0, t) = 0 \quad (15)$$

$$U'_x(l, t) = 0 \quad (16)$$

Соотношения (13) - (15) заданы в условии задачи, соотношения (14) и (16) легко могут быть выведены. Выведем, например, соотношение (14). В условии задачи сказано, что $i(x, 0) = 0$, но тогда $i'_x(x, 0) = 0$. Далее, используя известную формулу $-i'_x(x, t) = CU'_t(x, t) + GU(x, t)$, получаем при $t = 0$

$$-i'_x(x, 0) = CU'_t(x, 0) + GU(x, 0)$$

откуда $U'_t(x, 0) = \beta E_0$. Аналогично выводим граничное условие (16) (из равенства $-U'_x(x, t) = Ri(x, t) + Li'_x(x, t)$ и из условия $i(l, t) = 0$).

Поскольку по условию имеет место равенство $R/L = G/C$, то уравнение (12) сводится к следующему:

$$U''_{xx} + 2\beta U'_t + \beta^2 U = a^2 U''_{xx} \quad (17)$$

где $a^2 = 1/LC, \beta = G/C$.

Будем решать уравнение методом Фурье. Полагая $U(x, t) = X(x)T(t)$, разделим переменные в уравнении (17):

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2\beta T' + \beta^2 T}{a^2 T}$$

Приравнявая эти отношения к $-\lambda$, получим следующее уравнение для определения $X(x)$:

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Однородные граничные условия, наложенные на $U(x, t)$, приводят к краевым условиям для $X(x)$: $X(0) = 0, X'(l) = 0$.

Собственными числами этой краевой задачи являются

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4l^2}, \quad k=1,2,3,\dots,$$

а собственными решениями-функциями

$$X_k = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

Учитывая найденные λ , определим $T(t)$. Из уравнения

$$T'' + 2\beta T' + \beta^2 T = -\lambda_k a^2 T$$

получаем для $T(t)$ два линейно независимых решения:

$$T_k = e^{-\beta t} \cos \frac{(2k-1)\pi at}{2l}, \quad T_k = e^{-\beta t} \sin \frac{(2k-1)\pi at}{2l}.$$

Итак, искомое решение данной задачи имеет вид

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) T_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(x) T_k(t),$$

т.е. $U(x,t) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{(2k-1)\pi at}{2l} + B_k \sin \frac{(2k-1)\pi at}{2l} \right) e^{-\beta t} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

Для того чтобы найти коэффициенты A_k и B_k , надо использовать начальные условия. Учитывая эти условия, находим,

$$A_k = \frac{4E_0}{\pi(2k-1)}, \quad B = 0. \text{ Следовательно, закон распределения на-}$$

пряжения в проводе имеет вид

$$U(x,t) = \frac{4E_0}{\pi} e^{-\beta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

Задача 5. Провод длины l , по которому течет переменный ток, покрыт такой хорошей изоляцией, что утечка практически отсутствует ($G = 0$). Кроме того, омическое сопротивление R столь мало, что им практически можно пренебречь ($R = 0$).

Начальный ток в проводе (при $t = 0$) равен нулю, а начальное напряжение задается формулой

$$U(x, 0) = E \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2l},$$

где m – заданное натуральное число. Левый конец провода ($x = 0$) изолирован, а правый конец ($x = l$) заземлен. Найти силу тока в каждой точке провода в любой момент времени.

Указание. Решение сводится к исследованию уравнения

$$i''_{xx} = LCi''_{tt}$$

при начальных

$$i(x, 0) = 0, i'_t(x, 0) = -\frac{E_0(2m+1)\pi}{2lL} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2l}$$

и граничных условиях $i'_x(0, t) = 0, i(l, t) = 0$.

$$\text{Ответ: } i(x, t) = -\frac{E}{aL} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2lL} \sin \frac{(2m+1)\pi t}{2lL}.$$

6. Стержень длины l находится в состоянии покоя и один его конец закреплен, а к свободному концу приложена сила $A \sin \omega t$, направленная по оси стержня. Найти продольные колебания стержня $u(x, t)$ при заданных начальных и граничных

условиях $u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$ и $u(0, t) = 0, \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{A}{E} \sin \omega t$,

где E – модуль упругости (по закону Гука сила, действующая вдоль стержня, равна $A \sin \omega t = E \frac{\partial u}{\partial x}$, поэтому $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t$).

7. Найти распределение температур $u(x, t)$ в линейном проводнике тепла при начальных и граничных условиях: $u(x, 0) = 0, u(0, t) = u_0, 0 < x < \infty, t > 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. М.: Высш. Шк., 1988. 288 с.
2. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1: Линейная алгебра и основы математического анализа / В.А. Болгов, Б.П. Демидович, А.В. Ефимов и др.; под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1993. 480 с.
3. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. в 4 ч. Ч. 2. / А.П. Рябушко и др.; под общ. ред. А.П. Рябушко. 3-е изд., испр. Минск: Высш. шк., 2007. 396 с.
4. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. М.: Высш. шк., 1989. 383 с.
5. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учеб пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Наука, 1981. 302 с.
6. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. Под ред. П.А. Ионкина. М: Энергоиздат., 1982.
7. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. Под ред. Л.А.Бессонова. М.: Высш.шк., 1980.
8. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Ч. 2. Применение некоторых методов математического и функционального анализа: учеб. пособие для втузов / А.В. Ефимов, Ю.Г. Золотарев, В.А. Терпигорева. М.: Высш.шк., 1980. 295 с.
9. Тихонов А.Н Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1977.

10. Гутер Р.С. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие для втузов/ Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. М.: Высш. шк., 1976. 304 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к решению прикладных задач по курсу
«Математический анализ»
для студентов специальностей
230104 «Системы автоматизированного
проектирования»
230101 «Вычислительные машины, комплексы,
системы и сети»
очной формы обучения
(Часть 2)

Составители:

Глушко Елена Георгиевна

Дубровская Алевтина Петровна

Провоторова Елена Николаевна

В авторской редакции

Подписано в печать . 05 . 2010.

Формат 60×84/16.

Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. . Уч. -изд. л. . Тираж 50 экз. «С»

Заказ №

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14